

## Золотое сечение в векторном представлении линейной двучленно-аддитивной рекурсии

*Аннотация.* Предложен новый подход к представлению двучленно-аддитивной рекурсии  $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$  в виде векторного отображения на комплексной плоскости. Показано, что независимо от двух начальных условий  $v_0, v_1$  все суммируемые векторы последовательно выстраиваются с всё большим приближением к линии динамического равновесия, названной нами "золотой линией". Для любого расположения исходной пары векторов произвольной длины и направления золотая линия всегда пересекает исходный вектор  $v_0$ , параллельно перенесенный к концу вектора  $v_1$ , и делит его в золотой пропорции.

Куда вектор покажет – туда и путь держи;  
там царство золотой пропорции найдешь...

**Вступление.** В своих рассуждениях-умозаключениях мы часто и вынужденно обращаемся к математике. Ибо порог убедительности в ней значительно выше, нежели в других науках, и поддерживается отчетливостью и недвусмысленностью утверждений [1].

При этом нередко легче доказать некоторые общие положения, нежели их отдельные проявления. А уже потом переходить к частным задачам, решить которые бывает затруднительно. То есть целесообразнее выделить по максимуму наиболее значимые моменты и обосновать основной тезис.

В научном познании метод носит название дедукции (лат. *deductio* выведение) и заключается в переходе от общего к частному. От некоторых общих утверждений к частным результатам-следствиям.

В отличие от индукции, которая может привести как к верным, так и к неверным результатам, метод дедукции полностью строится на основе логики, делая наше мышление более точным и эффективным. Все общие теоремы мы доказываем именно так и для того, чтобы затем использовать для решения различных частных задач.

Двучленно-аддитивная рекурсия вида  $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$  независимо от начальных условий  $v_0, v_1$  всегда сходится к золотому аттрактору  $\Phi = \phi^{-1} \approx 1,618$  – предельному отношению двух соседних элементов числовой последовательности, дискретный индекс  $n \rightarrow \infty$ .

Исходные числа  $v_0, v_1$  могут быть любой природы: целые и действительные, рациональные, иррациональные и даже комплексные. Единственно условие: они не равны одновременно нулю.

Для вывода общих положений вполне логично рассмотреть множество  $S$  комплексных чисел с их представлением в виде векторов на комплексной плоскости, совместив преимущества линейной алгебры и геометрии. Такой подход напрашивается сам собой. Однако в области аддитивных рекурсий и золотого сечения (ЗС) он как-то выпал из поля зрения исследователей. Отсюда наш интерес к комплексным числам. Тем более что их аксиоматика логически непротиворечива, и только в множестве  $S$  выполняется основная теорема алгебры: любой многочлен  $k$ -й степени имеет  $k$  корней.

Не лишне также напомнить базовый принцип [1]: суждения облачаются в словесную форму в виде предложений, а понятия – через термины. Каждый термин должен иметь ровно один точно очерченный смысл. Чем точнее очерчен смысл термина – тем убедительнее использующие этот термин доказательства.

В нашем последующем изложении золотое сечение распространяется-обобщается на произвольные числа. Но нет никакого понятийно-надуманного суррогата типа обобщенных золотых сечений "ОЗС" (?), которые самозабвенно тиражируют отдельные авторы. Никакого порождения очередного пресловутого "ОЗС". Ни понятийно, ни терминологически. Золотое сечение уникально, единственно и однозначно ассоциируется с конкретной математической константой  $\Phi$ , которая обобщению не подлежит. На то она и константа.

**Золотое сечение и числа Фибоначчи.** Во многих работах золотое сечение увязывают с числами Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Довольно часто их даже отождествляют.

Подобное сравнение в какой-то мере справедливо, поскольку отношение соседних элементов ряда в пределе стремится к константе золотого сечения  $\Phi \approx 1,618$ . Вместе с тем это две разные математические структуры [2], хотя имеют общую подоснову.

Например, некоторые дробно-рациональные последовательности стремятся (чаще всего путем суммирования) к числу  $\pi$ . Но из-за этого трансцендентное число  $\pi$  никто не уравнивает с рациональными дробями.

Дело здесь не в числах Фибоначчи, которые были известны ещё в древней Индии [3, с. 126], где они применялись в метрических науках задолго до распространения в Европе. Частный, но довольно примечательный случай числовых рядов. За счет простейших "затравочных" чисел – начальных условий (0, 1) или (1, 1) для двучленно-аддитивной рекурсии вида  $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$ .

На таких исходных данных чрезвычайно удобно отрабатывать-отшлифовывать различные формулы и соотношения, связывающие элементы числовой последовательности.

Главным же являются не значения элементов ряда, а линейная двучленно-аддитивная форма их рекуррентного образования. С единичными коэффициентами и в общем случае произвольной парой начальных условий  $(v_0, v_1)$ , не равных одновременно нулю.

Именно линейное однородное рекуррентное уравнение второго порядка – "код к шифру ЗС", но не сами числа Фибоначчи. А комплексные числа – универсальная отмычка для дверей, ведущих к наиболее общим представлениям о золотом феномене.

**Золотое сечение и аддитивная рекурсия.** Геометрически-пропорциональное деление отрезка единичной длины на две части и двучленно-аддитивная рекурсия с единичными коэффициентами обладают сходным строением [4]:

$$\begin{aligned} 1 &= b + a, \\ v_{n+1} &= v_n + v_{n-1}. \end{aligned}$$

Действительно, в обоих случаях имеем обычное суммирование величин.

Располагаем только двумя слагаемыми, ибо меньше их просто не бывает.

Весовые коэффициенты при слагаемых равны единице.

Отличие – лишь в предмете исследования и соответствующем способе записи.

Главный лейтмотив общий – это двучленно-аддитивная структура. Разнятся только математические формы выражения. Кажущееся несовпадение становится менее значимым, если эти равенства разделить на величины  $b, v_n$ :

$$\begin{aligned} 1/b - (b/a)^{-1} &= 1; \\ v_{n+1}/v_n - (v_n/v_{n-1})^{-1} &= 1. \end{aligned}$$

Теперь достаточно выбрать геометрическую пропорцию  $1/b = b/a$  и при  $n \rightarrow \infty$  идентичность форм становится ещё более отчетливой. Совпадение обусловлено сведением к одному и тому же квадратному характеристическому уравнению  $z^2 - z - 1 = 0$ .

Поэтому, несмотря на визуальное различие, отношение пар соседних объектов в области больших чисел  $n$ ,  $v \rightarrow \infty$  равно золотой константе  $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ :

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{a} = \Phi = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

Удивительно было бы другое, если при таком несомненном родстве модели приводили к разным результатам. Однако повторимся, в математическом аспекте это, конечно, различные структуры. Хотя бы своим разным описанием и применением.

**Векторное представление.** Итак, сходимость к константе золотого сечения не зависит от выбора начальных условий рекурсии. Следовательно, исходные числа рекуррентной последовательности могут быть самые разные: целые и дробные, рациональные и иррациональные, действительные и мнимые. Положительные и отрицательные.

Рассмотрим общий случай линейной двучленно-аддитивной рекурсии с единичными коэффициентами и произвольными начальными условиями в виде комплексных чисел:

$$v_{n+1} = v_n + v_{n-1}, \quad v_0 = a + ib, \quad v_1 = c + id, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $a, b, c, d$  – действительные числа (целые, рациональные, иррациональные),  $i$  – мнимая единица такая, что  $i^2 + 1 = 0$ .

Легко показать, что члены образуемой рекуррентной последовательности выражаются через начальные условия  $v_0, v_1$  и числа Фибоначчи  $F_n$ :

$$v_n = (aF_{n-1} + cF_n) + i(bF_{n-1} + dF_n) = F_{n-1}(v_0 + v_1 F_n / F_{n-1}).$$

Числа Фибоначчи играют здесь роль формообразующей основы для разных исходных данных и соответствующей генерации бесконечного множества числовых рядов с золотым аттрактором. Действительно, предел произведения равен произведению пределов, поэтому отношение соседних элементов числовой последовательности стремится к константе золотого сечения  $\Phi$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_0 + v_1 F_{n+1} / F_n}{v_0 + v_1 F_n / F_{n-1}} = \Phi = \phi^{-1}.$$

Величины  $v_n$  можно представить в виде векторов, исходящих из общей точки – начала координат на комплексной плоскости. Для их последовательного суммирования применимо известное правило параллелограмма (рис. 1).

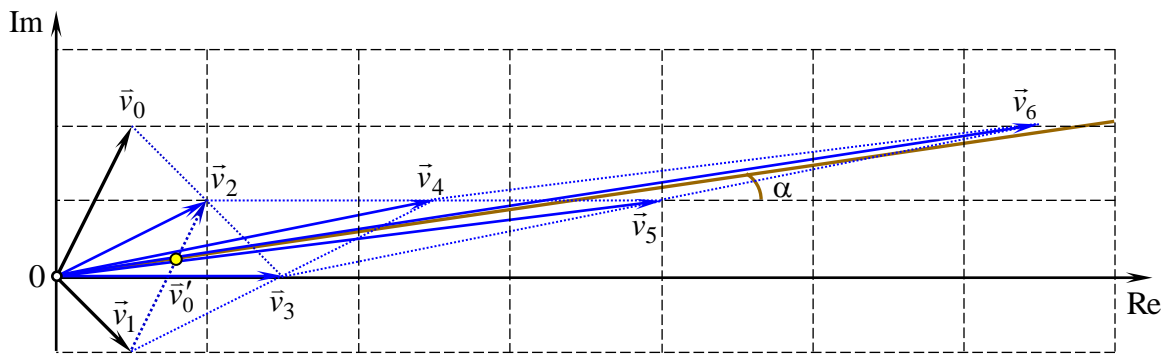


Рис. 1. Линейная двучленно-аддитивная рекурсия в векторном представлении

По мере увеличения дискретного индекса  $n$ , векторы выстраиваются вдоль линии с углом наклона  $\alpha$ , тангенс которого равен предельному отношению мнимой и действительной частей  $v_n$

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bF_{n-1} + dF_n}{aF_{n-1} + cF_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b \cdot F_{n-1} / F_n + d}{a \cdot F_{n-1} / F_n + c} = \frac{b \cdot \phi + d}{a \cdot \phi + c} = \frac{b + d \cdot \Phi}{a + c \cdot \Phi}.$$

Назовем её линией динамического равновесия или золотой линией (пояснение ниже).

Как видно из рисунка, векторы  $\vec{v}_n$  располагаются попеременно по обе стороны от золотой линии, всё ближе к ней приближаясь.

Подобное происходит с отношением чисел Фибоначчи  $F_{n+1} / F_n$ , которое в декартовой системе координат  $(x, y) = (n, F_n)$  колеблется относительно горизонтальной линии  $y = \Phi$ .

**Вывод фундаментальных свойств.** Продолжим анализ. Прежде всего, отметим, что золотая линия всегда совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{v}_0$  и  $\Phi \cdot \vec{v}_1$ .

Далее, не теряя общности рассуждений, для большей наглядности графических построений примем  $d=0, v_1=c$ , то есть расположим начальный вектор  $v_1$  вдоль действительной оси Re.

Угол наклона золотой линии равен  $\alpha = \arctg[b/(a+c\Phi)]$ .

Уравнение золотой линии  $y = kx = x \cdot b/(a+c\Phi)$ .

Параллелограмм (желтого цвета), построенный на начальных векторах  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$ , назовем исходным или начальным (рис. 2). Его диагонали:

- исходит из начала координат и совпадает с вектором  $\vec{v}_2$   $d' = \sqrt{b^2 + (c+a)^2}$  ;
- соединяет концы начальных векторов  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$   $d'' = \sqrt{b^2 + (c-a)^2}$  .

Параллелограмм, построенный на векторах  $v_0, v_1\Phi$ , назовем параллелограммом роста. Его диагонали:

- исходит из начала координат и совпадает с золотой линией  $D' = \sqrt{b^2 + (c\Phi+a)^2}$  ;
- соединяет концы векторов  $\vec{v}_0$  и  $\Phi \cdot \vec{v}_1$   $D'' = \sqrt{b^2 + (c\Phi-a)^2}$  .

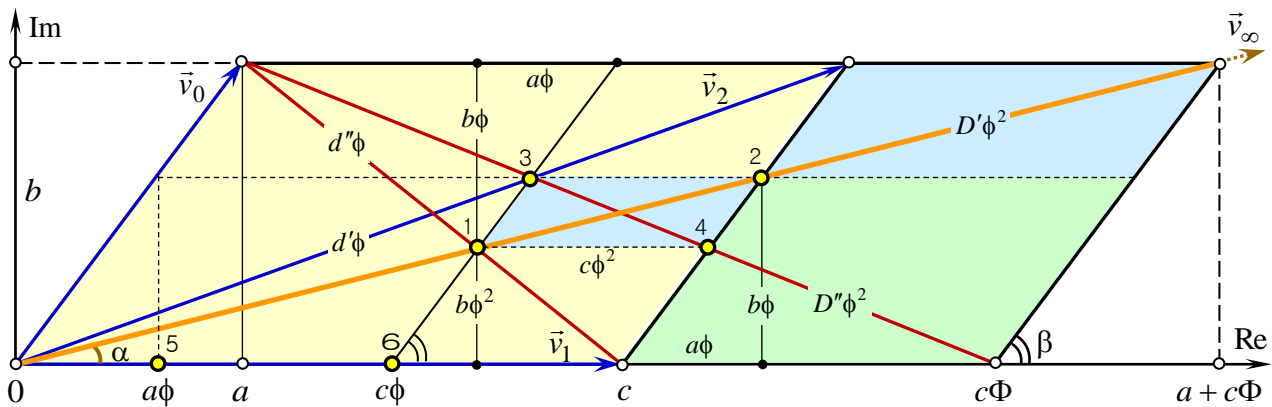


Рис. 2. Золотая линия и набор золотых сечений относительно априори заданных начальных векторов

Из подобия геометрических фигур следует, что диагонали параллелограмма роста  $D', D''$  при пересечении с диагоналями исходного параллелограмма  $d', d''$  и начальным вектором  $\vec{v}_0$ , сдвинутым вдоль вектора  $\vec{v}_1$  к его концу, образуют целый "букет" золотых сечений 1–5. Отсюда следуют главные положения.

Для любой пары комплексных чисел  $v_0 = a + ib$  и  $v_1 = c + id$ , образующих исходный параллелограмм с диагоналями  $d', d''$ , векторы  $\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \vec{v}_{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$  при  $n \rightarrow \infty$  воссоздают золотую линию, которая определяет параллелограмм роста с диагоналями  $D', D''$  и следующим набором золотых сечений:

- диагональ  $D'$ , совпадающая с золотой линией, делится сама золотыми сечениями в двух точках 1–2 и делит золотым сечением соответственно диагональ  $d''$  и начальный вектор  $\vec{v}_0$ , параллельно перенесенный в конец вектора  $\vec{v}_1$ ;
- диагональ  $D''$  делится сама золотыми сечениями в двух точках 3–4, а также делит золотым сечением соответственно диагональ  $d'$  и сдвинутый начальный вектор  $\vec{v}_0$ ;
- линия, проведенная через точки 1 и 3, параллельна начальному вектору  $\vec{v}_0$  и делит золотым сечением начальный вектор  $\vec{v}_1$  в точке 6.

Выявленные точки ЗС имеют следующие координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= (a+c\Phi)\phi^2 = \phi(c+a\phi), & y_1 &= b\phi^2; \\ x_2 &= x_1\Phi = c+a\phi, & y_2 &= b\phi; \\ x_3 &= (a+c)\phi, & y_3 &= b\phi; \\ x_4 &= x_2+c\phi^2 = c+a\phi^2, & y_4 &= b\phi^2. \end{aligned}$$

Точки 5–6 делят золотым сечением реальные части начальных векторов  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$ .

Окрашенные в голубой цвет параллелограммы являются уменьшенными точными копиями параллелограмма роста: средний четырехугольник с вершинами 1–4 уменьшен в  $\Phi^3 \approx 4,236$  раза, верхний правый – в  $\Phi^2 \approx 2,618$  раза.

Ниже него зеленый параллелограмм – уменьшенная в  $\Phi$  раз точная копия исходного параллелограмма, построенного на начальных векторах  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$ .

Характерные примеры векторного представления ЗС приведены на рис. 3.

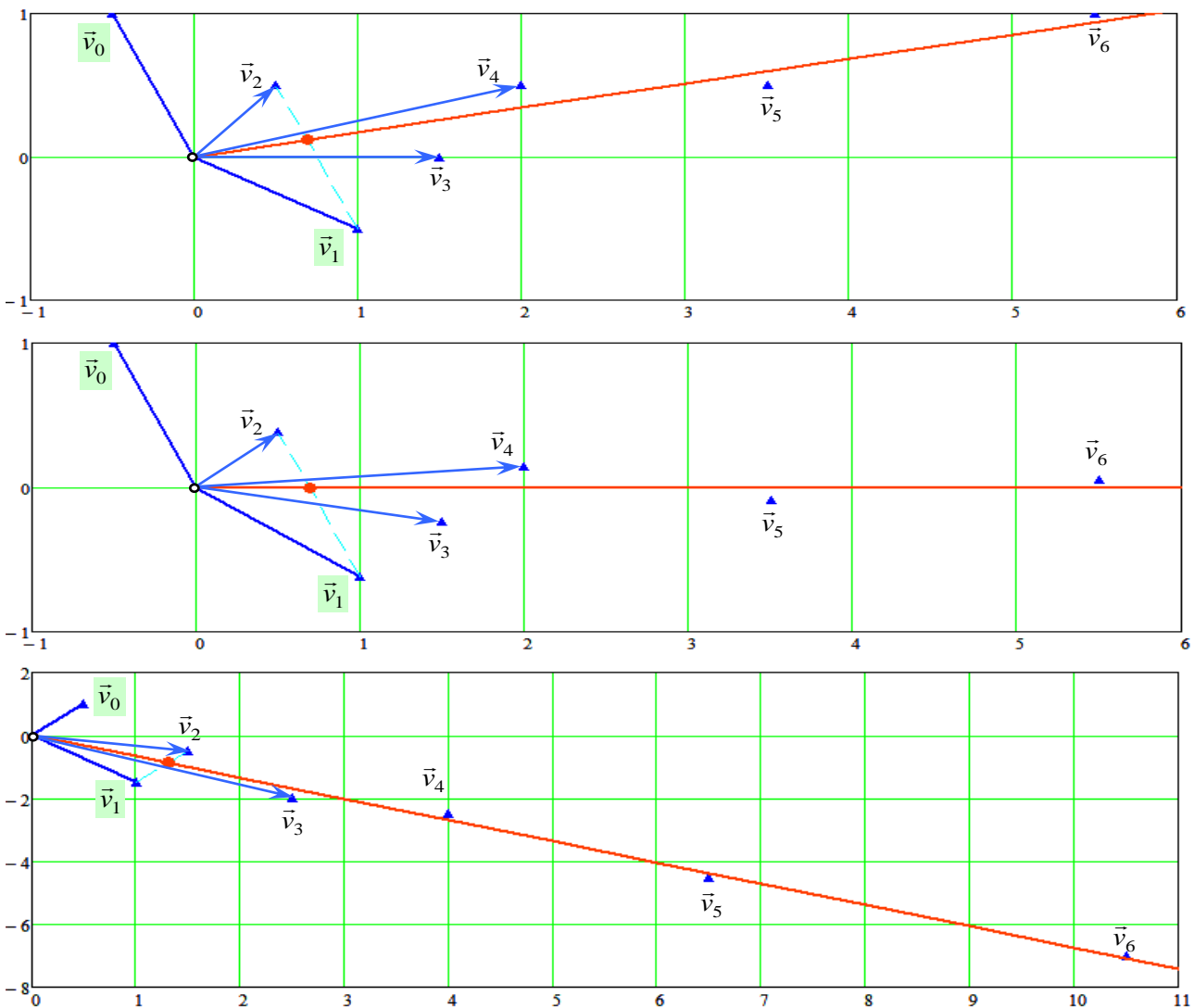


Рис. 3. Характерные примеры векторного представления ЗС

Точка пересечения золотой линии и сдвинутого начального вектора  $v'_0$  выражается мнимым числом  $s = \frac{d-rc}{k-r}(1+i \cdot k)$ , где  $k = \frac{b \cdot \phi + d}{a \cdot \phi + c}$  – угловой коэффициент золотой линии,  $r = b/a$  – угловой коэффициент вектора  $v'_0$ ,  $v_0 = a + ib$ ,  $v_1 = c + id$ .

Рассмотрим частный случай рекурсии, когда начальные условия заданы двумя ортогональными векторами  $v_0 = ib$ ,  $v_1 = a$ .

В результате последовательного сложения векторов  $\vec{v}_n$ , исходящих из начала координат, формируется такая последовательность комплексных чисел:

$$ib, a, a+ib, 2a+bi, 3a+2bi, 5a+3bi, 8a+5bi, \dots, F_n a + F_{n-1} bi, \dots$$

с предельным углом наклона векторов, как отношения  $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b \cdot F_{n-1}}{a \cdot F_n} = \frac{b}{a} \cdot \phi$ .

Здесь просматривается аналогия с образованием числовых последовательностей Фибоначчи  $f_{n+1} = F_n f_1 + F_{n-1} f_0$  с произвольными начальными условиями  $f_0, f_1$ .

Можно также принять начальное значение  $v_0 = 1$ , как признак-обозначение целого. Тогда независимо от вещественной величины  $v_1 = c$ , все векторы выстраиваются вдоль действительной оси, сливаясь с ней. Линия золотого сечения по-прежнему делит начальный вектор в крайнем и среднем отношении. Просто мы не воспринимаем это визуально, так как золотая линия накладывается на координатную ось.

**Спирали.** По образному сравнению Гёте, спираль – кривая жизни. Для логарифмических спиралей, скорость роста которых близка к константе золотого сечения  $\Phi$ , данное сравнение имеет не косвенное, а прямое отношение. Многие биологические объекты (др.-греч. βίος жизнь) развиваются на основе модели золотого роста [5].

Если в векторном представлении линейной двучленно-аддитивной рекурсии принять начальные условия в виде ортогональных векторов единичной длины  $v_0 = i$ ,  $v_1 = 1$ , то золотая линия накладывается на диагональ золотого прямоугольника  $1 \times \Phi$ .

Он обладает характерной особенностью: при отсечении от него квадрата оставшаяся часть – также золотой прямоугольник, подобный исходному (рис. 4).

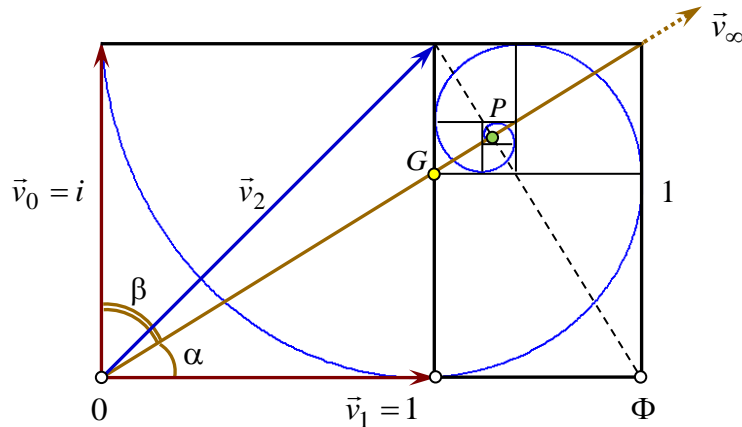


Рис. 4. Золотая линия и золотая спираль в золотом прямоугольнике

Последовательное повторение такой процедуры с отсечением квадратов приводит к тому, что вновь получаемые вложенные прямоугольники стягиваются в точку  $P$ , лежащую на пересечении их диагоналей. Из этой точки можно вычертить золотую спираль [6, с. 240-242] – частный случай логарифмической (равноугольной, изогональной) спирали. Коэффициент её роста равен  $\Phi^4$  и показывает, во сколько раз изменился полярный радиус спирали при полном повороте на угол  $2\pi$ . Спираль обладает свойством, подобным свойству окружности: касательная в каждой точке образует с радиус-вектором один и тот же угол.

Легко показать, что диагонали прямоугольников пересекаются под прямым углом, образуя полюс вращения  $P$  спирали, который расположен на золотой линии:

$$P = \frac{\Phi + i}{\sqrt{5}} \Phi = \frac{\Phi + i}{2 - \phi} \approx 1,171 + 0,724 \cdot i.$$

Можно также вычертить приближенную золотую спираль Дюрера, составленную из четвертинок окружностей внутри квадратов.

Эти спирали различаются своим построением, но практически совпадают. Хотя есть один принципиальный момент.

Формально спираль определяется исходя из монотонности и непрерывности кривизны как функции длины дуги кривой. Спиралью в этом смысле является четвертинка эллипса между двумя соседними вершинами.

Это вытекает из теоремы о четырех вершинах [7], которая утверждает, что функция кривизны простой замкнутой гладкой плоской кривой имеет, по меньшей мере, четыре локальных экстремума (два минимума и два максимума). То есть такая кривая состоит как минимум из четырех спиральных дуг. Поэтому логарифмическая спираль и её частный случай золотой спирали, наиболее точно воспроизводится не четвертинками окружностей (по Дюреру), а частями эллипсов. Эллипс с неравными полуосями имеет в точности четыре вершины: два локальных максимума кривизны в местах пересечения эллипса с большой осью, и два локальных минимума в местах пересечения с малой осью.

Эллипсы проявляют себя наиболее явно при построении спирали с исходными векторами произвольной длины и направления.

Как и выше, на примере золотого прямоугольника, от базового параллелограмма роста будем отсекать параллелограммы вдоль линий, параллельных исходным векторам и проходящих через точки их золотого сечения (рис. 5):

- 1) слева вдоль линии, параллельной  $\vec{v}_0$  и проходящей через точку ЗС отрезка  $c\Phi$ ;
- 2) снизу вдоль линии, параллельной  $\vec{v}_1$  и проходящей через точку ЗС отрезка  $b$  (вектора  $\vec{v}_0$ );
- 3) справа, как в п. 1 через свою точку ЗС; 4) сверху, как в п. 2 через свою точку ЗС.

И так далее, двигаясь против часовой стрелки. До бесконечности, в любом масштабе, наподобие конструирования фрактальных объектов.

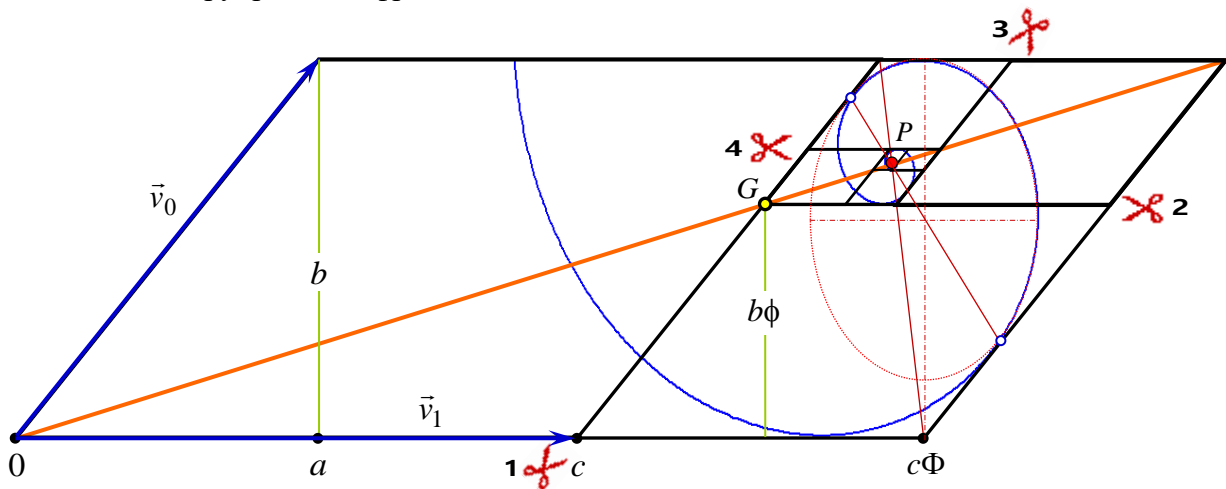


Рис. 5. Спираль с полюсом вращения  $P$  на золотой линии

В итоге уменьшающиеся параллелограммы стягиваются в точку  $P$  – полюс спирали, которая касается изнутри сторон параллелограммов, остающихся и/или отсекаемых в результате "ножничной экзекуции". Полюс спирали  $P$  расположен на золотой линии в точке пересечения диагоналей параллелограммов с координатами:

$$P = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} (a + c\Phi + i \cdot b) = \frac{1}{2 - \phi} (a + c\Phi + i \cdot b).$$

По сути, это золотая спираль, но масштабированная: растянутая или сплюснутая и с поворотом вокруг полюса, согласно величинам и направлениям исходных векторов  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$ .

"Склеить" её можно с помощью эллипсов.

Один из них приведен на рис. 5. Как видно, линия, соединяющая точки сопряжения эллипса со сторонами параллелограммов, проходит через полюс спирали и центр эллипса.

В общем случае расположения исходных векторов  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$  для построения спирали можно перейти к декартовой косоугольной системе координат.

**Рекурсия с добавкой.** Независимо от начальных значений, двучленно-аддитивная рекурсия с единичными коэффициентами приводит к константе золотого сечения  $\Phi \approx 1.618$ , как аттрактору рекуррентной последовательности – пределу отношения соседних членов ряда. Более того, в аддитивной последовательности допустимо добавлять всевозможные функциональные зависимости  $\varepsilon_n$ , образуя линейное неоднородное рекуррентное уравнение, и модель по-прежнему будет иметь золотой аттрактор [2, 8]. – Главное, чтобы эти слагаемые после некоторого значения индекса  $n$  возрастали не быстрее, чем  $\Phi^n$ .

Даже если, например  $\varepsilon_n = n^{1000}$ , то ряд  $x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + \varepsilon_n$  всё равно сходится к золотому аттрактору, поскольку со временем ( $n > 20650$ ) выполняется неравенство

$$n \cdot \ln \Phi > 1000 \cdot \ln n.$$

Но если положить  $\varepsilon_n = 2^n > \Phi^n$ , то золотоносность "сбивается", и новым аттрактором становится 2. При  $\varepsilon_n = 1,6^n < \Phi^n$  золотоносность сохраняется.

Добавку  $\varepsilon_n$  к базовой рекурсии можно рассматривать как некие шумы, накладываемые на основную модель, что в значительной мере приближает теоретическую конструкцию к реальным условиям. С учетом наличия неконтролируемых факторов и/или возмущающих воздействий.

**Рекурсия с отрицанием.** Рассмотрим рекурсию

$$v_{n+1} = -v_n + v_{n-1}, \quad v_0 = a + ib, \quad v_1 = c + id, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

с характеристическим уравнением  $x^2 + x - 1 = 0$  и корнями  $(-\Phi, \phi)$ .

Члены образуемой рекуррентной последовательности выражаются через начальные условия  $v_0, v_1$  и числа Фибоначчи  $F_n$ :

$$v_n = (-1)^n [(aF_{n-1} - cF_n) + i(bF_{n-1} - dF_n)] = (-1)^n F_{n-1} (v_0 - v_0 F_n / F_{n-1}).$$

Золотая линия по-прежнему пересекает вектор  $\vec{v}'_0$ , сдвинутый вдоль вектора  $(-\vec{v}_1)$ , и делит его золотым сечением (рис. 6).

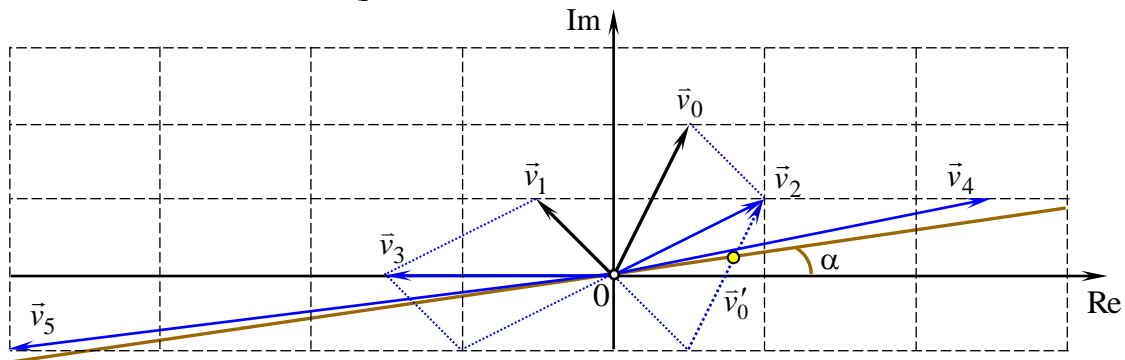


Рис. 6. Линейная рекурсия  $v_{n+1} = -v_n + v_{n-1}$  в векторном представлении

Теперь все векторы  $\vec{v}_n$  располагаются по одну сторону от золотой линии. Причем с четными и нечетными номерами по разные стороны от мнимой оси Im. – Нечто похожее на взмахи крыльев бабочки.



В принципе перед нами та же суммирующая рекурсия, только на каждом шаге складывается противоположный вектор  $(-\vec{v}_n)$ .

Учитывая свойство чисел Фибоначчи  $F_n \rightarrow \Phi^n/\sqrt{5}$ , предел отношения элементов ряда или аттрактор числовой последовательности равен:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n F_{n-1}}{(-1)^{n-1} F_{n-2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(v_0 - v_1 F_n/F_{n-1})}{(v_0 - v_1 F_{n-1}/F_{n-2})} = -\Phi \cdot \frac{v_0 - v_1 \Phi}{v_0 - v_1 \Phi} = -\Phi.$$

То есть аттрактор равен максимальному по модулю корню  $|\Phi|$  характеристического уравнения.

Точка пересечения золотой линии и сдвинутого начального вектора  $v'_0$  выражается мнимым числом  $s = -\frac{d-rc}{k-r}(1+i \cdot k)$ , где  $k = \frac{b \cdot \phi - d}{a \cdot \phi - c}$  – угловой коэффициент золотой линии,  $r = b/a$  – угловой коэффициент вектора  $v'_0$ . Некоторые примеры показаны на рис. 7.

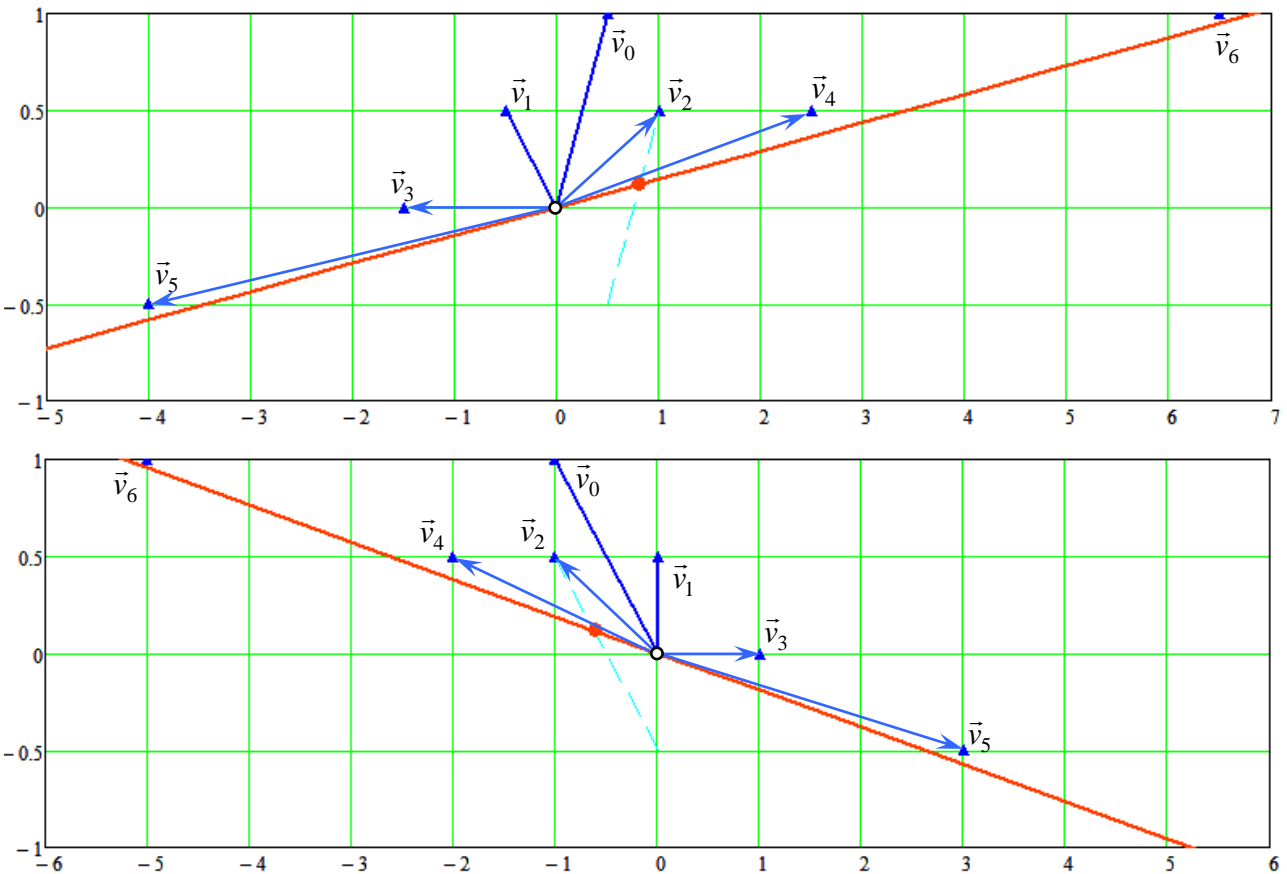


Рис. 7. Примеры линейной рекурсии с отрицанием  $v_{n+1} = -v_n + v_{n-1}$  в векторном представлении

**Вместо заключения.** Открыта, но пока не перевернута ещё одна страница в познании-осмыслении феномена золотого сечения. На это раз с помощью линейной двучленно-аддитивной рекурсии  $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$  с начальными условиями  $v_0, v_1$ , заданными комплексными числами с их векторным отображением.

Такой подход позволил обосновать золотую линию, вдоль которой выстраиваются векторы  $\vec{v}_n$ , всё ближе к ней приближаясь по мере роста дискретного индекса (времени)  $n$ .

Одновременно собран целый букет истинных золотых сечений с базовой константой  $\Phi$  относительно априори заданных начальных векторов.

В частности, доказано, что для любой начальной пары комплексных чисел векторы  $\vec{v}_n$  при  $n \rightarrow \infty$  воссоздают золотую линию, которая пересекает исходный вектор  $\vec{v}_0$ , параллельно перенесенный к концу вектора  $\vec{v}_1$ , и делит его золотым сечением.

Насколько всё это важно? – На наш взгляд, изложенный подход, например, позволяет наиболее полно воссоздать общую картину формирования филлотаксиса.


Ответить на самый главный вопрос: почему? или в результате действия какого механизма? многие растения в процессе своего развития в точности выходят на золотой угол

$$\varphi = 2\pi \cdot \phi^2 = 2\pi \cdot (2 - \Phi) \rightarrow 180 \cdot (3 - \sqrt{5}) \approx 137,5^\circ.$$

Будь-то листья на стебле, семена в корзинках подсолнечника, чешуйки на шишках хвойных деревьев, пучки колючек на бородавчатых выростах кактусов и так далее...

### Литература:

1. Успенский В.А. Простейшие примеры математических доказательств. 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МЦНМО, 2012. – 56 с.
2. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 20.11.2011. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.
3. Goonatilake S. Toward a global science: mining civilizational knowledge. – Bloomington: Indiana University Press, 1998. – 318 p.
4. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 22.09.2013. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.
5. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ.17972, 07.04.2013. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.
6. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию: пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – <http://eek.diary.ru/p165970944.htm>.
7. Седых В.Д. Теорема о четырех вершинах плоской кривой и ее обобщения // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – № 9. – С. 122-127.
8. Василенко С.Л. Обобщенные рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2020   
Харьков, Украина



Авторские страницы:

<http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00>

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>