

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРОИЧНОСТИ. ЧАСТЬ 1.

Тройная точка, весы, треугольная фракталометрия с логарифмическими спиралями, геометрические фигуры с константой золотого сечения

Аннотация. Известные троичные или триадные модели в основном носят статико-иллюстрационный характер. Они весьма наглядны, но отображаются как некие застывшие слепки, образы, символы, картинки или математические формулы. В то же время окружающий нас мир непостоянен и глубоко динамичен. Именно поэтому в работе акцентируется внимание на рассмотрении переменных структур – динамических моделей перманентных равновесий. Тройка в них как бы дышит, процессирует и развивается во времени, сохраняя общее единство и одновременно добавляя нечто новое более сложное, объединяя покой и подвижность, различие и тождественность.

В синтезе трех миров кроется тайна космоса.
(Древняя Греция)

Вместо вступления.

Слова приведенного эпиграфа некоторые авторы [1, 2] приписывают великому Пифагору, хотя доподлинно известно, что он принципиально не вел записей и не оставил письменных свидетельств. Тем не менее, в воззрениях его последователей – пифагорейцев весь являемый мир действительно отображался числом три, а Вселенная представлялась синтезом-единством трех сфер (миров) в виде естественного, божественного и человеческого начал, которые взаимно поддерживают и обуславливают друг друга, образуя священную триаду: земля, небо (бог), человек.

Конечно, наука с её инструментами познания окружающего мира является антиподом религии. У них разные краеугольные камни. Наука базируется главным образом на подтвержденных фактах. Религия зиждется исключительно на безусловной вере, которая не требует доказательств и полностью отвергает само требование внятных адекватных подтверждений. Если и предпринимаются какие-либо попытки искусственного обоснования, то они соотносятся как белый трюфель к известному материалу якутского скульптора.

Вместе с тем если не точки соприкосновения или пересечения, то параллели между отдельными модельными положениями науки и религии вполне допустимы. Одним из таких предметов сопоставления является триадный взгляд на структуру целого, который особенно широко представлен в христианском богословии со своими символами и атрибутами [3]. Тем увлекательнее становится поиск и фиксация похожих аналогий в разных областях науки.

Общие положения.

Известные троичные или триадные модели, например [2–7], главным образом имеют статически-иллюстрационный характер. Они изображаются как некие застывшие слепки, образы, символы, картинки, математические формулы и т.п.

В то же время окружающий нас мир непостоянен и глубоко динамичен. Поэтому представляет интерес рассмотрение "дышащих" переменных структур – динамических моделей и других теоретических конструкций, которые в той или иной форме раскрывают причинно-следственные связи и описывают процессы перехода систем из одного состояния в другое.

«Тройка в статике есть идея *иерархии*, тройка в динамике есть *третье как процессуирующее*» [2] или "движущееся во времени".

Динамический подход применительно к триадам содержит в себе общее или высшее единство, одновременно добавляя нечто новое и более сложное. Как динамическая модель перманентных равновесий. Здесь одновременно присутствует покой и подвижность, различие и тождественность. Так, три окружности или три круга символизируют трехмерное пространство.

Если внимательно и беспристрастно присмотреться к модели троично-христианского божества, то мы не увидим ни четкой иерархии "один в трех", ни тем более объединенной структуры "три в одном". Собственно и сам посыл о сотворении богом человека по своему образу и подобию также не вызывает особого доверия. Скорее всего, сами люди создали божественную сущность по своему образу, дополнительно наделив её сверхъестественной силой. Да и с чего собственно "лепить" всеобъемлющую модель в закрытом земном пространстве.

Если даже бог – творец мира и вселенных, то он вполне мог условно "раствориться" в своем творении, отдав и вдохнув искорки во всё живое и неживое.

Собственно говоря, церковь, как и цирк или циркуль, – однокоренные слова, которые буквально исходят из слова *круг*. Вот и ходят многие люди по ограниченному кругу, в котором нет ни начала, ни конца, ни края... Проникновенно ищут заветные точки опоры, чтобы перевернуть землю (по аллегории Архимеда) и весь мир. Хотя такие точки повсюду вокруг нас [8]. Следует только внимательно присмотреться...

Тройная точка.

Тройная точка в однокомпонентной системе – это точка схождения кривых двухфазных равновесий на плоской диаграмме «давление – температура», которая соответствует устойчивому термодинамическому равновесию трех фаз.

Тройная точка характеризует динамическое состояние вещества, в котором равновесные фазы находятся в различных агрегатных состояниях: твердом, жидком и газообразном.

В этой точке сходятся три моновариантные линии двухфазных равновесий:

- плавление (равновесие кристалла – жидкости);
- кипение (равновесие жидкости – пара);
- возгонка (равновесие кристалла – пара).

Типичная динамическая модель троичности. Причем физически обусловленная и наблюдаемая. С четко выраженной особенностью схождения в одной точке – единственном объекте, для которого не существует понятие "внутри". Содержанием точки становится сама точка. Она выступает как центр, начало координат, квант, полюс, узел связи, кульминация и т.п.

Весы как тройственно-динамическая модель ситуационного выбора.

Первые образцы весов найдены археологами в Месопотамии и относятся к V тысячелетию до нашей эры. За столь длительный период практика взвешиваний претерпела множество новаторских совершенствований.

В то же время обычные плечевые весы продолжают неизменно служить людям. Как довольно простой и привычный для нас механизм, предназначенный для сравнения масс грузов, в частности, с помощью гирь.

Неравноплечие весы с изменяемой длиной плеч и нагрузкой на чашах являются зримым образом и символом троичности, ибо равновесие чаш на таких весах с их колебательным характером успокоения достигается тремя способами [4]:

- подбор гирь при неизменной длине плеч;
- подбор плеч (сдвигом точки равновесия) при неизменной нагрузке на чашах;
- комбинация обоих методов.

Перед нами типичная модель троичности, характеризующая ситуационный выбор варианта решения. Конечная цель проводимых манипуляций – достижение равновесия одним из трех способов с конечным положением стрелки-указателя на ноль.

Одновременно весы символизируют структурную триаду, состоящую из двух противоположных нагрузок на чашах и отсчетного устройства, играющего роль третейского судьи, оценивающего результат динамического противоборства.

Динамика характеризуется амплитудой и частотой колебаний, временем успокоения, чувствительностью и проч. Весы чутко реагируют на наличие воздействующего гиревого фактора, технику его приложения в виде плавных или резких изменений т.д.

Золотая тройственно-динамическая модель.

Речь идет о взаимосвязанных философско-временных категориях настоящего, прошлого и будущего. Их взаимосвязь хорошо прослеживается на примере аддитивно-золотой структуры. Для этого запись "золотой константы" $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ с её фундаментальным проявлением в мироздании удобнее всего представить каноническим тождеством-уравнением золотого сечения [9]

$$\Phi^0 = -\Phi^{-1} + \Phi^{+1} = 1.$$

Данному отношению временных составляющих соответствует простая схема

$$\begin{array}{c} \text{Прошлое } (-\Phi^{-1}) \Rightarrow \sum \Leftarrow \text{Будущее } (+\Phi^{+1}) \\ \downarrow \\ \text{Настоящее } (\Phi^0 = 1) \end{array}$$

Настоящего как такового (в его повседневном понимании) нет. Это переходная фаза или соединительный мостик между прошлым и будущим с формированием мгновенного среза модели Вселенной, как неограниченное "дление" и гармония настоящего – того, что было, есть и будет.

Миг настоящего мгновенно уходит в прошлое. Ближайшее прошлое – всего лишь уже свершившееся будущее. Именно поэтому мы и не можем уловить-поймать "то, что принято называть настоящим. А ведь именно оно дает нам ощущение времени.

Нам же остается только будущее. В будущее входим, в нём живем, в нём же и остаемся!

Настоящее ощущается «как мимолетное виденье», реализующее будущее. Так такового, длительного настоящего нет. С другой стороны, прошлого уже нет, а будущего еще нет. То есть реально имеем постоянно-действующее "дление" настоящего, в котором время продуцируется "сжиганием" будущего в прошлом. А само прошлое работает как пылесос и "пожиратель" будущего. Другими словами, настоящее – минимальный квант времени (от англ. quantum time).

В своем одномоментном проявлении настоящее является продуцентом времени. Через механизм "растворения" будущего в прошлом. В результате такого замещения или превращения время рождается (впрыскивается) и сразу же отмирает. Как два противоположных направления-вектора в информационной точке [8].

В прошлом и будущем времени нет. Время реально существует только в точке настоящего. Плюс его памятные следы в прошлом. Именно поэтому в масштабах Вселенной не возможно одномоментное проявление событий, что приводит к локальным проявлениям теории относительности.

Тройственно-динамическую модель проявления-развития бытия можно рассматривать и на основе адекватной рекурсии Фибоначчи $F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$: "будущее = настоящее + прошлое".

Несложная аддитивная схема Фибоначчи позволяет проецировать динамику будущего: будущее – есть неизвестное (неизведанное) настоящее на основе истинного (уже состоявшегося) прошлого. "Истинность" понимается в узком смысле, как происшедшее.

Математическая константа Φ – единственное иррациональное число, разложение которого в цепную (непрерывную) дробь состоит исключительно из единиц. Такая уникальная целостность "единично-непрерывного" имеет важнейшие методологические принципы-последствия:

1. По словам известного методолога Г. Щедровицкого «Любой сложный объект может члениться либо на элементы, либо на единицы. Особенность членения объекта на единицы состоит в том, что продукты членения сохраняют свойства целого. Членение на элементы, наоборот, приводит к таким продуктам, которые свойств целого не имеют» [10, лекция 3].

2. Разложение на единицы может интерпретироваться как реализация в теории времени принципа минимального "дления" биологического времени-пространства (А. Бергсон, В. Вернадский, Н. Козырев и др.), когда будущее и прошедшее разделены сколь угодно малым, но не равным нулю, промежутком времени-пространства.

3. Всем управляет мгновенный срез времени Φ^0 . Подобно геометрической точке, этот срез не имеет конкретной меры. Разве что можно определить интервал между двумя точками-срезами через некоторую длительность, как продолжительность существования. Подобно тому, как мы измеряем временные отрезки.

Измерить само время, нам, похоже, не дано. Его можно только назначить улетающий в прошлое "мгновенья миг", допустим на уровне 10^{-37} с, когда время безмерно сжато и мгновенно.

Итак, перед нами непрерывная последовательность (цепочка) мгновенных срезов времени в виде бесконечной смены единичных монад-сущностей Φ^0 . В конечном итоге, это позволяет на макро-уровне рассматривать и оценивать «время как циклический процесс» [11].

Треугольная фракталометрия.

Идея треугольника для отображения троичной модели, включая христианскую троицу, отличается простотой визуализации и наглядностью представления. Треугольник содержит три угла и три стороны, которые существуют одновременно и неотделимы друг от друга.

Поясняя, почему христианский Бог троичен, а не четверичен или пятеричен, Николай Кузанский в своё время использовал именно образ треугольника как простейшего из многоугольников.

Пифагора бог также символизировался треугольником.

Тройка есть образ плоскости и первая основа треугольников, ибо их три вида: равносторонний, равнобедренный и прямоугольный. Прямолинейных углов тоже три: острый, тупой и прямой. Не случайно говорят, «если бы треугольники создали себе бога, он был бы с тремя сторонами» (Шарль Монтескье).

Рассматривая динамические модели троичности, вполне естественно сначала опереться на геометрические образы треугольников в их фрактальном исполнении-движении. Подобно фибоначчиевому ряду золотых треугольников Кеплера [12], образующих четко выраженную геометрически-треугольную бесконечную последовательность.

Типичным представителем фрактала является известная салфетка Серпинского, где в качестве топологической подосновы служит равносторонний треугольник.

В отличие от других правильных многоугольников, правильный треугольник – единственная жесткая (несжимаемая) геометрическая фигура, – в смысле попытки изменения внутренних углов при сохранении общего вида конструкции.

Выберем равносторонний треугольник с единичной длиной сторон. Каждую из них разделим сечением на отрезки длиной k и $1 - k$.

Соединив три точки деления между собой, получим новый правильный треугольник. И так далее с бесконечно-последовательным вложением треугольников, до их стягивания точку (рис. 1), из которой как из центра можно раскрутить логарифмическую спираль, проходящую через соответствующие точки сечения сторон треугольника.

Запишем уравнение логарифмической спирали в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot b^{pt} \cos t, \\ y(t) = a \cdot b^{pt} \sin t, \end{cases}$$

где $p = 2/\pi$.

Выберем две точки спирали, которые совпадают с вершинами двух соседних треугольников с соответствующими координатами, которые даны в скобках:

$$t_2 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \text{ и } t_1 \left(-\frac{1}{2} + k \cos 60^\circ, -\frac{\sqrt{3}}{6} + k \sin 60^\circ \right) = t_1 \left(\frac{k-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6} (3k-1) \right).$$

Подставляя координаты точек в уравнения спирали, находим:

$$t_1 = \arctg \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3k-1}{k-1} \right), \quad t_2 = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Выбрав, например, второе уравнение $y(t) = a \cdot b^{pt} \sin t$ для двух значений t_1, t_2 и решая полученную систему двух уравнений, определяем параметры логарифмической спирали:

$$b = \left(\frac{\sin t_1}{\sin t_2} \cdot \frac{1}{1-3k} \right)^{\frac{1}{p(t_2-t_1)}}, \quad a = -\frac{1}{\sqrt{3} \cdot b^{t_2 p}} = -\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{b}}.$$

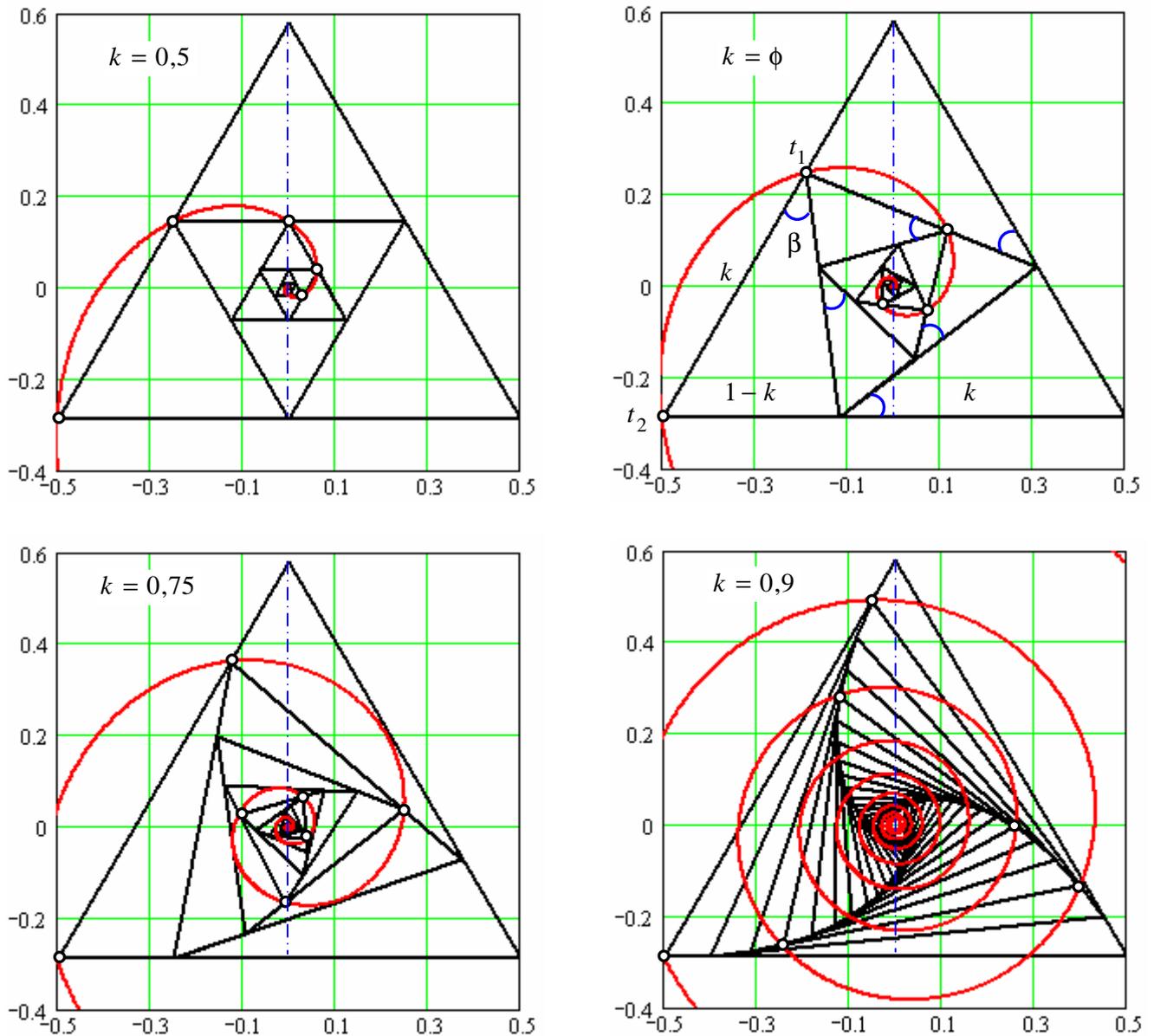


Рис. 1. Последовательное вложение правильных треугольников; значение $k = \phi = (\sqrt{5} - 2)/2 \approx 0,618$ соответствует "золотому" вложению

Преимущество данного построения: асимптотическая точка находится точно в центре всех равнобедренных треугольников.

По теореме синусов угол последовательного вращения равен $\beta = \arctg\left(\sqrt{3} \cdot \frac{1-k}{3k-1}\right)$ и в общем случае численно выражается иррациональным числом. Значит, при бесконечном вложении геометрических фигур до их "вырождения" в сингулярную точку мы никогда не обнаружим ни одной пары треугольников с параллельными сторонами.

Примечательной особенностью подобной треугольной фракталометрии является триадность огибающих логарифмических спиралей, описанная в работе С. Алферова [13].

Золотой треугольник и равнобедренные треугольники общего вида.

Золотая спираль – частный случай логарифмической спирали с коэффициентом роста Φ^4 , который показывает во сколько раз изменяется полярный радиус спирали при повороте на угол 2π или 360° .

Истинная логарифмическая золотая спираль определяется простой формулой $r = \Phi^{2\theta/\pi}$, где

r – радиус-вектор точки, θ – угол отклонения точки от нуля.

Золотой треугольник – равнобедренный треугольник, в котором боковые стороны находятся в золотой пропорции с основанием.

Углы при основании равны $\alpha = 72^\circ$ при вершине – 36° .

Золотой треугольник замечателен уникальным отношением: отношение угла при основании на сумму неравных углов равно $2/3 = 72/108 = 0,666\dots$

Медианы равнобедренного треугольника пересекаются в одной точке (центре тяжести), которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. То есть модель $2/3 = 2/(1+2)$.

Равнобедренный треугольник делится своими медианами на шесть равновеликих треугольников с одинаковой площадью.

От левого угла каждого вновь образуемого остроугольного равнобедренного треугольника отсекаем биссектрисой ему подобный треугольник, проводя последовательно линии 1, 2, 3, 4 ... (рис. 2).

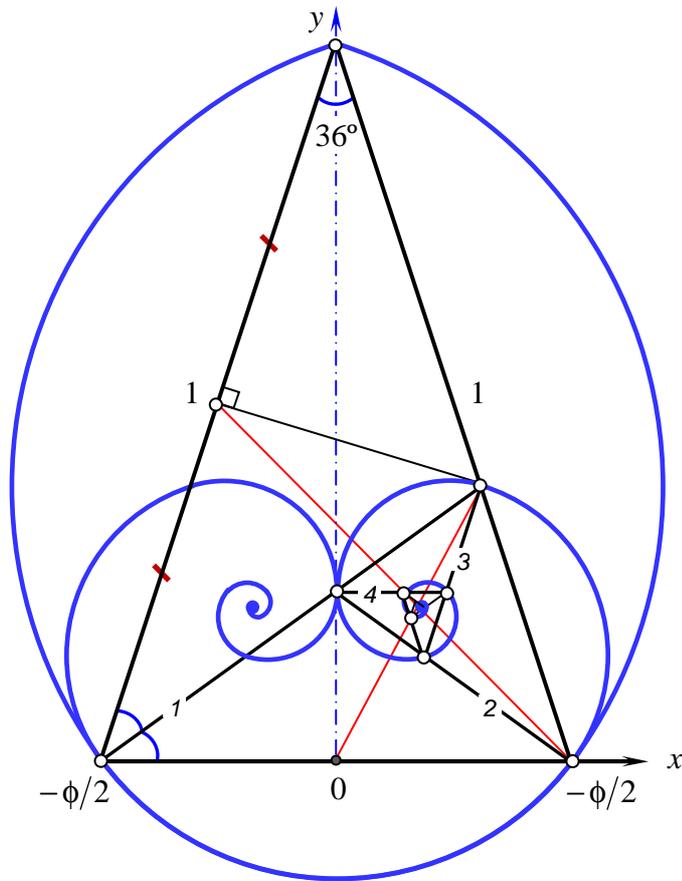


Рис. 2. Последовательное вложение золотых треугольников с двумя зеркальными логарифмическими спиралями, огибающими вершины треугольников

Первый поворот треугольника на 108° (внешний угол к 72°) и так далее. Через три полных оборота снова приходим к первоначальному расположению треугольника с основанием, параллельным горизонтали.

Золотой равнобедренный треугольник со сторонами $(1, 1, \phi)$ делится на два равнобедренных треугольника: тупоугольный $(\phi, \phi, 1) = \phi \cdot (1, 1, \Phi)$ и остроугольный $(\phi, \phi, \phi^2) = \phi \cdot (1, 1, \phi)$.

Строго говоря, логарифмическая спираль, проходящая через вершины золотых треугольников, не является золотой, вопреки утверждениям многих авторов.

Константа золотого сечения равна $\Phi \approx 1,618$. В то же время основание настоящей спирали составляет $\sim 1,508$ или приблизительно простую рациональную дробь $3/2$. Что равносильно значению $2/3$, при котором аналогичная логарифмическая спираль раскручивается в противоположную сторону.

Таким образом, имеем систему встроженных золотых треугольников, которая описывает логарифмической спиралью с основанием $2/3 \approx 0,666\dots$

Уравнение медианы, проведенной из правого угла $y = \sqrt{4 - \phi^2} \cdot (1 - 2\Phi \cdot x)/6$.

Уравнение прямой, исходящей из начала координат $y = \Phi^2 \sqrt{4\phi^2 - 1} \cdot x$

Находим координаты точки их пересечения – центра логарифмической спирали:

$$x' = \frac{1}{7 + \sqrt{5}} \approx 0,108; \quad y' = \frac{2 \sin \pi/5}{3\sqrt{5} - 1} \approx 0,206.$$

Данные построения можно расширить на равнобедренные треугольники общего вида.

Единственное условие: основание должно быть меньше боковой стороны.

Для заданного угла $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ и боковой стороны единичной длины 1 коэффициент сжатия (отношение основания к боковой стороне) равен $k = 2 \cos \alpha$.

Центр спирали определяется координатами

$$(x', y') = \frac{k}{2 + 4k^2} \cdot (2 + k^2, k\sqrt{4 - k^2}).$$

Производя вычисления аналогично равнобедренному треугольнику, определяем параметры логарифмической спирали:

$$\begin{cases} x(t) = a \cdot b^{pt} \cos t + x', \\ y(t) = a \cdot b^{pt} \sin t + y', \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \arctg \frac{y'}{x'}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = \arctg \frac{y'}{x' - k} + \pi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \left(\frac{\sin t_1}{\sin t_2} \right)^{\frac{1}{p(t_2 - t_1)}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{x'}{b^{t_1 p} \cos t_1}. \end{cases}$$

Разные варианты представлены на рис. 3.

Для удобства восприятия воспроизведена ломаная линия, составленная из неравных сторон вложенных равнобедренных треугольников.

Как видно, с уменьшением угла α при основании наблюдается повышенная сгущенность (скученность) равнобедренных треугольников. Соответственно уменьшаются расстояния между соседними витками логарифмических спиралей.

Не составляет особого труда провести логарифмические спирали таким образом, чтобы они касались двух сторон каждого из треугольников: боковой стороны и основания.

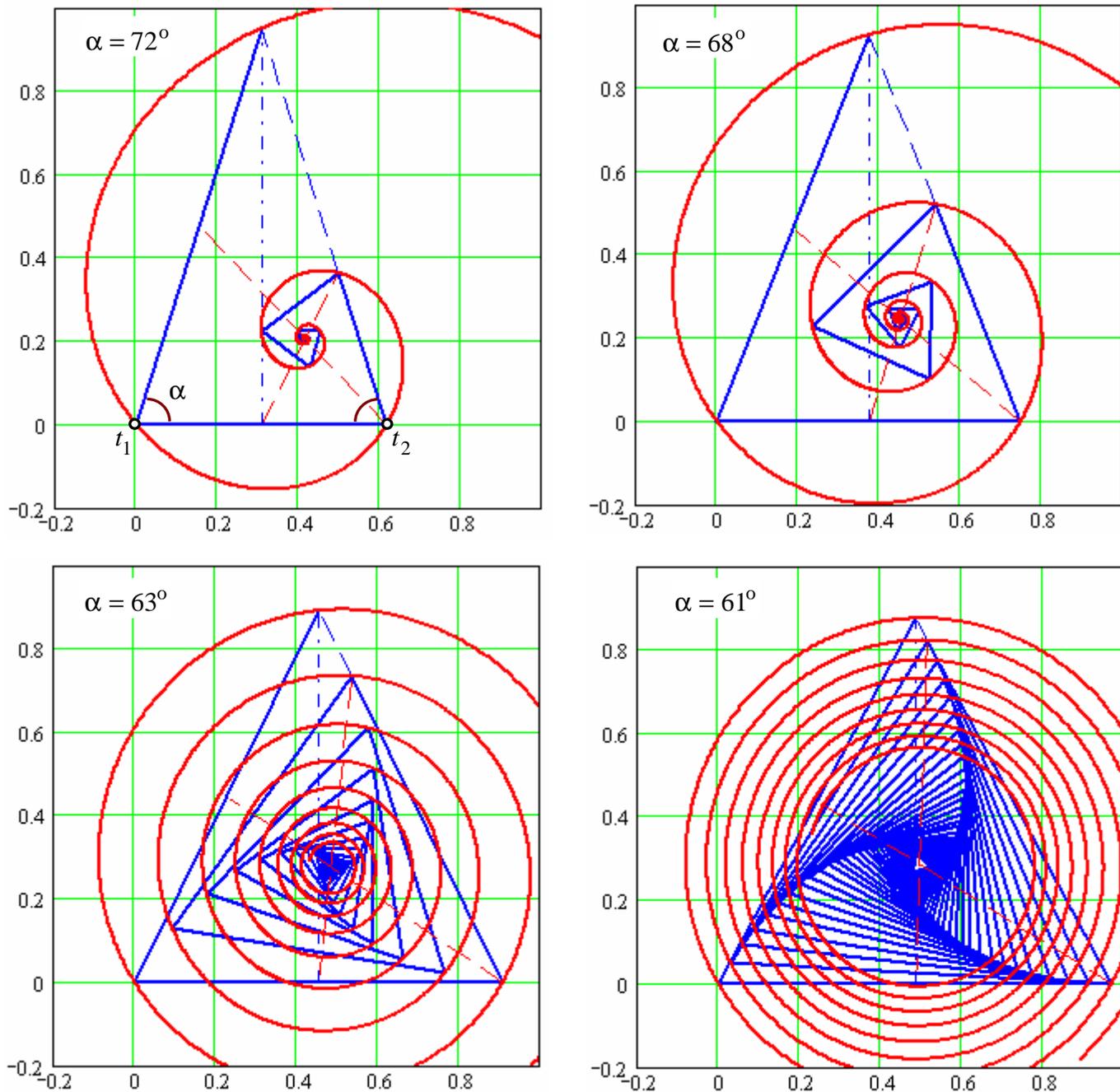


Рис. 3. Логарифмические спирали, огибающие вершины вложенных равнобедренных треугольников

Система вложенных прямоугольных треугольников.

В отличие от золотых треугольников, в систему вложенных золотых прямоугольников золотая спираль вписывается идеально. Равно как и описывается вокруг данной системы (рис. 4). Связывая уникальность формы и строгой математической пропорции.

Поместив начало координат в левый нижний угол большого прямоугольника, и приняв его высоту равной единице, находим координаты центра спирали: $(x', y') = 1/\sqrt{5} \cdot (1, \phi)$.

Причем выполняется числовое равенство $\sqrt{5} = \phi + \Phi$.

Исходя из поставленной задачи синтеза динамических моделей троичности, описанное построение можно свести к последовательному построению треугольников, длины катетов которых убывают в геометрической прогрессии.

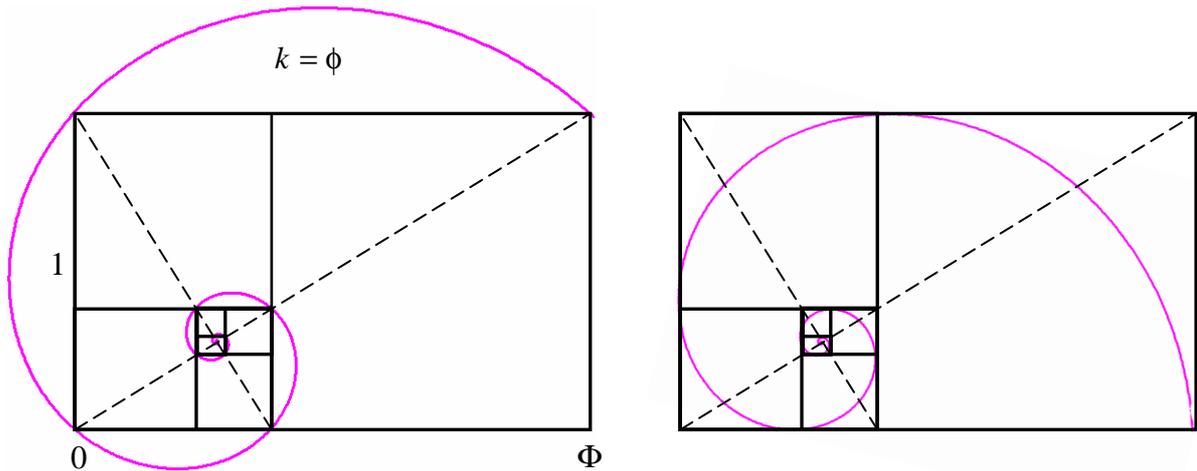


Рис. 4. Вложенные золотые прямоугольники с вписанной и описанной золотыми спиралями

В исходном прямоугольном треугольнике с катетами c , d опускаем перпендикуляр на гипотенузу и продолжаем его до пересечения с горизонталью, проведенной через вершину. Повторяем операцию с новым треугольником, высота которого совпадает с гипотенузой исходной фигуры. И так далее до "стягивания" фигур в предельную точку – аттрактор (рис. 5). Она же точка логарифмической спирали.

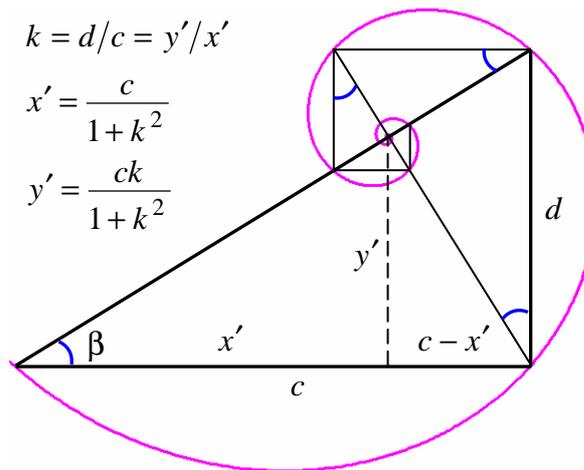


Рис. 5. Нахождение центра спирали при вложении прямоугольных треугольников

Поскольку вершины прямоугольников и соответствующих прямоугольных треугольников лежат на пересекающихся прямых линиях, параметрические уравнения логарифмических спиралей несколько упрощаются:

$$x(t) = a \cdot k^{pt} \cos t + x', \quad y(t) = a \cdot k^{pt} \sin t + y', \quad p = 2/\pi,$$

где $(x', y') = \frac{1}{1+k^2} \cdot (1, k)$ – координаты центра спирали;

$a = -\frac{y'}{k^{\beta p} \sin \alpha}$ – коэффициент масштабирования;

$\alpha = \arctg k$ – угол наклона линии, проходящей через центр спирали и точку сопряжения (с вершиной или стороной):

$\alpha = \arctg k$ – для описанной спирали, $\alpha = \arctg \frac{y'}{x' - 0,55}$ – для вписанной спирали.

Выбирая соотношение катетов k , можно получать разные виды спиралей, среди которых

можно выделить некоторые характерные варианты с такими условными названиями:

$k = 1/2 = 0,5$ – "половинная" спираль;

$k = \phi \approx 0,618$ – "золотая" спираль, в основе которой лежит константа золотого сечения

$k = \phi = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$;

$k = 2/3 \approx 0,666...$ – "звериная" спираль, с ассоциацией на библейское "число зверя" 666;

$k = 3/4 = 0,75$ – "египетская" спираль, построенная на базе египетского треугольника с целочисленными сторонами (3, 4, 5), $3^2 + 4^2 = 5^2$;

$k = \sqrt{\phi} \approx 0,786$ "кеплерова" спираль, соответствующая треугольнику Кеплера, стороны которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $\sqrt{\phi}$.

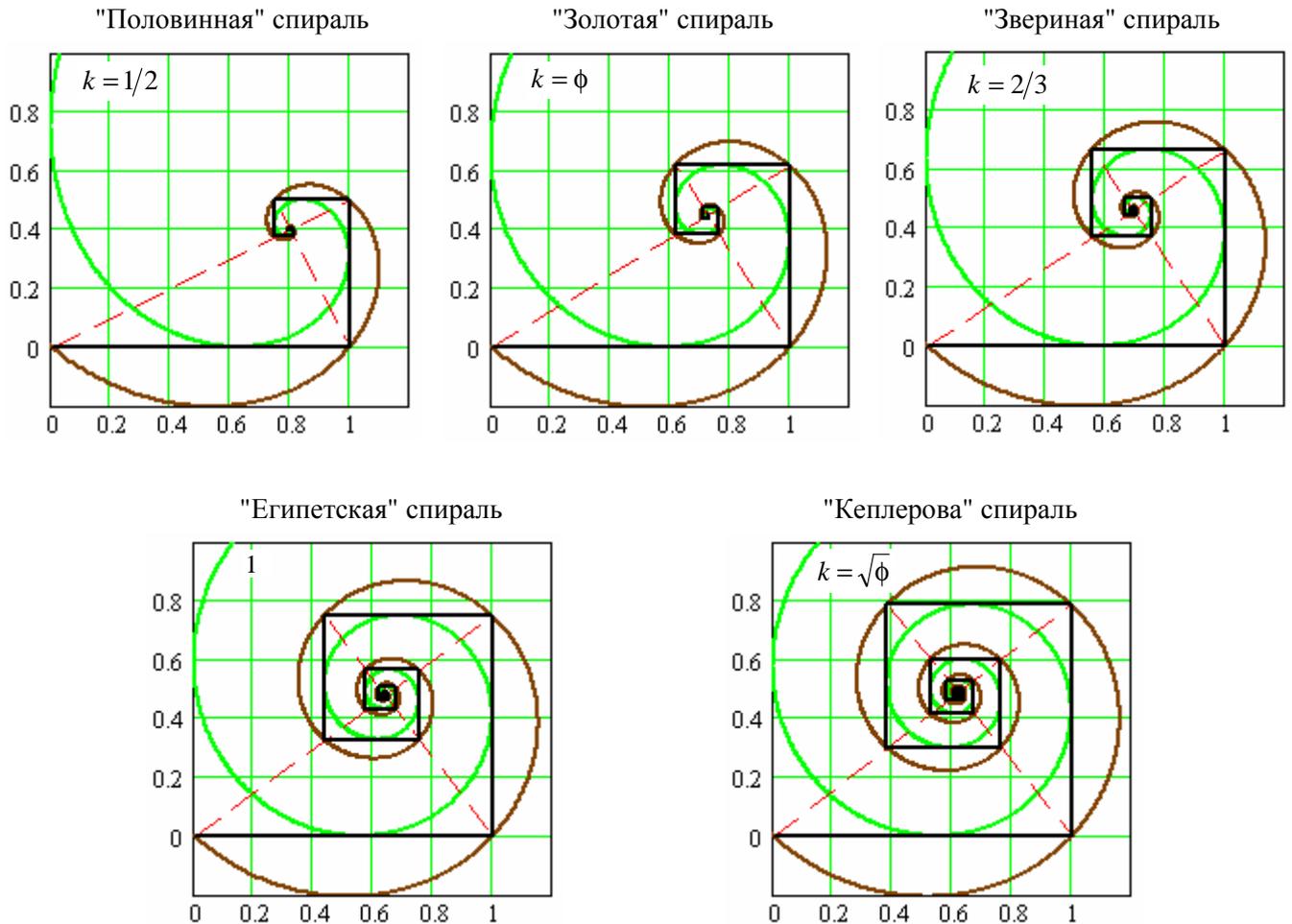


Рис. 6. Характерные варианты динамической системы прямоугольников или прямоугольных треугольников с условными названиями вписанных и описанных логарифмических спиралей

Фибоначчиевый ряд золотых треугольников Кеплера

Рассматривая треугольно-золотоносные фракталы, нельзя обойти вниманием так называемый "сакральный" или мета-треугольник треугольник имени автора [14], которому придается математический символ святой троицы.

Сначала несколько слов о построении. Автор анализирует «прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза так относится к большему катету, как больший катет относится к меньшему».

Далее следует: «Обозначим меру его средней стороны (большего катета) буквенным символом $K...$ Примем длину большого катета K как символ численной меры длины малого катета и длины гипотенузы прямоугольного треугольника. Тогда, в согласии с принципом гармоничного

отношения сторон треугольника, и поставленной автором задачи, малый катет будет равен \sqrt{K} , а гипотенуза – $K\sqrt{K}$... Составляем и решаем уравнение предполагаемого гармоничного прямоугольного треугольника в согласии с теоремой Пифагора $(K\sqrt{K})^2 = K^2 + (\sqrt{K})^2$ ».

Достаточно одного отрицательного частного случая, чтобы нарушить общность вывода.

Буквально следуем автору: «Примем длину большего катета $K = 1$... Тогда... малый катет будет равен $\sqrt{K} = 1$, а гипотенуза $K\sqrt{K} = 1$ ». – То есть вместо прямоугольного треугольника получаем равнобедренный аналог. Равенство можно не записывать, ибо оно теряет смысл.

Между тем, всё здесь достаточно просто.

Запишем пропорцию сторон $c/b = b/a$ и теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + ac$.

Разделим на произведение ac члены последнего равенства: $c/a = a/c + 1$.

Обозначив $c/a = x$, получаем квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ с положительным корнем $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ – золотой константой.

Окончательно имеем значения сторон $(a, b, c) = a \cdot (1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$ – известный треугольник Кеплера с пропорциональным отношением сторон $c/b = b/a$. То есть длины сторон образуют геометрическую прогрессию. Изменяя коэффициент масштабирования a , получаем бесконечное множество реализаций прямоугольного треугольника Кеплера.

В частности, "сакральный" мета-треугольник – это один из частных примеров треугольника Кеплера $(\sqrt{\Phi}, \Phi, \Phi\sqrt{\Phi})$, в котором высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна $h = 1$. Поскольку в любом прямоугольном треугольнике выполняется равенство $hc = ab$, отсюда возникает свойство $c = ab$ – гипотенуза численно равна произведению катетов.

В другой реализации треугольника Кеплера $(\sqrt{\phi}, 1, \sqrt{\Phi})$ больший катет b численно равен произведению меньшего катета a на гипотенузу c , причем возведенного в любую степень

В иной разновидности треугольника $(1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$ – гипотенуза численно равна квадрату большего катета. И так далее до бесконечности, применяя линейное масштабирование сторон и получая разнообразные дополнительные свойства-связи.

Автор [14] буквально из воздуха черпает некие «универсальные преимущества <мета-треугольника> в сравнении со свойствами других прямоугольных треугольников, вписанных в полуокружность единичного радиуса».

Действительно, гипотенуза $c = \Phi\sqrt{\Phi} \approx 2,058$ не вписывается в полуокружность с диаметром, равным двум. Хотя для усиления интерпретации троичной концепций хотелось бы иметь целочисленный единичный радиус или диаметр.

Между тем, другой частный случай треугольника Кеплера $(a, b, c) = (\phi, \sqrt{\phi}, 1) \approx (0.618, 0.786, 1)$ идеально вписывается в полуокружность единичного диаметра.

В работе [14] также отмечается некая «уникальность "сакрального" треугольника в том, что он не вписывается в числовые меры стандартов существующей формальной математики». – Очень даже отлично вписывается в числовые меры! Ибо присутствует единичная мера в виде высоты $h = 1$, а стороны единообразно выражаются через константу золотого сечения.

Что ещё нужно для целочисленной числовой меры в математике? – Более ничего.

В любой реализации треугольника Кеплера высота h из прямого угла на гипотенузу делит его на два треугольника, которые подобны друг другу и исходному треугольнику.

Можно, конечно, называть эту структуру «триадой фрактальных треугольников» [14] с ассоциацией на тройцу.

Но становится неясным главное: за что отвечает каждый из данных неравных треугольников? – Ибо три лица (ипостаси, личности) троицы равны по своему божественному достоинству и различаются только личными свойствами.

Для геометрического образа (модели-имитации) троицы треугольник Кеплера, разделенный высотой на два подобных, не подходит. Поскольку нужно принимать утверждение, что «отец = сын + святой дух», что в принципе противоречит христианскому догмату.

И такое свойство, как произведение катетов численно равно гипотенузе при $h = 1$ или высоте при $c = 1$, в данном случае ничего особенного нам не дает, кроме единичной меры.

Как видим, одной гармонии (а точнее, геометрической пропорции сторон) данной фигуры для математического толкования троицы явно недостаточно.

В то же время фрактальное подобие треугольников Кеплера четко соблюдается при их бесконечном делении высотами, проводимыми из прямых углов.

Более подробно это изложено в наших работах [5, 12, 15, 16], в которых также развенчиваются современные мифы сакрального толка в этой области.

С точки зрения динамических моделей троичности здесь важен другой аспект. На данной подоснове можно сформировать бесконечную геометрически-треугольную последовательность в виде фибоначиевого ряда золотых треугольников Кеплера [12] по принципу формирования двучленно-аддитивных числовых последовательностей Фибоначчи

Характерная особенность ряда: каждый последующий треугольник является составленным из двух предшествующих фигур с равенством площадей

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}.$$

Если сложить вместе треугольники K_{n-1} и K_{n-2} , то получим плоскую фигуру, равновеликую треугольнику K_n . Данный геометрический ряд бесконечный. Причем в обе стороны. Как в направлении безграничного роста-увеличения, так и беспредельного уменьшения.

Если идти в направлении увеличения площадей, то меньший катет (большой катет / гипотенуза) предшествующего треугольника становится соответственно высотой (меньшим катетом / большим катетом) последующего треугольника:

$$a_{n-1} = h_n, \quad b_{n-1} = a_n, \quad c_{n-1} = b_n.$$

Замечательная особенность данного ряда: его фрактальность и абсолютное самоподобие!

Любая ограниченная последовательность треугольников одинаково проявляется и повторяется в большом и малом измерении. Причем в произвольном месте ряда. В то же время каждая в отдельности фигура неповторима, – в смысле своих геометрических размеров и формульных соотношений между параметрами.

Более того, по мере увеличения чисел Фибоначчи их отношение с каждым шагом всё ближе приближается к золотой константе Φ . Но никогда её не достигает. Только в пределе.

Фибоначчиевый ряд золотых Δ -Кеплера в контексте фрактальности выглядит полнее и совершеннее: отношение площадей любой пары соседних треугольников всегда и строго равно золотой константе Φ .

В общем случае можно выстроить похожий ряд произвольных треугольников с некоторым метрическим коэффициентом пропорциональности k . Отдельно взятые стороны при этом также образуют свои геометрические прогрессии, что хорошо известно из проективной геометрии.

Но только фибоначиевый ряд золотых Δ -Кеплера (!) одновременно сохраняет геометрическую прогрессию сторон в каждой отдельно взятой геометрической фигуре.

В этом смысле он единственный в своем роде и, как целостное образование, одновременно является идеальным фрактальным объектом, отвечая признаку динамичности.

Построение ломаной линии по контуру прямоугольного треугольника.

В вышеописанной системе вложенных прямоугольных треугольников (рис. 6) меньший катет большего треугольника становился большим катетом меньшего. Тем самым, сохраняется относительно жесткая преемственность в образовании геометрических фигур.

На базе прямоугольного треугольника можно также организовать динамическую модель троичности в её развитии-движении несколько иным способом.

Будем двигаться от точки к точке в такой последовательности: катет – катет – гипотенуза, уменьшая длину стороны на каждом шаге с коэффициентом пропорциональности $k < 1$.

Другими словами движение осуществляется по схеме (рис. 7): горизонталь, вертикаль, наклонная линия с углом $\alpha = \arctg k$.

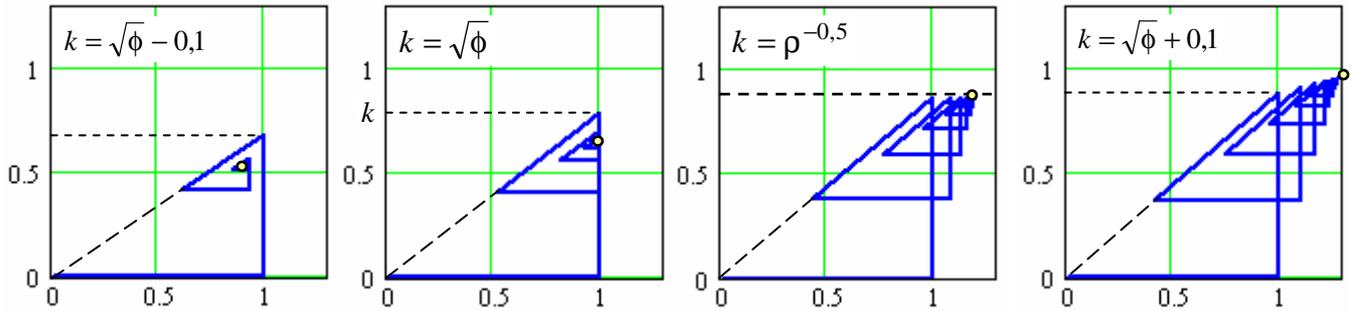


Рис. 7. Схождение ломаных линий по направляющим прямоугольного треугольника

Поскольку коэффициент k меньше единицы, ломаная линия рано или поздно сходится в предельной точке с координатами:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + k^2 \cdot \frac{k - \cos \alpha}{1 - k^4} \\ k \cdot \frac{1 - k \sin \alpha}{1 - k^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{k^2}{1 - k^4} \cdot \left(k - \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}} \right) \\ \frac{k}{1 - k^4} \cdot \left(1 - \frac{k^2}{\sqrt{1 + k^2}} \right) \end{pmatrix}.$$

Треугольное схождение, золотое сечение и минимальное число Пизо.

В описанном примере точка схождения (аттрактор) находится в точности на вертикальной линии $x' = 1$, если $k \cdot \sqrt{1 + k^2} = 1$. Отсюда находим положительный корень $k = \sqrt{\phi}$, который соответствует вездесущему треугольнику Кеплера с золотой константой!

Другой примечательный случай, когда точка схождения находится в точности на горизонтальной линии $y' = k$. Нетрудно найти, что коэффициент пропорциональности является положительным корнем тринома $k^6 + k^4 - 1$ и равен $k = 1/\sqrt{\rho} \approx 0,8688$, где ρ – наименьшее число Пизо – действительное решение алгебраического характеристического уравнения $x^3 = x + 1$.

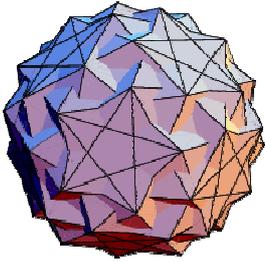
Напомним, целое алгебраическое число $\lambda > 1$ называется числом Пизо [17; 18, с. 162] или Писота [19], если все его сопряженные, отличные от самого λ , лежат внутри круга $|z| < 1$, то есть по абсолютной величине строго меньше единицы. Другими словами, число Пизо – положительное алгебраическое целое число, большее единицы, такое, что все его сопряженные элементы по абсолютной величине меньше 1.

Числа Пизо обладают одним удивительным свойством: их степени «почти целые» [17]. Именно эта уникальная особенность делает их удобными кандидатами в качестве иррациональных оснований систем счисления.

Число ρ также известно как пластиковая константа [20], равная $\rho = \frac{\sqrt[3]{9 - \sqrt{69}} + \sqrt[3]{9 + \sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{c}{6} + \frac{2}{c} \approx 1,3247$, где $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}$, или в виде бесконечно-вложенного радикала $\rho = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}}$.

Название пластиковое было дано Гансом ван дер Ланом (1928) и соотносилось с пластикой или приданием трехмерной формы вследствие третьего (кубического) порядка образующего тринома $x^3 - x - 1$.

Данный трином является характеристическим для рекуррентной последовательности $s_n = s_{n-2} + s_{n-3}$, образуемой по аналогии с числами Фибоначчи $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, только с дополнительным запаздыванием на один шаг.



Минимальное число Пизо ρ удивительным образом связано с золотым сечением через метрические свойства необычного тела – snub icosidodecahedron [21].

С одной стороны, в своей геометрии тело содержит явные признаки константы золотого сечения, – через правильную пятиугольную звезду. С другой стороны, радиус описанной сферы равен: $r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\rho - 1}{\rho - 1}}$.

Замечательные пропорции, присущие треугольнику Кеплера, допускают альтернативное схождение фигур не только на катете, но и на гипотенузе (рис. 8).

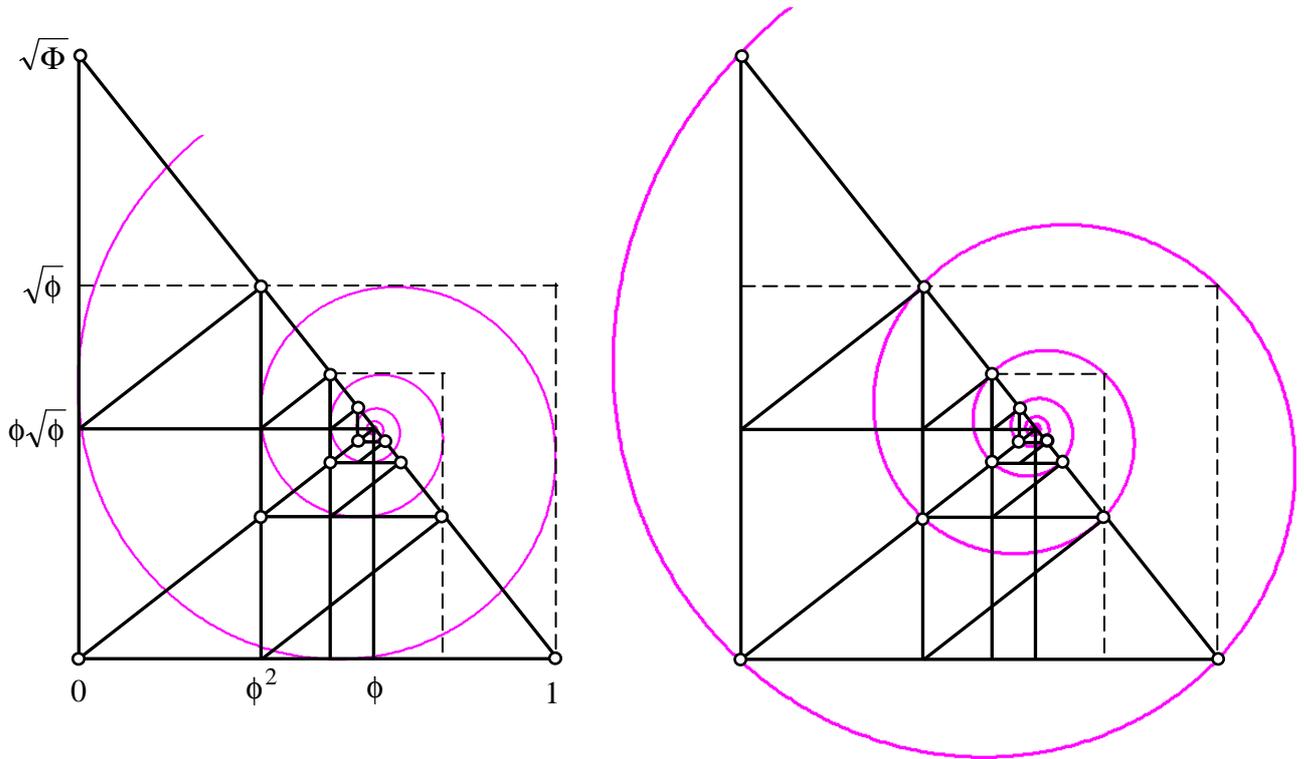


Рис. 8. Схождение прямоугольных треугольников на гипотенузе треугольника Кеплера

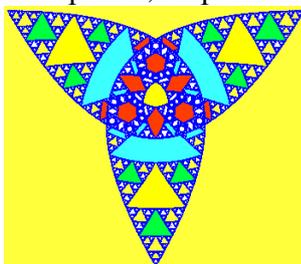
Выбрав для определенности параметры треугольника Кеплера $(1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$ с единичной длиной основания треугольника, получаем координаты точки схождения $(x', y') = (\phi, \phi\sqrt{\phi})$.

Литература:

1. Шюре Э. Великие посвященные. Очерки эзотеризма мировых религий. Пер. с фр. – 2-е изд., испр. – Калуга, 1914. – URL: <http://psylib.org.ua/books/shure01/index.htm>.
2. Александров Н.Н. Троичность и ее выражение в различных явлениях культуры. // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15822, 08.03.2010; Эл. № 77-6567, публ.15824, 10.03.2010; Эл. № 77-6567, публ.15833, 15.03.2010; Эл. № 77-6567, публ. 15849, 26.03.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/00/0051-00.htm.
3. Южин В. Христианство. Его термины, символы и атрибуты.
4. Муравьев Г.Н. Троичность вокруг нас. – М.: ЛитРес, 2016. – 240 с.
5. Василенко С.Л. Формальные неединичные конструкции троичной структуризации // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17606, 04.08.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261113.htm.

6. Василенко С.Л. Абстрактные модели троичной структуризации: формально-единичные конструкции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17601, 31.07.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261112.htm.
7. Василенко С.Л. Сферический треугольник как совершенная модель троичности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 25165, 09.02.2019. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001g/00163938.htm.
8. Кашпур А.Д., Василенко С.Л. Размышления о точке... Часть 2 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24063, 13.12.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163543.htm.
9. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 // Научно-техн. Б-ка SciTecLibrary. – 13.07.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17099, 13.12.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322080.htm.
10. Щедровицкий Г.П. Процессы и структуры в мышлении. Курс лекций. – М.: Путь, 2003.
11. Татур В.Ю. Отображение как субстанция единства космоса и человека // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17797, 21.12.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0001/005a/00011244.htm.
12. Василенко С.Л. Фибоначчиевый ряд золотых треугольников Кеплера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22546, 26.09.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163062.htm.
13. Алферов С.А. Логарифмические спирали и их триадность // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 13288, 10.05.2006. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321013.htm.
14. Сергиенко П.Я. "Сакральный" треугольник как математический символ Святой Троицы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 19168, 02.07.2014. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162322.htm.
15. Василенко С.Л. Треугольник Кеплера как объединитель теоремы Пифагора, золотого сечения и современных мифов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22385, 05.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163016.htm.
16. Василенко С.Л. Золотой прямоугольник Кеплера: свойства, особенности и проявления // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22410, 18.08.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163027.htm.
17. Егоров А. Числа Пизо // Квант. – 2005. – № 5, с. 8–13; № 6, с. 9–13.
18. Касселс Д.В.С. Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд. ин. лит, 1961. – 213 с.
19. Weisstein E.W. Pisot Number / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: <http://mathworld.wolfram.com/PisotNumber.html>.
20. Weisstein E.W. Plastic Constant / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – URL: <http://mathworld.wolfram.com/PlasticConstant.html>.
21. Wenninger M.J. Polyhedron Models. – Cambridge, England: Cambridge University Press, 1971, 177-178.

© Василенко, д.т.н., 2019 
Харьков, Украина



Авторские страницы:

<http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm>

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>