Франц Герман

Теорема Пифагора*)

«Теорема Пифагора устанавливает нечто приблизительно верное, независимо от существования человека»

А. Эйнштейн ([15], стр. 200)

Уверен, что большинство из вас на вопрос: помните ли вы теорему Пифагора, ответят утвердительно. А вот знаете ли вы, что мы используем теорему Пифагора минимум на четверть, а может быть и меньше? Этот вопрос, скорее всего, поставит вас в тупик. Кстати, уверен, что, прочитав, некоторые формулировки (сведённые к определению) теоремы Пифагора, вы, скорее всего, даже и не сообразили бы, что речь идёт о школьной теореме. «Теорема Пифагора, ..., низведена в современном аксиоматическом изложении евклидовой геометрии до малозаметного *определения*: *евклидовой структурой* в линейном пространстве называется линейная по каждому аргументу симметрическая функция пары векторов (*скалярное произведение*), для которых скалярный квадрат любого ненулевого вектора положителен» ([9], стр. 70). Но давайте всё по порядку и не будем вдаваться в заумные дебри современной математики.

Все помнят ещё со школьной скамьи утверждение: «$\boldsymbol{a}$ квадрат плюс $\boldsymbol{b}$ квадрат равно $\boldsymbol{c}$ квадрат». Или в свёрнутом виде:

$$\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2. \tag{1}$$

И сразу понимаем – это теорема Пифагора: «***Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов***». Конечно же, теорема эта связана с прямоугольным треугольником, где есть гипотенуза и два катета и речь идёт об их длинах.

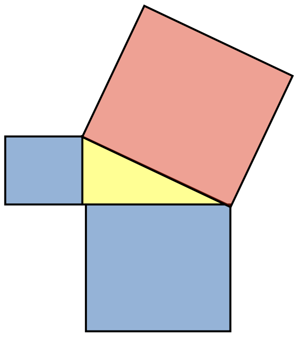

Рис. 1

Прямоугольных треугольников много и чтобы представить себе это множество надо нарисовать окружность и её диаметр.

---

*)Данная работа во многом является обобщением и продолжением публикации «Авторитет Пифагора».

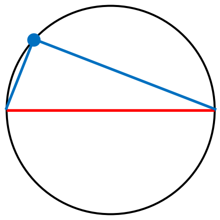

Рис. 2

Взяв на окружности произвольную точку и, соединив её с концами диаметра (отрезок красного цвета на Рис. 2), получим прямоугольный треугольник, где диаметр - это и есть гипотенуза, а отрезки, выходящие из данной точки – это катеты нашей, в смысле Пифагора, теоремы. Произвольность выбора исходной точки на окружности определяет треугольник Пифагора, т. е. точки полуокружности дают множество треугольников Пифагора.

Всегда ли отрезки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ должны быть соединены в прямоугольный треугольник, чтобы выполнялось выражение (1) или они могут быть частями каких-то других фигур?

А что скажете, услышав такую формулировку: ***квадрат секущей равен сумме квадратов касательных***? Вроде опять выражение $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$, но нет никаких катетов и гипотенуз.

Нам видится эта ситуация таким образом. Авторитет Пифагора был так велик, что никому даже в голову не приходило, что выражение $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$ может быть связано не только с прямоугольным треугольником.

Рассмотрим задачу Коксетера-Грейтцера ([1], стр. 43).

1. Задача Коксетера–Грейтцера.

Даны две концентрические окружности, к которым из внешней точки ***A*** проведены касательные ***AB=a*** и ***AC=c,*** причём касательная ***AC*** пересекает одну из окружностей в точке ***D*** (***CD***=***b***, Рис. 3).

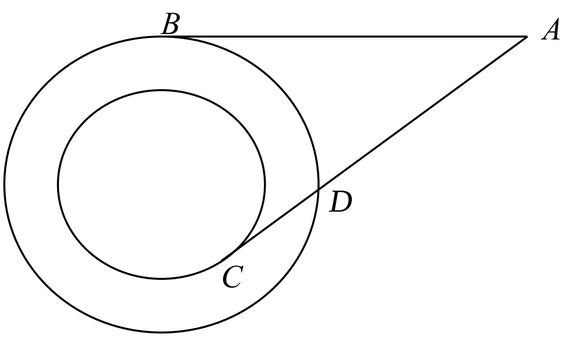

Рис. 3

Оказывается, что и в этом случае $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$. Как видим, отрезки ***a, b*** и ***c*** не связаны ни с каким прямоугольным треугольником (конечно, из этих отрезков такой прямоугольный треугольник можно построить).

Рассказывая о теореме «о постоянстве площади» (см. *Приложение* 1 к данной заметке), вводится понятие диаметра кольца. Напомним: *диаметром кольца называется хорда кольца, касательная к её внутренней окружности*. Тогда, в рамках данного определения, отрезок ***CD=b*** будет радиусом кольца, образованного данными концентрическими окружностями, а задача Коксетера–Герйтцера может быть сформулирована, как **Теорема 1*:***

Если дано кольцо, то разность квадратов касательных, проведённых из произвольной внешней точки, равна квадрату радиуса кольца.

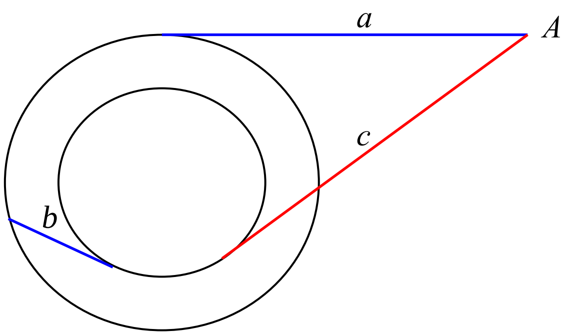

Рис. 4

Согласно этой теореме $\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2$ или $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$.

2. Взаимное расположение окружностей.

Продолжим рассмотрение различных случаев, образованных двумя окружностями.

Рассмотрим две непересекающиеся и неконцентрические окружности, расположенные одна внутри другой (Рис. 5). Пусть диаметр внутренней окружности принадлежит диаметру внешней окружности. Из концов диаметра внутренней окружности восставим перпендикуляры до пересечения с внешней окружностью. А из концов диаметра внешней окружности проведём касательные к внутренней окружности.

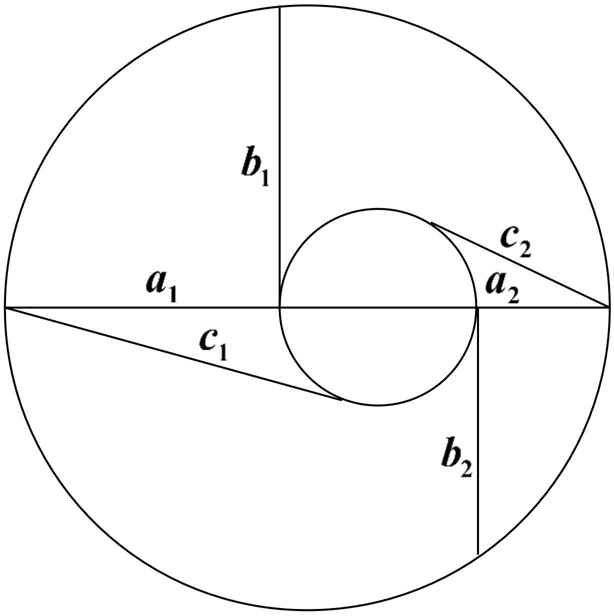

Рис. 5

Не трудно доказать, что $c_1^2 - a_1^2 - b_1^2 = c_2^2 - a_2^2 - b_2^2$.

Двигая центр внутренней окружности по диаметру внешней окружности, придём к случаю, когда данные окружности будут касаться друг друга внутренним образом (Рис. 6).

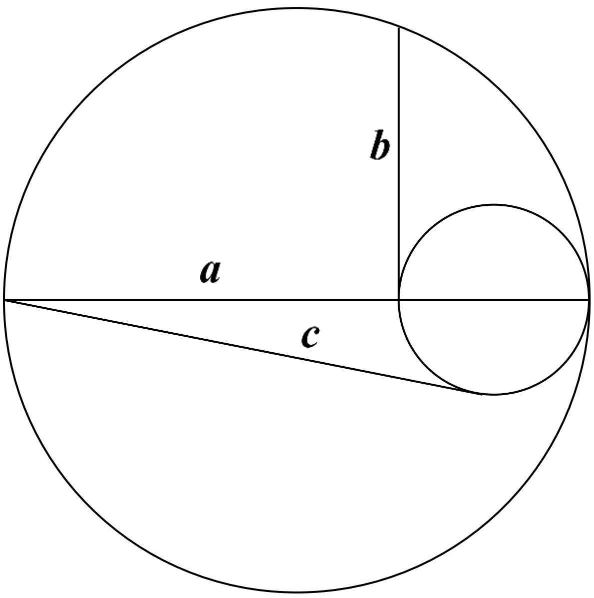

Рис. 6

Очевидно, что в этом случае будет справедливо выражение: $a^2 + b^2 = c^2$.

Продолжим движение внутренней окружности. Пусть наши окружности пересекают друг друга и диаметр большей окружности является секущей для меньшей (Рис. 7). Из точки пересечения секущей и её окружности восставим перпендикуляр $\boldsymbol{b}$ до пересечения со второй окружностью. Из конца внешней части секущей $\boldsymbol{a}$ проведём касательную к первой окружности $\boldsymbol{c}$.

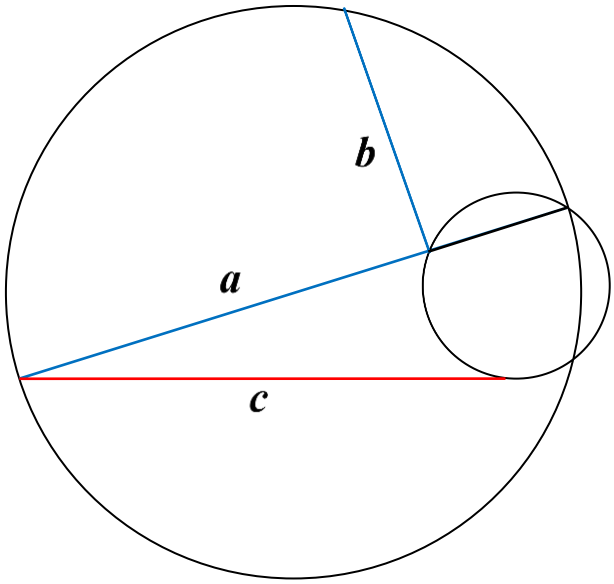

Рис. 7

Тогда справедливо выражение: $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$.

Проведём через точку пересечения окружностей общую секущую, а из её концов – касательные к данным окружностям (Рис. 8). Заметим, что для данной секущей это можно сделать четырьмя различными способами. Тогда справедлива **Теорема 2:**

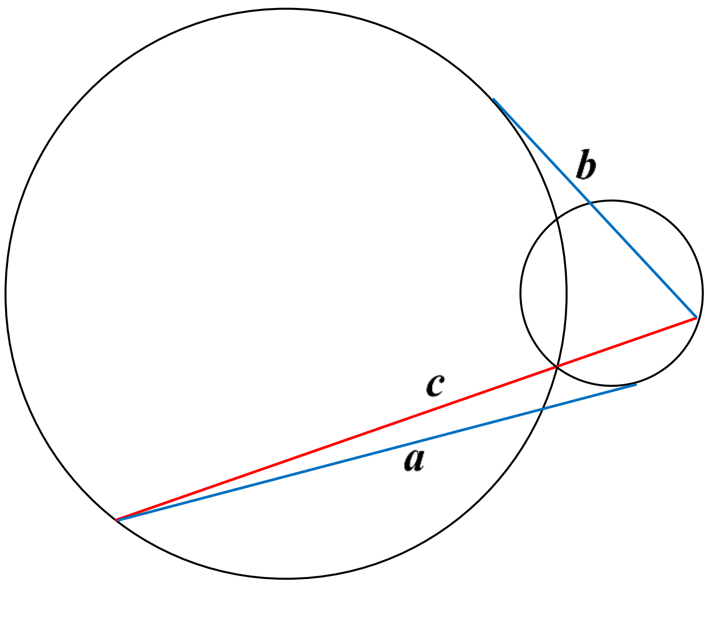

Рис. 8

Теорема 2*)

Если две окружности пересекаются и их общая секущая проходит через точку пересечения, то квадрат секущей равен сумме квадратов касательных.

И опять будет справедливо выражение: $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$. Теперь эти отрезки образуют не прямоугольный треугольник, а какую-то ломаную линию. Очевидно, что построение, справедливое для данной теоремы, будет не единственным (Рис. 9).

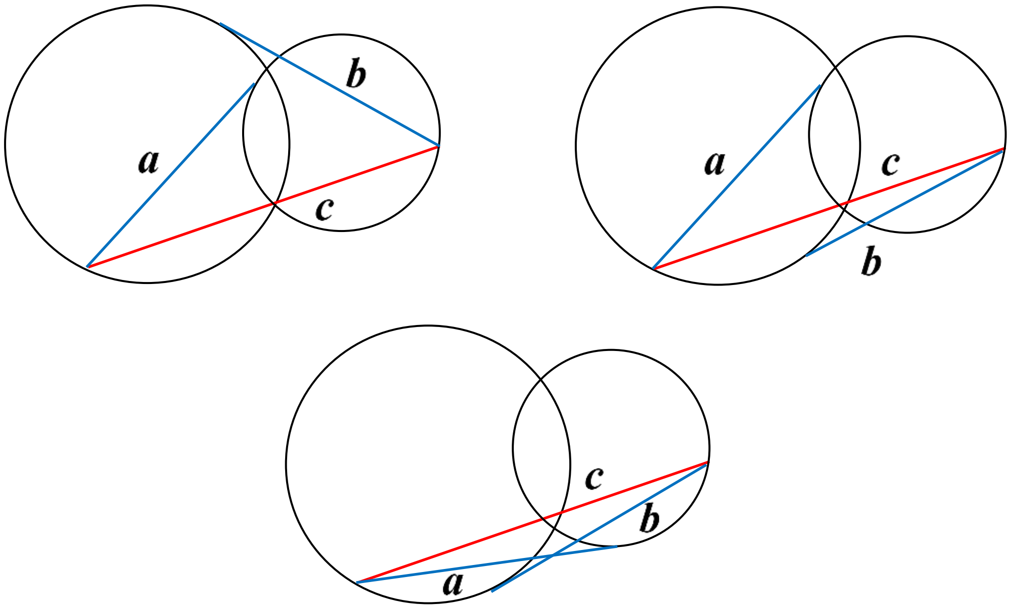

Рис. 9

Что же получается. Если в теореме Пифагора говорится об отрезках (катетах и гипотенузе), которые замыкаются и образуют прямоугольный треугольник, то по Теореме 2 это уже не треугольник, а ломаная линия. Дальше будет ещё интереснее.

3. Теорема о трёх касательных ([3], стр. 126).

Рассмотрим две непересекающиеся окружности, расположенные друг от друга на некотором произвольном расстоянии. Провести общие касательные к данным окружностям можно двумя принципиально различными (имеется в виду длина касательных) способами (Рис. 10).

---

*) Теоремы, отмеченные звёздочкой, открыты и доказаны автором статьи

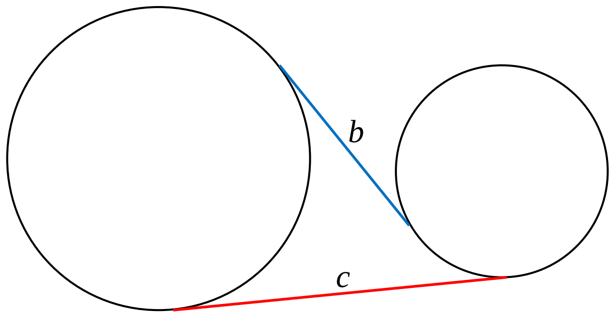

Рис. 10

Отрезки касательных, заключённые между точками касания, обозначим через $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$. Будем называть эти отрезки *внешним и внутренним* соответственно**.** В случае, когда данные окружности касаются, отрезок общей касательной, заключённый между точками касания, обозначим через $\boldsymbol{a}$ и будем называть его просто *касательным отрезком* (Рис.11).

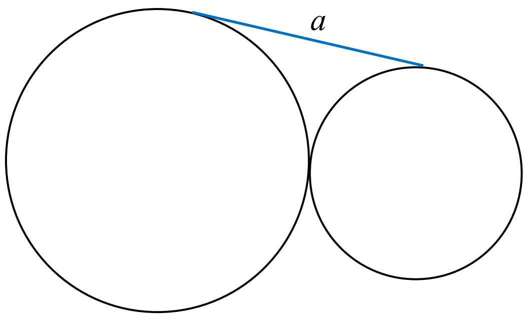

Рис. 11

Справедлива следующая **Теорема 3*:***

Теорема 3* (теорема о трёх касательных).

Если даны две окружности, расположенные друг от друга на некотором произвольном расстоянии, то сумма квадратов касательного и внутреннего отрезков равна квадрату внешнего отрезка.

И в этом случае будем иметь Пифагорово равенство: $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2$.

Обратим внимание на то, что теперь три отрезка, объединённые равенством (1), уже и не прямоугольный треугольник, и не ломаная линия. Наши отрезки вообще не касаются друг друга, но длины их всё равно связаны известным выражением.

Но продолжим наше исследование.

Рассмотрим кольцо и концентрическую окружность, которая делит данное кольцо на две части (Рис. 12). Справедлива следующая теорема «о диаметрах трёх колец».

4. Теорема о диаметрах трёх колец.

Теорема 4*:

Если окружность делит данное кольцо на внешнее и внутреннее, то сумма квадратов диаметров внешнего и внутреннего кольца равна квадрату диаметра данного кольца.

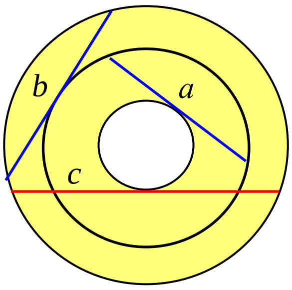

Рис. 12

Для диаметров этих колец тоже справедливо равенство: $a^2 + b^2 = c^2$. Не правда ли, это красиво.

И снова заметим новое качественное представление трёх отрезков. Теперь это и не стороны прямоугольного треугольника, и не ломаная из секущей и касательных, пересекающихся окружностей, и не касательные к окружностям, которые могут разлететься друг от друга на произвольное расстояние, теперь наши отрезки – это диаметры концентрических колец. Удивительно богато равенство (1) в своих геометрических образах.

5. «Самая главная формула»

Самой главной формулой Г. И. Копылов называет формулу ([4], стр. 26):

$$P^2 + m^2 = E^2 \tag{2}$$

и иллюстрирует её фигурой теоремы Пифагора (см. [4]). А если бы он знал теорему о диаметрах колец...?

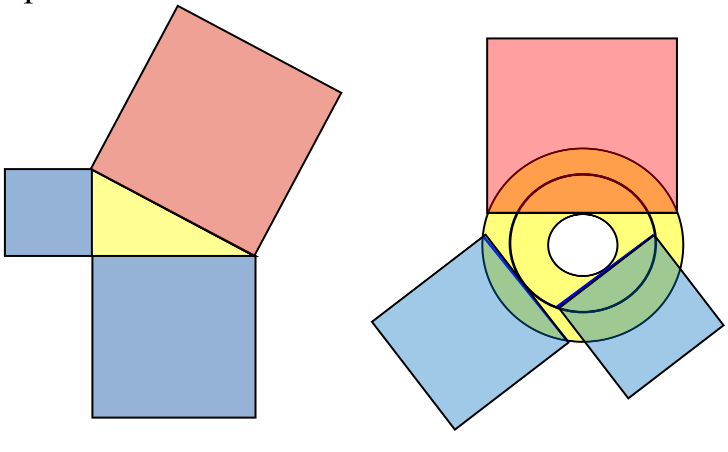

Рис. 13

Можно продолжить наш экскурс в физику элементарных частиц. Представим себе, что на Рис. 14 показан разрез некоторого атома. Пусть отверстие кольца символизирует собой ядро этого атома, а две других (внешних) окружности – это сечения орбиталей.

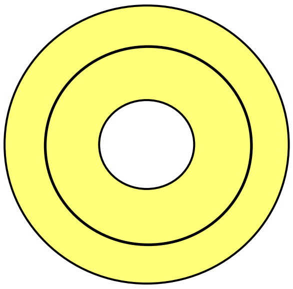

Рис. 14

Сегодня современной науке точно известно, что ядро атома в 100000 раз меньше размера самого атома ([2], стр. 268). Т. е. образ ядра на Рис. 14 практически превращается в точку. Получаем **Следствие** Теоремы 4:

Следствие*:

Если дан круг и концентрическая окружность, делящая этот круг на две части (внешнее кольцо и внутренний круг), то сумма квадратов диаметров кольца и внутреннего круга равна квадрату диаметра исходного круга (Рис. 15).

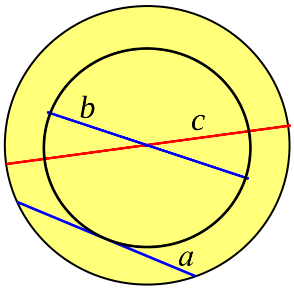

Рис. 15

Для данного следствия тоже справедливо равенство $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$.

Все предыдущие утверждения (теоремы) и это следствие легко доказывается и мы здесь эти доказательства не приводим. Оставляем их читателю. Кстати, два отрезка из диаметров колец теперь превратились в диаметры кругов.

Аналогия с атомом подсказала нам существование Следствия Теоремы 4, а ведь и само ядро атома имеет очень сложную и не совсем понятную ещё структуру. Ядро то представляется в виде водяной капли (по своим свойствам), то в виде концентрических сфер со своими орбиталями [5]. Мы не исключаем, что Теорема 4 может помочь увидеть какой-то новый закон для ядерных оболочек вроде формулы (2) $\pi \cdot a^2 + S_O = S_\Theta$ или в общем случае:

$$S_a + S_b = S_c, \tag{3}$$

где $S_b = S_O$ - поверхность какой-то орбитали нуклонов диаметром b, а $S_c = S_\Theta$ - поверхность самого ядра диаметром c (Рис. 16).

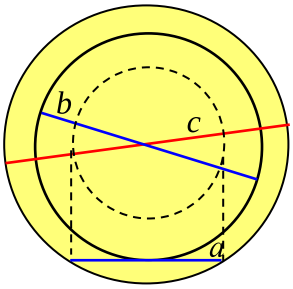

Рис. 16

Вообще нуклонные орбитали ведут себя в ядре довольно независимо. Перемещаясь внутри ядра, орбитали могут заставлять само ядро походить «то на дыню, то на грушу и даже на сферу с буграми» ([5], стр. 128). Сечения таких ядер показаны на Рис. 17. А это значит, что в данном случае имеет смысл в применении Теоремы 2. В общем, в теории ядра ещё очень много белых пятен.

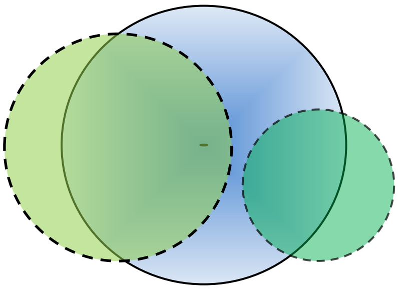

Рис. 17

Равенство (1) вообще очень популярно в науке. Не вдаваясь в математические тонкости отметим например, что натуральное уравнение циклоиды (есть такая кривая [12]), имеет вид:

$$R^2 + s^2 = a^2,$$

где R - радиус кривизны циклоиды, s - натуральный параметр, a - константа ([11], стр. 144).

А квадрат радиуса кривизны ρ равен сумме квадратов радиуса нормальной кривизны $\rho_{\text{н}}$ и квадрата радиуса геодезической кривизны $\rho_{\text{г}}$ произвольной поверхности ([10], стр. 187).

$$\rho^2 = \rho_{\text{Н}}^2 + \rho_{\text{Г}}^2$$

Также отметим, если в качестве переменных в выражении (1) взять однородные координаты проективной плоскости, то выражение (1) будет определять одну из кривых второго порядка: овальную линию ([7], стр. 56).

А если в качестве переменных в выражении (1) взять аффинные координыты, то получим каноническое уравнение конуса ([8], стр. 122).

В последних примерах речь идёт уже не о длинах отрезков, а просто о числовых значениях.

Кроме того, равенство (1) может выступать и в качестве условия (об этом см. *Приложение* 2).

Надо также отметить, что выражение (1) для натуральных чисел допускает элементарную параметризацию. Самая древняя параметризация была известна ещё Пифагору (по некоторым сведениям он его и открыл). Эта параметризация записывается таким выражением:

$$(2n+1)^2 + (2n \cdot (n+1))^2 = (2n^2 + 2n + 1)^2, \qquad (4)$$

здесь в качестве параметра выступает число $n \in N$ – любое натуральное число (через N в математике принято обозначать натуральный ряд чисел: 1, 2, ..., n, ..., ∞). Подставляя любые n, получаем целочисленные значения a, b и c для равенства (1).

Ещё одно, но уже двупараметрическое выражение (1) записывается так:

$$(n^2 - m^2)^2 + (2n \cdot m)^2 = (n^2 + m^2)^2, \qquad (5)$$

где $n > m$ и $m \in N$.

Говоря о квадратичном законе (1) нельзя не упомянуть одну очень интересную теорему.

Теорема 5*:

Для любого натурального числа n всегда существует $k = 2n + 1$ последовательных чисел таких, что сумма квадратов первых n+1 числа равна сумме квадратов последующих n чисел, причём, первое число в этой последовательности $a = n(2n+1) = n \cdot k$.

***Примеры*:**

1) $n = 1, k = 3,$ $a = 3$ получаем: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

2) $n = 2, k = 5,$ $a = 10$ получаем: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

Докажем эту теорему.

В свёрнутом виде Теорему 5 можем записать в виде равенства:

$$\sum_{x=0}^{n}(a+x)^2 = \sum_{x=n+1}^{2n}(a+x)^2 . \qquad (6)$$

Равенство (6) можно представить в более развёрнутом виде:

$$a^2 + \sum_{x=1}^{n}(a+x)^2 = (a+n+1)^2 + (a+n+2)^2 + \ldots + (a+n+n)^2 . \qquad (7)$$

После преобразований правая часть этого равенства представляется уже в таком виде:

$$\sum_{x=1}^{n}(a+x)^2 + 2n[(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n)] + n^3 .$$

Сокращая одинаковые слагаемые в левой и правой части равенства (7), получаем уравнение:

$$a^2 - 2n^2a - n^2(1+2n) = 0 . \qquad (8)$$

Решая уравнение (8) получаем единственное положительное решение: $a = n(2n+1)$, которое и соответствует Теореме 5.
Для любителей числовых исследований отметим, что сумму квадратов для $a = k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{n+1}$ таких чисел (левая сумма равенства) можно вычислить по формуле:

$$S_n = \frac{a(n+1)(3k^2-2)}{6}.$$

или

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(12n^2+12n+1)}{6}$$

6. Задача для исследования.

Числовой отрезок на оси натурального ряда будем обозначать аналогично отрезку прямой: $[a, b]$. Это значит, что наш отрезок содержит натуральные числа от a до b включительно. Весь натуральный ряд тогда можно обозначить открытым справа отрезком $N \equiv [1, \infty)$. Тогда, следуя Теореме 5, можем записать: $[3, \ldots, 5]$, $[10, \ldots, 14]$, $[21, \ldots, 27]$, $[36, \ldots, 44]$, ..., $[n(2n+1), \ldots, n(2n+3)]$, ... и т. д.. Другими словами, весь натуральный ряд разбит на отрезки, которые подчиняются Теоренме 5. Но между этими отрезками остались ещё числа, которые тоже можно объединить в отрезки: $[1, 2]$, $[6, \ldots, 9]$, $[15, \ldots, 20]$, ..., и т. д.. Возникает задача: **какой зависимости**

подчинены числа в этих отрезках? Очень трудно поверить, что для чисел первой последовательности справедлива Теорема 5, а числа в оставшихся числовых отрезках никакой общей зависимости внутри отрезка не имеют. Проверьте свои силы на этой задаче. Открытие ждёт читателя.

7. Теорема Птолемея

Прежде чем поговорить о пространственных обобщениях теоремы Пифагора хочется вспомнить одну очень полезную теорему. Её авторство приписывается математику и астроному древнего востока Клавдию Птолемею, жившему в первом веке нашей эры. Звучит эта теорема так: ***если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей***.

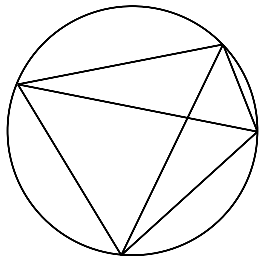

Рис. 18

В нашем разговоре важно отметить ***Следствие*** теоремы Птолемея: ***если данный четырёхугольник является прямоугольником, то справедливо равенство* (1).**

Непонятно почему, но теорема Птолемея никогда не включалась в программу школьной геометрии, но её можно было встретить, например, в сборнике олимпиадных задач ([13], стр. 91), а между тем – это очень полезная теорема. Например, используя эту теорему легко и наглядно выводятся тригонометрические формулы синусов и косинусов для суммы и разности углов. Советуем читателю проделать это самостоятельно.

Большинство теорем, которые мы здесь рассматривали, относятся к планиметрии, а, между тем, существуют и пространственные обобщения теоремы Пифагора.

Тривиальное обобщение связано с прямоугольным параллелограммом (Рис. 19).

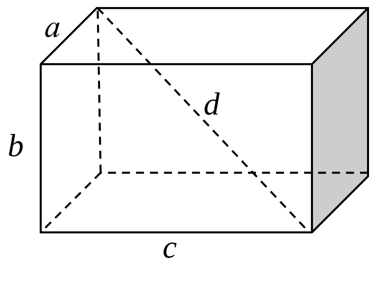

Рис. 19

Если стороны и главную диагональ прямоугольного параллелограмма обозначить как на Рис. 19, то получим равенство:

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{d}^2. \qquad (9)$$

8. Задача об октанте

Рассмотрим один октант координатной системы. На каждой из осей произвольно выберем по точке: ***A, B*** и ***C*** (Рис. 20).

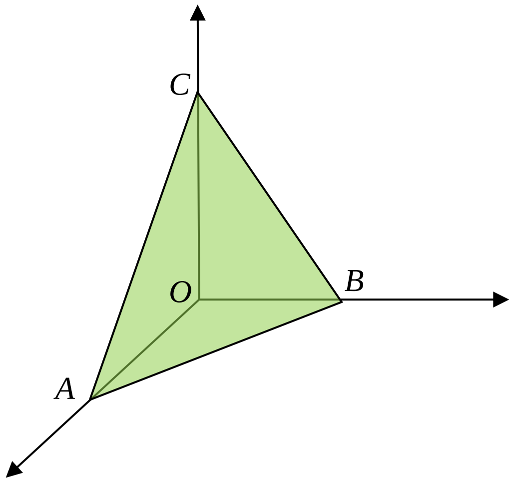

Рис. 20

Через три точки всегда можно провести плоскость, поэтому фигуру ***ABCO*** будем называть *прямоугольным тетраэдром* т. к. три грани, имеющие общую вершину ***O*** являются прямоугольными тругольниками с прямым углом в точке ***O***. Очевидно также, что треугольник ***ABC*** может быть любым.

Площади граней полученного прямоугольного тетраэдра обозначим через ***S***.

Оказывается ([6], стр. 58-61), что

$$(S_{OAB})^2+(S_{OCB})^2+(S_{OAC})^2=S_{ABC}^2. \qquad (10)$$

Получаем такое нетривиальное, пространственное обобщение теоремы Пифагора. Здесь длины сторон прямоугольного треугольника (как в теореме Пифагора) заменены площадями самих прямоугольных треугольников (грани прямоугольного тетраэдра) и площадью тегольника ***ABC***.

Сопоставив значениям площадей, показанной формулы (10), пространственные проективные координаты, получаем уравнение *невырожденной нелинейной квадрики*([14], стр. 322),: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2$.

Возникает вопрос: а можно ли расширить обобщение теоремы Пифагора и дальше, где вместо площадей уже будут использоваться объёмы?

9. Гипотеза о вписанном тетраэдре.

Рассмотрим прямоугольный тетраэдр, у которого не прямоугольная грань (треугольник $\boldsymbol{ABC}$) является равносторонним треугольником (Рис. 21 слева).

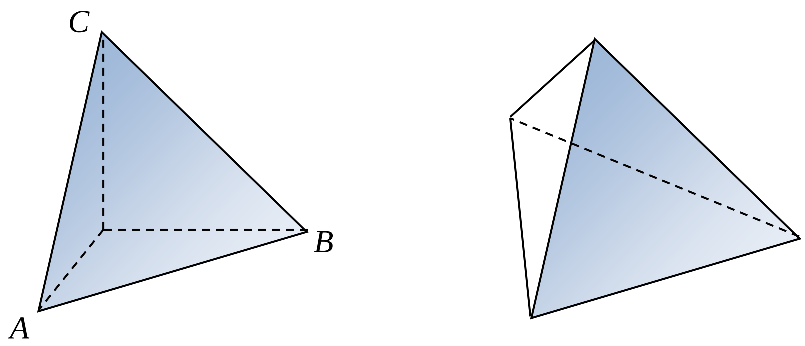

Рис. 21

Теперь рассмотрим правильный тетраэдр (все грани такого тетраэдра равносторонние треугольники, Рис. 21 справа), каждая грань которого равна грани $\boldsymbol{ABC}$. Обозначим объём правильного тетраэдра через $\boldsymbol{V}$, а объём прямоугольного тетраэдра через - $\boldsymbol{V}_{\text{П}}$. Очевидно, что из правильного тетраэдра и четырёх прямоугольных тетраэдров можно сложить фигуру (куб), прикладывая к граням правильного тетраэдра грань тетраэдра прямоугольного. Расчёты показывают, что для данной фигуры справедливо равенство:

$$\boldsymbol{V}_{\text{П}}^2 + \boldsymbol{V}_{\text{П}}^2 + \boldsymbol{V}_{\text{П}}^2 + \boldsymbol{V}_{\text{П}}^2 = \boldsymbol{V}^2. \qquad (11)$$

Возникает гипотеза, а существует ли обобщение для равенства (11). Сформулируем нашу гипотезу:

Гипотеза:
Если в сферу вписан произвольный тетраэдр объёмом V и на его гранях построены прямоугольные тетраэдры, то справедливо равенство $\boldsymbol{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 = V^2}$**.**

Доказывайте или опровергайте.

10. Неочевидные свойства и следствия.

Оказывается, несмотря на многосотлетнюю жизнь теоремы Пифагора, существуют следствия и свойства этой удивительной теоремы, которые почему-то не описаны ни только в учебниках, но и даже в многочисленных справочниках, которые нам известны. С одним из таких свойств мы и хотим познакомить читателя.

Свойство отношений

Отношение квадратов катетов, равно, соответственно, отношению их проекций на гипотенузу.

Это отношение удобно выразить формулой (12):

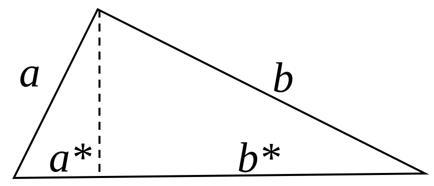

Рис. 22

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a*}{b*}. \tag{12}$$

Будем обозначать это отношение буквой «кси»: $\frac{a^2}{b^2} = \xi$.

Не трудно доказать, что из этого свойства отношений следуют и отношения: $\frac{b}{b*} = \sqrt{\xi + 1}$ и $\frac{a}{a*} = \sqrt{\frac{\xi + 1}{\xi}}$. На основании этих полученных формул, можно записать ещё несколько, практически очевидных, выражений: $\left(\frac{b*}{b}\right)^2 + \left(\frac{a*}{a}\right)^2 = 1$ и $(a* + b*)^2 = a^2 + b^2$.

В заключение скажем несколько слов об одном частном случае теоремы о касательной и секущей (Рис. 23), которое тоже связано с теоремой Пифагора.

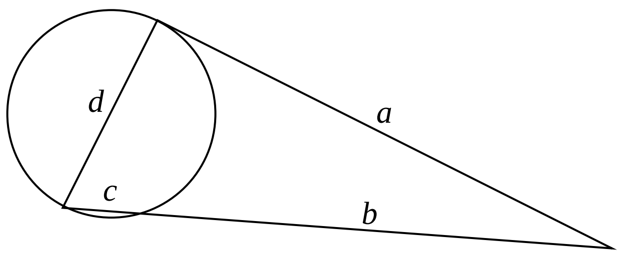

Рис. 23

Напомним, как формулируется теорема. *Если дана касательная и секущая, проведённые к окружности из данной точки, то квадрат* *касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть*. В обозначениях Рис. 23 это можно записать так: $\boldsymbol{a^2 = b \cdot (b+c)}$.

Те, кому частенько приходилось сталкиваться с этой теоремой, наверняка задавали себе вопрос. Почему произведение секущей и её внешней частью? А чем хуже внутренняя часть $\boldsymbol{c}$ секущей?

Рассмотрим такой частный случай этой теоремы. Пусть касательная и секущая опираются на диаметр данной окружности $\boldsymbol{d}$. Не трудно доказать, что в этом случае теорема о секущей и касательной будет звучать и так. *Если секущая и касательная, проведённые к окружности из одной точки, опираются на диаметр данной окружности, то квадрат диаметра равен произведению секущей на её внутреннюю часть*. На математическом языке это можно записать: $\boldsymbol{d^2 = c \cdot (b+c)}$. В этом не сложно убедиться. Сложив два последних выражения и немного преобразовав, получаем $\boldsymbol{a^2 + d^2 = (b+c)^2}$. Т. е. получили выражение справедливое для теоремы Пифагора – для прямоугольного треугольника.

Литература

1. Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер, «Новые встречи с геометрией», М., «НАУКА», 1979
2. Л. Сасскинд, «Космический ландшафт», СПб, «ПИТЕР» 2015
3. Ф. Герман «Поэзия разума», Saarbrücken, «LAP LAMBERT», 2015
4. Г. И. Копылов, «Всего лишь кинематика», М., «НАУКА», 1981
5. В. А. Черногорова, «Беседы об атомном ядре», М., «Молодая гвардия», 1976
6. Д. Пойа, «Математическое открытие», М., «Наука», 1970
7. Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев, «Геометрия II», М., «Просвещение», 1987
8. Я. П. Понарин, Аффинная и проективная геометрия», М., «МЦНМО», 2009
9. В. И. Арнольд, «Теория катастроф», М., «Наука», 1990
10. Б. Е. Победря, « Лекции по тензорному анализу», М., «Издтельство МГУ», 1974
11. П. К. Рашевский, «Курс дифференциальной геометрии», М., «Гос. изд. технико-теоретической литературы», 1956.
12. Г. Н. Берман, «Циклоида», М., «Наука», 1980
13. Г. И. Зубелевич, «Сборник задач московских математических олимпиад», М., «Просвещение», 1971
14. Г. Буземан, П. Келли, «Проективные геометрии и проективные метрики», М., «Издательство иностранной литературы», 1957
15. «Эйнштейновский сборник 1977», М., «Наука», 1980

Теоремы о постоянстве площади и объёма.

Рассмотрим круг, с выколотой точкой в его центре. Через центр круга вертикально проведён диаметр. Пусть точка в центре круга начинает расширяться, превращая данный круг в кольцо (Рис. 1).

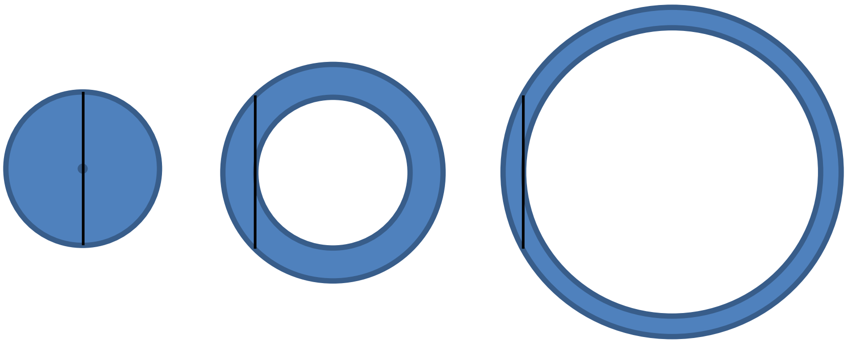

Рис. 1

Будем называть *максимально возможную хорду кольца диаметром этого кольца*. На Рис. 1 показаны кольца и круг одного диаметра. Тогда справедлива следующая **ТЕОРЕМА***:

Площадь кольца данного диаметра равна площади круга этого диаметра.

Эту теорему и будем называть теоремой о постоянстве площади. Действительно, пусть диаметр кольца есть величина постоянная. При увеличении радиуса кольца и постоянном диаметре толщина кольца будет уменьшаться стремясь к нулю. Но площадь кольца при этом, согласно Теореме, будет оставаться постоянной.

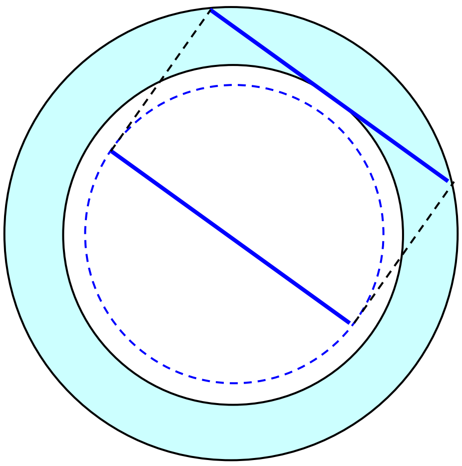

Рис. 2

Доказательство:

Дано кольцо радиусов $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Сделаем дополнительные построения, как на Рис. 3.

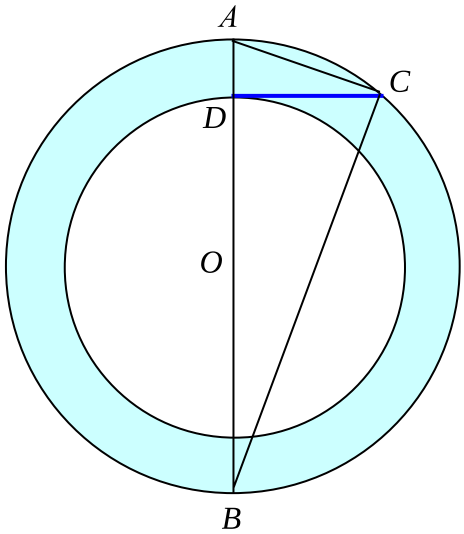

Рис. 3

Точка $\boldsymbol{O}$ – центр кольца. Тогда из подобия треугольников $\boldsymbol{ADC}$ и $\boldsymbol{CDB}$ можем записать такое соотношение: $\frac{\boldsymbol{AD}}{\boldsymbol{DC}} = \frac{\boldsymbol{DC}}{\boldsymbol{DB}}$. Или в наших обозначениях - $(\boldsymbol{R}_1 - \boldsymbol{R}_2)\cdot(\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2) = \boldsymbol{R}^2$, где $\boldsymbol{R}$ – радиус кольца. Умножая каждое слагаемое на $\boldsymbol{\pi}$ и раскрывая скобки получаем: $\pi \boldsymbol{R}_1^2 - \pi \boldsymbol{R}_2^2 = \pi \boldsymbol{R}^2$. Т. е. площадь кольца равна площади круга радиуса $\boldsymbol{R}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим формулы площади круга и длины окружности как функции радиуса: $\boldsymbol{S} = \pi \boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{C} = 2\pi \boldsymbol{R}$. Откуда можем записать: $\frac{\boldsymbol{dS}}{\boldsymbol{dR}} = \boldsymbol{C}$, т. е. приращение площади равно длине окружности.

Снова рассмотрим круг. Пусть теперь расширяется сам круг (Рис. 4). Отметим на данных кругах сегменты, стягиваемые хордой одинаковой длины, равной длине диаметра данного круга.

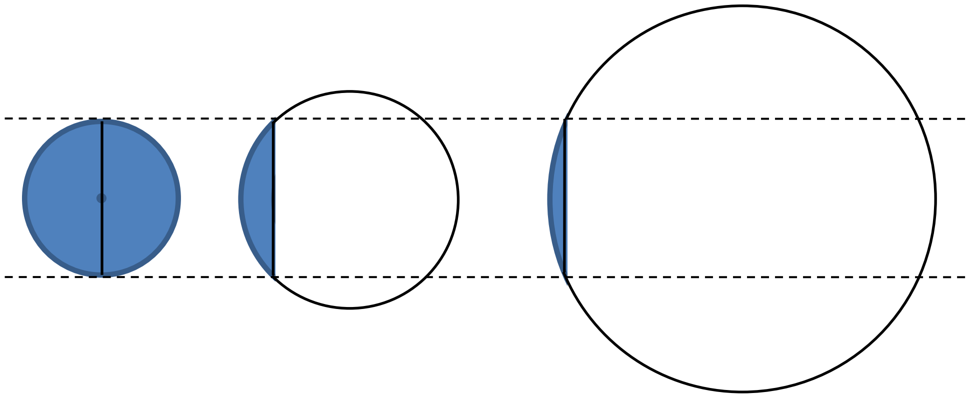

Рис. 4

Справедлива следующая **ТЕОРЕМА***:

Объём тела, образованного вращением сегмента круга вокруг оси, проходящей через центр данного круга и параллельно хорде данного сегмента, есть величина постоянная и равная объёму шара, диаметром, равным хорде данного сегмента.

Будем называть эту теорему *теоремой о постоянстве объёма.*

1. Теорема о постоянстве объёма

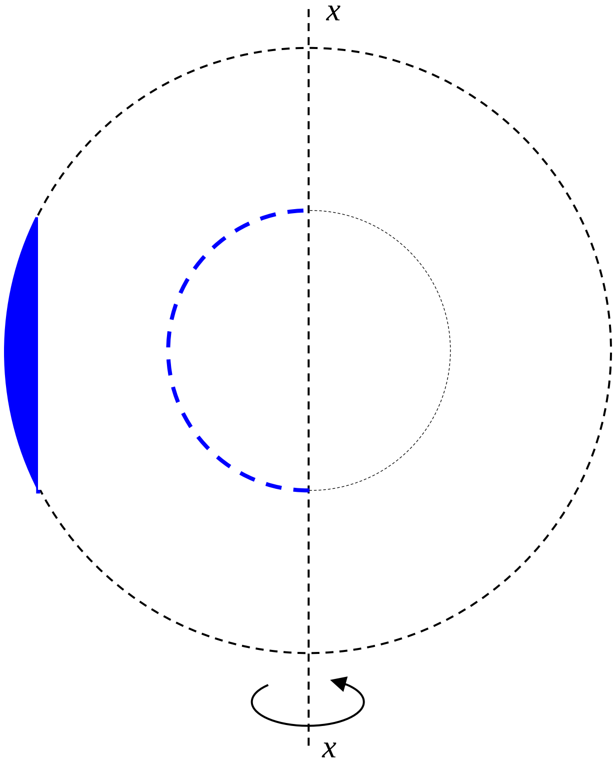

Рис. 5

На рисунке 5 показан произвольный сегмент произвольного круга. Ось вращения ***x–x*** проходит через центр данного круга и параллельно хорде данного сегмента. Пусть длина радиуса круга равна $\boldsymbol{R}$, а дина хорды сегмента – $\boldsymbol{d}$. Т. о., площадь сегмента определяется двумя этими размерами. Теорема говорит о том, что если длина хорды - величина постоянная, то объём тела вращения, заметаемый данным сегментом, не зависит от радиуса исходного круга и равен объёму шара, диаметром, равным длине хорды. Докажем это утверждение.

Доказательство 1

Известно [1], что объём тела вращения, ограниченного линией $y = f(x)$ вокруг оси OX, вычисляется по формуле: $V = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$.

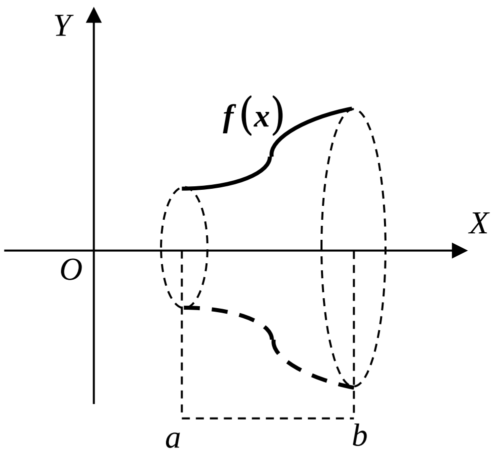

Рис. 6

В нашем случае кривой, ограничивающей тело вращения, будет дуга сегмента круга (Рис. 7)

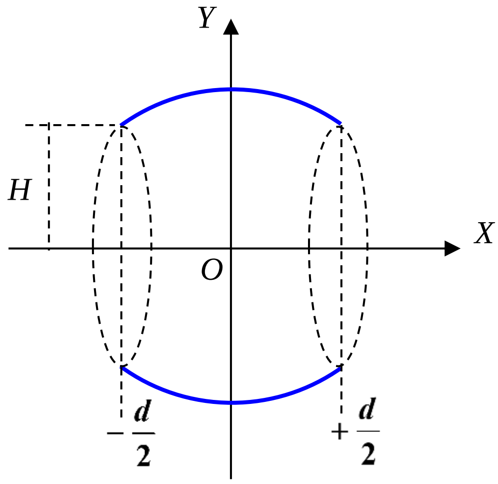

Рис. 7

А квадрат функции для этой дуги будет иметь уравнение $y^2 = R^2 - x^2$. Теперь интеграл можно записать в таком виде: $V = \pi \cdot \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left(R^2 - x^2\right) dx$. Вычисляя интеграл, находим объём тела вращения: $V = \pi \cdot \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left(d \cdot R^2 - \frac{d^3}{12} \right)$.

Осталось вычесть из этого объёма объём цилиндра $V_Ц$, длина образуюшей которого равна d, а радиус основания – H. Т. е $V_Ц = \pi \cdot d \cdot H^2 = \pi \cdot \left(d \cdot R^2 - \frac{d^3}{4} \right)$. Откуда находим объём тела вращения, заметаемого сегментом круга как разность: $V_C = V - V_Ц = \pi \cdot \frac{d^3}{6}$. Полученный результат говорит о том, что это объём шара с диаметром d.

Что и требовалось доказать.

Доказательство 2 (элементарное).

Не трудно заметить, что объём тела вращения V – это объём шарового слоя толщиной d. Зная объём шарового сегмента $V_{Ш.С.}$ можно вычислить искомый объём V.

Объём шарового сегмента вычисляется по формуле [2]: $V_{Ш.С.} = \frac{1}{3}\pi \cdot h(3R - h)$.

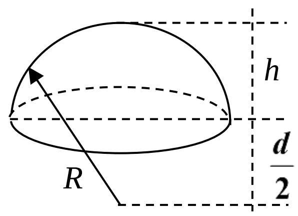

Рис. 8

Теперь можем вычислить: $V = V_Ш - 2 \cdot V_{Ш.С.} = \pi \left(d \cdot R^2 - \frac{d^3}{12} \right)$. И вычитая из этого объёма объём цилиндра, как мы это делали в предыдущем доказательстве, находим выражение для искомого объёма: $V_C = V - V_Ц = \pi \cdot \frac{d^3}{6}$.

Что и требовалось доказать.

Резюмируя, можно сказать, увеличивая радиус R, но при этом сохраняя длину хорды d мы уменьшаем площадь исходного сегмента.

Однако, заметаемый, при вращении объём, тем не менее, остаётся постоянным. Т. о, при $\boldsymbol{R} \to \infty$ размер площади сегмента стремится к величине длины дуги сегмента и объём вроде как «размазывается» по поверхности.

Наверняка многие из вас, начиная изучать математический анализ, обращали внимание на интересную связь между формулами объёма и поверхности шара. А именно. Будем рассматривать эти формулы как функции от радиуса: $\boldsymbol{V(R)}$ и $\boldsymbol{S(R)}$, которыми они на самом деле и являются. Тогда $\frac{dV}{dR} = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)' = 4\pi R^2 = S(R)$. Т. е. приращение объёма равно поерхности шара. Может быть, доказанная теорема и раскрывает суть этих формул? Кстати подобная связь формул справедлива и для площади круга и длины окружности. Об этом поговорим в следующей части нашей заметки.

Литература.

1. А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович, «Краткий курс математического анализа», М., «НАУКА», 1971

2. В. Т. Воднев и др., «Основные математические формулы», Минск, «Высшая школа», 1980

Приложение **2**

Теорема* о сечении тора сферой.

Посвящаю Н. М.

Если радиусы тора (a,b) и радиус сферы (c) связаны соотношением $a^2+b^2=c^2$ и тор и сфера имеют общий центр симметрии, то сфера рассекает тор на две равновеликие части.

Рассмотрим тор и сферу с общим центром симметрии в точке O (Рис. 1).

Сечение тора показано чёрным цветом, сечение сферы – синим. Доказать, что $V_1=V_2$, где V_1 - объём тела, образованного вращением дуг тора ($\cup ABC$) и сферы ($\cup CDA$), а V_2 - объём тела, образованного вращением дуг тора ($\cup AEC$) и сферы ($\cup CDA$) вокруг вертикальной оси.

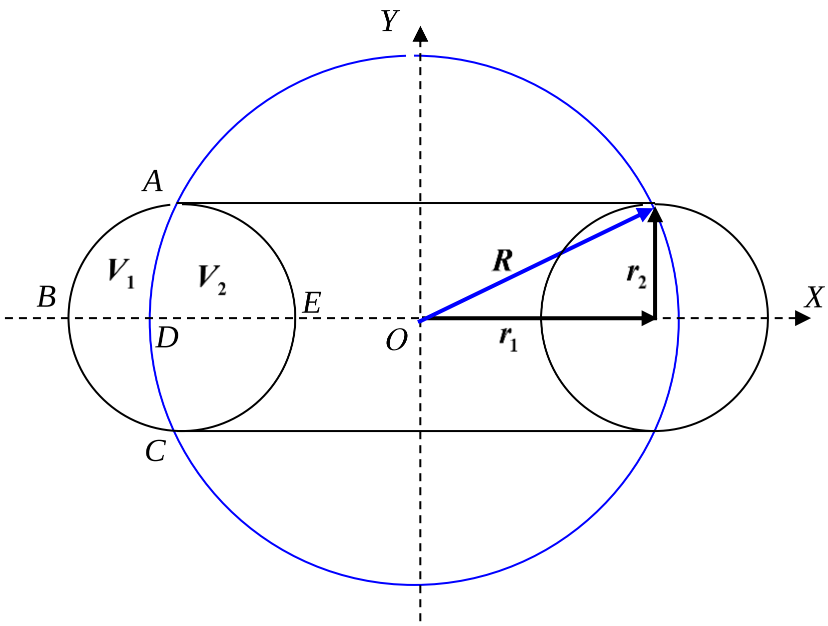

Рис. 1

Здесь $r_1=a$, $r_2=b$, $R=c$

Доказательство:

Объём V_1 можно вычислить как разность объёмов образованных вращением дуги $\cup ABC$ и дуги $\cup CDA$.

$$V_1=2\pi\int_0^{r_2}\left(\sqrt{r_2^2-y^2}+r_1\right)^2dy-2\pi\int_0^{r_2}\left(r_1^2+r_2^2-y^2\right)dy=$$

$$= 2\pi \int_0^{r_2} 2r_1 \sqrt{r_2^2 - y^2}\, dy = 4\pi r_1 \left(\frac{y}{2}\sqrt{r_2^2 - y^2} + \frac{r_2^2}{2} Arc\sin\frac{y}{r_2} \right)_0^{r_2} = \pi^2 r_1 r_2^2 .$$

Известно, что объём тора равен $V = 2\pi^2 r_1 r_2^2$, следовательно, $V_1 = \frac{1}{2}V$, а отсюда заключаем, что $V_1 = V_2$.

Что и требовалось доказать.

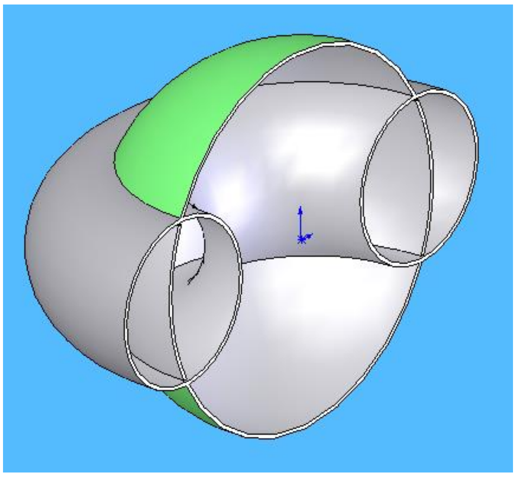

Рис. 2