

От пентаграммы к уникальному разбиению числовой оси на пропорциональные отрезки

Аннотация. Предложено уникальное разбиение числовой действительной оси точками на интервалы с использованием степеней константы золотого сечения Φ^n и бинарного дополнения $D = 1011010110110101101011\dots$ к бесконечному слову Фибоначчи. Символы 1 и 0 отражают отрезки длиной соответственно 1 и $\phi = \Phi^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2$, на которых зафиксированы по две точки золотого сечения. Полученное разбиение дает максимально возможное число пропорциональных отрезков и более чем в три раза превышает альтернативное деление на равные части.

Точка, точка, два крючочка,
Носик, ротик, оборотик,
Палка, палка, огуречик, –
Вот и вышел человечек

Циркуль и линейка в познавательном процессе.

История геометрии тесно связана с развитием теории геометрических построений, которыми с древности занимались ученые и земледельцы, архитекторы и строители, ювелиры и др.

С античных времен известен раздел евклидовой геометрии – построения с помощью циркуля и линейки, которые объединяют в себе «множество всех точек, прямых и окружностей на плоскости (только такие объекты можно строить циркулем и линейкой)» [1, с. 50].

Метод имеет отношение исключительно к геометрическим чертежам на плоскости.

Поэтому «построенные эллипсоидным методом с помощью циркуля и линейки без делений прямоугольный метатетраэдр и метапирамида» [2] больше похожи на авторские фантазии, имеющие мало общего с теорией и практикой.

В задачах на построение циркуль и линейка считаются идеальными инструментами. В частности, линейка имеет только одну сторону бесконечной длины без делений, циркуль может иметь сколь угодно малый или большой раствор.

Датчанин Г. Мор и итальянец Л. Маскерони в 17–18 веке независимо друг от друга пришли к выводу: всякая геометрическая задача на построение конфигурации точек, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена с помощью одного циркуля. Несколько позднее француз Ж. Понселе и швейцарец Я. Штейнер доказали, что такую задачу можно решить одной линейкой, если на плоскости построена какая-либо окружность с отмеченным её центром.

Любопытный факт [3]: на государственном флаге Ирана в центре белой полосы находится государственная эмблема страны (1980). Геральдический знак представляет стилизованную под тюльпан надпись "Аллах" и составлен из четырех полумесяцев и меча, схематическая форма которых вычерчена ... циркулем и линейкой. В таком подходе к образованию символики невольно просматривается сравнение единого и единственного в арабском мире бога с окружностью и бесконечной прямой. Допустима также ассоциативная связь с концепцией христианских теологов о боге, как великом архитекторе (геометре) Вселенной.

Возможно, поэтому многие исследователи тайн мироздания обращаются к геометрическим моделям, облекая их в оболочку сакральных начал – всего того, что соотносится с божественно-религиозным феноменом. Небесным и потусторонним, иррациональным и мистическим.

Евклид использовал циркуль только для проведения окружности с данным центром через данную точку. Переносить циркулем отрезки нельзя. Для этого существует отдельный способ откладывания отрезка от точки. Евклид считал существующими только те фигуры, которые можно построить, тем самым, как бы взывая-побуждая их к бытию. При этом решение задачи на построение некой фигуры де-факто становится доказательством утверждения о её существовании.

Поэтому ученый не говорит о фигурах, которые невозможно построить циркулем и линейкой. Задача на построение – это, по сути, синтез математического образа-объекта, который предполагает четкий алгоритм или последовательность шагов-операций и одновременно обосновывает факт существования такого объекта.

Циркуль и линейка не просто исправляют несовершенство наших рук. Они инициировали познавательный процесс, содействуя появлению оригинальных математических подходов и философских учений античности.

И в наши дни они сохраняют большой методологический потенциал для развития современной философии, которая вместе с математическими знаниями оттачивают остроту абстрактного мышления.

Задолго до Архимеда древнегреческие ученые придавали большое значение делению окружности на равные части и построению правильных n -угольников.

При разработке методов их построения исторически сложились два направления: в Древней Греции определение стороны многоугольника a_n через радиус R описанной окружности, в странах ислама – построение фигуры по заданной длине стороны.

Синтез пентаграммы по Птолемею.

Пятый порядок во все времена имел особую притягательную силу [4]. Не случайно эмблемой своего союза пифагорейцы выбрали пентаграмму – равноугольную пятиконечную звезду, в изображение которой вкладывался мистический смысл.

Пятиконечной звезде – около 3 тысяч лет. Её первые изображения донесли до нас вавилонские глиняные таблички [5]. Совершенная конфигурация этой геометрической фигуры радует глаз и разум. Красота формы пентаграммы вытекает из внутренней гармонии математического строения.

Звездчатый пятиугольник буквально соткан из золотой пропорции.

Напомним, что пентагон – правильный пятиугольник, пентаграмма (греч. *pen*те пять и *gram*ма линия) или пифагорейский пентакль – звездчатый пятиугольник, образованный диагоналями правильного пятиугольника.

Примечательно, что $n = 5$ – минимальное число составления звездчатого n -угольника, причем единственного вида. Пятиконечная звезда относится к классу "нераспадающихся" единых многоугольников, не являясь соединениями других правильных или звездчатых многоугольников.

Так, звездчатая форма шестиугольника (гексаграмма) является соединением двух треугольников. В квадрате пересечение диагоналей дает равносторонний крест. Семиугольник имеет две звездчатые формы. И так далее.

Немецкий художник и математик А. Дюрер (1471–1527) в своем труде «Руководство к измерению циркулем и линейкой» обсуждал методы построения правильных многоугольников и теоретически точный способ построения правильного пятиугольника, заимствованный из великого трактата по небесной механике "Альмагест" Клавдия Птолемея (ок. 100 – ок. 170).

Приведем распространенный способ построения пентагона и пентаграммы в заданной окружности (рис. 1), который предложил Птолемей в 10 главе 1 книги своего сочинения.

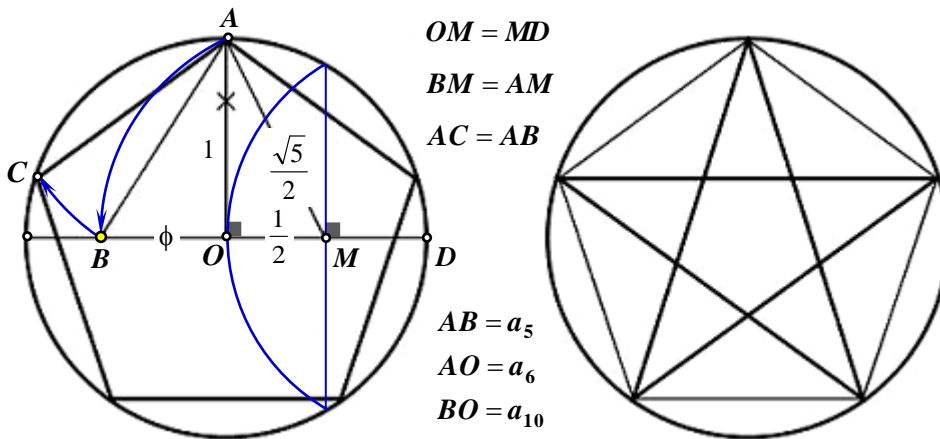


Рис. 1. Распространенный метод построения правильного пятиугольника и пентаграммы в заданной окружности, a_n – сторона n -угольника.

Возможно, в век компьютерных технологий и графики это не столь актуально, но остается важным для точного определения сложности (объема работы) исторически базового алгоритма построения звезды циркулем и линейкой.

Мы его несколько оосовременили, но полностью сохранили главный смысл и последовательность действий, изложенных, например, в работах [5, гл. 15; 6, с. 94-95].

Выбор единицы длины находится всецело в нашем распоряжении, поэтому радиус окружности можно принять равным 1; $\Phi = \phi^{-1} = (1 + \sqrt{5})/2$ – константа золотого сечения.

В табл. 1 описан алгоритм последовательных операций с подсчетом числа шагов для каждой операции. Отдельным шагом считается проведение прямой линии или дуги окружности, в том числе до пресечения с другими линиями и дугами. Фиксация-обозначение точки кружочком – необязательное действие, и шагом не является.

Таблица 1. – Алгоритм построения правильной пентаграммы по Птоломею

№ п/п	Операция	Число шагов, s	
		линии	дуги
0	Проводится прямая линия, отмечается центр O и рисуется исходная окружность.	1	1
1	В точке O восстанавливается перпендикуляр к диаметру (две дуги-засечки и линия).	1	2
2	Находится середина M радиуса OD, для чего из точки D проводится дуга через точку O и далее соединительная прямая, она же перпендикуляр	1	1
3	На диаметре откладывается циркулем отрезок BM = AM.		1
4	На окружности откладываются отрезки, равные AB. Образуется пять точек для начертания правильного пятиугольника и/или пентаграммы.		3
5	Проводятся диагонали пятиугольника, воссоздающие пентаграмму.	5	
Всего шагов 16:		8	8

Описанный метод содержит деление радиуса описанной окружности в крайнем и среднем отношении (точка B), которое впоследствии назвали золотым сечением. Построение использует подход, изложенный в 13 книге "Начал Евклида" [9, с. 113]:

Предложение 8. Если у равностороннего и равноугольного пятиугольника прямые стягивают два смежных угла, то они делят друг друга в крайнем и среднем отношении и большие их отрезки равны стороне пятиугольника.

Часть радиуса OB является стороной правильного вписанного десятиугольника, что доказал еще в IV в. до н.э. Менелай, и для единичного радиуса численно равна константе ϕ .

Преимущество данного подхода состоит в том, что правильный пятиугольник и/или пентаграмма вписывается в заданную окружность. Однако размеры фигур при этом остаются неизвестными и на языке геометрии требуют проведения отдельных нетривиальных вычислений.

Пусть исходная мера задана рациональным числом радиуса описанной окружности R.

$$\text{Тогда сторона } a = R\sqrt{5-\sqrt{5}}/\sqrt{2} = R\sqrt{2-\phi}.$$

$$\text{Диагональ, она же и ширина пятиугольника } d = R\sqrt{5+\sqrt{5}}/\sqrt{2} = R\sqrt{2+\Phi} = a\Phi.$$

$$\text{Высота } h = d \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} = R(1 + \sqrt{2+\phi}/2).$$

Как видно, размеры звезды несоизмеримы с мерой радиуса или диаметра. Об этом говорит и сам Евклид в предложении 11 [9, с. 117]: «Если в круг, имеющий рациональный диаметр, вписывается равносторонний пятиугольник, то сторона пятиугольника будет иррациональной – так называемой "меньшей"».

Весьма примечательно, что количество шагов равно $16 = 2^4$, в том числе $8 = 2^3$ линий и $8 = 2^3$ окружностей (дуг). Степень двойки всегда воспринималась весьма позитивно, а геометрическая прогрессия 2^n играет важную роль в теории чисел:

2^n – сумма чисел в n -й строке треугольника Паскаля; сумма коэффициентов при x в разложении $(x+1)^n$; наибольшее число с кратчайшей цепочкой сложений, включающей n сложений; наибольшее число, имеющее $n + 1$ делителей; не является суммой двух или более последовательных чисел и т.д.

Например, Евклид в описательной форме показал [8, с. 97-100], что если простое число имеет вид $2^n - 1$ (числа Мерсенна), то число $2^{n-1}(2^n - 1)$ – совершенное, то есть равно сумме всех своих собственных делителей, отличных от самого числа. В 18 веке Л. Эйлер доказал, что любое четное совершенное число имеет такой вид. В настоящее время известно 51 совершенное число. Нечетных совершенных чисел пока не обнаружено.

Прямые и окружности (эллипсы), прямая и циркуль – не праздная прихоть античных ученых. Это один из философских столпов в общем познании бытия. А далее наудачу, или как говорится, куда кривая выведет. В том числе прямая, как частный случай линия нулевой кривизны. Собственно под кривизной понимают её отклонение от прямой линии, а кривизна количественно определяет меру изогнутости (искривленности) линии.

Альтернативный способ построения пентаграммы.

Подборку разных красивых способов построения правильного пятиугольника и соответственно пентаграммы можно найти, например, в работе [10].

Однако все они не являются оптимальными по числу выполняемых шагов.

Предложим альтернативное вычерчивание пентаграммы, исходя из заданной диагонали пентагона, определяющей ширину геометрической фигуры.

В табл. 2–3 описаны шаги-операции для построения золотого сечения отрезка и на его основе идеально правильной пентаграммы (рис. 2) с помощью циркуля и линейки без делений, как того требует евклидова геометрия, начиная с античных времен.

Таблица 2. – Золотое сечение (ЗС) отрезка

№ п/п	Операция	Число шагов, s	
		линии	дуги
1	На прямой линии l задается отрезок AB .	1	
2	Находится его середина O и одновременно к нему перпендикуляр.	1	2
3	Проводятся две полуокружности: из центра O и затем из центра B .		2
4	Чертится дуга из центра D , определяя ЗС G_1 .		1
5	Половинкой окружности из центра O определяется вторая точка ЗС G_2 .		1
Всего шагов 8:		2	6

Таблица 3. – Правильная пентаграмма

№ п/п	Операция	Число шагов, s	
		линии	дуги
1	Исходный отрезок AB делится двумя точками золотого сечения G_1, G_2 .	2	6
2	Проводятся две окружности с центрами G_1, G_2 до их пересечения в точках C_1, C_2 .		2
3	Из точки C_1 проводятся два луча через точки G_1, G_2 .	2	
4	Из концов исходного отрезка AB проводятся лучи через точку C_2 .	2	
Всего шагов 14:		6	8

Ширина звезды равна исходному отрезку AB длиной d , высота $h = d \cdot \sin 72^\circ \approx 0,951 d$.

Мы не ставим цель соревноваться с древнегреческими учеными – великолепными виртуозами в геометрии.

Тем не менее, стоит отметить отдельные особенности.

В нашем построении мера длины задана исходным отрезком d , который задает ширину правильной пентаграммы. Высота равна $h = d \cdot \sin 72^\circ = d \cdot \sin 2\pi/5$.

Количество шагов s (англ. *step*) при построении меньше. Для фиксации двух точек золотого сечения потребовалось $s = 8 = 2^3$ шагов, в том числе 2 линии и 6 дуг окружностей.

Всего для пентаграммы $s = 14$, включая 6 линий и $8 = 2^3$ дуг.

У Птоломея (см. рис. 1) $s = 16 = 2^4$, в том числе 8 линий и 8 дуг.

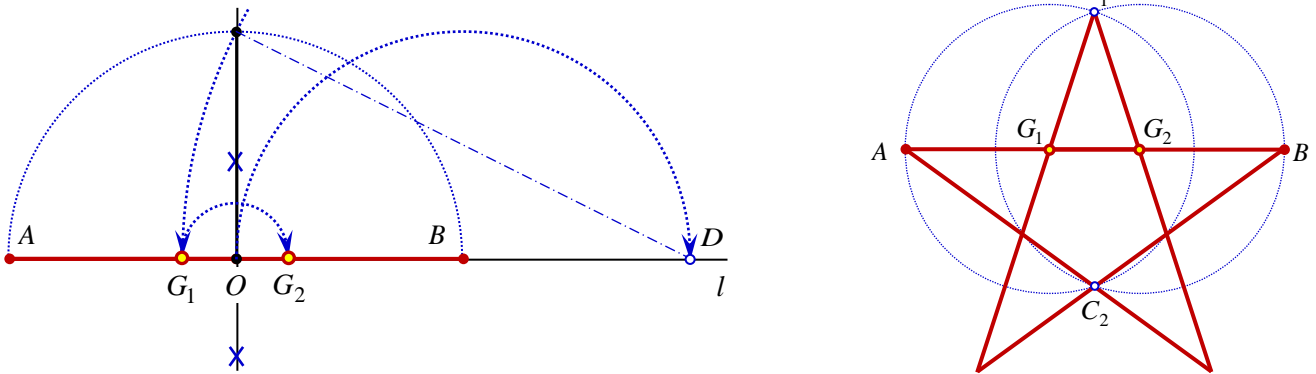


Рис. 2. Построение золотого сечения отрезка AB и на его основе правильной пентаграммы.

В целом, наше построение имеет наименьшее количество операций для решения геометрической задачи на построение пентаграммы с помощью циркуля и линейки, что согласуется с принципом минимальной формы. На наш взгляд, иной алгоритм построения пентаграммы за меньшее количество шагов не существует.

Считаем золотые сечения.

В расчет берем золотое сечение только для сопряженных отрезков, расположенных на одной линии. Например, отношение диагонали правильного пятиугольника к его стороне равно золотой константе Φ . То есть они связаны между собой золотой пропорцией, но будучи разнесенными на плоскости вдоль разных линий, не образуют прямолинейный отрезок и его деление, так таковое.

Диагональ AB делится золотым сечением в точках G_1, G_2 .

Кроме того, отрезок AG_2 делится золотым сечением в точке G_1 , а G_1B – в точке G_2 .

Таким образом, каждая диагональ имеет 4 эквивалентных золотых сечений, а вся пентаграмма – 20.

А можно ли больше?

Возникает небезынтересный вопрос: можно ли больше получить золотых сечений за то же количество шагов, которое нам понадобилось при построении пентаграммы? – В нашем случае 14 шагов. Вопрос важен в методологическом аспекте. Не только с точки зрения поиска экстремума математической задачи, но и оптимальной структуры самой пентаграммы.

И сколько вообще можно построить одинаковых пропорциональных делений, не обязательно золотых, за фиксированное число шагов?

Целесообразно воспользоваться числовой осью. Но не просто наносить числа на оси, а строить их геометрически.

Обычно не мудрствуя лукаво, как когда-то в школе, переносят отрезок раствором циркуля.

Но такая операция в евклидовой геометрии запрещена. Согласно постулату 3 Евклида [7, с. 14] циркулем (лат. *circulus* круг, окружность) допустимо проводить только окружности с данным центром и через данную точку. Линейка без делений и односторонняя, то есть нельзя измерять отрезки и проводить параллельные линии по двум сторонам линейки.

А что же можно? – Жить и действовать по правилам, которых немного:

- 1) На плоскости отмечается одна или несколько базовых точек для построения.
- 2) Проводится прямая линия через любые две ранее построенные точки.

3) Проводится окружность с центром в одной из точек, проходящую через другую точку.

4) Строятся точки пересечения двух прямых, прямой и окружности или двух окружностей, полученных в результате действий 2 и 3.

Построение циркулем и линейкой – это любая последовательность действий 2–4. Новые точки появляются только в результате действия 4.

Существует способ откладывания отрезка данной длины от данной точки, даже если нельзя перенести отрезки циркулем, изложенное во втором предложении "Начал" Евклида [7, с. 16].

Продемонстрируем это на примере построения точки $\Phi^2 = \Phi + 1$ (рис. 3) и далее для точек степенного ряда $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$.

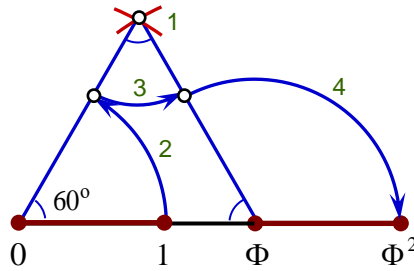


Рис. 3. Откладывание данного отрезка 01 от данной точки Φ , без перенесения отрезка циркулем.

Из центров 0 и Φ делается циркулем (1) две пересекающиеся "засечки", точка их пересечения соединяется с 0 и Φ , получается равносторонний треугольник со стороной Φ .

Единичный отрезок переводится на левую сторону треугольника (2), потом на правую сторону (3), и снова на числовую ось (4). Всего 7 операций.

Для одного сложения двух отрезков, сдается, многовато. Если к этому добавить начальное построение золотого сечения, то и вовсе получается с избытком.

Концентрические окружности.

Первая операция (2 шага): проводится прямая линия, на ней отмечается центр O концентрических окружностей и рисуется первая из них произвольного радиуса r .

Вторая операция (2 шага): через точку 0 проводится дуга окружности с центром в точке 1 и через точку 2 рисуется вторая окружность радиусом $2r$.

Операция n (2 шага): через точку $n-1$ проводится дуга окружности с центром в точке n и через точку n рисуется n -я окружность радиусом nr .

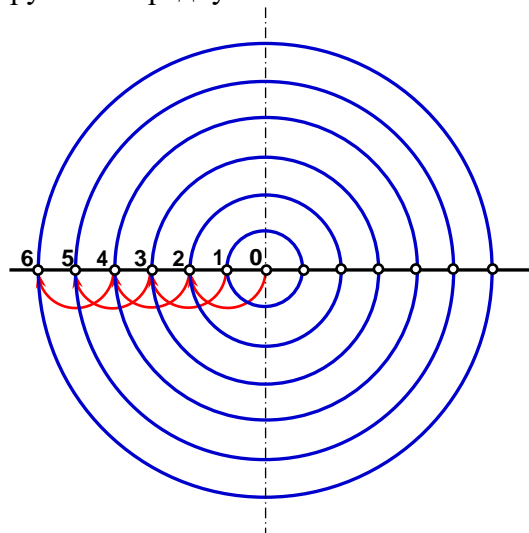


Рис. 4. Построение множества делений пополам на основе концентрических окружностей.

В результате такого построения на одной линии образуется $n + 1$ точек и n последовательных равных отрезков.

Из них можно составить 2^n вариантов деления отрезков пополам.

Сначала берутся отрезки длиной $2r$ (нумерация точек через 2: 6–4, 5–3, ...), их число $2n - 1$.

Затем берутся отрезки длиной $4r$ (нумерация точек через 4: 6–2, 5–1, ...), их число $2n - 3$ и так далее. Последний отрезок равен диаметру n -й окружности с одним делением пополам.

Общее количество делений равно сумме первых нечетных натуральных чисел $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = 2^n$.

Как видно, с геометрическим построением множества делений пополам соревноваться бесполезно. Поэтому меняем план...

Сравнение золотого сечения и деления пополам. Отвлечемся от сложности геометрических построений пропорциональных отрезков, для которых деление на равные части не имеет равных. Будем считать множество точек для пропорциональных отрезков уже заданным на числовой оси. – Каждое множество для своего варианта деления.

На основе этих чисел можно составлять интервалы-отрезки различной длины и осуществлять их деление точками из заданного множества.

Задача. Разбить заданный отрезок ab системой точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ так, чтобы получить наибольшее число делений составных отрезков в любом одинаковом отношении.

Можно не привязываться к конкретному отрезку ab , и задачу свести к последовательному расположению точек:

на действительной оси поместить упорядоченное множество X из k точек $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k$ так, чтобы получить наибольшее число делений составных отрезков (x_i, x_j) , $0 \leq i < k - 1, i < j \leq k$ внутренним и внешним образом в любом одинаковом отношении λ и любыми точками деления $x_r \in X, r = \overline{0, k}$.

Рассмотрим два подхода, которые априори выделяются среди других конкурентных вариантов формирования пропорциональных отрезков.

Первый вариант – это натуральный ряд или другая арифметическая прогрессия и деление составных отрезков на равные части (дихотомическая модель). Идея понятная и согласуется с построением концентрических окружностей. Только откладываем равные отрезки последовательно в одну сторону, крутя циркулем подобно землемеру в старину.

Второй вариант (золотая модель) – ряд чисел, составленный из целых степеней константы золотого сечения Φ^n , и деление отрезков $\Phi^n - \Phi^{n-1}$ на меньшие отрезки длиной 1 и $\phi = \Phi^{-1}$.

Варианты делений для дихотомической модели образуют числовой ряд 0, **1**, 2, **4**, 6, **9**, 12, **16**, 20, **25**, 30, **36**, 42, **49**, ... [11, A002620]. Жирным шрифтом выделены степени двойки. Рекуррентная форма последовательности $v_{k+1} = k + v_{k-1}, v_1 = 0, v_2 = 1$, аналитический вид

$$v_k = \frac{2k^2 - 1 + (-1)^k}{8}. \tag{1}$$

Последовательность объединяет квадратные k^2 и прямоугольные $k \cdot (k+1)$ числа. Члены последовательности представляют собой попеременно среднее геометрическое и среднее арифметическое соседних элементов.

Величины v_k тесно связаны с триадами разного типа в математике:

- максимальное количество ребер в неориентированном графе без треугольников с k вершинами, в котором никакие *три вершины* не образуют треугольник из ребер;
- количество арифметических последовательностей *из трех членов* с любым средним, которое может быть извлечено из набора первых k натуральных чисел, начиная с 1;
- количество допустимых неравенств из трех чисел вида $a + b < c + 1$, где a и b – натуральные числа, $a \leq b, c \geq 0$;

- количество несовпадающих целочисленных *треугольников* с наибольшей длиной стороны $k - 1$;
- число пересечений полного двудольного графа $K(3, k+1)$, в котором любая вершина первой доли соединена со всеми вершинами второй доли вершин.

Кроме того, суммы пар соседних членов последовательности v_k представляют собой *треугольные числа* в порядке возрастания и др.

Для золотой модели не всё так очевидно. Аналитика просчета всех возможных вариантов достаточно трудоемка, хотя некоторые закономерности просматриваются. Поэтому ограничимся моделированием методом машинного эксперимента и анализом получаемых результатов.

Но сначала напомним о внешнем делении.

Внешнее деление. Отрезок прямой можно разделить на две составные части практически в любом заданном отношении. При этом точка может располагаться как на самом отрезке (внутреннее деление *internal*), так и на его продолжении (внешнее деление *external*) [12, 13].

В классическом квадратном уравнении золотого сечения (ЗС) $x^2 \pm x - 1 = 0$, как правило, довольствуются положительными значениями корней, руководствуясь так называемыми "физическими соображениями". Отрицательные корни отбрасываются с ложной формулировкой об отсутствии смысла-содержания. И совершенно напрасно...

Отрицательные корни – такие же полноправные решения. Их отрицательность указывает лишь на то, что делящая точка находится за пределами искомого отрезка на его продолжении (рис. 5), образуя так называемое внешнее деление в отношении λ [14] или деление направленных отрезков внешним образом [15].

При таком делении, возможно, теряется привычная наглядность геометрического представления. Но это только закостенелая традиция интерпретации.

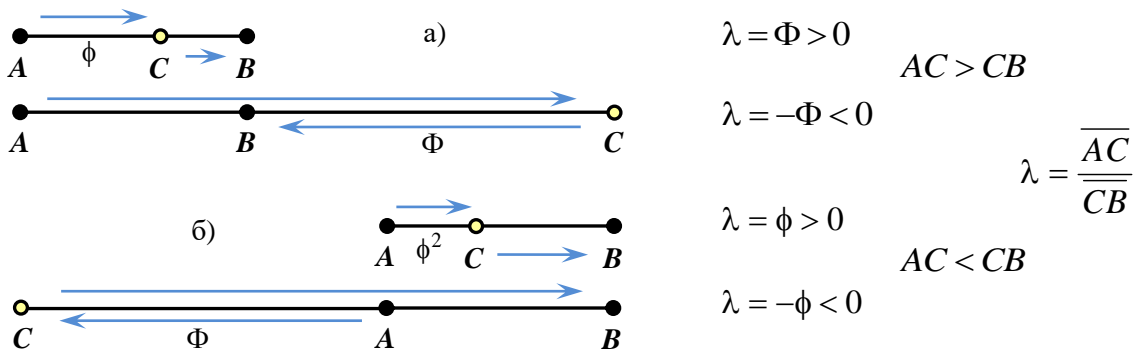


Рис. 5. Внутренне и внешнее деление отрезка AB золотым сечением:

а) относительно большего отрезка $AC = \phi$ – внутр., $AC = \Phi^2$ – внеш. ;

б) относительно меньшего отрезка $AC = \phi^2$ – внутр., $AC = \Phi$ – внеш. .

Пусть $AB = 1, CB = x$. Тогда имеем $\frac{AC}{CB}$: а) $\frac{1+x}{x} = \Phi, x = \Phi$; б) $\frac{x-1}{x} = \phi, x = 1 + \Phi$.

Если в ЗС обозначить больший отрезок через b , то

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b}, \quad b^2 + b - 1 = 0, \quad b = (\phi, -\Phi).$$

Отрицательный корень выводит точку золотого сечения C за пределы единичного отрезка AB так, что большим отрезком становится $CB = -\Phi$ (рис. 5, а).

Если в ЗС обозначить меньший отрезок через a , то

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a}{a}, \quad a^2 - 3a + 1 = 0, \quad a = (\phi^2, \Phi^2).$$

Внешнее деление фактически не рассекает исходный отрезок. Недостающие до деления части привлекаются за его пределами. Образно говоря, на стороне...

Отрицательное значение $\lambda < 0$ означает разнонаправленность сравниваемых отрезков. Сама длина отрезка, разумеется, остается положительной.

В общем случае, для двух заданных точек A и B на комплексной плоскости точка $C = \frac{A + \lambda B}{1 + \lambda}$ делит отрезок AB в заданном отношении $\lambda \neq -1$. При $\lambda = -1$, то точки A и B совпадают.

Если $\lambda = 1$, то C – середина отрезка. То есть деление отрезка пополам – вырожденный случай, который не имеет внешнего деления.

Для золотого сечения единичного отрезка $A = 0, B = 1$ имеем:

$$1) \lambda = \Phi \Rightarrow C = \phi; \quad 2) \lambda = \phi \Rightarrow C = -\Phi.$$

Золотая модель: построение. В основу алгоритма положим базовую формулу золотого сечения $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$, описывающую геометрическую прогрессию, в которой каждый элемент равен сумме двух предыдущих элементов.

Основная идея: складываем отрезки с имеющимися на них точками (рис. б).

1) Формируется последовательность точек c_k (множество С):

– от исходной точки отсчета $c_0 = 0$ и выбираем два последовательных отрезка c_0c_3, c_3c_6 длиной 1 и ϕ с расположенными на них зеркальными парами точек ЗС (c_1, c_2) и (c_4, c_5) :

$$(c_1 \ c_2 \ c_3) = (\phi^2 \ \phi \ 1);$$

$$(c_4 \ c_5 \ c_6) = 1 + \phi \cdot (\phi^2 \ \phi \ 1);$$

– последовательно складываем отрезки с закрепленными на них точками (рис. б):

$$c_{k+3 \cdot F_{n+1}} = \Phi^{n-1} + c_k; \quad n = 2, 3, 4, \dots; \quad k = 1, 2, \dots, 3F_n.$$

Первое сложение дает отрезок $\Phi^2 = \Phi + 1$, второе – отрезок $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi$ и так далее до получения суммарного отрезка Φ^n с любым априори заданным натуральным числом n .

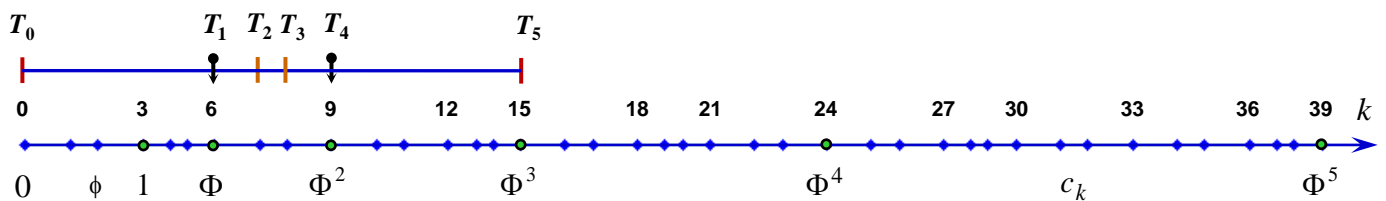


Рис. 6. Разбиение числовой оси по степеням золотой константы Φ^n , применение "золотого" макета-шаблона T для нахождения точек золотого сечения.

2) Составляется "золотой" генератор или макет-шаблон из пяти последовательных отрезков:

$$T = (T_0 \ T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5) = (0 \ \Phi \ 2 \ \sqrt{5} \ \Phi^2 \ \Phi^3),$$

где точки T_1, T_4 – границы отрезка единичной длины; средние элементы T_2, T_3 – точки золотого деления отрезка внутренним образом; крайние элементы T_0, T_5 – точки деления внешним образом.

Точки T_0, T_2, T_3, T_5 составляют тетраду золотых сечений отрезка T_1T_4 .

При делении внутренним образом между точками c_i, c_j должна находиться ещё хотя бы одна точка, то есть $j \geq i + 2$. При делении внешним образом это необязательно, поскольку точки c_i, c_j могут быть соседними.

3) Для фиксированного количества точек K осуществляется последовательный перебор всех отрезков $c_i c_j, i < j \leq K$.

Под любую пару точек c_i, c_j на действительной оси исходный макет перестраивается:

- сначала масштабом $t = T \cdot (c_j - c_i)$,
- затем линейным сдвигом $t \leftarrow t + (c_i - t_1)$.

Остается проверить по очереди точки внутреннего t_2, t_3 и внешнего t_0, t_5 деления на их совпадение с точками "золотой" последовательности c_k . Любая из совпавших точек – золотое сечение отрезка от $c_i c_j$. Вариант отмечается триадой (c_i, c_j, g) .

Если $c_i < g < c_j$, то точка $g \in \mathbb{C}$ делит отрезок внутренним образом.

Если $g < c_i \vee c_j < g$, то точка $g \in \mathbb{C}$ делит отрезок внешним образом.

Важный нюанс. На практике необходимо учитывать специфику сравнения вещественных чисел, особенно когда они получены в результате многократных вычислительных действий. Прямая проверка совпадения точек последовательности с точками макета на основе равенства типа $t_2 = c_k$ здесь не годится. Следует задать малый и одновременно надежный интервал ϵ покрытия-совпадения точек, учитывая синхронное сравнение чисел разных порядков, особенно для больших значений Φ^n .

Так или иначе, совпадение следует проверять по условию $|t_2 - c_k| < \epsilon$.

В результате такой организованной процедуры поиска не будет пропущено ни одно из возможных золотых сечений на выбранном участке вещественной оси с нанесенными точками c_k .

Начальные варианты золотого сечения внутренним и внешним образом для $k = 3, 6, 9$ отрезков на интервале $0 \div \Phi^2$ представлены в табл. 4.

Золотая модель: анализ.

Рассмотрим последовательные триады, которые представляют чередующиеся в разных комбинациях суммарные отрезки длиной $1 = \phi^2 + \phi^3 + \phi^2$ и $\phi = \phi^3 + \phi^4 + \phi^3$, каждый из которых содержит две точки ЗС внутренним образом, симметричные относительно середины отрезка.

В алфавите двух символов присвоим этим отрезкам коды соответственно 1 и 0.

Закодированные отрезки составляют последовательность двоичных чисел (рис. 7).

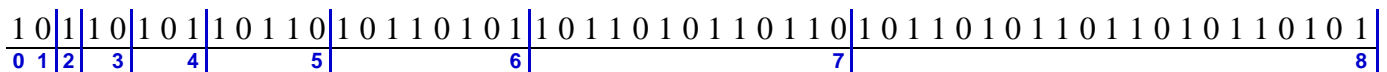


Рис. 7. Бинарное дополнение к слову Фибоначчи S_8 длиной $F_{10} = 55$; применительно к разбиению: 1 – единичный отрезок; 0 – отрезок длиной ϕ ; общая длина – Φ^8 .

Анализ двоичного ряда свидетельствует о том, что перед нами бинарное дополнение [11, A005614], к бесконечному слову Фибоначчи S [11, A003849], начинающемуся с нуля.

Напомним, что конкатенация (лат. *concatenatio* сцепление) – операция склеивания объектов линейной структуры, обычно строк. Слово (терм) Фибоначчи – последовательность двоичных цифр, связанная с числами Фибоначчи в том смысле, что обычное сложение целых чисел (в индуктивном определении) заменяется повторяющейся конкатенацией строк $S_n = S_{n-1}S_{n-2}, n \geq 2$.

Бесконечное слово Фибоначчи $S = 0100101001001010010100100101...$ является одним из хорошо изученных примеров комбинаторной теории бесконечных слов.

Таблица 4. – Золотые сечения (ЗС) внутренним и внешним образом для $k = 3, 6, 9$ отрезков на интервале $0 \div \Phi^2$

внутреннее деление

внешнее

внутреннее деление

внешнее

$n = 1, k = 3, c_k = 1$

№ п/п	c_i	c_j	Точка ЗС
1	0	2	1
2	0	3	1
3	0	3	2
4	1	3	2

c_i	c_j	Точка ЗС
0	1	3
1	2	0
1	2	3
2	3	0

$n = 3, k = 9, c_k = \Phi^2$

№ п/п	c_i	c_j	Точка ЗС
1	0	2	1
2	0	3	1
3	0	3	2
4	0	6	2
5	0	6	3
6	0	7	4
7	0	8	5
8	0	9	3
9	0	9	6
10	1	3	2
11	1	5	3
12	1	7	3
13	1	7	5
14	1	9	4
15	2	4	3
16	2	6	3
17	2	6	4
18	2	8	4
19	2	8	6
20	2	9	5
21	3	5	4
22	3	6	4
23	3	6	5
24	3	7	5
25	3	7	6
26	3	9	6
27	3	9	7
28	4	6	5
29	4	8	6
30	5	7	6
31	6	8	7
32	6	9	7
33	6	9	8
34	7	9	8

c_i	c_j	Точка ЗС
0	1	3
0	2	6
0	3	9
1	2	0
1	2	3
1	3	7
1	4	9
2	3	0
2	3	6
2	4	8
2	5	9
3	4	2
3	4	6
3	5	1
3	5	7
3	6	0
3	6	9
4	5	3
4	5	6
4	6	2
4	6	8
4	7	0
5	6	3
5	6	7
5	7	1
5	8	0
6	7	3
6	7	9
6	8	2
6	9	0
7	8	6
7	8	9
7	9	3
8	9	6

$n = 2, k = 6, c_k = \Phi$

1	0	2	1
2	0	3	1
3	0	3	2
4	0	6	2
5	0	6	3
6	1	3	2
7	1	5	3
8	2	4	3
9	2	6	3
10	2	6	4
11	3	5	4
12	3	6	4
13	3	6	5
14	4	6	5

c_i	c_j	Точка ЗС
0	1	3
0	2	6
1	2	0
1	2	3
2	3	0
2	3	6
3	4	2
3	4	6
3	5	1
3	6	0
4	5	3
4	5	6
4	6	2
5	6	3

Определять его можно по-разному. Например, слово Фибоначчи S удовлетворяет $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = S$, где $\sigma: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ – морфизм Фибоначчи, определенный равенствами $\sigma(0) = 01$ и $\sigma(1) = 0$. Слово S является предельной последовательностью бесконечной последовательности $(S_n)_{n=0}$ конечных слов над $\{0, 1\}$ и определяется итеративно: $S_{-1} = 1, S_0 = 0, S_n = S_{n-1}S_{n-2}, n \geq 1$.

Слово S_n – ограниченное слово Фибоначчи. При этом S_0 – начало слова, параметр S_{-1} предназначен лишь для организации итерационного процесса на первом шаге $n = 1$.

Другой способ формирования ограниченных слов начинается с $S_0 = 0$ и далее включает последовательную замену каждого символа в $S_n: 0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 0$.

Цифра с номером m равна $a_m = 2 - \lfloor (m+1)\Phi \rfloor + \lfloor m\Phi \rfloor, m \geq 1$.

Принято распространенное обозначение "пол" $\lfloor \xi \rfloor$ и "потолок" $\lceil \xi \rceil$ или округление до ближайшего целого вниз (в меньшую сторону) и вверх (в большую сторону). В программировании $\lfloor \xi \rfloor$ соответствует операнду или встроенной функции `floor(ξ)`.

Ряд D (рис. 6) – бинарное дополнение к слову Фибоначчи S , путем взаимной замены нулей на единицы и наоборот. Он определяется через конкатенацию $D_{-1} = 0, D_0 = 1, D_n = D_{n-1}D_{n-2}$ либо переходом от D_n к D_{n+1} с заменой каждого символа в $D_n: 0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$.

Цифра с номером m равна $a_m = \lfloor (m+1)\Phi \rfloor - \lfloor m\Phi \rfloor - 1, m \geq 1$.

В слове $D_n(S_n)$ число нулей (единиц) – F_n , число единиц (нулей) – F_{n+1} , длина слова – F_{n+2} .

Среднеарифметическое значение слова D_n равно F_{n+1}/F_{n+2} и в пределе стремится к константе $\phi = \Phi^{-1}$.

Так, на рис. 6 представлено слово D_8 длиной $F_{10} = 55$, количество единиц $F_9 = 34$. Длина суммарного интервала разбиения равна Φ^8 , на котором $F_9 = 34$ отрезка длиной 1 и $F_8 = 21$ отрезка длиной ϕ . С учетом деления каждого из них двумя точками ЗС внутренним образом (что дает три отрезка), общее количество точек разбиения участка вещественной оси равно $3F_{10} = 165$.

Если в конечном слове Фибоначчи удалить две последние буквы или добавить их в начало, то образуется палиндром, одинаково читающийся в обоих направлениях. Например, для $\hat{S}_5 = 1011010110110$ отбрасывание двух букв дает 10110101101 , добавление 011011010110110 .

Любой прямолинейный отрезок делится пополам только единственным способом и лишь внутренним образом.

Золотым сечением, как впрочем, и любым другим заданным отношением, отрезок можно разделить четырьмя точками: пара внутренних точек, симметричных относительно середины отрезка, и внешняя пара зеркальных точек.

Машинные эксперименты показали, что количество пропорциональных отрезков s_n по "золотой" модели при делении внутренним или внешним образом образует последовательность

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<i>s_n</i>	4	14	34	59	84	126	165	223	287	344	424	507	579	681	767	885	1008	1110	1250	1363	1519

<i>n</i>	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	...
<i>s_n</i>	1681	1815	1993	2173	2322	2522	2683	2899	3121	3302	3540	3776	3972	4232	4442	...

Данный числовой ряд описывается формулой

$$s_n \approx s'_n = \lceil (3n\phi)^2 \rceil = \lfloor (3n\phi)^2 \rfloor + 1 = \lceil (k\phi)^2 \rceil,$$

где $n = k \cdot 1/3$ – количество триад отрезков на числовой оси (рис. 8).

Уровень достоверности практически равен 1, то есть аппроксимация безупречная.

Абсолютные отклонения $\Delta'_n = s_n - s'_n$ удовлетворяют неравенству $-n\phi \leq \Delta'_n \leq n$ (рис. 9), что для квадратичной зависимости составляет доли процента.

В абсолютных единицах разброс увеличивается, но постоянно остается между двумя прямыми $y_1 = n, y_2 = -n\phi$ в коридоре $n - (-n\phi) = \Phi n$.

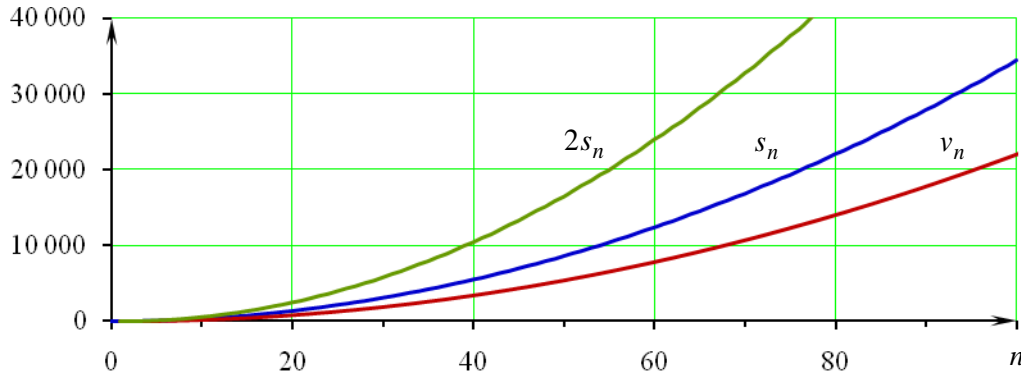


Рис. 8. Количество пропорциональных отрезков для разбиения части вещественной оси на $k = 3n$ сегментов согласно дихотомической v_n и "золотой" моделям: внутренним образом s_n , внутренним и внешним образом $2s_n$.

Относительный разброс на фоне квадратичного роста $\frac{\Phi n}{9\phi^2 n^2} = \frac{\Phi^3}{9n} \cdot \frac{1}{n}$ обратно пропорционален количеству интервалов $n = k \cdot 1/3$ на числовой оси.

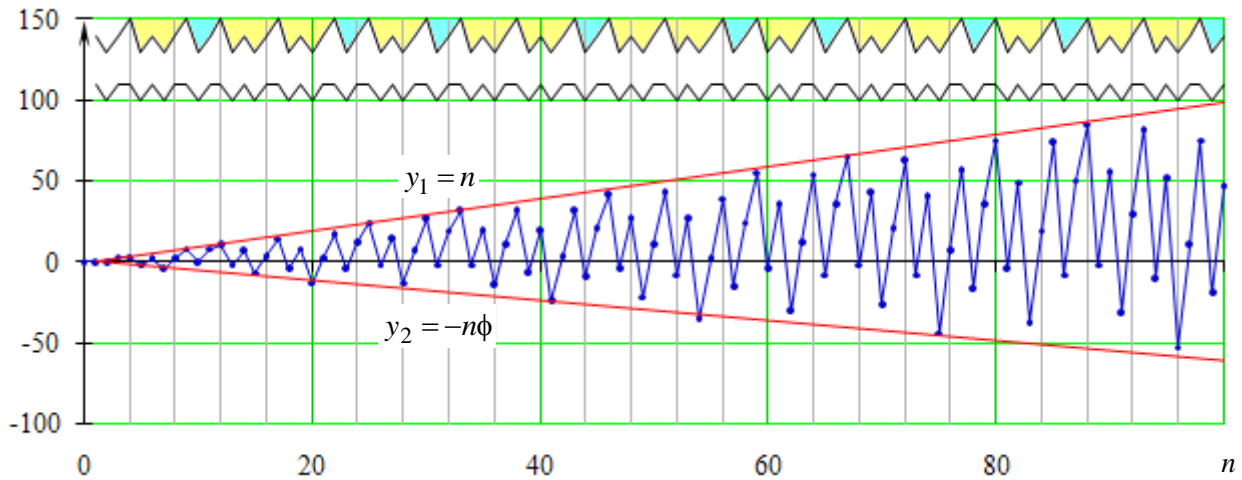


Рис. 9. Абсолютные отклонения $\Delta'_n = s_n - \lfloor 9(n\phi)^2 \rfloor$ аппроксимации; сверху – два варианта представления бинарного дополнения D к слову Фибоначчи.

Относительная ошибка аппроксимации равна $\frac{n}{(3n\phi)^2} = \frac{\Phi^2}{3n}$.

Количество пропорциональных отрезков $s'_k = (k\phi)^2$ или в $4\phi^2 \approx 1,528$ раза больше, чем для дихотомической модели (1) $v_k \approx k^2/4$. С учетом деления внешним образом общее количество отрезков в "золотой" модели удваивается и превышает в 3 раза аналогичное дихотомическое деление на равные отрезки. Результат, конечно, впечатляющий. Что не удалось, так это найти аналитическую зависимость в общем виде для количества пропорциональных отрезков s_n .

Хотя главные принципиальные моменты установлены.

1) Если значения n равны числам Фибоначчи $n = F_m \geq 3$, то имеем точное соотношение:

$$s_{F_m} = 9 \cdot \lfloor (F_m \phi)^2 \rfloor + 2 \cdot (-1)^m + 5 \tag{2}$$

или для $n = F_m \geq 5$: $s_{F_m} = \lfloor (3F_m \phi)^2 \rfloor + 2 \cdot (-1)^m + 1$.

Формула (2) абсолютно точно воспроизводит значения s_n :

m	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
$n = F_m$	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	...
Золотая модель, s_n	34	84	223	579	1 519	3 972	10 402	27 228	71 287	186 627	488 599	1 279 164	3 348 898	...
Дихотомия, $v_{3n} = v_k$	20	56	144	380	992	2 601	6 806	17 822	46 656	122 150	319 790	83 7225	2 191 880	...

Как видно, основной переменной в формуле (2) является зависимость $a_{t-1} = \lfloor (F_t \phi)^2 \rfloor$, $t = m - 1 \geq 1$ или целочисленная последовательность [11, A064831]: 0, 1, 3, 9, 24, 64, 168, 441, 1155, 3025, 7920, 20736, ... – суммы площадей первых t прямоугольников Фибоначчи, которые непосредственно связаны с числами Фибоначчи:

$$a_t = F_t^2 - t \pmod{2} = \sum_{j=0}^t (t+1-j) F_j^2.$$

Элементы ряда структурно связаны с тройкой. Так, a_t показывает число тернарных (лат. *ternarius* тройных) строк длиной $t - 1$, не содержащих подстроки вида $(0x1)$, $x \in \{0, 1, 2\}$.

Рекуррентная форма имеет вид:

$$a_t = 3(a_{t-1} - a_{t-3}) + a_{t-4}, \quad (a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 1, 3, 9).$$

Данная последовательность выражает частичные суммы ряда b_t [11, A001654]: 0, 1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, 1870, ... – числа прямоугольника $F_t \cdot F_{t+1}$, которые в целых значениях воспроизводят параметры золотого прямоугольника с соотношением сторон 1:Ф.

Ряд b_t примечателен в теории чисел и имеет разные формы представления (рекуррентные, явные, через суммирование, матричное и т.д.), F_t, L_t – числа Фибоначчи и Люка:

$$b_t = 2b_{t-1} + 2b_{t-2} - b_{t-3}, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 6;$$

$$b_t = 3b_{t-1} - 2b_{t-2} - (-1)^t;$$

$$b_t = (F_{t+2}^2 - F_{t-1}^2) / 4 = (L_{2t+1} - (-1)^t) / 5;$$

$$b_t = F_t F_{t+1} = \sum_{j=0}^t F_j^2 = \sum_{j=0}^t (-1)^{t-j} F_{2j};$$

$$b_t = t \pmod{2} + 2b_{t-1} + \sum_{j=0}^{t-2} b_j.$$

$$b_t = \lfloor 0,5 + \Phi^{2t+1} / 5 \rfloor;$$

$$\begin{pmatrix} \dots \\ b_t \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b_t = p - \text{такие числа, что } p \cdot (5p + 2) + 1 \text{ или } p \cdot (5p - 2) + 1 - \text{квадрат.}$$

Примечательно, что $\phi = \sum_{t \geq 1} (-1)^{t-1} / b_t$ – чередующийся бесконечный ряд, состоящий исключительно из аликвотных (египетских, единичных) дробей, числители которых равны 1.

2) На графике (рис. 9) наглядно видно, как отклонения $\Delta'_n = s_n - s'_n$ согласуются с бинарным дополнением D к слову Фибоначчи. Более того, если две подряд идущие единицы в D представить с накоплением от 0 до 2, то образуется ярко выраженная последовательность латинских букв W и V (рис. 10), которая полностью повторяет "рисунок" отклонений Δ'_n .

Если этим буквам присвоить свои коды $W = 1, V = 0$, то снова получается бинарное дополнение $D = 1011010110110101011\dots$ к слову Фибоначчи. Буквы W, V в своем начертании состоят из 5 и 3 символов, а их удельный вес в слове D соответственно ϕ и ϕ^2 . То есть числовой ряд слова сжимается в $5\phi + 3\phi^2 = \Phi^3$ раз, по-прежнему оставаясь самим собой.

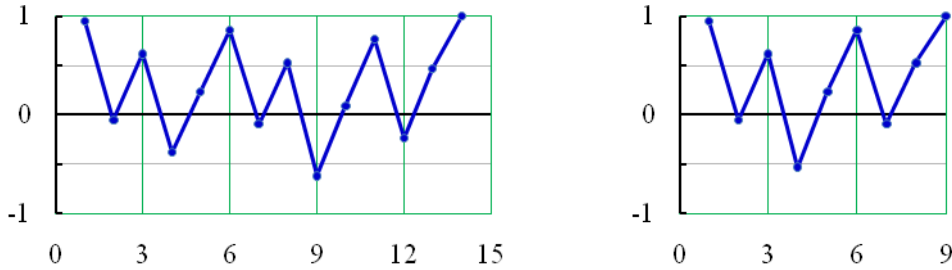


Рис. 10. Форматы слов "WWV" и "WV".

Безусловно, все эти закономерности присутствуют и в структуре значений отклонений Δ_n (см. рис. 9), учет которых позволяет на порядки повысить точность аппроксимации.

Например, в виде дополнений $d_i, i = 0, 1, 2, \dots$ к описанию исходного числового ряда

$$s_n \approx s''_n = \lceil 9(n\phi)^2 \rceil + d_{n+i}n,$$

в зависимости от следования слов "WWV" и "WV" (табл. 5–6).

Таблица 5. – Оценочные дополнения d_i для слова "WWV"

D	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
d_i	1	0	ϕ	$-\phi^2$	ϕ^3	$1-\phi^4$	$-\phi^5$	$1-2\phi^3$	$-\phi$	ϕ^5	$1-\phi^3$	$-\phi^3$	$2\phi^3$
	1	0	0,618	-0,382	0,236	0,854	-0,090	0,528	-0,618	0,090	0,764	-0,236	0,472
	Φ			1				0			1		
	Φ			ϕ				0					
	$2\Phi = 1 + \sqrt{5}$												
	$\sum_{d_i < 0} d_i = -5(2 - \Phi)$						$\sum_{d_i > 0} d_i = 7\Phi - 10$						

Примечание: $-\phi^2 - \phi = -1, \phi^3 - (-\phi^2) = \phi, 1 - \phi^4 - \phi^3 = \phi, 1 - 2\phi^3 - (-\phi^5) = \phi$

Таблица 6. – Оценочные дополнения d_i для слова "WV"

D	1	0	1	0	1	1	0	1
d_i	1	0	ϕ	$-1+2\phi^3$	ϕ^3	$1-\phi^4$	$-\phi^5$	$1-2\phi^3$
	1	0	0,618	-0,528	0,236	0,854	-0,090	0,528
	Φ			1				
	Φ			1				
	$\Phi^2 = \Phi^3 - 1$							
	$\sum_{d_i < 0} d_i = -\phi$				$\sum_{d_i > 0} d_i = 2\Phi$			

Оценочные дополнения можно определить также без привязки к константе золотого сечения, исходя из наилучшего приближения методом наименьших квадратов (табл. 7).

Таблица 7. – Оценочные дополнения δ_i для слов "WWV" и "WV"

D	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
δ_i , "WWV"	0,946	-0,053	0,596	-0,401	0,271	0,863	-0,126	0,529	-0,605	0,072	0,727	-0,225	0,439
δ_i , "WV"	0,932	-0,063	0,587	-0,473	0,200	0,851	-0,113	0,547	-	-	-	-	-

Абсолютные отклонения для оценочных дополнений d_i и δ_i представлены на рис. 11 и не показывают особых преимуществ вариантов. Более предпочтительным является первый вариант, в основе которого лежат параметры на базе константы золотого сечения.

Главное здесь другое: на фоне больших значений, например $s_{200} = 137646$, относительные отклонения составляют сотые доли процента, в пределе сводясь к нулю.

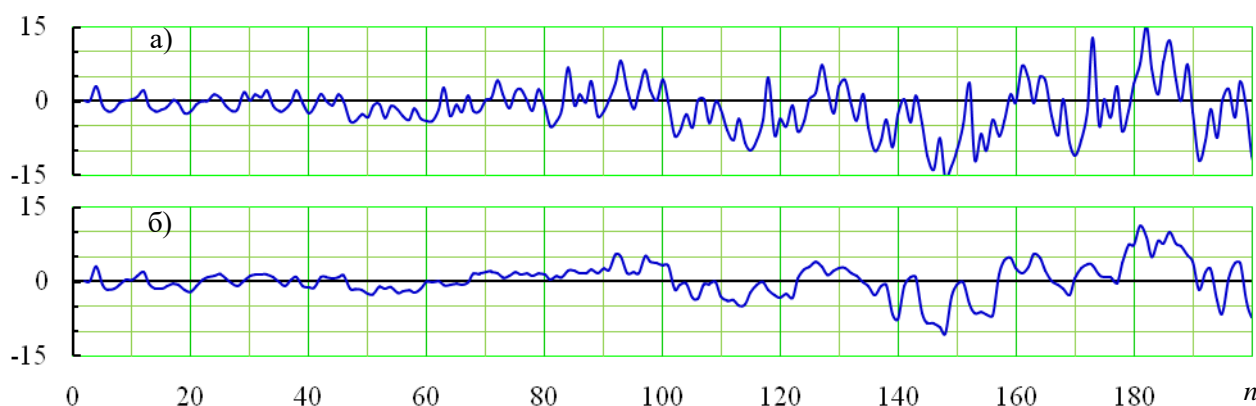


Рис. 11. Абсолютные отклонения аппроксимации:
 а) $\Delta_n'' = s_n - s'_n - nd_{n+i}$; б) $\Delta_n'' = s_n - s'_n - n\delta_{n+i}$.

Вместо заключения.

К сожалению, пока не удалось получить точное аналитическое описание нашей последовательности s_n между узловыми точками Φ^n . Впрочем, в этом нет особой необходимости. Разве что для чистоты эксперимента в промежуточных точках. Может быть, кто-нибудь, когда-нибудь, где-нибудь найдет. На данном этапе нас вполне устраивает полученный результат с обоснованием главных положений, которые доказаны асимптотически, а также аналитически для узловых точек.


Таким образом, методом машинного эксперимента установлено важное положение математического и методологического характера: предложен уникальный «метод золотого разбиения действительной оси» с использованием степеней константы золотого сечения Φ^n , который дает максимально возможное количество пропорциональных отрезков-интервалов, в три раза превышая известную модель деления на равные части. Алгоритм разбивки числовой оси подобен формированию слова Фибоначчи или его дополнения.

Как говорится, не мытьем так катаньем... Дихотомическую модель деления числовой оси на равные части невозможно "победить" геометрическими построениями. Однако по аналитическому разбиению вещественной оси на пропорциональные части-отрезки главный приз вполне заслужено получает золотое сечение. – Уникальное пропорциональное деление, которое продолжает нас изумлять своими замечательными экстремальными свойствами в разных областях математики и её практических приложениях.

Quaerite et invenietis. – "Ищите и найдете" (Мф. 7:7)...

Литература:

1. Хованский А.Г. Построения циркулем и линейкой // Математическое просвещение. – 2013, вып. 17. – С. 42-60.
2. Сергиенко П.Я. Метагеометрия "додекаэдровой" Вселенной // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24252, 07.02.2018. – URL: trinitas.ru/rus/000/a0000001.htm.
3. Василенко С.Л. В погоне за мега-призраками // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 24276, 14.02.2018. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001f/00163618.htm.
4. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. – 2017. – 374 с.
5. Волошинов А.В. Математика и искусство. – М.: Просвещение, 1992. – 399 с. – URL: <http://mathemlib.ru/books/item/f00/s00/z0000011/st019.shtml>.
6. Мир математики: в 40 т. / Т. 5: Клауди Альсина. Секта чисел. Теорема Пифагора: Пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.
7. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
8. Начала Евклида. Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.
9. Начала Евклида. Книги XI–XV: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. – 332 с.
10. Литвинов В.Н. Правильный пятиугольник (PENTAGONO): Геометрия, декоративное искусство, архитектура. 2-е изд., доп. – М.: URSS, 2016. – 108 с. – URL: https://issuu.com/wetlan/docs/pentagon_ex.
11. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – URL: research.att.com/~njas/sequences/.
12. Василенко С.Л. Гармоническая тетрадная модель целого // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.03.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=100&sm=2 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 11.02.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13415.html.
13. Василенко С.Л. Перекрестные отношения и гармоничность в структурировании объектов // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22151, 03.06.2016. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162966.htm.
14. Понарин Я.П. Гармонический четырехугольник // Квант. – 1991. – № 10. – С. 48-52.
15. Бескин Н.М. Деление отрезка в данном отношении. – М.: Наука, 1973. – 64 с. – URL: <http://bookos.org/book/564177>.

© ВаСиЛенко, д.т.н., 2020 
Харьков, Украина



Авторские страницы:

- <http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>
- <http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00>
- <http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>