Олег Черепанов

СИГНАТУРНОЕ СОПРЯЖЕНИЕ РЕКУРСИЙ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

Понятия, принципы и правила тандемной арифметики

Натуральные числа $n = 1, 2, 3, \ldots, \mathrm{N}$ используем в нумерации членов последовательностей Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, …, F_n и Люка 1, 3, 2^2, 7, 11, …, L_n где первые рекурсии $1 + 1 = 2$ и $1 + 3 = 2^2$ построены из элементов 1, 2 и 3, общих для рядов $\{\mathrm{F}_n\}$ и $\{\mathrm{L}_n\}$.

Заметим, что единая нумерация возрастающих чисел 1) $\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_{n-1}$ и 2) $\mathrm{L}_n = \mathrm{L}_{n+1} - \mathrm{L}_{n+1}$ равенством 3) $\mathrm{L}_n = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_{n-1}$ указывает на сопряжение целочисленных рядов $\{\mathrm{F}_n\}$ и $\{\mathrm{L}_n\}$. И при этом 1*) $\mathrm{F}_n = [\Phi^n - (-1)^k \varphi^n] \,/\sqrt{5}$ и 2*) $\mathrm{L}_n = [\Phi^n + (-1)^k \varphi^n]$. То есть, люка-фибоначчиевы члены натурального ряда тесно связаны с константами $\varphi = 0.618\ldots$ и $\Phi = 1{,}618\ldots$, каждая из которых в формулах Бине (1*) и (2*) умножена на себя столько раз, сколько единиц нужно сложить, чтобы получить n как степень дробных Φ и φ и как номер целых F_n и L_n, образующих пару $(\mathrm{F,L})_{\mathrm{N}=n}$.

Как видно, натуральное $n \equiv \mathrm{N}$, являясь нижним индексом при F и L и верхним индексом у Φ и φ, «работает» в двух местах: *а*) показателем автомультипликации основания $\varphi = \Phi^{-1}$ в тождествах (1*) и (2*) и *б*) порядковым номером дублета $(\mathrm{F,L})_{\mathrm{N}=n}$. При этом в (1*) и (2*) степень k минусовой единицы равна +1 при нечётном $n = \mathrm{N}$ и $k = +2$ при чётном.

Казалось бы, в формулах (1*) и (2*) обозначения «+» и «–» арифметических действий как бы противоположны по смыслу. И действительно символы сложения (аддиции) и вычитания (субстракции) позволяют различать двучлены $\Phi^n - (-1)^k \varphi^n$ и $\Phi^n + (-1)^k \varphi^n$ не по значению суммы или разности взаимно обратных чисел Φ^n и φ^n, а качественно, то есть по сигнатуре, разной до противоположности. При этом зависимая от чётности или нечётности n расстановка знаков в квадратных скобках $[\Phi^n \pm \varphi^n] = \mathrm{F}_n\sqrt{5}$ и $[\Phi^n \,\mu\, \varphi^n] = \mathrm{L}_n$ имеет две степени свободы и этим напоминает реверс. Так что смену сигнатуры, вызываемую взаимной перестановкой степеней $k = 1$ и $k = 2$ посредника-модератора $(-1)^k$ назовём реверсом.

Как видно, особые члены L_n и F_n натурального ряда можно представить двумя способами:

- соответственно суммой и разностью фибоначчиевых чисел F_{n-1} и F_{n+1} ;
- суммой или разностью n-ных степеней взаимно обратных оснований Φ и φ.

При этом увеличение на единицу номера N и единичный подскок степени n меняет местами знаки в квадратных скобках формул (1*) и (2*), превращая двучлен $[\Phi^n + \varphi^n]$ в тандем $]\,\Phi^n - \varphi^n\,[$. Но чередование «+» и «–» в связи с чётностью или нечётностью переменного n в тандемах 1*) $]\,\Phi^n \pm \varphi^n\,[= \mathrm{F}_n\sqrt{5}$ и 2*) $]\,\Phi^n \,\mu\, \varphi^n\,[= \mathrm{L}_n$, отличающихся и знаками и значениями, не является простой заменой сложения вычитанием и наоборот. Ведь «плюс» и «минус» между n-ми степенями Φ и $\varphi = \Phi^{-1}$ - это не только символы арифметических операций, но и сигнатурные метки тандемов, выступающих рабочими элементами тандемной арифметики, где тандем, как бинарная форма представляет собой единство количеств (чисел) и качеств (сигнатуры), изменяемой реверсом, двузначность которого отобразим знаком $+ \vee -$.

К примеру, положительная разность $\Phi^n - \varphi^n$ равна L_n для нечётного n, а $\Phi^{n+1} + \varphi^{n+1} = \mathrm{L}_{n+1}$ при чётном n. То есть, когда показатель степени n чётный, сигнатурный статус умноженного на $5^{0.5}$ числа Фибоначчи положителен, поскольку $\Phi^n + \varphi^n = 5^{0.5}\mathrm{F}_n$. При этом реверсный статус сопряженного числа $\mathrm{L}_n = \Phi^n - \varphi^n$ из ряда Люка отрицателен.

Итак, смена знака между n-ми степенями чисел Φ и φ, узко понимаемая как переход от аддиции к субстракции и наоборот, названа реверсом, объединяющим тандемы $\Phi^n - \varphi^n$ и $\Phi^n + \varphi^n$ указанием на их различие. И если символы «+» и «–» по отдельности обозначают стандартные арифметические действия, то формализовать два состояния реверса можно их сочетанием с косой чертой, имеющей две наклонные позиции - либо к «+» влево (+ \), либо к «–» вправо (/ –).

Таким образом, знаки (+ \) и (/ –) символизируют различие тандемов $]\ \Phi^n - \varphi^n\ [$ и $]\ \Phi^n + \varphi^n\ [$ по реверсу, тогда как двучлены без развёрнутых скобок обычно рассматривают как сумму или как разность одночленов. Включение новых символов в обычную арифметику оправдано тем, что знак «минус» у показателя степени n в двучленах $\varphi^{-n} - \varphi^n$ и $\varphi^{-n} + \varphi^n$ обусловлен зависимостью $\varphi = \Phi^{-1}$ и не связан с субстракцией (вычитанием), представляющим, например, единицу как $\varphi^{-1} - \varphi^{+1}$. Причём важные сведения о единице содержит и сообщает нам многозвенное тождество $1 = \varphi^{-1} - \varphi^{+1} = \varphi^{+1} + \varphi^{+2} = 2\varphi^{+1} - \varphi^{+3} = 2\varphi^{+2} + \varphi^{+3} = 2\varphi^{+1} - \varphi^{+3} = \varphi^{-3} - 2\varphi^{-1}$, где единичное значение имеют по меньшей мере шесть тандемов, разных и по реверсу, и по инверсии, и по множителю 2.

Понятно, что взаимно обратная связь $\varphi = \Phi^{-1}$ оснований Φ и φ распространяется на тандемы $\Phi^n - \varphi^n$ и $\Phi^n + \varphi^n$, принимающие вид $\varphi^{-n} - \varphi^{+n}$ и $\varphi^{-n} + \varphi^{+n}$. И здесь знаки «+» и «–» показателя степени определённо лишены смысла символов сложения и вычитания при том, что замена одного другим имеет операционный характер и сопряжёна с понятием инверсии.

Как видно, тандемы в квадратных скобках (*см.* (1^*) и (2^*)) при всяком n различаются реверсом и состоят из элементов, основанием которых служит константа φ как начало ряда $\{\varphi^n\}$, дополненного инверсной последовательностью $\{\varphi^{-n}\}$, где показатель степени не отождествляется с отрицательным числом, а «минус» и «плюс» символизируют разные состояния инверсии.

Ясно, что рекурсный (*см.* (1) и (2)) и реверс-инверсный (*см.* (1^*) и (2^*)) способы генерации чисел Фибоначчи и Люка основаны на математических правилах, которые следует вывести из фактов. Причём члены целочисленных тандемов $]F_{n+1} - F_{n-1}[$ и $]F_{n-1} + F_{n+1}[$, равных F_n и L_n соответственно, являются суммами единиц при том, что единица служит системообразующим элементом натурального ряда. Но с другой стороны целые F_n и L_n определены степенями $+n$ и $-n$ числа φ = 0.618…, воспринимаемого как часть единицы. А так как $\varphi^{-1} - \varphi^{+1} = 1^*$, то логично поставить под сомнение эквивалентность арифметических «квантов» 1 и 1^*, первый из которых, размножаясь аддицией, генерирует натуральные числа, тогда как роль второго пока не ясна.

В самом деле, взаимно обратные составляющие тандема $]\varphi^{-n} \pm \varphi^n[= L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, реверс (+\/–) которого при чётном n положителен, а при нечётном отрицателен, образованы автомультипликацией числа φ = 0.618…, степень n которого у одного члена положительна, а у другого отрицательна. При этом «плюс» и «минус» не имеют никакого отношения к арифметическим действиям сложения и вычитания. Но их объединение вида (+/\–) можно принять символом инверсной связи членов тандема, равного числу Люка под номером n.

Термины и символы, предложенные в качестве определений и обозначений целочисленных тандемов $]\ F_{n+1} - F_{n-1}\ [$ и $]\ F_{n-1} + F_{n+1}\ [$ и тандемов из инверсных элементов φ^{-1} и φ^{+1} с автомультипликацией (самоумножением) до степени, равной n, соответствуют фактам и формируют идею равноправия чисел как значимых элементов математической системы и её символов, имеющих не только смысл операций, но и характер сигнатурных признаков.

Например, замена «плюса» «минусом» как реверсное переключение может изменить тождество так, как если бы поменялись местами составляющие его числа. Так и в арифметическом выражении возможны сигнатурные перемены или перестановки символов, сохраняющие за выражением статус тождества без изменения чисел или в результате него. Но во всяком случае понятие тандема включает реверсное (+\/–) и инверсное (+/\–) различие, унаследованные от математических операций. Эти действия дают результаты, умножающие факты тандемного исчисления.

$+1=\downarrow$	после реверса	результат инверсии
$\varphi^{-1}(1-\varphi^{+2})$	$\sqrt{5}$	-1
$\varphi^{+1}(1+\varphi^{+1})$	φ^{+3}	φ^{-3}
$\varphi^{-2}(1-\varphi^{+1})$	φ^{-3}	φ^{+3}
$\varphi^{+1}(2-\varphi^{+2})$	$\varphi^{+3}(2-\varphi^{-3})$	-1
$\varphi^{+2}(2+\varphi^{+1})$	$-\varphi^{+3}$	$3+2\sqrt{5}$
$\varphi^{-1}(\varphi^{-2}-2)$	$3+2\sqrt{5}$	$+1$

$+\sqrt{5}=\downarrow$	после реверса	результат инверсии
$\varphi^{-1}(1+\varphi^{+1})$	1	$\sqrt{5}$
$\varphi^{-2}(1-\varphi^{+4})$	З	$-\sqrt{5}$
$\varphi^{+1}(2+\varphi^{-1})$	φ^{+3}	φ^{-3}
$\varphi^{-1}(2-\varphi^{+1})$	φ^{-3}	φ^{+3}
$(\varphi^{-3}-2)$	$2^2+\sqrt{5}$	$-1-2\varphi^{+2}$
$(\varphi^{+3}+2)$	$-1-2\varphi^{+2}$	$2^2+\sqrt{5}$

Заметим, что первый столбец левой таблицы содержит шесть тандемов, равных единице: $1=\varphi^{-1}-\varphi^{+1}=\varphi^{+1}+\varphi^{+2}=2\varphi^{+1}-\varphi^{+3}=2\varphi^{+2}+\varphi^{+3}=2\varphi^{+1}-\varphi^{+3}=\varphi^{-3}-2\varphi^{-1}$.

Аналогично, двучлены $\varphi^{-1}+\varphi^{+1}=\varphi^{-2}-\varphi^{+2}=2\varphi^{+1}+1=2\varphi^{-1}-1=2+\varphi^{+3}=\varphi^{-3}-2=\sqrt{5}=5^{0.5}=5^{1/2}$ занимают первый столбец таблицы справа. При этом двучлены, равные единице и тождественные числу $5^{0,5}$ записаны не в тандемной форме, а в виде сомножителей, один из которых (в скобках) выглядит суммой или разностью степеней уникума φ и целых 1 и 2.

Ясно, что реверс и инверсия в тандеме из ряда единицы или из ряда константы $5^{0,5}$ дают результаты, представленные в других столбцах тех же таблиц. При этом, например, единичные тандемы $2\varphi^{+1}-\varphi^{+3}$ и $\varphi^{+1}(2-\varphi^{+2})$ составом элементов не отличаются от тождества $\frac{1+\varphi^{+3}}{\varphi^{+1}}=2$ с единицей и двойкой, представленной как дробь. Причём дробную форму записи имеют все тандемы, шестикратно дублирующие и единицу 1 и число $5^{1/2}$.

«Двухэтажные» сочетания двучленов объединим в пары I, II и III с единичными партнёрами, отличающимися сигнатурой. Поэтому, например, дроби-партнёры в парах I и II можно приравнять или поделить друг на друга с единичным результатом. И в итоге этого сравнения получим $\frac{1-\varphi^{-3}}{1+\varphi^{-3}}=\alpha$ и $\frac{1-\varphi^{+3}}{1+\varphi^{+3}}=\beta$, где двучлены в числителе и знаменателе противоположны по реверсу. При этом α и β взаимно обратны и отличаются состоянием инверсии. Так что тандемы пар I и II связаны реверс-инверсным преобразованием, не требующим нуля и чисел меньше него соответствующих знаку «минус».

Аналогично связаны тандемы, равные $\sqrt{5}$: дробными формами в парах V и VI служат выражения $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=\varepsilon$ и $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\varsigma$, где числитель и знаменатель, оппозитные по реверсу, контр-симметричны, как и тандемы (верхний и нижний) в отношениях $\dfrac{1-\varphi^{-3}}{1+\varphi^{-3}}=\alpha$ и $\dfrac{1-\varphi^{+3}}{1+\varphi^{+3}}=\beta$. Это значит, что числитель меньше знаменателя на удвоенную разность между средним арифметическим данных чисел и каждым из них. А так как полусумма числителя и знаменателя равна единице, то число φ^{-3} выглядит отрицательным отклонением числителя от 1, тогда как отклонение знаменателя такое же, но положительное. И в этом смысле разнореверсные тандемы контр-симметричны.

Контр-симметрию, как понятие, ранее никогда не обсуждавшееся, приложим к положительным числам a и b, таким, что $a \le b$. Пусть среднее арифметическое a и b равно единице: $\dfrac{a+b}{2}=1$. Тогда $a + b = 2$, где числа-слагаемые отличаются от единицы так, что $a = 1 - d$, а $b = 1 + d$. Этого достаточно для утверждения, что $a < 1$ и $b > 1$ контр-симметричны, так как одинаково (на d) отличаются от единицы, То есть d служит «числом-отклонением». При этом случай $d = 0$ означает $a = b = 1$, тогда как $a \to 0$ и $b \to 2$ при $d \to 1$.

ФОРМЫ ТАНДЕМОВ, РАВНЫХ ЕДИНИЦЕ

$$\left.\begin{array}{ll} 1 = \varphi^{-3} - 2\varphi^{-1} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{1-\varphi^{-3}}{\varphi^{-1}} = 2 \\[2ex] 1 = 2\varphi^{-2} - \varphi^{-3} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{1+\varphi^{-3}}{\varphi^{-2}} = 2 \end{array}\right\} \text{I}$$

$$\alpha = \frac{1-\varphi^{-3}}{1+\varphi^{-3}} = \frac{\varphi^{-1}}{\varphi^{-2}} = \varphi^{+1}$$

* * *

$$\left.\begin{array}{ll} 1 = 2\varphi^{+2} + \varphi^{+3} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{1-\varphi^{+3}}{\varphi^{+2}} = 2 \\[2ex] 1 = 2\varphi^{+1} - \varphi^{+3} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{1+\varphi^{+3}}{\varphi^{+1}} = 2 \end{array}\right\} \text{II}$$

$$\beta = \frac{1-\varphi^{+3}}{1+\varphi^{+3}} = \frac{\varphi^{+2}}{\varphi^{+1}} = \varphi^{+1}$$

* * *

$$\left.\begin{array}{ll} 1 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{1-\varphi^{+2}}{\varphi^{+1}} = 1 \\[2ex] 1 = 2\varphi^{-2} - \varphi^{-3} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{1+\varphi^{-3}}{\varphi^{-2}} = 2 \end{array}\right\} \text{III}$$

$$\gamma = \frac{1-\varphi^{+2}}{1+\varphi^{-3}} = \frac{\varphi^{+1}}{\varphi^{-2}} = \varphi^{+3}$$

Определение контр-симметрии дополним понятием «числа-отношения» $c = \dfrac{a}{b} = \dfrac{1-d}{1+d}$ и охарактеризуем его связи с «числом-отклонением» $d = \dfrac{b-a}{2}$. Если число-отношение c считать функцией переменного d, изменяющегося от нуля до единицы дискретно ($d \in [0,1)$) или непрерывно ($0 \le d < 1$), то отношение $\dfrac{1-d}{1+d}$ логично назвать гипер-дробью.

Важным качеством шести символов 1, 2, a, b, c и d, где буквы обобщают числа, является их взаимная обусловленность: если одной из четырёх букв придать значение < 1, то три других подстроятся под него и будут числами, однозначно отвечающими значению первого.

Таким образом, шесть действительных чисел образуют самозамкнутую систему с элементами 1, 2, $a \in [1,0)$, $b \in [1,2)$, $c \in [1,0)$ и $d \in [0,1)$, что лежат в интервале от 0 до 2 и структурно организованы условиями $a = 1 - d$, $b = 1 + d$, $c = \dfrac{a}{b}$ и $d = \dfrac{b-a}{2}$ И если отказаться от нуля, делящего числовую ось на две ветви - положительную и отрицательную, то шестичленная структура $\ast 1 \backslash\ a \ \backslash b \backslash\ c \backslash\ d \backslash\ 2 \ast$ (или сокращённо $\backslash \ast \backslash$)

ФОРМЫ ТАНДЕМОВ, РАВНЫХ $5^{1/2}$

$$\left.\begin{array}{ll} 5^{0.5} = \varphi^{-1} + \varphi^{+1} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{\sqrt{5}-\varphi^{-1}}{\varphi^{+1}} = 1 \\[2ex] 5^{0.5} = \varphi^{-2} - \varphi^{+2} \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{\sqrt{5}+\varphi^{+2}}{\varphi^{-2}} = 1 \end{array}\right\} \text{IV}$$

$$\delta = \frac{\sqrt{5}-\varphi^{-1}}{\sqrt{5}+\varphi^{+2}} = \varphi^{+3}$$

* * *

$$\left.\begin{array}{ll} 5^{0.5} = 2\varphi^{-1} - 1 \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{\sqrt{5}+1}{\varphi^{-1}} = 2 \\[2ex] 5^{0.5} = 2\varphi^{+1} + 1 \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{\sqrt{5}-1}{\varphi^{+1}} = 2 \end{array}\right\} \text{V}$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \varphi^{+2}$$

* * *

$$\left.\begin{array}{ll} 5^{0.5} = \varphi^{-3} - 2 \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{\sqrt{5}+2}{\varphi^{-3}} = 1 \\[2ex] 5^{0.5} = \varphi^{+3} + 2 \;\equiv\!\triangleright\; & \dfrac{\sqrt{5}-2}{\varphi^{+3}} = 1 \end{array}\right\} \text{VI}$$

$$\varsigma = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = \varphi^{+6}$$

объединит все действительные числа с положительным статусом. Проиллюстрируем это утверждение следующими примерами.

Среднее арифметическое чисел A и B, таких, что $0 < A \leq B$, используем как делитель-нормиратор суммы $A + B$. Ясно, что после этого её значение равно 2. А нормировка каждого из слагаемых A и B их полусуммой даст числа $a \leq 1$ и $b \geq 1$, такие, что $a + b = 2$. Кроме того, единицу сравнения определяет деление пополам (дихотомия) двойки. При этом a и b служат её контр-симметричными частями при всех a и b, не равных единице. Но контр-симметрию невозможно представить графически из-за неопределённости с точкой деления отрезка $c = 2$, например, на две части - равные (дихотомия) или неравные (диарезис) друг другу. Если точка деления соответствует единице, то её надо считать серединой отрезка 2, а его части дихотомичными, то есть равными. Однако численно приравнять половины можно, но при этом их нельзя гарантированно считать геометрическими близнецами.

В самом деле, если отвернуться от гипотезы континуума и заменить целые и дробные (рациональные и иные) точки-числа вытянутыми точками, поддающимися подсчёту, то в рамках парадигмы обособленности (дискретности) серединой отрезка 2 будет либо вытянутая точка, либо стык двух таковых. А поскольку вытянутые точки неделимы и логически отвечают понятиям расстояния и длины строже, чем точки континуума, то ни одну из них нельзя извлечь из дискретного строя с тем, чтобы он сохранил свою протяжённость. При этом полученные части можно признать одинаковыми, хотя в прежний образ они не складывается, поскольку вытянутую точку посередине геометрической модели числа 2 уничтожает попытка её деления пополам.

Таким образом, геометризация числа 2 вытянутыми точками не допускает его деления на две единицы, если число вытянутых точек, составляющих двойку, нечётное. А в итоге придётся признать, что представление чисел точками числовой прямой имеет альтернативу в лице парадигмы дискретности, безоговорочно принимаемой для ряда натуральных, среди которых особо выделяются числа Люка и Фибоначчи, помеченные номерами $n = 1, 2, 3, \ldots, N, \ldots$, идентичными степеням уникума $\varphi = 0.618\ldots$ в формулах Бине (*см.* (1^*) и (2^*)) для L_n и F_n.

Как видно, взаимозависимость чисел 1, 2, a, b, c и d обусловлена оценкой слагаемых двучлена половиной его значения, которое можно не вычислять, заранее (ещё до деления) считая, что среднее арифметическое слагаемых выступает единицей их сравнения и что по отношению к ней они контр-симметричны. И отсюда следует всё, что обязывает считать шестёрку чисел структурой общего плана, где единица воплощает средние арифметические всех без исключения двучленов как тандемов вещественных чисел. Но это с традиционной точки зрения, которой противостоит принцип виртуальной единицы. В механике и в физике его аналогом является принцип виртуального масштаба. А наиболее важно то, что альтернативный путь к понятию числа адекватен его определению, данному И. Ньютоном: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой либо величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Ясно, что под «множеством единиц» Ньютон имеет ввиду целое число, а «отвлечённым отношением» называет дробь. Но не ту, у которой числитель и знаменатель целые. И не ту, что выглядит отношением двух количеств, числовые значения которых получены измерением, а ту, что получается сравнением этих количеств друг с другом, когда одно из них принято мерой другого. Но это значит, что бинарность формулировки Ньютона не математическая, а физико-метрологическая: он утверждает, что число – это отношение одноимённых параметров или однородных объектов, любой из которых при проведении измерений можно считать единицей. И нам вслед за Ньютоном стоит задуматься и подкорректировать понимание числа, принимая за единицу то, что не существует, но всегда под рукой, а именно – половину того количества, которое в сумме составляют две одноимённые величины. Тем более, что сумма двух количеств, как и её половина виртуальна и не является новым третьим рядом с двумя, требующими сравнения. И если две физические величины определимы численно, то операции с их значениями не реальны, а виртуальны. Зная это займёмся общими членами 1, 2 и 3 рядов $\{F_n\}$ и $\{L_{\underline{n}}\}$ с целью выявления единиц, альтернативных той, что стоит первой в ряду натуральных.

Будем считать, что члены рекурсивных рядов $\{F_n\}$ и $\{L_n\}$ - это дроби с единичным знаменателем. Но делителем может быть любой элемент рассматриваемых рядов, нормирующий два других в тождествах $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ и $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ с противоположным реверсом. Понятно, что после деления на F_{n+1} эти тождества примут вид $\frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 - \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$ и $\frac{L_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_{n+1}}$, где равенство $F_{n+1} = 1$ можно как принимать, так и отрицать, не признавая число F_{n+1} нормиратором. Но считая его единицей получим $F_n / F_{n+1} = a = 1 - d$ и $F_n / F_{n+1} = b = 1 + d$, где $a < 1$ и $b > 1$ по определению контр-симметричны.

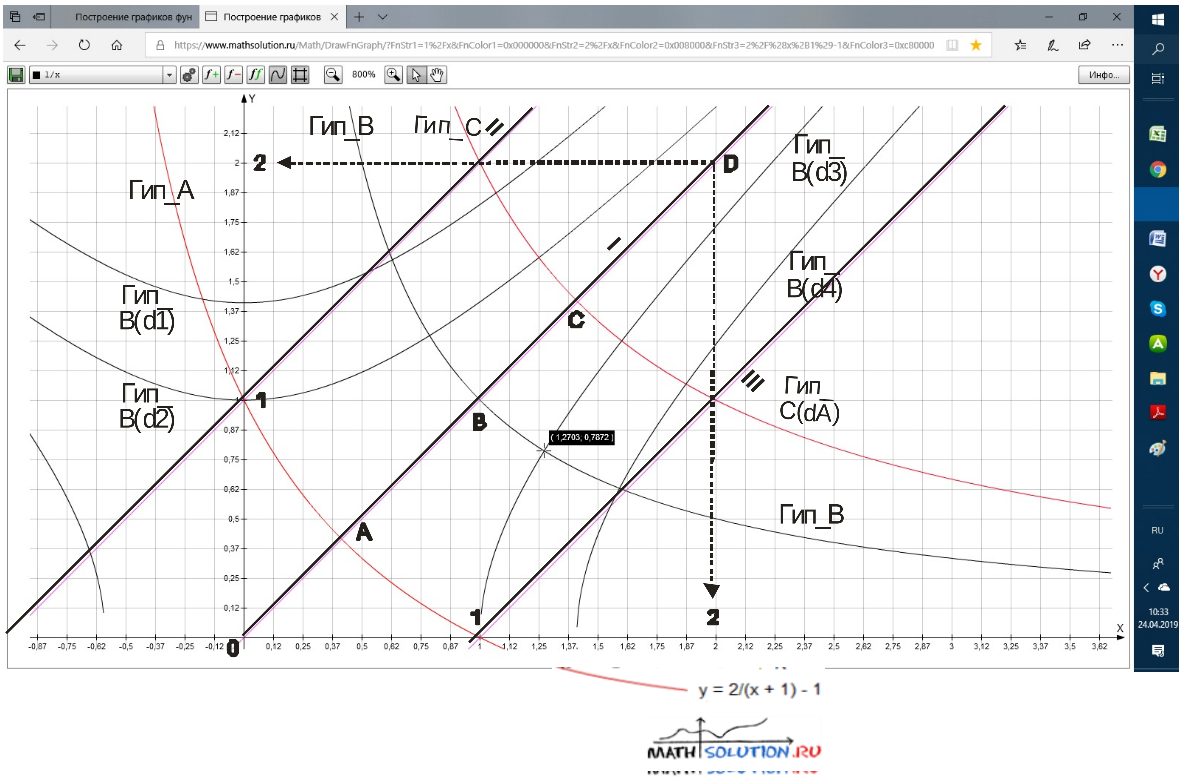
Контр-симметричным числам a и b откажем в принадлежности к континууму и за обособленность назовём их особыми. При этом отношение a к b обозначим буквой c, но не будем считать её частным от деления, как можно подумать, ограничиваясь записью $c = \frac{a}{b} = \frac{1-d}{1+d}$. То есть, c – это не дробь $\frac{a}{b}$, а гипер-дробь $\frac{1-d}{1+d}$, графическим образом которой служит определённая точка (c; d) равнобочной гиперболы, якобы состоящей из множества точек, объединённых функцией $y = \frac{1-x}{1+x}$, известной как дробно-линейная.

Ясно, что ограничение, наложенное на число-отклонение d условием $d \in [0,1)$, оставляет от равнобочной гиперболы симметричную дугу вида $\frac{1-d}{1+d} = c \Leftrightarrow d = \frac{1-c}{1+c}$ со свойством взаимной замены элементов d и $c \in [1,0)$. Это свойство назовём конверсией и заметим, что при распространении на гипер-дроби $c = \frac{1-d^{-1}}{1+d^{-1}}$ и $d = \frac{1-c^{-1}}{1+c^{-1}}$ она не меняет показателей реверса, хотя $c = a / b$ и казалось бы разности $1 - c^{+1} = \frac{b-a}{b}$ и $1 - c^{-1} = \frac{a-b}{a}$ не должны иметь один и тот же знак, поскольку $a < b$. Но это в обычной арифметике. Здесь же знаки «минус» служат реверсными показателями тандема, естественной противоположностью которого является «плюс».

Рассмотрим двучлены $1 + c^{+1}$ и $1 + c^{-1}$, равные $\frac{b+a}{b}$ и $\frac{a+b}{a}$ соответственно. Ясно, что умножение первого на $1 + d = b$, а второго на $1 - d = a$ сделает их равными числу 2 в виде сумм, отличающихся порядком слагаемых. И согласно данным определениям имеем тождество $2 = (1 + c^{+1})(1 + d) = (1 + c^{-1})(1 - d)$, где двойка представлена произведениями, первые сомножители которых отличаются по инверсии (+/\–) числа c, а вторые противоположны по реверсу (+\/–). И получается, что конверсивной связи $\frac{1-d}{1+d} = c \Leftrightarrow d = \frac{1-c}{1+c}$ членов c и d сикстета \ ∗ \ сопутствует равенство $\frac{1-d}{1+d} = c = \frac{1+c^{+1}}{1+c^{-1}} = c \times 1$, вытекающее из представлений двойки двумя сомножителями.

Таким образом, гипер-дробь $c = \dfrac{1-d}{1+d}$ как квази-функциональная зависимость c от d, отлична от непрерывной функции $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ дискретностью аргумента $d \in [0,1)$, областью определения и интервалом значений $c \in [1,0)$, и либо допускает конверсию (в том числе после инверсии всех элементов $\dfrac{1-d}{1+d} = c \Leftrightarrow d = \dfrac{1-c}{1+c}$), либо не допускает, если в левой части $\dfrac{1-d}{1+d}$ конверсивного условия ($\Leftrightarrow$) реверсировать числитель и инвертировать слагаемые знаменателя. Тогда получается $\dfrac{1+d}{1+d^{-1}} = d \times 1$ и о конверсии нет речи. Но произведения $(1 + c^{+1})(1 + d)$ и $(1 + c^{-1})(1 - d)$, первые тандемы которых различны по инверсии, а вторые отличаются реверсом дают намёк на то, что в тандемной арифметике сосуществуют разные двойки.

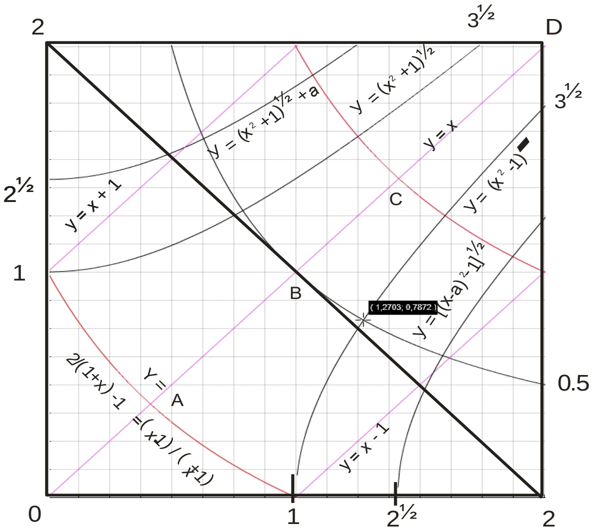
Снимок экрана с фрагментами семи равнобочных гипербол,
пересекающихся в поле квадрата 2 х 2.



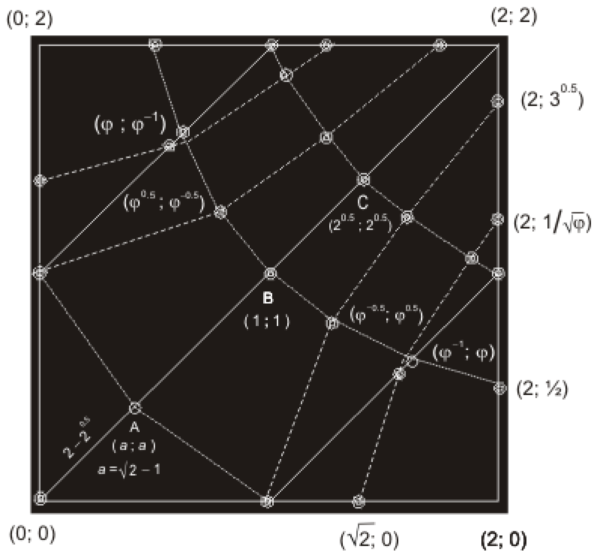
Интернет-сайт www.math-solution.ru даёт посетителям возможность построить график дробно-линейной функции $y = \dfrac{1-x}{1+x}$ в режиме *online*. При этом в ответ на поступившую заявку ресурс рисует кривую с уравнением $y = 2\,(1+x)^{-1} - 1$, визуализацией которого служит равнобочная гипербола А. Но гипербола В ($y = x^{-1}$) тоже является равнобочной, хотя линии А и В не совпадают графически и отличаются асимптотами при том, что кривые В и С приближаются к осям X и Y без возможности пересечь их хотя бы на бесконечности.

Ясно, что гиперболы с вершинами A и C на оси I совпадут всеми точками при переносе точки C ($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) в составе линии C ($y = 2x^{-1}$) в пункт A (*a*; *a*). (Здесь $a = \sqrt{2} - 1$ и $x > 0$.) Поэтому, несмотря на различие асимптот, линию C можно считать дублёром кривой A. При этом общей точке (φ^{-1}: φ^{+1}) гиперболы B ($y = x^{-1}$) и прямой III ($y = x - 1$) симметричен пункт (φ^{+1}; φ^{-1}) той же гиперболы, обозначающий место её пересечения с прямой линией II ($y = x + 1$). И вообще, у каждой точки пересечения линий выше диагонали 0D в другой половине квадрата 2×2 есть симметричная ей точка с теми же координатами *x* и *y*, но в другом порядке. Причём прямая I, как ось симметрии множества пересечений в поле квадрата 2×2 служит асимптотой четырех равнобочных гипербол Гип_B(d1- d4), геометрически дублирующих линию $y = x^{-1}$ при том, что уравнения дублёров отличаются квадратичностью.

Функции и графики
равнобочных гипербол A и B с дублёрами



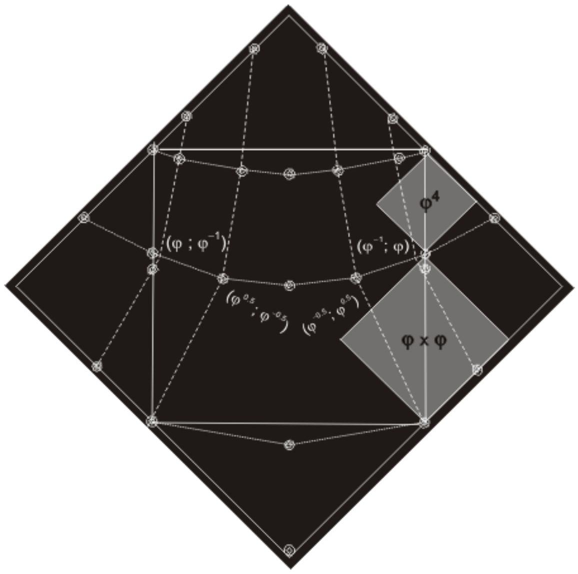
Координаты и расстояния между
общими точками гипербол и прямых



Итак, в кадр 2×2 попали фрагменты семи равнобочных гипербол двух видов: I) Гип_A ($y = 2\,(1+x)^{-1} - 1 = (1-x)^{+1}\,(1+x)^{-1}$) с дублёром Гип_C ($y = 2x^{-1}$) и II) Гип_B ($y = x^{-1}$), дублёры Гип_B(d1) и Гип_B(d4) которого геометризуют уравнения $y = (1 + x^2)^{1/2}$ и $y = (1 - x^2)^{1/2}$, отличные от функций $y = 1 + x$ и $y = 1 - x$, моделирующих прямые II и III, параллельные диагонали кадра 2×2. Белыми метками на чёрном фоне отмечены места пересечения равнобочных гипербол между собой и с прямыми, образующими периметр кадра и секущими его, например, диагональю правого наклона. При этом точки пересечения и кривых линий образуют «Созвездие Уникума», название которого обусловлено тем, что координаты нескольких точек заданы скаляром $\varphi = 0{,}618\ldots$ Тем самым уникальное число φ получает новое определение. К примеру, общая точка гиперболы Гип_B ($y = x^{-1}$) и линии III ($y = 1 - x$) имеет инверсные координаты $x = \varphi^{-1}$ и $y = \varphi^{+1}$. При этом существует пункт (φ^{+1}; φ^{-1}), симметричный точке (φ^{-1}; φ^{+1}) относительно диагонали 0D кадра 2×2, где ту же гиперболу пересекает прямая II ($y = 1 + x$), отрезающая у квадрата 2×2 одну восьмую площади. Аналогично, у точки ($\varphi^{-1/2}$; $\varphi^{+1/2}$) на кривой Гип_B в месте пересечения с линией Гип_B(d2) есть точка ($\varphi^{+1/2}$; $\varphi^{-1/2}$), координаты которой имеют иной порядок следования. При этом $\varphi^{+1/2} = 0{,}786\ldots$, а $\varphi^{-1/2} = 1{,}272\ldots$, что соответствует данным трассировки, записанным на черном ярлыке в поле кадра 2×2, ранее выделенного на снимке экрана (*см. выше*).

Понятно, что значения абсцисс и ординат как расстояний от симметричных точек до левой и до нижней сторон квадрата получены совместными решениями уравнения $y = x^{-1}$ и зависимостей $y = 1 + x$, $y = 1 - x$ и $y = (x^2 + 1)^{½}$, $y = (x^2 - 1)^{½}$, первые из которых линейны, тогда как вторые квадратичны. При этом нельзя не заметить сигнатурной противоположности уравнений прямых II и III, параллельных диагонали $y = x$. Так же отметим реверсное различие квадратичных форм $y^2 = x^2 + 1$ и $y^2 = x^2 - 1$, моделирующих дублёры d2 и d3 кривой $y = x^{-1}$.

СОЗВЕЗДИЕ УНИКУМА:
зеркальные точки с инверсными координатами (x ; $y = x^{-1}$) пересечений
прямых и кривых линий, уравнения которых отличаются реверсом (+\/–), инверсией (+/\–) и имеют вид тандемов с числом Фидия φ = 0,618…



Заметим, что четыре звёзды «Созвездия Уникума» обозначают четыре вершины квадрата $2^{0.5} \times 2^{0.5}$ площадью вдвое меньше 2×2. При этом малый квадрат вписан в большой, повёрнутый на 45°. И если отношение сторон данных квадратов равняется $\sqrt{2}$, то подобие их площадей определяет множитель 2, То есть, различие фигур одинаковой формы предполагает два вида подобия. И, казалось бы, сравнение сторон и ограниченных ими площадей можно производить в рамках единственной арифметики. Однако любому квадрату нужны два масштаба: пригодный для оценки длин и предназначенный для измерения площадей. А так как ни расстояний, ни плоскостей в природе нет, то единицы 1^1 и 1^2 могут иметь иной смысл, кроме геометрического. К примеру, квадроединица 1^2 – это не только эталонный образец площади, но и элемент арифметики, где безразмерные числа связаны не операционно, а сигнатурно.

Очевидно, что диагонали фигуры $2^{½} \times 2^{½}$ делят квадратный сквер 2×2 на четыре равные части единичной площади. При этом квадроединица 1^2 служит масштабом сравнения площадей не только квадратной формы. Ведь два отрезка, пересекающихся в поле единичного квадрата и параллельных его сторонам, в общем случае разделят его площадь на четыре неравные части, требующие оценки квадромасштабом 1^2. И если точка пересечения отрезков принадлежит диагонали квадрата 1×1, то две из четырёх вписанных фигур будут квадратами с общей вершиной, тогда как две другие – это одинаковые прямоугольники.

Итак, в результате «четвертования» фигуры 1×1 получаются два квадрата с площадями φ^2 и φ^4, выделенными светло-серой заливкой на чёрном фоне со звёздами, и два равных прямоугольника со сторонами φ^1 и φ^2, занимающие остальную площадь фигуры 1^2. При этом центром «четвертования» служит точка (φ^{-1}; φ^{+1}) пересечения гиперболы B ($y = x^{-1}$) с прямой III ($y = 1 - x$). Ясно, что её ордината $y = \varphi^{+1}$ равна стороне квадрата $\varphi^{+1} \times \varphi^{+1}$, покрывающего часть площади 1^2 так, что его диагональ в сумме с диагональю квадрата $\varphi^{+2} \times \varphi^{+2}$ даёт $2^{0.5}$. А это есть сторона квадрата, площадь которого вдвое больше 1^2 и вдвое меньше 2^2. Причём $2^{0.5} \times 2^{0.5} = 2$ и можно подумать, что длины и площади подчинены одной арифметике. Однако двойки $2 = 1^1 + 1^1$ и $2^* = 1^2 + 1^2$ различны не только геометрически, но и семантически.

Заметим, что в тройке 1^2, $2{\cdot}1^2$ и $2^2{\cdot}1^2$ из единиц и двоек последующее число вдвое больше предыдущего, но эта последовательность не содержит числа 3, хотя оно (пусть под радикалом) присутствует в звёздном наборе как ордината точки (2; $3^{0.5}$). Но при этом тройка как общий (наряду с единицей и двойкой) элемент рядов Фибоначчи и Люка участвует в оценке площадей масштабом 1^2 и остаётся нужной тандемной арифметике даже после утраты геометрического смысла, навязанного ей прилагательным «скверная» от английского слова *square* - площадь.

Зная, что скверное число 1^2 является суммой квадратных площадей $\varphi^{+1} \times \varphi^{+1}$, $\varphi^{+2} \times \varphi^{+2}$ и двух прямоугольников площадью $\varphi^{+1} \times \varphi^{+2}$ каждый, получим тождество $1^2 = \varphi^2 + \varphi^4 + 2\varphi^3$, где $\varphi^2 + \varphi^3 = \varphi^1$, $\varphi^3 + \varphi^4 = \varphi^2$ и, значит, $\varphi^1 + \varphi^2 = 1^2$. Ясно, что ряд φ^1, φ^2, φ^3, φ^4, … целых степеней уникума φ должен содержать единицу. Пусть её символизирует нулевая степень φ^0, хотя бинарной арифметике нуль не нужен, как не нуждается она в отрицательных числах, считая знак «минус» символом, принадлежащим сигнатурной стороне тандемов, отличающихся и реверсом, и инверсией, и значением, как, например, тандемы $\varphi^1 + \varphi^2 = +1$ и $\varphi^{-1} - \varphi^{-2} = -1$. При этом в обычной арифметике обмен местами членов второго тандема меняет его значение с -1 на $+1$.

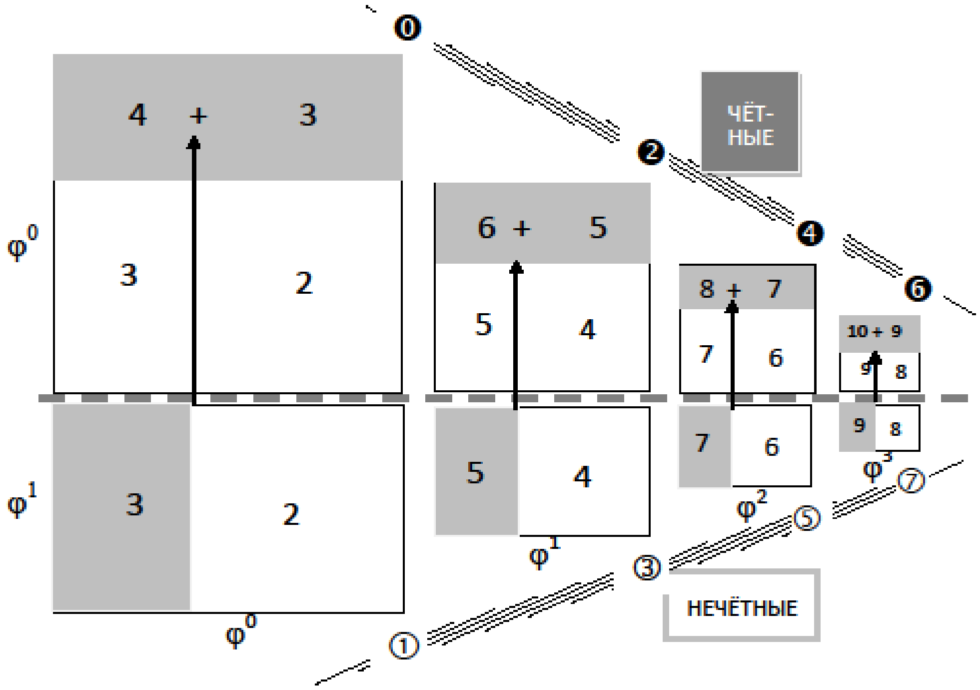
Таким образом, трансформировать один тандем в другой можно преобразованием с весьма скудным набором возможностей. Ведь числа 1, 2 и 3, общие для последовательностей Фибоначчи и Люка, входят в тождества $1 + 2 = 3$ и $1 + 2 + 3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$. Но кроме того 1, 2 и 3 «работают» показателями степени в равенствах $\varphi^{-1} + \varphi^{-2} = \varphi^{-3}$ и $\varphi^{+1} - \varphi^{+2} = \varphi^{+3}$ с различной инверсией и противоположным реверсом. Понятно, что квадрат 1^2 можно увеличить, умножая каждую из его сторон на число $k^* > 1$. При этом единичная площадь возрастёт до $1^2 \cdot k^{*2}$ и в k^{*2} раз вырастут площади вписанных в неё прямоугольников и квадратов. Но если $k^* = \varphi < 1$, то единичная площадь 1^2 уменьшится в φ^2 раз или на $1^2 - \varphi^2$ с остатком $1^2 \cdot \varphi^1$ в виде прямоугольника, включающего квадрат $\varphi^{+1}\times \varphi^{+1} = \varphi^{+2}$ и параллелограмм $\varphi^{+1}\times \varphi^{+2}$ с прямыми углами.

Ясно, что умножение 1^2 на φ^{2N} при N = 1, 2, 3, … породит ряд квадратов с площадями φ^2, φ^4, φ^6, φ^8 и т. д., величины которых связаны с чётностью показателей степени уникального основания φ. Это значит, что квадратам, уменьшающимся начиная с единичного, свойственно φ^2-подобие, реализуемое последовательностью 0, 2, 4, 6, 8, 10 и т. д. чётных степеней числа φ. И на чертеже круглыми бирками черного цвета отмечены квадраты, площади которых равны константе φ в степени, соответствующей числу, написанному белым по чёрному. При этом числами в белых кругах представлены нечётные степени φ, определяющие площади φ^2-подобных прямоугольников.

Итак, чётные числа как показатели степени уникума φ маркируют квадраты, каждый из которых разделён на два прямоугольника – с серой заливкой и без неё. При этом затенённую часть фигуры слагают квадрат площадью φ^{2N} и прямоугольник площадью φ^{2N-1}, где номер N = 1, 2, 3, … участвует в определении формы и оценке площадей, связанных φ^2-подобием, будь то контур из четырёх равных отрезков или четырёхугольник с перпендикулярными сторонами разной длины. Причём равносторонняя и вытянутая площади могут быть одинаковыми.

Например, сумма $\varphi^{2N} + \varphi^{2N-1}$ у номера N = 1 после умножения каждого из слагаемых на $\varphi^0 = 1$ выражает площадь 1^2, разделённую на прямоугольники нижней границей серой зоны. При этом серая (верхняя) часть квадрата 1^2 состоит из квадрата со стороной φ^2 и прямоугольника площадью $\varphi^{+1}\times \varphi^{+2} = \varphi^{+3}$, то есть имеет площадь $\varphi^{+4} + \varphi^{+3} = \varphi^{+2}$, такую же, как у квадрата $\varphi^{+1}\times \varphi^{+1} = \varphi^{+2}$ в незакрашенной части площадью $1^2 - \varphi^0\times \varphi^{+2} = \varphi^0\times \varphi^{+1}$, продублированной ниже штрих-пунктирной линии-разделителя, делящей рисунок по горизонтали.

Несомненно, что нормировка разности $\varphi^{-1} - \varphi^{+1} = 1$ уникумом φ^{+1} изменит степень -1 на $\varphi^{-2} = 1 + \varphi^{-1}$, откуда делением на φ^{-2} получается $1 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$, а после умножения на φ^0 единица приобретает вторую степень, а также вид $1^2 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$ и смысл площади, подвергнутой делению на два прямоугольника шириной φ^0 и соответственно высотой φ^{+1} и φ^{+2}. Причём геометрически $(\varphi^{+1})^2$ и $(\varphi^{+2})^2$ – это квадраты, помеченные цифрами 2 и 4, а $(\varphi^0 - \varphi^{+1})\,\varphi^{+1} = (\varphi^0 - \varphi^{+2})\,\varphi^{+2} = \varphi^{+1} \times \varphi^{+2} = \varphi^{+3}$ – это прямоугольники с меткой 3 и общей площадью $2\varphi^{+3}$, отнятой у 1^2. Причём $1^2 = \varphi^{+2} + 2\varphi^{+3} + \varphi^{+4}$ или $1^2 - 2\varphi^{+3} = \varphi^{+2}\,(1^1 + \varphi^{+2})$, где в одном выражении без конфликта сосуществуют остепенённые единицы 1^1 и 1^2. Сомневаясь в их равенстве, приведём последнее тождество к виду $1^1 + \varphi^{+2} = \varphi^{-2} - 2\varphi^{+1}$ и сделаем последний член нормиратором. Получим $0.5\,\varphi^{-1} + 0.5\,\varphi^{+1} = \varphi^{-3} - 2$ или $0.5\,(\varphi^{-1} + \varphi^{+1}) = 0.5 \times 5^{0.5} = 0.5 + \varphi^{+1} = 1 + 0.5\,\varphi^{+3} = 2\,\varphi^{+1}$, где любое звено является константой, выражающей независимое от N отношение суммы $\varphi^{2N} + \varphi^{2N+2}$ квадратных площадей к оставшейся площади $2\varphi^{2N+1}$, занятой двумя одинаковыми прямоугольниками со сторонами φ^2 и φ^1.

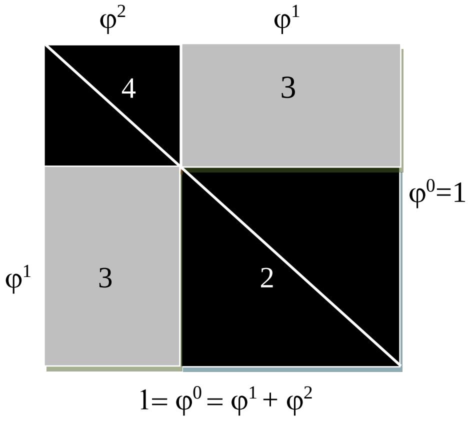


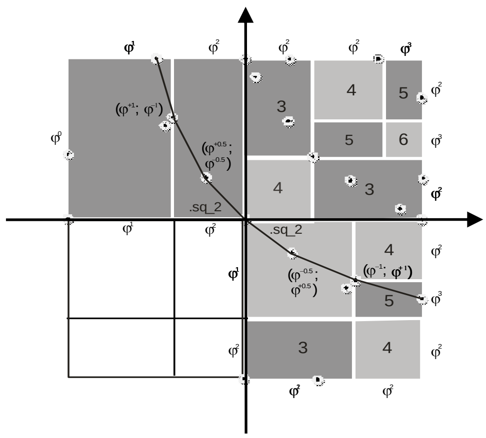
Таким образом, замечательное число 1,1803398…, как сумма $0.5 + \varphi^1$, равная $\sqrt{5}/2$, служит инвариантом геометро-арифметических построений, устанавливающих различие квадратной и прямоугольной площадей по чётности или нечётности показателя степени уникального основания $\varphi = 0.618…$ То есть, половина $5^{0.5} = 5^{1/2}$ является постоянной деления квадратов φ^0, φ^2, φ^4, φ^6 на четыре части взаимно перпендикулярными отрезками, параллельными сторонам. При этом площади, выраженные уникумом φ в чётной степени помечены круглыми бирками чёрного цвета, тогда как площади φ^1, φ^3, φ^5, φ^7 обозначены взятыми в круг нечётными числами, равными показателю N степени константы φ, максимальное значение которого ограничим числом 10. Причём 10 = 2 (2 + 3). И это надо рассматривать как особенность арифметики, основанной на числах 1, 2 и 3, общих для рекурсий Фибоначчи и Люка.

Итак, в бинарной арифметике нет радикала $\pm\sqrt{5}$, а особое число $5^{0.5}$ представлено шестью тандемами $\varphi^{-1} + \varphi^{+1}$, $\varphi^{-2} - \varphi^{+2}$, $1 + 2\varphi^{+1}$, $2\varphi^{-1} - 1$, $\varphi^{-3} - 2$ и $2 + \varphi^{+3}$), где целые 1, 2 и 3 выступают и слагаемыми и сомножителями, а знаки «плюс» или «минус» при 1, 2 или 3 в показателе степени определяют состояние инверсии основания φ или форму реверса как сочетания элементов тандема, равного $5^{0.5}$ или 1. При этом единство сигнатуры и чисел 1, 2 и 3 в разных позициях не нарушает арифметической достоверности бинарных форм, хотя есть свидетельства того, что люка-фибоначчиевы целые не принадлежат множеству действительных чисел. Но об этом ниже.

А сейчас заметим, что φ^2-подобные площади (квадраты и четырёхугольники) легко различимы визуально и формально различаются хотя бы тем, что с первыми связаны чётные показатели степени «скверного» числа φ, а вторые отображаются его нечётными степенями.

Примем как факт то, что числа φ^2, φ^4 и φ^6, принадлежащие геометрической прогрессии, и числа $\varphi^1, \varphi^3, \varphi^5$ как члены того же ряда после умножения на $\varphi^0 = 1$ выражают площади прямоугольных плиток, которые получаются разметкой и распиловкой на части квадратного листа фанеры размером 1×1. При этом есть несколько вариантов раскроя единичного квадрата на φ^2-подобные фрагменты квадратной и прямоугольной форм. А их количество определено желанием целиком покрыть ими единичную площадь, минимально делимую на две равные или неравные части, как, например, левый верхний квадрат, один из четырёх, слагающих фигуру 2×2. Как видно, в её периметре находится головная дуга гиперболы $y = x^{-1}$, которой принадлежат точки $(\varphi^{-1}; \varphi^{+1})$ и $(\varphi^{-0.5}; \varphi^{+0.5})$ с симметричными дублёрами $(\varphi^{+1}; \varphi^{-1})$ и $(\varphi^{+0.5}; \varphi^{-0.5})$, координаты x и y которых определяют константу φ новым способом, альтернативным найденному более двух тысячелетий назад при делении отрезка в крайнем и среднем отношении. На рисунке светло-серой заливкой заполнены квадраты, тогда как окрас прямоугольников темнее. И видно, что одинаковые квадраты 1×1 количеством четыре, составляющие фигуру 2×2, сами состоят из набора плиток с заданными длинами сторон. И в разнообразии этих наборов можно убедиться, поместив в центре площади 2^2 начальную точку двумерных координат. При этом видно, что единичный квадрат в первом квадранте сложен из семи плиток, а следующий с точками $(\varphi^{+1}; \varphi^{-1})$ и $(\varphi^{+0.5}; \varphi^{-0.5})$, состоит из двух прямоугольников, меньший из которых имеет площадь sq_2 = φ^2, такую же как крупные квадраты в поле фигур 1×1 под осью абсцисс.





Таким образом, из плиток, размеры которых ограничены первыми шестью степенями уникума, можно сложить не один квадрат площадью 1 × 1. И поливариантность покрытия квадратной площади паркетом из плиток шести типоразмеров является ещё одной особенностью константы φ = 0.618…

Первые десять степеней основания φ назовём *ten*-отрядом, имея в виду тождество между номерами N = 1÷10 и показателями степени n = 1÷10 у членов последовательности $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^9, \varphi^{10}$.

(Ищите продолжение)