# КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, О КОТОРОЙ МЕЧТАЛ ЭЙНШТЕЙН

Геннадий Шипов

*Академик РАЕН email: waprdrive09@gmail.com*

## Введение

Прошло 45 лет с тех пор, как я опубликовал монографию [1], в которой впервые были получены *динамические уравнения для полей инерции* и было показано, что основное уравнение квантовой теории - уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi-U\psi=0, \qquad (\text{в.}1)$$

*описывает простейшую динамику поля инерции*, связанного с квантовой частицей. При этом плотность частицы с массой $m$ или плотность заряда с зарядом $e$, записывается в виде

$$\rho = m\,\psi^*\psi \text{ или } \rho = e\psi^*\psi, \qquad (\text{в.}2)$$

где комплексная волновая функция $\psi$ *является нормированным на единицу полем инерции* [1]. Важно отметить, что, в общем случае, в уравнении (в.1) вместо постоянной Планка $\hbar$ *стоит произвольная константа* $C$ [2], что позволило *использовать уравнение Шредингера для описания наблюдаемых макроквантовых явлений* [3].

Начиная с 1979 г., эти революционные результаты опубликованы в 6ти монографиях автора, из которых 5 монографий изданы на русском языке [1, 4-7] и одна монография [8] переведена на английский язык. Только на доступном сайте Академии Тринитаризма опубликовано 29 статей [9-31], сделаны многочисленные научные доклады на эту тему на семинарах МГУ, МВТУ, РУДН, ИОФ АН и в других российских организациях, связанных с наукой.

Как известно, общепризнанная квантовая теория около сотни лет не воспринимается как окончательная теория ведущими физиками почти сразу после ее появления. Почему? Ответ на этот вопрос дают ее основоположники - М. Планк, Л. Де Бройль, А. Эйнштейн, Г. Лоренц, П. Ланжевен (он называл отказ от образного мышления в квантовой теории «интеллектуальным развратом»), Э. Шредингер, П. Дирак и многие другие известные физики. Приведем некоторые высказывания о квантовой теории Нобелевских лауреатов по физике.

«*Квантовая физика срочно нуждается в новых образах и идеях, которые могут возникнуть только при глубоком пересмотре принципов, лежащих в ее основе».*

Луи де Бройль

*«Квантовая механика, это полная загадок и парадоксов дисциплина, которую мы не понимаем до конца, но умеем применять».*

М. Гелл-Манн

Сам создатель квантовой электродинамики П. Дирак в работе [32] пишет об ее уравнениях (уравнениях Дирака):

*«Правильный вывод состоит в том, что основные уравнения неверны…»*

Точка зрения Эйнштейна сводилась к тому, что квантовая механика в современном ее состоянии не является фундаментальной теорией, поскольку в ней потеряно образное мышление, так необходимое для понимания природы и, кроме того, она не согласуется с общим принципом относительности. А. Эйнштейн приходит к выводу, что квантовая меха ника *не может служить отправной точкой для дальнейшего развития физики*. В одной из последних работ, которую необходимо рассматривать как его «научное завещание», А. Эйнштейн писал:

«*Еще одно последнее замечание: мои усилия пополнить общую теорию относительности путем обобщения уравнений гравитации были предприняты отчасти в связи с предположением о том, что, по-видимому, разумная общая релятивистская теория поля, возможно, могла бы дать ключ к более совершенной квантовой теории* [33].»

В настоящей работе дается краткий обзор детерминированной квантовой теории, обладающей всеми физическими свойствами, о которых мечтал А. Эйнштейн.

Прежде всего, *в основе новой квантовой теории используется принцип Всеобщей относительности* [4, 9,17,21,26,31], который объединяет трансляционную относительность теории Эйнштейна, использующую голономные трансляционные координаты $x, y, z, ct,$ с вращательной относительностью, использующей дополнительно 6 неголономных вращательных координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ [13,15,16,18,25,27 ].

Далее, принцип Всеобщей относительности *привел к открытию поля инерции- третьего фундаментального поля, которое дано каждому из нас в ощущениях в повседневной жизни*, при этом оказалось, что детерминированная квантовая механика, о которой мечтал Эйнштейн, *описывает простейшим образом динамику реального физического поля - поля инерции* [1,5-8,10,20,25,27]. Все эти свойства новой квантовой теории позволяют:

- восстановить образное мышление в физике микромира, потерянное в традиционной квантовой теории;
- распространить квантовую механику на описание квантовых явлений в макромире;
- полностью отказаться в физике от понятия инерциальной системы отсчета;
- обобщить некоторые фундаментальные законы сохранения в физике, которые до сих пор не учитывают взаимодействие макроматерии с Физическим Вакуумом.

## 1. Основные понятия квантовой механики

В основе современной квантовой механики лежит понятие волны де Бройля

$$\psi = \psi_0\, exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(p_n x^n)\right\} = \psi_0\, exp\{-i(k_n x^n)\}\,, \tag{1.1}$$

$$\psi^* = \psi_0\, exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_n x^n)\right\} = \psi_0\, exp\{\, i(k_n x^n)\}\,, \tag{1.2}$$

в которой используются найденные из эксперимента соотношения Планка-Эйнштейна

$$p_n = \hbar k_n\,,\ n = 0,1,2,3 \ \text{или}\ E = \hbar\omega,\quad \vec{p} = \hbar\,\vec{k}\ . \tag{1.3}$$

Волновая функция (1.1) находится из решения уравнения Шредингера (в. 1) , при этом плотность массивной или заряженной частицы определяется соотношениями (в. 2). Если разделить соотношения на массу $m$ или заряд $e$ , то мы получаем

$$W = \psi^*\psi = |\psi|^2 > 0 \tag{1.4}$$

- плотность вероятности, нормированную на единицу

$$\int W dV = \int \psi^* \psi dV = 1. \qquad (1.5\ )$$

В отличие, от соотношений (в. 2), плотность вероятности (1.4) не является физической величиной, измеряемой в эксперименте. Реальные измерительные приборы работают с плотностями (в. 2), а не с плотностью вероятности (1.4). Например, классическое определение координаты центра масс протяженного объекта массы $m$ с плотностью $\rho$ записывается в виде

$$\overline{x}^i = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \rho x^i dV}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho dV} = \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty} \rho x^i dV = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, x^i dV = \int_{-\infty}^{\infty} W x^i dV\, x^i , \qquad (1.6)$$

при этом, для описания протяженного объекта с плотностью $\rho = m\,\psi^*\psi$ (или $\rho = e\,\psi^*\psi$) оказалось удобным использовать плотность вероятности $W$, рассчитывая классические измеряемые величины, такие как координата центра масс протяженного объекта $x^i{}_c$ и его импульс $p^i{}_c = mu^i{}_c$ в соответствии с формулами

$$x^i{}_c = \overline{x}^i = \int_{-\infty}^{\infty} W(x^i)\, x^i dV = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, x^i dV, \qquad (1.7)$$

$$p^i{}_c = \overline{p}^i = \int_{-\infty}^{\infty} W(x^i)\ p^i dV = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi\, p^i dV. \qquad (1.8)$$

Из формул (1.7), (1.8) следует, квантовая механика описывает не точечные объекты, а объекты, занимающие некий конечный объем $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ с малой массой

$$\Delta m = \rho \Delta V\ . \qquad (1.9)$$

Поэтому в квантовой механике возникли дискуссии, в которых квантовый объект интерпретировался как ансамбль «точечных» частиц. На самом деле, это одна протяженная частица (полевой клубок поля $\psi$), меняющая свою форму, но оставаясь при этом единим целым подобно капле жидкости в гидродинамике.

### 1.1 Корпускулярно-волновой дуализм и принцип неопределенности Гейзенберга

Одним из основных уравнений физики, которое описывает движение сплошной среды с плотностью $\rho$, является уравнение непрерывности

$$(\rho u^i) = 0\ , \qquad i = 0,1,2,3\ , \qquad (1.10)$$

которое в нерелятивистском приближении записывается в виде

$$\frac{\partial\, \rho}{\partial t} + div\, \vec{j} = 0, \qquad \vec{j} = \ \rho \vec{v}\ , \qquad (1.11)$$

где $\vec{v}$ - скорость. Теория поля рассматривает уравнение (1.11) как закон сохранения массы $m$ или заряда $e$ для точечной частицы, например [34]

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\int \rho dV = \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j}\right) = 0, \qquad \rho = e\delta(\vec{r}), \qquad (1.12)$$

где $\delta(\vec{r})$ $-$ дельта функция Дирака. В квантовой механике рассматривается «точечная» частица, поэтому в ней справедливы равенства

$$\rho = m\delta(\vec{r}) = m\psi^*\psi \ \text{ и } \ \rho = e\delta(\vec{r}) = e\psi^*\psi\ , \qquad (1.13)$$

которые аналитически описывают дуализм волна-частица. Соотношения (1.13) следуют из представления квантовой частицы в виде волнового пакета, состоящего из волн де Бройля.

В приближении слабых полей $\psi$, мы можем использовать для поля $\psi$ принцип суперпозиции и Фурье анализ. Для этого разложим поле $\psi(\vec{r},t)$ по плоским волнам

$$\psi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{C}(\vec{k},t)\psi_{\vec{k}}(\vec{r},t)d^3k\,, \tag{1.14}$$

где

$$\mathrm{C}(\vec{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*{}_{\vec{k}}(\vec{r},t)\psi_{\vec{k}}(\vec{r},t)dV \tag{1.15}$$

и

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r},t) = Ne^{i(\vec{k}\,\vec{r}\,-\omega t)}\,. \tag{1.16}$$

Функции $\psi_{\vec{k}}(\vec{r},t)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*{}_{\vec{k}}(\vec{r},t)\psi_{\vec{k}}(\vec{r},t)dV \;= \delta\big(\vec{k}-\vec{k'}\big), \tag{1.17}$$

что позволяет определить множитель $N$ в (1.16 ) как

$$N = (2\pi)^{-3/2}\,. \tag{1.18}$$

Соотношение (1.14 ) представляет поле $\psi(\vec{r},t)$ как бесконечный набор плоских волн. В реальности мы имеем дело с конечной группой волн (волновым пакетом), для которого поле $\psi(\vec{r},t)$ представляется в виде

$$\psi(\vec{r},t) = \int_{\vec{k}_0-\Delta\vec{k}}^{\vec{k}_0+\Delta\vec{k}} \mathrm{C}(\vec{k})e^{i(\omega t-\vec{k}\,\vec{r})}d^3k\,, \tag{1.19}$$

где $\vec{k}_0$– волновой вектор, около которого лежат волновые вектора волн, образующих группу. Предполагая $\Delta\vec{k}$ малым, можно разложить частоту $\omega$ как функцию $\vec{k}$ по степеням

$$\omega = \omega_{\,0} + \left(\frac{d\omega}{d\vec{k}}\right)_0 \left(\vec{k}\; - \vec{k}_{\,0}\right) \dots$$

и проинтегрировать соотношение (1.19 ). В одномерном случае результат интегрирования запишется как [35]

$$\psi(x,t) = 2C(k_0)\frac{\sin\left\{\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t - x\right]\Delta k\right\}}{\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t - x\right]}e^{i(\omega_0 t - k_0\,x)}\quad . \tag{1.20}$$

Известно следующее представление функции Дирака

$$\delta(x) = \lim_{A\to\infty}\delta(\,x,A) = \pi\lim_{A\to\infty}\frac{sin^2 Ax}{\pi^2x^2} \;= \pi\lim_{A\to\infty}\phi*(A,x)\phi(A,x) = \psi^*(x)\psi(x), \tag{1.21}$$

где

$$\phi(A,x) = \frac{\sin A\,x}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{ikx}dk\,, \qquad \phi*(A,x) = \frac{\sin A\,x}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} e^{-ikx}dk\,, \quad (1.22)$$

$$\psi = \sqrt{\pi}\phi\,. \quad (1.23)$$

На рис. 1 представлено распределение плотности вероятности (1.21) волнового пакета,

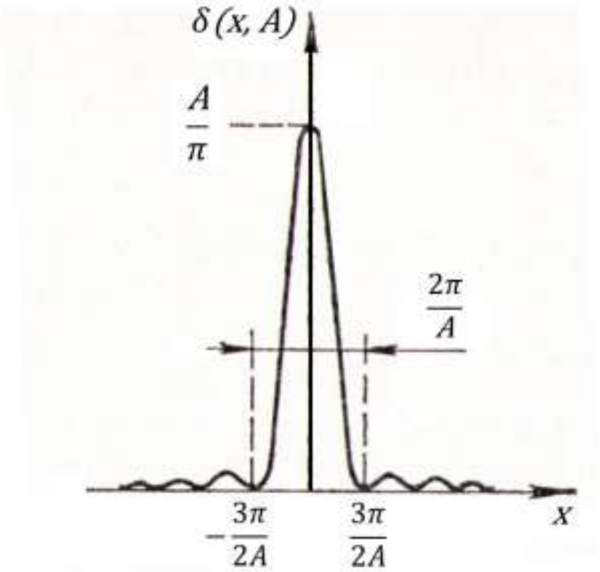


Рис.1 Квантовая частица как волновой пакет, состоящий из волн де Бройля.

Функция (1.20) достигает максимума в точке

$$x = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t = x_{\text{c}}\,,$$

совпадающей с координатой центра масс группы волн, а, поскольку плотность частицы определена соотношением $\rho = m\psi^*\psi$ , то и с центром масс частицы. Поэтому в нашем случае имеет место равенство

$$x_{\text{c}} = \overline{x} = x = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t. \quad (1.24)$$

Скорость центра масс волнового пакета $v$ мы находим путем дифференцирования (1.24) по времени

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0. \quad (1.25)$$

Параметр $A$ в (1.20) определяет разброс волнового вектора $\Delta k$, поэтому, когда $A = \Delta k \to \infty$ , волновой пакет ведет себя как точечная частица и координата (1.24) точно определена, поскольку ее плотность описывается дельта-функцией Дирака (1.21). Наоборот, $A = \Delta k \to 0$, точно определен волновой вектор $k$ . В этом предельном случае волновой пакет на рис.1 вырождается в плоскую волну с бесконечно малой амплитудой. Для волнового пакета существует закон сохранения «фазового объема»

$$\Delta x \Delta\, k = 1\,. \quad (1.26)$$

Умножая это соотношение справа и слева на постоянную Планка $\hbar$ , получаем известное соотношение неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p \ = \hbar \, . \tag{1.27}$$

## 1.2 Оптико-механическая аналогия и операторное представление физических величин

Из определения волны де Бройля (1.1) и (1.2) следуют физические параметры для плоской волны и точечной частицы, а именно:

- Эйконал $f$ для плоской волны

$$f = -k_n x^n = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{\psi}{\psi^*}\right) \; ; \tag{1.28}$$

- Действие $S$ для точечной частицы

$$S = -p_n x^n = -\frac{i\hbar}{2} \ln\left(\frac{\psi}{\psi^*}\right) . \tag{1.29}$$

Через скаляры $f$ и $S$ определяются: а) волновой вектор

$$k_n = -\frac{\partial f}{\partial x^n} = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\ln\frac{\psi}{\psi^*}\right) \tag{1.30}$$

и б) импульс частицы

$$p_n = -\frac{\partial S}{\partial x^n} = -\frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\ln\frac{\psi}{\psi^*}\right) \; . \tag{1.31}$$

Волновой вектор $k_n$ характеризует распространение классической безмассовой электромагнитной волны по поверхности светового конуса, поэтому он изотропен $k_n k^n = 0$ и его уравнение Гамильтона-Якоби запишется как

$$\eta^{ni} k_n k_i = \eta^{ni} \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \, . \tag{1.32}$$

С другой стороны, для массивной частицы массы $m$ классическое уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\eta^{ni} p_n p_i = \eta^{ni} \frac{\partial S}{\partial x^n}\frac{\partial S}{\partial x_n} = m^2 \, c^2 \, . \tag{1.33}$$

По структуре уравнений (1.32) и (1.33) видно, что в классической физике никакой аналогии между реальной волной и частицей не существует. При переходе к квантовому описанию такая аналогия возникает, если представить, что волновой пакет (1.14) состоит из набора частиц с бесконечно малой массой (1.9)

$$\eta^{ni} p_n p_i = \eta^{ni} \frac{\partial S}{\partial x^n}\frac{\partial S}{\partial x_n} = (\Delta m)^2 \, c^2 \, , \tag{1.34}$$

при этом уравнение (1.32) можно рассматривать как предел уравнения (1.34) при $\Delta m \to 0$

$$\lim_{\Delta m \to 0}\left(\frac{\eta^{ni} k_n k_i}{\eta^{ni} p_n p_i}\right) = \lim_{\Delta m \to 0}\left(\frac{\eta^{ni} \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{\partial f}{\partial x_n}}{\eta^{ni} \frac{\partial S}{\partial x^n}\frac{\partial S}{\partial x_n}}\right) = const = \mathrm{C}^{-2} \, . \tag{1.34a}$$

Это соотношение сводится к следующему уравнению

$$\left(\frac{\partial S}{\partial f}\right)^2 = C^2 \ , \tag{1.35}$$

решение которого имеет вид

$$S = Cf + c_1 \ , \quad c_1 = const \ . \tag{1.36}$$

Подставляя соотношения (1.28) и (1.29) в (1.36) , получим из (1.36) соотношения Планка-Эйнштейна $p_n = \hbar k_n$. В общем случае, «квантовая постоянная» $C$ может принимать произвольные значения.

Учитывая(1.7) , представим координату центра масс в виде

$$x^i{}_{\text{c}} = \overline{x}^i = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\psi \, x^i dV = -\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi^*\frac{\partial}{\partial k^i}\psi - \psi\frac{\partial}{\partial k^i}\psi^*\right) dV. \tag{1.37}$$

Поскольку для плоских волн справедливо равенство

$$\psi^*\frac{\partial}{\partial k^i}\psi = -\,\psi\frac{\partial}{\partial k^i}\psi^* \ ,$$

то (1.37) можно записать как

$$x^i{}_{\text{c}} = \overline{x}^i = i\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial k^i}\psi \, dV = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{x}^i\psi \, dV, \tag{1.38}$$

где мы ввели оператор координаты

$$\hat{x}^i = i\frac{\partial}{\partial k^i} \ . \tag{1.39}$$

Поступая подобным образом, находим для импульса центра масс (1.8)

$$p^i{}_{\text{c}} = \overline{p}^i = i\hbar\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\frac{\partial}{\partial x^i}\psi \, dV = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{p}^i\psi \, dV, \tag{1.40}$$

где

$$\hat{p}^i = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.41}$$

- оператор импульса центра масс.

Расписывая (1.31), получим

$$p_n = = -i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x^n}\left(\ln\frac{\psi}{\psi^*}\right) = -\,i\frac{\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial x^n}(\ln\psi - \ln\psi^*) = i\frac{\hbar}{2}\left(\frac{1}{\psi^*}\nabla_n\,\psi^* - \frac{1}{\psi}\nabla_n\,\psi\right).$$

Используя трехмерную часть этой формулы, запишем ток $\vec{j} = \rho\vec{v} = e\psi^*\psi\vec{v}$ в уравнении непрерывности (1.11) как

$$\vec{j} = \ i\frac{e\hbar}{2m}\psi^*\psi\left(\frac{1}{\psi^*}\vec{\nabla}\,\psi^* - \frac{1}{\psi}\vec{\nabla}\,\psi\right) = -\frac{ie\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\,\psi - \psi\vec{\nabla}\,\psi^*)\ . \tag{1.42}$$

Расписывая (1.11) , с учетом (1.42) и (1.13), получим (после сокращения на $e$)

$$\psi\frac{\partial\,(\psi^*)}{\partial t} + \psi^*\frac{\partial\,(\psi)}{\partial t} - \frac{i\hbar}{2m}\,div\ \ (\psi^*\vec{\nabla}\,\psi - \psi\vec{\nabla}\,\psi^*)\ = 0$$

или, после деления на $\psi^*\psi$ и умножения на $i\hbar$, находим

$$i\hbar\left(\frac{1}{\psi^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}+\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\psi}\nabla^2\,\psi-\frac{1}{\psi^*}\nabla^2\,\psi^*\right)=0$$

откуда

$$i\hbar\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\,\psi\right)=i\hbar\frac{1}{\psi^*}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}+\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\,\psi^*\right)=\phi(t)=\phi*(t).$$

Это нелинейное уравнение распадается на два линейных уравнения следующего вида:

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\,\psi\right)=\phi(t)\psi \tag{1.43}$$

$$i\hbar\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\,\psi^*\right)=\ \phi(t)(t)\psi^* \tag{1.44}$$

С помощью подстановок

$$\Psi(\vec{x},t)=\psi(\vec{x},t)exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t\phi(t')\,dt'\right),$$

$$\Psi^*(\vec{x},t)=\psi^*(\vec{x},t)exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^t\phi^*(t')\,dt'\right).$$

Соотношения (1.43) и (1.44) сводятся к уравнениям Шредингера для свободной частицы

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi=0, \tag{1.45}$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi^*=0\quad. \tag{1.46}$$

Таким образом нелинейное относительно $\psi$ и $\psi^*$ уравнение непрерывности (1.11) распадается на два линейных относительно $\psi$ и $\psi^*$ уравнений Шредингера (1.45) и (1.46).

## 2. Взаимодействие квантовой частицы с электромагнитным полем

Уравнения Шредингера (1.45) и (1.46), в конечном итоге, описывают движение свободной квантовой частицы. Они содержат физическую информацию о плотности масс $\rho=m\,\psi^*\psi$ или о плотности заряда $\rho=\ e\,\psi^*\psi$, хотя заряд $e$ в эти уравнения явным образом не входит. Уравнения содержат информацию о координате, скорости центра масс частицы, о ее энергии и импульсе. В явном виде уравнения (1.45) и (1.46) содержат две физических константы: массу частицы $m$ и постоянную Планка $\hbar$ . Таким образом уравнения (1.45) и (1.46) описывают квантовую механику свободной нерелятивистской частицы, энергия которой, выраженная через импульс $\vec{p}$ известным образом

$$E=\frac{p^2}{2\,m}\,. \tag{2.0}$$

Учитывая (1.41), из которого следует

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\vec{p}} = i\hbar\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \tag{2.1}$$

запишем классическое соотношение (2.0) в виде оператора, действующую на волновую функцию $\psi$ .

$$\hat{E}\psi = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2\,m}\psi \quad \text{или} \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi = 0 \tag{2.2}$$

В результате опять получаем уравнения Шредингера (1.45) и (1.46) .

Если квантовая частица движется в гравитационном или электромагнитном поле с потенциальной энергией $U_g$ или $U_e$ , то, полагая, что $\hat{U} = U$, мы будем иметь два физически разных уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi = U_g\,\psi, \qquad U_g = -mMG/r = m\varphi_N = -mc^2 r_g/2r\,, \tag{2.3}$$

и

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\,\psi = U_e\,\psi\,, \qquad U_g = -Ze^2/r = e\varphi_C = -mc^2 r_e/2r\,. \tag{2.4}$$

Эти уравнение описывают движение квантовой частицы в статических гравитационных и электромагнитных полях, при этом $r_g = 2MG/c^2$ – гравитационный радиус, $r_e = 2Ze^2/mc^2\,, Z = 1,2,3\,...$ - электромагнитный радиус [7] частицы.

В уравнения (1.32) и (1.33) входит метрика пространства Минковского

$$ds^2 = \eta_{ik}dx^i dx^k\ , \ \eta_{ik} = diag(1 - 1 - 1 - 1)\,, \quad i,k,... = 0,1,2,3\,. \tag{2.5}$$

Разделим правую и левую части равенства (2.5) на $ds^2$

$$\eta_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} - 1 = 0.$$

Умножая это уравнение на $m^2c^2$ , получим

$$\eta_{ik}p^i p^k - m^2c^2 = 0, \tag{2.6}$$

где $p^i$ – импульс частицы. Поскольку импульс частицы определяется через действие S как $p^i = \partial S/\partial x^i$ , (смотри формулу (1.31)), то мы можем записать (2.6) в виде уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_k} - m^2c^2 = 0\ . \tag{2.7}$$

Используя (1.31) , получим из (2.7) известное релятивистское обобщение уравнения Шредингера

$$\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\,\psi}{\partial t^2} = \left[\hbar^2\nabla^2 - m^2c^2\right]\psi \tag{2.8}$$

−уравнение Кляйна-Гордона. Это уравнение описывает свободную релятивистскую квантовую частицу.

## 2.1 Обобщенный импульс

Классическое действие $S$, описывающее электромагнитное взаимодействие квантовой частицы, имеет известный вид [34]

$$S = \int_a^b \left(-mcds \quad - \frac{e}{c} A_i dx^i\right), \quad A^i = (\ \varphi_C, \vec{A}\,)$$

или

$$S = \int_a^b \left(-mcds \quad + \frac{e}{c} \vec{A} d\vec{r} - e\varphi_C\right), \quad A^i = (\ \varphi_C, \vec{A}\,). \tag{2.9}$$

Переходя в (2.9) к дифференцируемости по времени $t$, имеем

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-mc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi_C\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt\,,$$

откуда находим Лагранжиан

$$L = -mc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v} - e\varphi_C \tag{2.10}$$

и обобщенный импульс

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A}\,. \tag{2.11}$$

Используя (2.11), запишем (2.7) в виде

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \vec{p}^2 = \left(\frac{H - e\varphi_C}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2, \tag{2.12}$$

где

$$E = T = H - U_e = H + e\varphi_C \tag{2.13}$$

- кинетическая и

$$H = \sqrt{m^2c^2 + c^2(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + e\varphi_C \tag{2.14}$$

– полная энергия (Гамильтониан ) системы частица-поле. В нерелятивистском приближении имеем

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi_C = \mathrm{E} + U_e. \tag{2.15}$$

Теперь для случая движения заряженной частицы с зарядом $e$ и массой $m$ в полях $\vec{E}$ и $\vec{H}$, уравнение Шредингера в операторном виде запишется как

$$\left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{H}\right\}\psi = 0 \quad \text{или} \quad \left\{i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left(\widehat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - U_e\right\}\psi = 0, \tag{2.16}$$

где

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\varphi_C \qquad (2.17)$$

- оператор Гамильтона.

## 3. «Гидродинамическая» модель Маделунга

Почти сразу после публикации Э. Шредингером его знаменитого уравнения [36], Э. Маделунг получает «гидродинамическое» представление уравнения Шредингера [37]. Подставляя в уравнение Шредингера волну де Бройля в виде

$$\psi(\vec{x},t) = \sqrt{\rho(\vec{x},t)}\, exp(\, iS(\vec{x},t)/\hbar), \qquad (3.1)$$

где $S$ – действие , и обозначая плотности вероятности $\rho_W = W = \psi^*\psi = |\psi|^2$, получим

$$-\frac{\partial S}{\partial t}\psi + i\hbar\frac{1}{2\rho_W}\frac{\partial\rho_W}{\partial t}\psi - \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2\psi - U\psi + \frac{i\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2 S\psi + \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{1}{\rho_W}\vec{\nabla}\rho_W\right)(\vec{\nabla}S)\psi +$$
$$+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2\rho_W}\vec{\nabla}^2\rho_W\right)\psi - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2\rho_W}\vec{\nabla}\rho_W\right)^2\psi = 0 \qquad (3.2)$$

или

$$\left(-\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}S)^2 - U + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2\rho_W}\vec{\nabla}^2\rho_W\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{2\rho_W}\vec{\nabla}\rho_W\right)^2\right)\psi +$$
$$+i\left(\hbar\frac{1}{2\rho_W}\frac{\partial\rho_W}{\partial t} + \frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2 S + \frac{\hbar}{2m}\left(\frac{1}{\rho_W}\vec{\nabla}\rho_W\right)(\vec{\nabla}S)\right)\psi = 0. \qquad (3.3)$$

Приравнивания реальную часть этого соотношения к нулю, находим уравнение, подобное уравнению Гамильтона-Якоби для функции действия $S$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + U + Q = 0, \qquad (3.4)$$

где

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{\vec{\nabla}\rho_W}{2\rho_W}\right)^2 - \frac{\vec{\nabla}^2\rho_W}{2\rho_W}\right) = -\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{\Delta\rho_W}{\rho_W} - \frac{(\vec{\nabla}\rho_W)^2}{2\rho_W{}^2}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|} =$$
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta\sqrt{\rho_W}}{\sqrt{\rho_W}} \qquad (3.5)$$

- квантовая потенциальная энергия. Приравнивая мнимую часть (3.3) к нулю, имеем

$$\frac{\partial\rho_W}{\partial t} + \frac{1}{m}\rho_W\vec{\nabla}^2 S + \frac{1}{m}(\vec{\nabla}\rho_W)(\vec{\nabla}S) = 0 \qquad (3.6)$$

или, учитывая известное соотношение для скорости $\vec{v}$

$$\vec{v} = \vec{\nabla}S/m, \qquad (3.7)$$

получаем из (3.6) уравнение неразрывности для плотности $\rho_W$

$$\frac{\partial\rho_W}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_W\vec{v}) = 0. \qquad (3.8)$$

Применяя к уравнениям (3.4) оператор $\vec{\nabla}$, и опять учитывая (3.7), получаем уравнения движения «квантовой жидкости» с плотностью с плотностью вероятности (9)

$$\rho_W \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_W \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\vec{\nabla}\vec{v}\right) = -\frac{\rho_W}{m}\vec{\nabla}U - \frac{\rho_W}{m}\vec{\nabla}Q. \tag{3.9}$$

Таким образом, в модели Маделунга одно комплексное линейное по $\psi$ уравнение (в.1) эквивалентно двум уравнениям (3.8) и (3.9) для действительных функций $\rho_W$ и $\vec{v}$.

Если мы умножим уравнения (3.8) и (3.9) на массу $m = const$ и введем плотность материи

$$\rho_m = m\psi^*\psi = m\rho_W \ , \tag{3.10}$$

то мы получим уравнения «квантовой гравирующей жидкости»

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla(\rho_m \vec{v}) = 0, \tag{3.11}$$

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho_W \nabla U_g - \rho_W \nabla Q, \tag{3.12}$$

где $U_g = -mMG/r$ - потенциальная энергия Ньютона. Разделив обе части уравнений (3.12) на $\rho_W$, получим уравнения движения «точечной» массы в виде

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\nabla\vec{v}\right) = -\nabla\left(U_m + \frac{\hbar^2 \Delta\sqrt{\rho_m}}{2m\sqrt{\rho_m}}\right) = -\nabla\left(U_m + \frac{\hbar^2}{2}\frac{\Delta|\psi|}{|\psi|}\right). \tag{3.13}$$

Эти уравнения можно интерпретировать как движение центра масс «капли квантовой гравирующей жидкости» в гравитационном поле центральных сил.

Сделав в 1926 г. формальный вывод уравнений (3.11) и (3.12) , Э. Маделунг не дал физической интерпретации потенциальной энергии (3.5), которой не содержится в исходном уравнении Шредингера (2.3). В последствии, физики стали интерпретировать энергию (3.5) как внутреннюю энергию Физического Вакуума.

Для заряженной «квантовой жидкости» уравнения Маделунга, следующие из уравнения Шредингера (2.4), имеют вид

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla(\rho_e \vec{v}) = 0, \tag{3.14}$$

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\rho_e \nabla U_e - \rho_W \nabla Q, \tag{3.15}$$

В этих уравнениях плотность вероятности и плотность заряда запишутся как

$$\rho_e = e\,\rho_W, \qquad \rho_W = W = \psi^*\psi = |\psi|^2 \,, \tag{3.16}$$

а плотность тока получит выражение вида

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v} = \frac{ie\hbar}{2m}\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right). \tag{3.17}$$

Из этого соотношения находим скорость центра масс $\vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{\rho_e} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\left(\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi^*\vec{\nabla}\psi\right)}{\psi^*\psi}. \tag{3.18}$$

## 4. Уравнения Паули и Дирака. Спинорная система отсчета

В классической механике описание собственного вращения пластичных материальных тел предполагает их протяженную структуру. Это отображено, например, в аналитическом определении тензора инерции

$$J_{\alpha\beta} = \int_{(m)} (\delta_{\alpha\beta}\, r^2 - r_\alpha r_\beta) dm = \int_{(V)} \rho\, (\delta_{\alpha\beta} r^2 - r_\alpha r_\beta) dV\ , \quad \alpha, \beta \ldots = 1,2,3 \tag{4.1}$$

и псевдовектора углового момента

$$L_\alpha = \int_{(m)} [\vec{r}(\vec{v}dm)]_\alpha = \int_{(V)} \rho\big[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]\big]_\alpha\, dV = J_{\alpha\beta}\omega^\beta\ . \tag{4.2}$$

Здесь $dm = \rho dV$ - бесконечно малый элемент протяженного объекта, $\vec{r}$ – радиус вектор его вращения с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ - его линейная скорость. Как обычно, полная масса объекта определяется через интеграл

$$m = \int_{(m)} dm = \int_{(V)} \rho\, dV\ , \tag{4.1a}$$

а полный импульс в виде

$$p_\alpha = \int_{(m)} v_\alpha\, dm = \int_{(V)} \rho v_\alpha\, dV\ . \tag{4.2a}$$

Если пластичный объект движется поступательно под действием внешней силы $F_\alpha$ и изменяет собственное вращение подл действием внешнего момента $M_\alpha$, то его движение описывается поступательными уравнениями

$$\frac{d}{dt} p_\alpha = F_\alpha\ , \tag{4.1b}$$

и вращательными уравнениями

$$\frac{d}{dt} L_\alpha = \frac{d}{dt}\left(J_{\alpha\beta}\omega^\beta\right) = M_\alpha\ . \tag{4.2b}$$

Приближенно, эти уравнения в полной мере относятся к трехмерному волновому пакету, состоящему из волн де Бройля (1.1), (1.2), если он вращается как единое целое. Тем не менее, квантовые свойства вещества расширяют уравнения $(4.1b)$ и $(4.2b)$специфическим образом.

Механическое вращение квантового электрона как единого целого было открыто экспериментально и названо спином (от английского слова spin – вращение). Еще в 1909 г. С. Барнет обнаружил, что механическое вращение железного цилиндра порождает у него магнитное поле [38]. Объясняется этот эффект тем, что на собственное и орбитальное механическое вращение электронов внутри вращающегося цилиндра действуют гироскопические (чисто механические) силы, которые выстраивают оси вращающихся электронов параллельно оси вращения цилиндра. В это время уже был известен магнетон Бора [39]

$$\mu_B = \frac{e}{mc} M_M \,, \tag{4.3}$$

который связывает магнитный момент электрона $\mu_B$ с его механическим моментом $M_M$ . В 1915 г. А. Эйнштейном и В. де Гаазом был проведен эксперимент, в котором ферромагнетик, подвешенный на тонкой стеклянной нити во внешнем магнитном поле, испытывал вращение и закручивал нить [40], т.е. наблюдалась связь между механическим $M_M$ и магнитным $M_{\text{Н}}$ моментами ферромагнетика. А. Эйнштейн пытался доказать в этих экспериментах существование токов Ампера внутри ферромагнетика, вызванных орбитальным движением электронов в атоме. Было известно теоретически вычисленное отношение магнитного момента $M_{\text{Н}}$ к механическому моменту $M_M$ при движении электрона по орбите в атоме

$$\gamma_1 = \frac{M_{\text{Н}}}{M_M} = \frac{e}{2mc} \,, \tag{4.4}$$

где $e$ и $m$ – заряд и масса электрона, что и получилось в эксперименте Эйнштейна-де Гааза. Однако, позже было экспериментально установлено, что магнитное поле ферромагнетика порождено суммарным собственным вращением (спином) (4.3) свободных электронов внутри ферромагнетика.

Эксперименты О. Штерна и В. Герлаха [41] с пучками атомов водорода, проходящих в неоднородном магнитном поле, обнаружили расщепление пучка. Эти эксперименты показали, что у атомов водорода в s состоянии, когда механический, а вместе с ним и магнитный орбитальный момент, равны нулю, существует магнитный момент $\vec{\text{M}}_{\text{Н}}$, проекция которого на направление магнитного поля принимает лишь два значения $M_{\text{Н}} = \pm\mu_B$. При анализе результатов их опыта было получено отношение

$$\gamma_2 = \frac{M_{\text{Н}}}{M_M} = \frac{e}{mc} \,, \tag{4.5}$$

что в 2 раза больше значения (4.4).

Используя результаты опытов Штерна-Герлаха и эксперименты Зеемана по расщеплению спектра атомов во внешнем магнитном поле, Уленбек и Гаудсмит выдвинули в 1925 г. две гипотезы относительно строения электрона [42]:

1) электрон обладает внутренним механическим моментом импульса (спином)

$$s = \frac{\hbar}{2} \,; \tag{4.6}$$

2) он обладает магнитным моментом, равным магнетону Бора (4.3)

$$\vec{\mu}_B = \frac{e}{mc} \vec{s} \,. \tag{4.3}$$

### 4.1 Уравнение Паули

Уравнение Шредингера (в.1) содержит константу $\hbar$ , которая имеет размерность углового момента, но не содержит в явном виде информации о спине (4.6), поэтому, для описания этой зависимости, В. Паули предложил в 1927 г. обобщенное уравнение Шредингера

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2-U\right)\Psi=0, \qquad (4.4)$$

где волновая функция представлена $\Psi$ представлена в виде произведения

$$\Psi(\vec{r},t)=\psi(\vec{r},t)s(\vec{r},t)\,, \qquad (4.5)$$

при этом волновая функция $\psi(\vec{r},t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера (в.1), а

$$s(\vec{r},t)=\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} \qquad (4.6)$$

- двухкомпонентная спин-функция, описывающая движение электрона во внешнем магнитном поле $\vec{H}$, находится из решения «спинового» уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}s=-\frac{e\hbar}{2mc}\left(\vec{\sigma}\vec{\mathrm{H}}\right)s\,, \qquad (4.7)$$

которое представляет собой квантовый аналог уравнений $(4.2b)$. В (4.7) $\vec{\sigma}$ - (псевдо)вектор Паули, компоненты которого образуют 2x2 комплексные матрицы Паули

$$\sigma_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \sigma_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \sigma_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}. \qquad (4.8)$$

С учетом спина уравнение Шредингера (2.16) запишется в виде уравнение Паули в виде

$$\left\{\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\vec{P}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2+eA_0-\frac{\hbar e}{2mc}\left(\vec{H}\vec{\sigma}\right)\right\}\Psi=0, \qquad (4.9)$$

### 4.2 Уравнение Дирака и спинорная система отсчета

Уравнение Паули (4.9) не является релятивистски инвариантным, поэтому П. Дирак в 1928 г. предложил релятивистское квантовое уравнение движения свободного электрона вида

$$[\gamma^n\hat{p}_n-imc]\Psi=0, \qquad \hat{p}_n=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad (4.10)$$

Здесь $\gamma^n$ - спиновые матрица Дирака, связанные с метрическим тензором $\eta_{kn}$ пространства Минковского соотношением

$$\eta_{kn}=\{\gamma_k,\gamma_n\}/2=(\gamma_k\gamma_n+\gamma_n\gamma_k)/2, \qquad (4.11)$$

Компоненты спинорной матрицы $\gamma_k$ в (4.11) имеют следующий вид

$$\gamma_0=\begin{bmatrix}0&\sigma_0\\ \sigma_0&0\end{bmatrix},\gamma_1=\begin{bmatrix}0&\sigma_x\\ \sigma_x&0\end{bmatrix},\gamma_2=\begin{bmatrix}0&\sigma_y\\ -\sigma_y&0\end{bmatrix},\gamma_3=\begin{bmatrix}0&\sigma_z\\ -\sigma_z&0\end{bmatrix}, \qquad (4.12)$$

где $\sigma_0=I$ - 2x2 единичная матрица, а $\sigma_x,\sigma_y\sigma_z$ -2x2 спиновые 3D матрицы Паули (4.8), поэтому имеем

$$\sigma_0=I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\sigma_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\sigma_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\sigma_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \qquad (4.13)$$

Для частицы спина $1/2$ имеем соотношение

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}, \tag{4.14}$$

где $\vec{\sigma}$ - (псевдо)вектор Паули.

*Соотношения (4.11)-(4.14) показывают, что спинор (4.13) и, следовательно, спин (4.14) имеют геометрическую природу, поскольку определяют метрику и сигнатуру базового пространства Минковского*. Кроме того, матрицы (4.13) задают совершенно новый вид системы отсчета, а именно, *спинорную систему отсчета*.

Поскольку спин $\vec{s}$ ориентирован в пространстве, то четырехкомпонентная комплексная волновая функция $\Psi$ в уравнении Дирака (4.11) зависит как от трансляционных координат $x, y, z, ct$, так и спина (4.14) (т.е. углов Эйлера $\varphi, \theta, \chi$)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \Psi(x, y, z, ct, \vec{s}) = \Psi\big(x(t), y(t), z(t), ct, \varphi(t), \theta(t), \chi(t)\big). \tag{4.15}$$

Четыре эрмитовых 2x2 матриц (4.13) определены на двумерном комплексном пространстве, касательным в каждой точке $M$ координатного (базового) пространства с координатами $x, y, z, ct$ . Четырехкомпонентный спинор (4.15) можно записать в виде столбца

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \Psi_L + \Psi_R = \begin{pmatrix} o_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \iota_{\dot{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_A \\ \iota_{\dot{B}} \end{pmatrix}, \tag{4.15a}$$

где $o_A$ и $\iota_{\dot{B}}$ – двухкомпонентные спиноры

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = o_A \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \iota_{\dot{B}} \,, \tag{4.15b}$$

с правым $\Psi_R$ и левым $\Psi_L$ вращением. Используя (4.12) и (4.13), можно записать уравнения Дирака (4.10) в виде пары уравнений для двухкомпонентных спиноров $o_A$ и $\iota_{\dot{B}}$

$$\gamma^n \hat{p}_n o_A - imc\, o_A = 0 \;, \quad n = 0,1,2,3 \;, \quad A\,, \dot{B} \ldots = 0, \dot{1} \;, \tag{4.15c}$$

$$\gamma^n \hat{p}_n \iota_{\dot{B}} - imc\, \iota_{\dot{B}} = 0 \,, \tag{4.15d}$$

при этом спинор $\iota_{\dot{B}}$ преобразуется по $D(1/2, 0)$ неприводимому представлению группы $SL(2.C)$ , а спинор $o_A$ по $D(0, 1/2)$ представлению этой же группы. Поскольку матрицы $o_A$ и $\iota_{\dot{B}}$ эрмитовы, то

$$\overline{o}_\alpha = o_{\dot{\alpha}} \;. \tag{4.15e}$$

В ковариантном виде 4D матрицы Паули (4.13) записываются как

$$\sigma_i{}^{A\dot{B}}, \tag{4.16}$$

где координатный индекс $i$ пробегает значения 0,1,2,3 , а спинорные индексы $A, \dot{B}$ пробегают значения $0, 1$ и , $\dot{0}, \dot{1}$ соответственно. В спинорном представлении метрический тензор пространства Минковского (4.11) запишется в виде [43]

$$\eta_{kn} = \sigma_k{}^{A\dot{B}} \sigma_n{}^{C\dot{D}} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} \,, \tag{4.17}$$

где

$$\varepsilon^{AC} = \varepsilon_{AC} = \varepsilon^{\dot{B}\dot{D}} = \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

- фундаментальный спинор и $\sigma^i_{A\dot{B}}$ - 4D – комплексные эрмитовы матрицы Дирака-Паули (или матрицы Пенроуза [43]). Окончательно спинор Дирака (4.15) представляется в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} o_\alpha \\ \iota_\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Спинорные матрицы $\sigma^i_{A\dot{B}}$ и $\gamma^k$, образующие спинорную систему отсчета, представляют собой изотропные вектора, лежащие на световом конусе. Для связи двухкомпонентных спиноров $\iota^\beta$, $o^\beta$, $\alpha, \beta \ldots = 0{,}1$ с обычной тетрадой $e^k_b$ вводится комплексная световая тетрада $z^i{}_a = (l_a, n_a, m_a, \bar{m}_a)$, две компоненты которой $l_a$ и $n_a$ действительные изотропные вектора и две компоненты $m_a$ и $\bar{m}_a$ комплексные вектора, при этом $\bar{m}_a = \overline{m_a}$. Вектора $l_a, n_a, m_a, \bar{m}_a$ комплексной световой тетрады связаны векторами вещественной тетрады $e^k_b$ и со двухкомпонентными спинорами $\iota^\beta$, $o^\beta$ соотношениями [43].

$$e^k{}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^k + n^k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^i_{\alpha\dot{\beta}} \left(o^\alpha \bar{o}^{\dot{\beta}} + \iota^\alpha \bar{\iota}^{\dot{\beta}}\right), \tag{4.20}$$

$$e^k{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^k + \bar{m}^k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^i_{\alpha\dot{\beta}} \left(o^\alpha \bar{\iota}^{\dot{\beta}} + \iota^\alpha \bar{o}^{\dot{\beta}}\right), \tag{4.21}$$

$$e^k{}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(m^k - \bar{m}^k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^i_{\alpha\dot{\beta}} \left(o^\alpha \bar{\iota}^{\dot{\beta}} - \iota^\alpha \bar{o}^{\dot{\beta}}\right), \tag{4.22}$$

$$e^k{}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(l^k - n^k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma^i_{\alpha\dot{\beta}} \left(o^\alpha \bar{o}^{\dot{\beta}} - \iota^\alpha \bar{\iota}^{\dot{\beta}}\right), \tag{4.23}$$

$$i, j, k \ldots = 0{,}1{,}2{,}3, \quad \alpha, \gamma, \ldots = 0{,}1, \quad \dot{\beta}, \dot{\mu}, \ldots = \dot{0}, \dot{1}$$

Из (4.20) следует

$$l^a = \sigma^a_{\alpha\dot{\beta}} o^\alpha \bar{o}^{\dot{\beta}}, \qquad n^a = \sigma^a_{\alpha\dot{\beta}} \iota^\alpha \bar{\iota}^{\dot{\beta}}, \qquad a, b, c \ldots = 0{,}1{,}2{,}3, \tag{4.24}$$

что позволяет интерпретировать спиноры $o^\beta$ ($\iota^\beta$) как «корень квадратный» из вектора $l^a$ ($n^a$). В (4.24) спинорные матрицы $\sigma^a_{\alpha\dot{\beta}}$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\sigma^a{}_{\alpha\dot{\beta}} \sigma_b{}^{\alpha\dot{\beta}} = \delta^a_b, \tag{4.25}$$

$$\sigma^a{}_{\alpha\dot{\beta}} \sigma_a{}^{\rho\dot{\mu}} = \delta^\rho_\alpha \delta^{\dot{\mu}}_{\dot{\beta}}, \tag{4.26}$$

На рис. 2 спинор $o^\beta$ изображен в интерпретации Роджера Пенроуза в виде флага, флагшток которого равен изотропному вектору $l^a$ а полотнище флага направлено от этой линии в направлении оси $x$. Флагшток спинора $\iota^\beta$ равен изотропному вектору $n^a$, а полотнище флага отходит от этой линии в направлении $-x$ (рис. 2). Флагшток и полотнище флага вместе образуют изотропный флаг. При умножении, например, вектора $o^\beta$ на $re^{i\theta}$, где $r$ и $\theta$ действительные величины, длинная флагштока увеличивается в $r^2$ раз, а полотнище флага поворачивается на угол $2\,\theta$. Существенное отличие спинора от вектора заключается в том, что вектор совпадает сам с собой при повороте на угол $2\pi$, в то время как спинор $o^{\beta}$ – на угол $4\pi$. Таким же свойством обладает движение ортогонального вектора $\vec{n}$ по листу Мебиуса, представляющего собой двумерную одностороннюю поверхность. При движении вектора $\vec{n}$, он совпадает сам с собой после поворота в пространстве на угол $4\pi$.

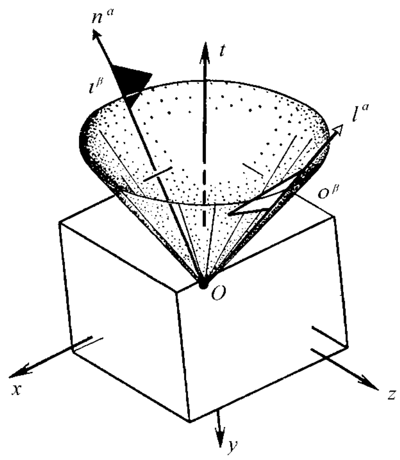


Рис. 2. Геометрическая интерпретация спинора (Р. Пенроуз [43])

### 4.3 Уравнения Дирака - Такабаяши

При движении во внешнем электромагнитном поле уравнение Дирака запишется как

$$\left[\gamma^n\left(\hat{p}_n - \frac{e}{c}A_n\right) - imc\right]\Psi = 0, \qquad \hat{p}_n = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{4.27}$$

где $e$ - заряд электрона, $m$ - его масса, $A_n$ - 4D потенциал электромагнитного поля, $c$ - скорость света. Через $\Psi$ функцию определяется плотность вероятности

$$\rho = \Psi^+\Psi, \tag{4.28}$$

при этом плотность заряда $\rho_e$ и массы $\rho_m$ записываются в виде

$$\rho_e = e\Psi^+\Psi, \qquad \rho_m = m\Psi^+\Psi, \tag{4.29}$$

Теперь скорость цента масс квантового электрона, определяемая как

$$\vec{v} = \frac{\vec{j}}{\rho} = \frac{1}{m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) = -\frac{i\hbar}{2m\rho}\left[\Psi^+(\vec{\nabla}\Psi) - \Psi(\vec{\nabla}\Psi^+)\right] - \frac{e}{mc}\vec{A} + \frac{\hbar}{2m\rho}rot(\Psi^+\vec{\sigma}\Psi), \tag{4.30}$$

где

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi^+(\vec{\nabla}\Psi) - \Psi(\vec{\nabla}\Psi^+)\right] - \frac{e}{mc}\vec{A}(\Psi^+\Psi) + \frac{\hbar}{2m}rot(\Psi^+\vec{\sigma}\Psi) \tag{4.31}$$

- вектор 3D тока. В нерелятивистском приближении слабых полей уравнение Дирака (4.27) переходит в уравнение Паули (4.9).

Используя процедуру Маделунга [37], Т. Такабаяши представил уравнение Паули (4.9) в виде системы двух уравнений следующего вида [44-48]

$$\rho\frac{dv_\alpha}{dt}=\frac{\rho}{m}\left\{e\vec{E}+\frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}]\right\}_\alpha+\frac{\rho e}{m^2c}S_\beta\partial_\alpha H_\beta+\partial_\beta T_{\alpha\beta}, \qquad (4.32)$$

$$\rho\frac{dS_\alpha}{dt}=\rho\frac{e}{mc}[\vec{S}\vec{H}]_\alpha+\partial_\alpha T^{(S)}{}_{\alpha\beta},\quad \alpha,\beta,\gamma\ldots=1,2,3, \qquad (4.33)$$

где $\rho=\Psi^+\Psi$ - плотность вероятности,

$$\vec{S}=\frac{\Psi^+\hat{\vec{s}}\Psi}{\Psi^+\Psi}=\frac{\hbar}{2}\frac{\Psi^+\hat{\vec{\sigma}}\Psi}{\Psi^+\Psi} \qquad (4.34)$$

- вектор спина частицы и

$$T_{\alpha\beta}=\left(\frac{\hbar}{2m}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\rho}{\partial x_\beta}\right)-4\rho\frac{\partial S_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial S^\gamma}{\partial x_\beta}\right\}, \qquad (4.35)$$

$$T^{(S)}{}_{\alpha\beta}=-\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2\left\{\rho\frac{\partial S_\gamma}{\partial x_\alpha}\frac{\partial S^\gamma}{\partial x_\beta}\right\} \qquad (4.35a)$$

- потенциальные энергии вакуумных полей (вакуумных флуктуаций). Эти энергии не входит в гамильтониан уравнения Дирака и появляются в уравнениях $(4.32), (4.33)$ в результате применения процедуры Маделунга к уравнению Дирака.

Следует отметить, что при отсутствии полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в уравнениях $(4.32), (4.33)$ центр масс и спин частицы испытывают действие со стороны тензорной вакуумной энергии $(4.35)$, принуждая их к постоянному движению. *Этот факт заставляет нас отказаться от инерциальной системы отсчета как основополагающего понятия при построении более совершенной квантовой теории поля* [35].

Если умножить уравнения $(4.32)$ справа и слева на массу частицы $m$, то первый член в правой части представляет собой силу Лоренца, второй силу Штерна-Герлаха [41] , а третий – вакуумную силу, под действием которой частица находится в постоянном ускоренном движении. После деления $(4.33)$ справа и слева на $\rho$ мы получаем обобщенное уравнение Паули (4.7), которое Ф. Блох использовал (без учета вакуумной энергии) для описания движения спина в ферромагнетиках [49].

Уравнения $(4.32), (4.33)$ фактически представляют собой обобщение уравнений для поступательного движения $(4.1b)$ и для вращательного движения $(4.2b)$, *при этом оказалось, что уравнение Паули (4.9), следующее из уравнения Дирака (4.27), объединяют в себе поступательное* $(4.32)$ *и вращательное* $(4.33)$ *уравнения движения.*

## 5. Пространство событий уравнений Паули и Дирака

Волновая функция (4.5), удовлетворяющая уравнению Паули (4.9) и Дирака (4.27) зависит не только от трансляционных координат $x, y, z$ и времени $t$ , но и от координат псевдовектора спина $\vec{S}$ , а именно, от неголономных вращательных координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , в качестве которых, например, могут использоваться углы Эйлера. Более того, из представления волновой функции (4.19) через двухкомпонентные спиноры $\iota^\beta$ , $o^\beta$ следует, что трансляционная метрика пространства является изотропной

$$ds^2 = \eta_{kn} dx^k dx^n = \sigma_k{}^{A\dot{B}} \sigma_n{}^{C\dot{D}} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} dx^k dx^n = 0\,. \quad (5.1)$$

Эта метрика описывает наблюдателя, находящегося на световом конусе, поскольку записана в спинорном базисе. Она конформно инвариантна, что позволяет рассматривать бесконечно удаленную точку пространства наравне с конечными. Действительно, рассмотрим пространство событий наблюдателя, который движется со скоростью света. Его возможные траектории движения находятся на поверхности светового конуса. Изотропные направления будущего образуют на световом конусе пространство, сечение которого гиперплоскостью $\mathrm{T} = 1$ представляют собой абстрактную сферу $S^+$ (рис. 3), описываемую уравнением

$$\mathrm{T} = x^2 + y^2 + z^2 = 1\,. \quad (5.2)$$

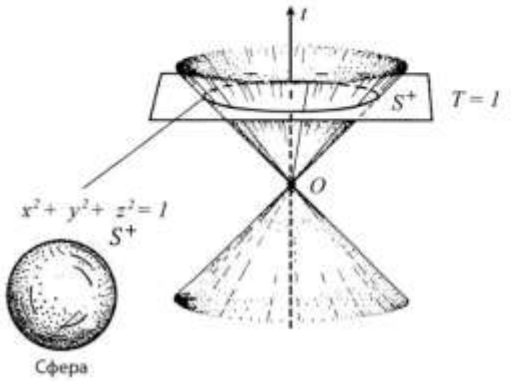


Рис. 3. Сечение светового конуса будущего гиперплоскостью $\mathrm{T} = 1$ представляет собой сферу $S^+$

Сферу $S^+$ можно рассматривать как *риманову сферу (или сферу Блоха)* плоскости Агранда-Бесселя Гаусса [43]. Расширенная риманова сфера (сфера, включающая северный и южный полюса) в трехмерном пространстве $x, y, z$ является представлением комплексных чисел, *включающим конформную бесконечность* (конформная бесконечность Пенроуза). На рис. 4 представлена стереографическая проекция точек сферы единичного радиуса $S^+$ на комплексную плоскость $\Sigma$, рассекающую сферу по экватору. Точка $P$ на сфере в пространстве $T = 1, x, y, z$ определяется как $P(1, x, y, z)$. Проекцией точки $P(1, x, y, z)$ из северного полюса $N(1,0,0,1)$ является точка $P'(1, x', y', 0)$ на комплексной плоскости $\Sigma$.

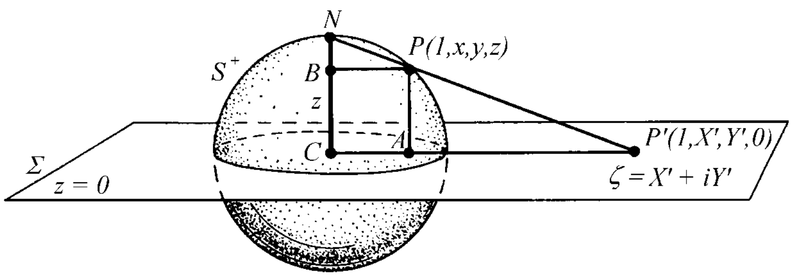


Рис. 4. Стереографическая проекция сферы $S^+$ на комплексную плоскость

Центр сферы расположен в точке $C$ ($z$=0). Опуская перпендикуляры из точки $P(1, x, y, z)$ в точки $A$ и $B$. Вводя на плоскости $\Sigma$ один комплексный параметр

$$\zeta = X' + iY' , \tag{5.3}$$

находим из рис. 4

$$h\zeta = x + iy , \tag{5.4}$$

где

$$h = 1 - z = \frac{CA}{CP'} = \frac{NP}{NP'} = \frac{NB}{NC} . \tag{5.5}$$

Из соотношений (5.4) и (5.5) следует связь между комплексным параметром $\zeta$ пространственными координатами точки $P(1, x, y, z)$

$$\zeta = \frac{x + iy}{1 - z} . \tag{5.6}$$

Умножая (5.6) на $\bar{\zeta}$ и учитывая (5.2), находим

$$\zeta\bar{\zeta} = \frac{x^2 + y^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z} . \tag{5.7}$$

Решая это уравнение относительно $z$ и подставляя полученное выражение в (5.6), получаем

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)} \quad , \quad z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1} . \tag{5.8}$$

Соотношения (5.6) и (5.8) устанавливают стереографическое соответствие между комплексной аргандовой плоскостью $\Sigma$ и единичной сферой $S^+$ в пространстве $x, y, z$ с центром сферы в точке (0,0,0).

По мере приближения точки $P(1, x, y, z)$ к точке $N$ точка $P'(1, x', y', 0)$ стремиться к бесконечности. Чтобы включить точку $N$ сферы в рассмотрение, необходимо добавить к аргандовой плоскости одну точку $\zeta = \infty$ , *при этом между сферой и аргандовой плоскостью устанавливается однозначное соответствие, а сама аргандова плоскость $\Sigma$ превращается в риманову сферу $S^+$.*

Известно, что на комплексной плоскости Арганда $z = x + iy$ все допустимые преобразования (преобразования Мебиуса) заданы дробно-линейными преобразованиями вида

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} , \tag{5.9}$$

где $a$, $b$, $c$, $d$ – комплексные числа, причем $ad - bc \neq 0$ и множество комплексных чисел включает бесконечно удаленную точку. Преобразования Мебиуса (5.9) представляют собой композицию: трансляций $f_1(z) = z + d/c$ , инверсий $f_2(z) = 1/z$ , вращений $f_3(z) = [-(ad - bc)/c^2]z$ и растяжений $f_4(z) = z + a/c$ или

$$f(z) = f_4\Big(f_3\big(f_2(f_1(z))\big)\Big). \tag{5.10}$$

Преобразование инверсии $f_2(z) = 1/z$ плоскости Агранда $z = x + iy$ позволяют вывернуть плоскость $z = x + iy$ «наизнанку», при этом получается плоскость Агранда $w = u + iv$ , на которой прямые плоскости $z = x + iy$ выглядят как окружности (рис.5). Удивительным фактом на плоскости Агранда является возможность деления на ноль. Действительно, при обратной инверсии $w = 1/z$ точке $z = 0$ соответствует бесконечность $\infty_w$ плоскости $w = u + iv$ и наоборот. Такое соответствие мы будем обозначать как $0_z \leftrightarrow \infty_w$ . Это означает, что на аграндовой плоскости бесконечность $\infty_w$ можно рассматривается как «изнанка» нуля $0_z$, нуль $0_w$ как «изнанку» бесконечности $\infty_z$, а саму бесконечность наравне с обычной конечной точкой.

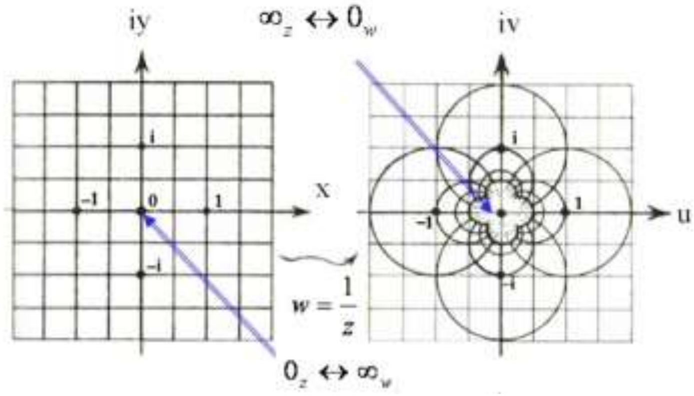


Рис. 5. Слева комплексная плоскость Агранда $z = x + iy,$ справа изнанка $w = u + iv$ комплексной плоскости Агранда

На рис. 4 мы присоединили к точке $z = 0$ сферу единичного радиуса (сферу Римана) и спроектировали все точки плоскости, включая бесконечно удаленную точку $\infty_z$, на сферу, при этом точке $\infty_z$ будет соответствовать северный полюс $N$ сферы.

Если на рис. 3 мы возьмем сечение конуса прошлого гиперплоскостью $\mathrm{T} = x^2 + y^2 + z^2 = -1$ , то получим сферу Пенроуза-Римана $S^-$. Используя комплексный параметр

$$\eta = V' + iU' \tag{5.11}$$

для описания координат $V$ и $U$ «изнанки» плоскости Агранда, можно получить для координат $u, v$ и $z$ сферы $S^-$ соотношения, подобные (5.8), но для параметра $\eta$.

Равенства (5.8) позволяют нам выразить трехмерные координаты пространства $x, y, z$ через комплексный параметр $\zeta$ без учета бесконечно удаленной точки $\zeta = \infty_z$ (на «изнанке» плоскости ей соответствует точка $\zeta = \infty_z$).

Для того, чтобы добавить точки $\eta = 0_w$ , $\zeta = \infty_z$ , $\eta = \infty_w$ плоскости Агранда при ее стереографической проекции на сферу Пенроуза -Римана, *вводятся спинорные (проективные) комплексные координаты* $\xi, \eta$ (не равные нулю одновременно), связанные с $\zeta$ как

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta} \ . \tag{5.12}$$

Учитывая (5.2) и (5.8) , запишем четырехмерные координаты сферы $S^+$ Пенроуза-Римана как

$$\mathrm{T}=1, \qquad x=\frac{\zeta+\bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta}+1}, \quad y=\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta}+1)} \quad , \quad z=\frac{\zeta\bar{\zeta}-1}{\zeta\bar{\zeta}+1} \ . \tag{5.13}$$

Используя (5.12), перепишем эти соотношения в спинорных координатах в виде

$$\mathrm{T}=1, \qquad x=\frac{\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}, \quad y=\frac{\xi\bar{\eta}-\eta\bar{\xi}}{i(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})} \quad , \quad z=\frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}} \ . \tag{5.14}$$

Напомним, что точка $P(1,x,y,z)$ представляет собой некоторое изотропное направление, исходящее из начала $O$ . Можно выбрать любую другую точку на $OP$ .Спинорные координаты произвольной точки в четырехмерном пространстве мы получаем после умножения (5.14) на $(\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta})/\sqrt{2}$

$$\mathrm{T}=\frac{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}}, \qquad X=\frac{\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi}}{\sqrt{2}}, \quad Y=\frac{\xi\bar{\eta}-\eta\bar{\xi}}{i\sqrt{2}} \quad , \quad Z=\frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}} \ . \tag{5.15}$$

Пусть мы имеем произвольный вектор $X_i$ $(i=0,1,2,3)$ с локальными индексами

$$X_a=X_i e^i_{\ a}, \quad a=0,1,2,3. \tag{5.16}$$

Здесь $e^a{}_i$ - 4$^{\text{х}}$ мерная система отсчета, представленная в виде тетрады, у которой $i=0,1,2,3$ – координатные индексы и $a=0,1,2,3$ –локальные (внутренние) индексы и которая удовлетворяет условиям нормировки

$$e^j{}_a e^a{}_i=\delta^j{}_i, \qquad e^i{}_a e^b{}_i=\delta_a{}^b, \tag{5.17}$$

Используя (5.17), можно разложить 4D вектор $X_i$ по базису $e^a{}_i$как

$$X_i=X_a e^a_{\ i}=X_0 e^{(0)}_{\ \ i}+X_1 e^{(1)}_{\ \ i}+X_2 e^{(2)}_{\ \ i}+X_3 e^{(3)}_{\ \ i},$$

где локальные (внутренние) координаты вектора $X_a$ , записанные через спинорные координаты (пару комплексных чисел $\xi,\eta$) имеют вид

$$X_0=\frac{\xi\bar{\xi}+\eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}}, \qquad X_1=\frac{\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi}}{\sqrt{2}}, \quad X_2=\frac{\xi\bar{\eta}-\eta\bar{\xi}}{i\sqrt{2}} \quad , \quad X_3=\frac{\xi\bar{\xi}-\eta\bar{\eta}}{\sqrt{2}} \ . \tag{5.18}$$

Задание (5.18) локальных (внутренних) координат вектора $X_i$ через спиноры $\xi,\eta$ означает, что пространство событий спиноров комплексно, расслоено и представляет собой базу с координатами $x,y,z,ct$, в каждой точке $X_i$ которого определено внутреннее пространство спиноров $\xi,\eta$ (слой). Поскольку спин связан с вращением элементарных частиц в пространственных углах $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ , то 4D обобщение спина – спинор описывает вращение в 6 углах $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3$, где $,\theta_1,\theta_2,\theta_3$ – три пространственно временных угла. Как известно, вращение в углах $,\theta_1,\theta_2,\theta_3$ связано с физикой поступательного ускорения начала ускоренной системы отсчета [7].

*Таким образом, для более последовательного описания спинирующих физических объектов уравнением Паули (4.9) и уравнением Дирака (4.27) необходимо изменить наши представления о пространстве событий, лежащем в основе квантовой теории.* Из проведенного краткого анализа следует, что пространство должно быть 10ти мерным и расслоенным, при этом 4 голономных трансляционных координаты $x,y,z,ct$, образуют его базу, а 6 неголономных (безразмерных) вращательных координат $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3$ образуют слой.

На множестве вращательных координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ действует комплексная группа Мебиуса М$(2.C)$ , которая может быть представлена как матричная группа *унимодулярной специальной линейной группы* $SL(2.C)$ [50]. Группа Мебиуса изоморфна группе SL$(2.C)$

$$M(2.C) = SL(2.C)/\{\pm I\} \ , \tag{5.19}$$

где

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

Соотношения (5.19) и (5.20) формально отображают тот факт, что группу $SL(2.C)$ можно рассматривать как двулистное накрытие группы $M(2.C)$.

В терминах однородных координат можно выразить $w = f(z)$ матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \ , \tag{5.21}$$

при этом выполняется условие нормировки

$$ad - bc = 1 \tag{5.22}$$

и $f(z) = -f(z)$.

### 5.1 Модель поляризации Вакуума по спину

По определению, «Абсолютным Вакуумом» мы будем рассматривать 10ти мерное расслоенное пространство с 4мя трансляционными координатами $x, y, z, ct$ и 6тью вращательными координатами $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$. Среднее значение всех физических характеристик пространства до и поле рождения материи из Вакуума должно быть равно нулю в силу Общего Закона Сохранения.

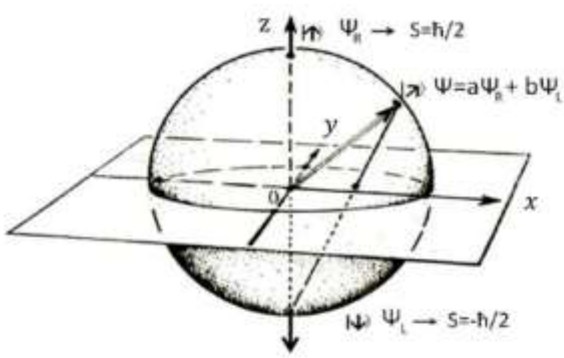


Рис. 6. Поляризация Вакуума по спину на сфере Блоха-Пенроуза-Римана

Будем обозначать среднее значение вакуумного состояния по спину как $<\uparrow | \downarrow> = 0$ , считая, что $<\uparrow |$ означает спинор

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = \iota_{\dot{B}} \quad , \ \dot{B} = \dot{0} \ , \dot{1} \tag{5.23}$$

со спином $s = \hbar/2$ , а $| \downarrow>$ обозначает спинор

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = o_A \ , \quad \mathrm{A} = 0, 1 \ , \tag{5.24}$$

имеющий спин $s = -\hbar/2$ (рис. 6). В чисто вакуумном состоянии спиноры (5.23) и (5.24) компенсируют друг друга в каждой точке пространства событий. При возбуждении вакуума по спину (спонтанном или вынужденном) возникает общая волновая функция

$$\Psi = a\Psi_R + b\Psi_L \quad , \tag{5.25}$$

при этом выполняется условие нормировки $a^2 + b^2 = 1$. Таким образом, при возбуждении вакуума по спину сразу возникают правые и левые спинорные поля. Эти поля распространяются в пространстве, но их сумма (в среднем) всегда равна нулю.

## 6. Уравнения спинорных полей, рожденных из Вакуума

Результаты, которые были получены в квантовой электродинамике с использованием уравнений Дирака (4.27), позволяют (с общепринятой точки зрения) исследовать явления вплоть до расстояний $10^{-17} \div 10^{-18}$ см . Несмотря на это, П. Дирак считает, что уравнение (4.27) «неверно» [32]. Он считал, что перенормировки уравнений электродинамики, направленные на устранения бесконечно больших величин, появляющихся при вычислениях с использованием ее уравнений, имеют искусственную природу и противоречат правилам, принятым в математике. Кроме того, спинорные уравнения (4.27) не инвариантны относительно преобразований Мебиуса (5.10), которая действует на 10ти мерном многообразии координат $x, y, z, ct$ и $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3,$ и на котором, в общем случае заданы две метрики:

а) метрика внешнего пространства (базы) [7,8]

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k, \quad g_{jk} = \eta_{ab}e^a{}_j e^b{}_k, \qquad \eta_{ab} = \eta^{ab} = diag(1 - 1 - 1 - 1), \tag{6.1}$$

$$i = 0,1,2,3, \qquad a = 0,1,2,3,$$

которая в спинорном $\Delta$ - базисе запишется как [7,8]

$$ds^2 = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}}\sigma_i^{A\dot{B}}\sigma_k^{C\dot{D}} \, dx^i dx^k \quad ; \tag{6.2}$$

б) вращательная метрика внутреннего пространства (слоя) ) [7,8]

$$d\tau^2 = d\chi^a{}_b d\chi^b{}_a = T^a{}_{bk}T^b{}_{an}dx^k dx^n, \tag{6.3}$$

которая в спинорном $\Delta$ - базисе запишется как [7,8]

$$d\tau^2 = T^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}k}T^{C\dot{D}}{}_{A\dot{B}n}dx^k dx^n, \tag{6.4}$$

где $T^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}k}$ – калибровочное поле преобразований Мебиуса (5.10), известное в физике как коэффициенты Фока-Иваненко [51], а в математике как коэффициенты вращения Риччи

[7,8]. Используя комплексную световую тетраду $z^i{}_a = (l_a, n_a, m_a, \bar{m}_a)$, Э. Ньюмен и Р. Пенроуз в работе [52] называют $T^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}k}$ спиновыми коэффициентами. Используя принцип соответствия, автор дал физическую интерпретацию поля $T^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}k}$ в неголономном базисе, показав, что этот математический объект $T^{A\dot{B}}{}_{C\dot{D}k}$ соответствует третьему фундаментальному физическому полю – *полю инерции*, данному каждому из нас в повседневном ощущении [53].

### 6.1 Структурные уравнения Картана геометрии Мебиуса $A_4(6)$ как уравнения Физического Вакуума

В качестве уравнений Физического Вакуума , мы будем рассматривать структурные уравнения Картана геометрии Мебиуса $A_4(6)$ [7,8]. В самом общем виде уравнения Физического Вакуума представляются в виде системы нелинейных спинорных уравнений, в которую входят:

1) геометризированные нелинейные спинорные уравнения Гейзенберга с кубической нелинейностью по спинорам $o_\alpha$ и $\bar{\iota}_{\dot{\chi}}$

$$\nabla_{\beta\dot{\chi}}\iota_\alpha = \nu o_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \lambda o_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} - \mu o_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} + \pi o_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} -$$

$$-\gamma \iota_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} + \alpha \iota_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} + \beta \iota_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \varepsilon \iota_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}}, \qquad (\overset{+}{A}_{s^+}.1)$$

$$\nabla_{\beta\dot{\chi}} o_\alpha = \gamma o_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \alpha o_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} - \beta o_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} + \varepsilon o_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} -$$

$$-\tau \iota_\alpha o_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} + \rho \iota_\alpha o_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}} + \sigma \iota_\alpha \iota_\beta \bar{o}_{\dot{\chi}} - \kappa \iota_\alpha \iota_\beta \bar{\iota}_{\dot{\chi}}, \qquad (\overset{+}{A}_{s^+}.2)$$

$$\alpha, \beta \ldots = 0,1, \quad \dot{\chi}, \dot{\gamma} \ldots = \dot{0}, \dot{1},$$

2) геометризированные спинорные уравнения Эйнштейна

$$2\Phi_{AB\dot{C}\dot{D}} + \Lambda \varepsilon_{AB} \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}}; \qquad (\overset{+}{B}_{s^+}.1)$$

*3)* геометризированные спинорные уравнения Янга-Миллса с калибровочной группой *SL(2.C)*

$$C_{A\dot{B}C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}} T_{A\dot{B}} + \partial_{A\dot{B}} T_{C\dot{D}} + (T_{C\dot{D}})_A{}^F T_{F\dot{B}} + (T^+{}_{\dot{D}C})_{\dot{B}}{}^{\dot{F}} T_{A\dot{F}} -$$

$$-(T_{A\dot{B}})_C{}^F T_{F\dot{D}} - (T^+{}_{\dot{B}A})_{\dot{D}}{}^{\dot{F}} T_{C\dot{F}} - [T_{A\dot{B}} T_{C\dot{D}}] = -\nu J_{A\dot{C}B\dot{D}}, \qquad (\overset{+}{B}_{s^+}.2)$$

$$A, B \ldots = 0,1 \qquad \dot{B}, \dot{D} \ldots = \dot{0}, \dot{1}$$

плюс уравнения $\overset{-}{A}_{s^+}, \overset{-}{B}_{s^+}$ материи левого Мира, плюс уравнения антиматерии $\overset{+}{A}_{s^-}, \overset{+}{B}_{s^-}$ правого Мира и антиматерии $\overset{-}{A}_{s^-}, \overset{-}{B}_{s^-}$ левого Мира [7,8].

Двухкомпонентные спиноры $o_\alpha$ и $\bar{\iota}_{\dot{\chi}}$ в обобщенных уравнениях Гейзенберга $(\overset{+}{A}_{s^+}.1)$ и $(\overset{+}{A}_{s^+}.2)$ образуют 4 компонентный спинор Дирака (4.19) обычной квантовой теории. Они преобразуются по *D(½ , ½)* неприводимому представлению группы *SL(2.C)*. Спинорная запись уравнений Эйнштейна $(\overset{+}{B}_{s^+}.1)$ содержит в правой части геометризированный тензор энергии-импульса $T_{A\dot{C}B\dot{D}}$ материи. В свою очередь, тензор $T_{A\dot{C}B\dot{D}}$ определяется через спин-тензор конторсии $T_{F\dot{B}}$ (через матрицы Кармели) геометрии $A_4(6)$. Спинорное представление уравнений Янга-Миллса $(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ с калибровочной группой $SL(2.C)$ содержит в правой части тензор тока $J_{A\dot{C}B\dot{D}}$, который определяется через тензор энергии-импульса $T_{A\dot{C}B\dot{D}}$. Согласно уравнениям $(\overset{+}{A}_{s^+}.1)$ -$(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ мы можем рассматривать Физический Вакуум как сплошную среду, обладающую упругими свойствами. Любое возмущение такой среды описывается совокупностью нелинейных спинорных уравнений Гейзенберга-Эйнштейна-Янга-Миллса. Эти уравнения описываю три фундаментальных поля: гравитационное, электромагнитное и поле инерции.

В общем случае, вакуумное возбуждение - «элементарная частица» описывается сразу всеми этими уравнениями одновременно. Если риманова кривизна Физического Вакуума равна нулю, то для таких объектов остаются лишь уравнения $(\overset{+}{A}_{s^+}.1)$ и$(\overset{+}{A}_{s^+}.2)$, которые описывают «первичные поля инерции», не обладающие энергией, но переносящие информацию [7,8].

В правом Мире, в котором построены все современные теории поля, стрела времени направлена из настоящего в будущее, поэтому для уравнений правого Мира выполняется классический принцип причинности. В левом Мире стрела времени направлена из настоящего в прошлое, поэтому в левом Мире существуют отрицательные энергии и следствие предшествует причине (рис.7.) Таким образом, уравнения Физического Вакуума покрывают все области пространства, а их решения носят триплетный характер.

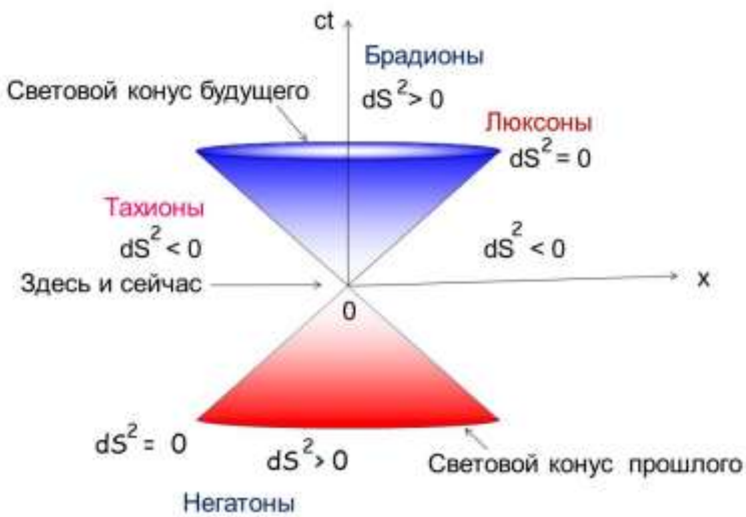


Рис.7. Решения уравнений Физического Вакуума покрывают все области пространства

Например, решение уравнений правого Мира $(\overset{+}{A}_{s^+}.1)$, $(\overset{+}{A}_{s^+}.2)$, $(\overset{+}{B}_{s^+}.1)$, $(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ с трансляционной метрикой Шварцшильда описывает триплет, состоящий из брадиона (досветовые скорости движения), люксона (световые скорости движения) и тахиона (сверхсветовые скорости движения) [7,8]. Решения уравнений левого Мира дополнительно описывают брадионы, люксоны с отрицательной массой или энергией, а также тахионы, движущиеся вспять по времени – из будущего в прошлое.

Уравнения $(\overset{+}{A}_{s^+}.1), (\overset{+}{A}_{s^+}.2)$ представляют собой нелинейные спинорные уравнения с нелинейностью порядка $\psi^3$ , поскольку $\psi = \psi(\iota_\alpha, o_\alpha)$ Пытаясь обобщить уравнение Дирака, В. Гейзенберг предложил использовать нелинейное спинорное уравнение следующего вида [54,55]

$$\gamma^k \partial_k \Psi + l^2 \gamma_k \gamma_5 \Psi (\Psi^* \gamma_k \gamma_5 \Psi) = 0. \tag{6.5}$$

Это была попытка преодолеть трудности электродинамики, связанные с расходимостями в ее уравнениях и определить спектра масс элементарных частиц путем конструирования их конструирования из частиц спина $s = \hbar/2$ . Он полагал, что весь материальный мир можно описать универсальным спинорным полем спина $s = \hbar/2$ . Нелинейное уравнение Гейзенберга (6.5) описывает элементарные частицы как сгустки спинорного поля. Устойчивые состояния такого сгустка представляют собой полевой солитон с фиксированной массой, зарядом, спином. Программа Гейзенберга не увенчалась успехом потому, что для поставленной им задачи, необходимо было дополнительно использовать спинорные уравнения Эйнштейна $(\overset{+}{B}_{s^+}.1)$ и спинорные (калибровочные) уравнения Янга-Миллса $(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ . Действительно, если все элементарные частицы рождены из вакуума, то они должны описываться всей системой уравнений *(A), (B),* т.е. системой спинорных уравнений Гейзенберга-Эйнштейна-Янга-Миллса.

### 6.2 Структурные уравнения Картана геометрии Мебиуса $\mathrm{A}_4(6)$ и матрицы Кармели

Используя спинорные матрицы Кармели [56-60], автор впервые представил систему уравнений Физического Вакуума $(\overset{+}{A}_{s^+}.1), (\overset{+}{A}_{s^+}.2), (\overset{+}{B}_{s^+}.1), (\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ в виде [61]

$$\nabla_{[k} \sigma^{i]} - T_{[k} \sigma^{i]} - \sigma^{[i} T^+{}_{k]} = 0, \tag{$A^s$}$$
$$R_{kn} + 2\nabla_{[k} T_{n]} - [T_k, T_n] = 0, \tag{$B^{s+}$}$$
$$R^+{}_{kn} + 2\nabla_{[k} T^+{}_{n]} - [T^+{}_k, T^+{}_n] = 0. \tag{$B^{s-}$}$$

В этих уравнениях $i, k, n\ldots = 0,1,2,3$ - координатные индексы, $\sigma^i{}_{A\dot{B}}$ - спинорные матрицы (спинорные индексы $A = 0,1$, $\dot{B} = \dot{0}, \dot{1}$ в уравнениях $(A^s), (B^{s+})$ и $(B^{s-})$ опущены), обобщающие матрицы Паули на случай искривленного и закрученного пространства Мебиуса $A_4(6)$. Матрицы $R_{ACkn}$, $R^+{}_{\dot{B}\dot{D}kn}$ представляют собой спинорные матрицы Кармели римановой кривизны (знак + означает эрмитово сопряжение), а матрицы $T_{kCE}$, $T^+{}_{k\dot{B}\dot{D}}$ - спинорные торсионные матрицы, из которых одна из трех неприводимых частей описывает спинорное поле Дирака.

Любой антисимметричный вещественный тензор $F_{ab}$, который преобразуется инвариантным образом в группе вращений *O(3.1),* в спинорном базисе $\sigma^i{}_{A\dot{B}}$ преобразуется в спинорной группе *SL(2.C)* и расщепляется на пару симметричных спинтензора по правилу $F_{ab} \leftrightarrow F_{A\dot{B}\,C\dot{D}} = (\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} F_{AC} + \varepsilon_{AC} \bar{F}_{\dot{B}\dot{D}})/2$ , при этом $\bar{F}_{BD} = F_{\dot{B}\dot{D}} = F_{\dot{B}\dot{D}}$. Используя это свойство, можно представить спинтензоры $T_{A\dot{B}\,C\dot{D}k}$ и $R_{A\dot{B}\,C\dot{D}kn}$ в виде [7,8]

$$T_{A\dot{B}\,C\dot{D}k} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} T_{ACk} + \varepsilon_{AC} T^+_{\dot{B}\dot{D}k}\right), \tag{6.6}$$

$$R_{A\dot{B}\,C\dot{D}kn} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\dot{B}\dot{D}} R_{ACkn} + \varepsilon_{AC} R^{\;+}_{\;\dot{B}\dot{D}kn}\right), \tag{6.7}$$

где комплексные $T_{ACk}$ , $R_{ACkn}$ и комплексно-сопряженные $T^+_{\dot{B}\dot{D}k}, R^{\;+}_{\;\dot{B}\dot{D}kn}$ матрицы Кармели [56-60]

$$T_C{}^E{}_k = (T_{A\dot{B}})_C{}^E \sigma^{A\dot{B}}_{\;k} , \tag{6.8}$$

$$R_{A\dot{B}C\dot{D}} = R_{kn}\sigma^{\ k}_{A\dot{B}}\sigma^{\ n}_{C\dot{D}} \quad . \tag{6.9}$$

Опуская подробности, о которых можно прочитать в математической части книги [7,8], запишем первые структурные уравнения Картана геометрии $A_4(6)$ в спинорном базисе $\sigma^{k}{}_{A\dot{D}}$ в виде

$$\begin{gathered}\partial_{C\dot{D}}\sigma^{i}{}_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^{i}{}_{C\dot{D}} = \\ = (T_{C\dot{D}})_{A}{}^{P}\sigma^{i}{}_{P\dot{B}} + \sigma^{i}{}_{A\dot{R}}(T^{+}{}_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}} - (T_{A\dot{B}})_{C}{}^{P}\sigma^{i}{}_{P\dot{D}} - \sigma^{i}{}_{C\dot{R}}(T^{+}{}_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}} \quad , \\ A, B, C \ldots = 0{,}1, \qquad \dot{D}, \dot{E}, \dot{F} \ldots = \dot{0}, \dot{1} \ ,\end{gathered} \tag{$A^s$}$$

где комплексные спинорные матрицы Кармели [7,8] $(T_{C\dot{D}})_{A}{}^{P}$ и комплексно- сопряженные матрицы $(T^{+}{}_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}}$ описывают поле инерции в спинорной системе отсчета.

Вторые структурные уравнения Картана геометрии $A_4(6)$ в спинорной системе отсчета с использованием матриц Кармели записываются как

$$\begin{gathered}R_{A\dot{B}C\dot{D}} = \partial_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} - \partial_{AB}T_{C\dot{D}} - (T_{C\dot{D}})_{A}{}^{F}T_{F\dot{B}} - (T^{+}{}_{\dot{D}C})^{\dot{F}}{}_{\dot{B}}T_{A\dot{F}} + \\ +(T_{A\dot{B}})_{C}{}^{F}T_{F\dot{D}} + (T^{+}{}_{\dot{B}A})^{\dot{F}}{}_{\dot{D}}T_{C\dot{F}} + [T_{A\dot{B}}T_{C\dot{D}}]\end{gathered} \tag{$B^{s+}$}$$

$+$ комплексно-сопряженные уравнения.

В обозначениях, принятых в работе Ньюмена-Пенроуза [78] , компоненты спинорной производной и спиноров в уравнениях $(A^{s})$ и $(B^{s})$ имеют вид:

1. Для компонент спинорной производной $\partial_{A\dot{B}}$

$$\partial_{A\dot{B}} = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\overbrace{\overbrace{\begin{bmatrix}D & \delta\\ \bar{\delta} & \Delta\end{bmatrix}}^{\dot{0}\quad\dot{1}}}^{\dot{B}}; \tag{6.10}$$

2. Для компонент спинорного базиса $\sigma^{i}{}_{A\dot{B}}$

$$\sigma^{i}{}_{A\dot{B}} = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\overbrace{\overbrace{\begin{bmatrix}l^{i} = (Y^{0}, V, Y^{2}, Y^{3}) & m^{i} = (\xi^{0}, \omega, \xi^{2}, \xi^{3})\\ \bar{m}^{i} = (\bar{\xi}^{0}, \bar{\omega}, \bar{\xi}^{2}, \bar{\xi}^{3}) & n^{i} = (X^{0}, U, X^{2}, X^{3})\end{bmatrix}}^{\dot{0}\quad\dot{1}}}^{\dot{B}} \ ; \tag{6.11}$$

3. Для спинорных компонент матриц Кармели $T_{A\dot{B}}$ и $T_{ABC\dot{D}}$

$$\begin{gathered}T_{0\dot{0}} = \begin{pmatrix}\varepsilon & -\kappa\\ \pi & -\varepsilon\end{pmatrix}, \qquad T_{0\dot{1}} = \begin{pmatrix}\beta & -\sigma\\ \mu & -\beta\end{pmatrix}, \\ T_{1\dot{0}} = \begin{pmatrix}\alpha & -\rho\\ \lambda & -\alpha\end{pmatrix}, \qquad T_{1\dot{1}} = \begin{pmatrix}\gamma & -\tau\\ \upsilon & -\gamma\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{6.12}$$

и

$$
(T_{A\dot{B}}\ )_C{}^D = A\dot{B}\begin{cases}0\dot{0}\\0\dot{1}\\1\dot{0}\\1\dot{1}\end{cases}\overbrace{\begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline \end{array}}^{CD}\begin{bmatrix} \varepsilon & -\kappa & \pi & -\varepsilon \\ \beta & -\sigma & \mu & -\beta \\ \alpha & -\rho & \lambda & -\alpha \\ \gamma & -\tau & \upsilon & -\gamma \end{bmatrix}; \qquad (6.13)
$$

4. Для спинорных компонент тензора Римана $R_{A\dot{B}C\dot{D}}$

$$
R_{0\dot{1}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_1 & -\Psi_0 \\ \Psi_2 + 2\Lambda & -\Psi_1 \end{pmatrix}, \quad R_{1\dot{0}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Phi_{10} & -\Phi_{00} \\ \Phi_{20} & -\Phi_{10} \end{pmatrix},
$$

$$
R_{1\dot{1}1\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_3 & -\Psi_2 - 2\Lambda \\ \Psi_4 & -\Psi_3 \end{pmatrix}, \quad R_{1\dot{1}0\dot{1}} = \begin{pmatrix} \Phi_{12} & -\Phi_{02} \\ \Phi_{22} & -\Phi_{12} \end{pmatrix}, \qquad (6.14)
$$

$$
R_{1\dot{1}0\dot{0}} = \begin{pmatrix} \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda & -\Psi_1 - \Phi_{01} \\ \Psi_3 + \Phi_{21} & -\Psi_2 - \Phi_{11} + \Lambda \end{pmatrix}, \ R_{1\dot{0}0\dot{1}} = \begin{pmatrix} -\Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda & \Psi_1 - \Phi_{01} \\ -\Psi_3 + \Phi_{21} & \Psi_2 - \Phi_{11} - \Lambda \end{pmatrix}.
$$

### 6.3 Покомпонентная запись уравнений Физического Вакуума

Процедура решения уравнений $(A^s)$ и $(B^{s+})$ начинается с их покомпонентной записи. Для удобства, запишем уравнения $(A^s)$в виде

$$
A^i{}_{C\dot{D}A\dot{B}} = \partial_{C\dot{D}}\sigma^i{}_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^i{}_{C\dot{D}} =
$$
$$
= (T_{C\dot{D}})_A{}^P\sigma^i{}_{P\dot{B}} + \sigma^i{}_{A\dot{R}}(T^+{}_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}} - (T_{A\dot{B}})_C{}^P\sigma^i{}_{P\dot{D}} - \sigma^i{}_{C\dot{R}}(T^+{}_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}} \ , \qquad (6.15)
$$

Для компоненты $A^i{}_{0\dot{0}0\dot{1}}$ этих уравнений, имеем

$$
A^i{}_{0\dot{0}0\dot{1}} = \partial_{0\dot{0}}\sigma^i{}_{0\dot{1}} - \partial_{0\dot{1}}\sigma^i{}_{0\dot{0}} =
$$
$$
= (T_{0\dot{0}})_0{}^P\sigma^i{}_{P\dot{1}} + \sigma^i{}_{0\dot{R}}(T^+{}_{\dot{0}0})^{\dot{R}}{}_{\dot{1}} - (T_{0\dot{1}})_0{}^P\sigma^i{}_{P\dot{0}} - \sigma^i{}_{0\dot{R}}(T^+{}_{\dot{1}0})^{\dot{R}}{}_{\dot{0}} \ , \qquad (6.16)
$$

или

$$
A^i{}_{0\dot{0}0\dot{1}} = \partial_{0\dot{0}}\sigma^i{}_{0\dot{1}} - \partial_{0\dot{1}}\sigma^i{}_{0\dot{0}} =
$$
$$
= \left\{(T_{0\dot{0}})_0{}^0\sigma^i{}_{0\dot{1}} + (T_{0\dot{0}})_0{}^1\sigma^i{}_{1\dot{1}}\ \right\} + \left\{\sigma^i{}_{0\dot{0}}(T^+{}_{\dot{0}0})^{\dot{0}}{}_{\dot{1}} + \sigma^i{}_{0\dot{1}}(T^+{}_{\dot{0}0})^{\dot{1}}{}_{\dot{1}}\right\}
$$
$$
- \left\{(T_{0\dot{1}})_0{}^0\sigma^i{}_{0\dot{0}} + (T_{0\dot{1}})_0{}^1\sigma^i{}_{1\dot{0}}\right\} - \left\{\sigma^i{}_{0\dot{0}}(T^+{}_{\dot{1}0})^{\dot{0}}{}_{\dot{0}} + \ \sigma^i{}_{0\dot{1}}(T^+{}_{\dot{1}0})^{\dot{1}}{}_{\dot{0}}\right\}. \qquad (6.17)
$$

Используя обозначения (6.10)- (6.14), (и комплексно-сопряженных к ним) , распишем уравнения (6.17) покомпонентно. В результате получим четыре уравнения

$$
\delta V - D\omega = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})V + \kappa U - \sigma\bar{\omega} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\omega, \qquad (6.18)
$$
$$
\delta Y^\alpha - D\xi^\alpha = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})Y^\alpha + \kappa X^\alpha - \alpha\bar{\xi}^\alpha - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\xi^\alpha. \qquad (6.19)
$$
$$
\alpha = 0,2,3.
$$

Действуя подобным образом, находим следующую покомпонентную запись первых структурных уравнений Картана геометрии $A_4(6)$ :

$$
\delta V - D\omega = (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})V + \kappa U - \sigma\bar{\omega} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\omega, \qquad (A^s.1)
$$

$$\delta Y^\alpha - D\xi^\alpha = (\bar\alpha + \beta - \bar\pi)Y^\alpha + \kappa X^\alpha - \alpha\bar\xi^\alpha - (\bar\rho + \varepsilon - \bar\varepsilon)\xi^\alpha, \qquad (A^s.2)$$
$$\Delta Y^\alpha - DX^\alpha = (\gamma + \bar\gamma)Y^\alpha + (\varepsilon + \bar\varepsilon)X^\alpha - (\tau + \bar\pi)\xi^\alpha - (\bar\tau + \pi)\bar\xi^\alpha, \qquad (A^s.3)$$
$$\Delta C - DU = (\gamma + \bar\gamma)V + (\varepsilon + \bar\varepsilon)U - (\tau + \bar\pi)\bar\omega - (\bar\tau + \pi)\omega, \qquad (A^s.4)$$
$$\delta U - \Delta\omega = -\bar\nu V + (\tau - \bar\alpha - \beta)U + \bar\lambda\bar\omega + (\mu - \gamma + \bar\gamma)\omega, \qquad (A^s.5)$$
$$\delta X^\alpha - \Delta\xi^\alpha = -\bar\nu Y^\alpha + (\tau - \bar\alpha - \beta)X^\alpha + \bar\lambda^\alpha\bar\xi^\alpha + (\mu - \gamma + \bar\gamma)\xi^\alpha, \qquad (A^s.6)$$
$$\bar\delta\omega - \Delta\bar\omega = (\bar\mu - \mu)V + (\bar\rho - \rho)U - (\bar\alpha - \beta)\bar\omega - (\bar\beta - \alpha)\omega, \qquad (A^s.7)$$
$$\bar\delta\xi^\alpha - \delta\bar\xi^\alpha = (\bar\mu - \mu)Y^\alpha + (\bar\rho - \rho)X^\alpha - (\bar\alpha - \beta)\bar\xi^\alpha - (\bar\beta - \alpha)\xi^\alpha, \qquad (A^s.8)$$

$$\alpha = 0,2,3.$$

Распишем теперь покомпонентно вторые структурные уравнения Картана ($B^{s+}$). Вычислим, например, $R_{0\dot{1}0\dot{0}}$ компоненту этих уравнений

$$R_{0\dot{1}0\dot{0}} = \partial_{0\dot{0}}T_{0\dot{1}} - \partial_{0\dot{1}}T_{0\dot{0}} - (T_{0\dot{0}})_0{}^0T_{0\dot{1}} - (T_{0\dot{0}})_0{}^1T_{1\dot{1}} + (T^+{}_{\dot{0}0})^{\dot{0}}{}_{\dot{1}}T_{0\dot{0}} - (T^+{}_{\dot{0}0})^{\dot{1}}{}_{\dot{1}}T_{0\dot{1}}$$
$$+ (T_{0\dot{1}})_0{}^0T_{0\dot{0}} + (T_{0\dot{1}})_0{}^1 T_{1\dot{0}} + (T^+{}_{\dot{1}0})^{\dot{0}}{}_{\dot{0}}T_{0\dot{0}} + (T^+{}_{\dot{1}0})^{\dot{1}}{}_{\dot{0}}T_{0\dot{1}} + T_{0\dot{1}}\, T_{0\dot{0}}$$
$$- T_{0\dot{0}}T_{0\dot{1}} \,. \qquad (6.20)$$

Используя обозначения , запишем (6.20) в виде

$$\begin{pmatrix}\Psi_1 & -\Psi_0\\ \Psi_2 + 2\Lambda & -\Psi_1\end{pmatrix} = D\begin{pmatrix}\beta & -\sigma\\ \mu & -\beta\end{pmatrix} - \delta\begin{pmatrix}\varepsilon & -\kappa\\ \pi & -\varepsilon\end{pmatrix} - \varepsilon\begin{pmatrix}\beta & -\sigma\\ \mu & -\beta\end{pmatrix} + \kappa\begin{pmatrix}\gamma & -\tau\\ \upsilon & -\gamma\end{pmatrix} - \bar\pi\begin{pmatrix}\varepsilon & -\kappa\\ \pi & -\varepsilon\end{pmatrix} +$$
$$+\bar\varepsilon\begin{pmatrix}\beta & -\sigma\\ \mu & -\beta\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\varepsilon & -\kappa\\ \pi & -\varepsilon\end{pmatrix} - \sigma\begin{pmatrix}\alpha & -\rho\\ \lambda & -\alpha\end{pmatrix} + \bar\alpha\begin{pmatrix}\varepsilon & -\kappa\\ \pi & -\varepsilon\end{pmatrix} - \bar\rho\begin{pmatrix}\beta & -\sigma\\ \mu & -\beta\end{pmatrix} +$$
$$+\begin{pmatrix}\beta & -\sigma\\ \mu & -\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon & -\kappa\\ \pi & -\varepsilon\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varepsilon & -\kappa\\ \pi & -\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & -\sigma\\ \mu & -\beta\end{pmatrix}. \qquad .$$

Эти матричные уравнения распадаются на три независимых уравнения

$$(D - \rho - \bar\rho - 3\varepsilon + \bar\varepsilon)\sigma - (\delta - \tau + \bar\pi - \bar\alpha - 3\beta)\kappa - \Psi_0 = 0,$$
$$(D - \bar\rho + \bar\varepsilon)\beta - (\delta - \bar\alpha + \bar\pi)\varepsilon - (\alpha + \pi)\sigma + (\mu + \gamma)\kappa - \Psi_1 = 0,$$
$$(D - \bar\rho + \varepsilon + \bar\varepsilon)\mu - (\delta + \bar\pi - \bar\alpha + \beta)\pi - \sigma\lambda + \nu\kappa - 2\Lambda - \Psi_2 = 0.$$

Действуя подобным образом, получаем следующие независимые уравнения ($B^{s+}$)

$$(D - \rho - \varepsilon - \bar\varepsilon)\rho - (\bar\delta - 3\alpha - \bar\beta + \pi)\kappa - \sigma\bar\sigma + \tau\bar\kappa - \Phi_{00} = 0, \qquad (B^{s+}.1)$$
$$(D - \rho - \bar\rho - 3\varepsilon + \bar\varepsilon)\sigma - (\delta - \tau + \bar\pi - \bar\alpha - 3\beta)\kappa - \Psi_0 = 0, \qquad (B^{s+}.2)$$
$$(D - \bar\rho - \varepsilon + \bar\varepsilon)\tau - (\Delta - 3\gamma - \bar\gamma)\kappa - \rho\bar\pi - \sigma\bar\tau - \pi\sigma - \Psi_1 - \Phi_{10} = 0, \qquad (B^{s+}.3)$$
$$(D - \rho - \bar\varepsilon + 2\varepsilon)\alpha - (\bar\delta - \bar\beta + \pi)\varepsilon - \beta\bar\sigma + \kappa\lambda + \kappa\bar\gamma - \pi\rho - \Phi_{10} = 0 \qquad ,(B^{s+}.4)$$
$$(D + \varepsilon + \bar\varepsilon)\gamma - (\Delta - \gamma - \bar\gamma)\varepsilon - (\tau + \bar\pi)\alpha - (\pi + \bar\tau)\beta - \pi\tau + \nu\kappa + \Lambda - \Psi_2 - \Phi_{11} = 0, (B^{s+}.5)$$
$$(D - \rho + 2\varepsilon - \bar\varepsilon)\lambda - (\bar\delta + \pi + \alpha - \bar\beta)\pi - \mu\bar\sigma + \nu\bar\kappa - \Phi_{20} = 0, \qquad (B^{s+}.6)$$
$$(D - \bar\rho + \bar\varepsilon)\beta - (\delta - \bar\alpha + \bar\pi)\varepsilon - (\alpha + \pi)\sigma + (\mu + \gamma)\kappa - \Psi_1 = 0, \qquad (B^{s+}.7)$$
$$(D - \bar\rho + \varepsilon + \bar\varepsilon)\mu - (\delta + \bar\pi - \bar\alpha + \beta)\pi - \sigma\lambda + \nu\kappa - 2\Lambda - \Psi_2 = 0, \qquad (B^{s+}.8)$$
$$(D + 3\varepsilon + \bar\varepsilon)\nu - (\Delta + \mu + \gamma - \bar\gamma)\pi - \mu\bar\tau - (\bar\pi + \tau)\lambda - \Psi_3 - \Phi_{21} = 0, \qquad (B^{s+}.9)$$
$$(\Delta + \mu + \bar\mu + 3\gamma - \bar\gamma)\lambda - (\bar\delta + 3\alpha + \bar\beta + \pi - \bar\tau)\nu + \Psi_4 = 0, \qquad (B^{s+}.10)$$
$$(\delta - \bar\alpha - \beta - \tau)\rho - (\delta - 3\alpha + \bar\beta)\sigma + \tau\bar\rho - (\mu - \bar\mu)\kappa + \Psi_1 - \Phi_{01} = 0, \qquad (B^{s+}.11)$$
$$(\delta - \bar\alpha + 2\beta)\alpha - (\bar\delta + \bar\beta)\beta - \mu\rho + \sigma\lambda - (\rho - \bar\rho)\gamma - (\mu - \bar\mu)\varepsilon - \Lambda + \Psi_2 - \Phi_{11}, \qquad (B^{s+}.12)$$
$$(\delta - \bar\alpha + 3\beta)\lambda - (\bar\delta + \pi + \alpha + \bar\beta)\mu - (\rho - \bar\rho)\nu + \pi\bar\mu + \Psi_3 - \Phi_{21} = 0, \qquad (B^{s+}.13)$$
$$(\delta - \tau + \bar\alpha + \beta)\gamma - (\Delta - \gamma + \bar\gamma + \mu)\beta - \mu\tau + \sigma\nu + \varepsilon\bar\nu - \alpha\bar\lambda - \Phi_{12} = 0, \qquad (B^{s+}.14)$$

$$(\delta - \tau + 3\beta + \bar{\alpha})\nu - (\Delta + \gamma + \bar{\gamma} + \mu)\mu - \lambda\bar{\lambda} + \pi\bar{\nu} - \Phi_{22} = 0, \qquad (B^{s+}.15)$$
$$(\delta - \tau - \beta + \bar{\alpha})\tau - (\Delta + \mu - 3\gamma + \bar{\gamma})\sigma - \bar{\lambda}\rho + \kappa\bar{\nu} - \Phi_{02} = 0, \qquad (B^{s+}.16)$$
$$(\Delta + \bar{\mu} - \gamma - \bar{\gamma})\rho - (\bar{\delta} + \bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + \sigma\lambda - \nu\kappa + 2\Lambda + \Psi_2 = 0, \qquad (B^{s+}.17)$$
$$(\Delta + \bar{\mu} - \bar{\gamma})\sigma - (\bar{\delta} + \bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - (\rho + \varepsilon)\nu + (\tau + \beta)\lambda + \Psi_3 = 0. \qquad (B^{s+}.18)$$

Комплексно-сопряженные уравнения $(B^{s-})$ могут быть получены путем замены уравнений $(B^{s+}.1) - (B^{s+}.18)$ на комплексно-сопряженные.

Уравнения $(A^s)$ и $(B^{s+})$, как мы видим, представляют собой дифференциальные нелинейные уравнения первого порядка в частных производных. При решении этих уравнений часто *используют уравнения связи*, в качестве которых выступают вторые тождества Бианки геометрии $A_4(6)$ В спинорном $\Delta -$ базисе эти уравнения расщепляются на следующие уравнения [7,8]

$$\nabla^n R^*_{ACkn} - R^*_{ECkn} T_{A}^{\ E\ n} + R^*_{EAkn} T_{C}^{E\ n} = 0, \qquad (D^{s+})$$

$$\nabla^n R^{*+}_{\dot{B}\dot{D}kn} - R^{*+}_{\dot{F}\dot{D}kn} T^{+\dot{F}\ n}_{\ \dot{B}} + R^{*+}_{\dot{F}\dot{B}kn} T^{+\dot{F}\ n}_{\ \dot{D}} = 0. \qquad (D^{s-})$$

В спинорных матрицах Кармели тождества $(D^{s+})$ представляются в виде

$$\partial^{C\dot{D}} R^*_{E\dot{F}C\dot{D}} + \sigma^n{}_{E\dot{F}}(\partial^{C\dot{D}}\sigma_n^{A\dot{B}}) R^*_{A\dot{B}C\dot{D}} + (\nabla_k \sigma^{kC\dot{D}}) R^*_{E\dot{F}C\dot{D}} - [T^{C\dot{D}} R^*_{E\dot{F}C\dot{D}}] = 0\,, \qquad (6.21)$$
$$A, B, C \ldots = 0,1, \qquad \dot{D}, \dot{E}, \dot{F} \ldots = \dot{0}, \dot{1}\,.$$

Легко проверить, что первые структурные уравнения Картана $(A^s)$ представляют собой разность двух соотношений

$$\partial_{C\dot{D}} \sigma^i{}_{A\dot{B}} = (T_{C\dot{D}})_A{}^P \sigma^i{}_{P\dot{B}} + \sigma^i{}_{A\dot{R}} (T^+{}_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}}\,, \qquad (6.22)$$

$$\partial_{A\dot{B}} \sigma^i{}_{C\dot{D}} = (T_{A\dot{B}})_C{}^P \sigma^i{}_{P\dot{D}} + \sigma^i{}_{C\dot{R}} (T^+{}_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}\,. \qquad (6.23)$$

Подставляя (6.22) в (6.21), получим окончательно тождества $(D^{s+})$ в виде

$$\partial^{C\dot{D}} R^*_{E\dot{F}C\dot{D}} - (T^{C\dot{D}})^{A}{}_{E} R^*_{A\dot{F}C\dot{D}} - (T^{+\dot{D}C}) R^*_{E\dot{B}C\dot{D}} + (T_P{}^{\dot{D}})^{CP} R^*_{E\dot{F}C\dot{D}} + (T^{+C}_{\dot{Q}})^{\dot{Q}\dot{D}} R^*_{E\dot{F}C\dot{D}}$$
$$+ [T^{C\dot{D}} R^*_{E\dot{F}C\dot{D}}] = 0 \qquad (D^{s+})$$
$$A, B, C \ldots = 0,1, \qquad \dot{D}, \dot{E}, \dot{F} \ldots = \dot{0}, \dot{1}\,.$$

## 6.4 Некоторые физически значимые решения уравнений Физического Вакуума и классификация решений по группам изометрий.

В книге [7,8] доказана теорема, согласно которой структурные уравнения *(A), (B)* геометрии $A_4(6)$ совпадают с уравнениями формализма Ньюмена-Пенроуза (НП-формализм) [52], поэтому технология решения уравнений *(A), (B )* полностью совпадает с методом решения уравнений НП-формализма. В качестве независимых переменных в системе уравнений *(A), (B)*, в общем случае, выступают 20 независимых компонент тензора Римана (6.14), 24 компоненты коэффициентов вращения Риччи (6.12) и 6 независимых компонент обобщенных матриц Паули (6.11).

Представим решение уравнений *(A), (B )*, содержащее две константы интегрирования $\Psi^0$ и $\Lambda$. В обозначениях, принятых в НП – формализме, это решение с метрикой, подобной метрике *Шварцшильда-де Ситтера* уравнений Эйнштейна [62], записанное в трансляционных координатах $x^0 = u, \quad x^1 = r,\ x^2 = \theta, x^3 = \varphi$, имеет вид:

1. Длякомпонент обобщенных матриц Паули (6.11):

$$\sigma^{i}{}_{0\dot{0}} = (0{,}1{,}0{,}0), \qquad \sigma^{i}{}_{1\dot{1}} = (1, U, 0{,}0), \qquad \sigma^{i}{}_{0\dot{1}} = \rho(0, \rightleftarrows 0, P, iP), \ \ \sigma^{i}{}_{1\dot{0}} = \bar{\sigma}^{i}{}_{0\dot{1}},$$

$$\sigma_i{}^{0\dot{0}} = (1{,}0{,}0{,}0), \ \ \sigma_i{}^{1\dot{1}} = (-U, 1{,}0{,}0), \qquad \sigma_i{}^{0\dot{1}} = -\frac{1}{2\rho P}(0{,}0{,}1, i), \qquad \sigma_i{}^{1\dot{0}} = \bar{\sigma}_i{}^{0\dot{1}} \qquad (6.24)$$

где

$$U = -\frac{1}{2} + \frac{2\Psi^0}{r} + \tilde{\Lambda} r^2, \ \ P = (2)^{-\frac{1}{2}}(1 + \zeta\bar{\zeta}/4), \qquad \zeta = x^2 + ix^3,$$

$$\Psi^0 = \mathrm{const}, \qquad \widetilde{\Lambda} = 6\Lambda = \frac{R}{4} = const.$$

2. Для спинорных компонент матриц Кармели (6.12):

$$\rho = -\frac{1}{r}, \ \ \alpha = -\bar{\beta} = \frac{\alpha^0}{r}, \qquad \gamma = \frac{\rho^2 \Psi^0}{2} - \tilde{\Lambda} r, \qquad (6.25)$$

$$\mu = \frac{\rho}{2} + \frac{2\Psi^0}{r^2}, \qquad \alpha^0 = \frac{\zeta}{4}.$$

3. Для спинорных компонент тензора Римана (6.14):

$$\Psi_2 = \Psi = -\frac{\Psi^0}{r^3}, \quad \tilde{\Lambda} = 6\Lambda = \frac{R}{4} = const. \qquad (6.26)$$

Трансляционная метрика (6.2) этого решения имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 -$$

$$- r^2 (d\theta^2 + sin^2\theta \, d\phi^2) \qquad (6.27)$$

и содержит две произвольных константы интегрирования $\Psi^0$ и $\Lambda$ .

Заметим, что уравнения Физического Вакуума $(\overset{+}{A}_{s^+}.1)$, $(\overset{+}{A}_{s^+}.2)$, $(\overset{+}{B}_{s^+}.1)$, $(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$, так же, как и вакуумные уравнения Эйнштейна $R_{ik} = 0$ , не содержат никаких заранее определенных физических констант. Поэтому уравнения Физического Вакуума необходимо рассматривать как «матрицу возможного». Решения уравнений Физического Вакуума, например решение (6.24)-(6.27), содержат константы (а, в других решениях, и функции) интегрирования, физическое значение которых находится посредством использования принципа соответствия полученных решений с решениями уравнений фундаментальных физических теорий. В данном случае, сравнивания решение (6.24)-(6.27) с решениями вакуумных уравнений теорией гравитации Эйнштейна $R_{ik} = -\Lambda g_{ik}$ , находим

$$2\Psi^0 = r_g = \frac{2MG}{c^2} \quad , \tag{6.28}$$

где $r_g$ – гравитационный радиус и

$$\Lambda < 0 = const \tag{6.29}$$

- космологическая константа, которая из астрофизических данных имеет следующее значение

$$|\Lambda| \approx 1/R^2{}_0 \approx 10^{-56}(m)^{-2} \quad . \tag{6.30}$$

Здесь $R_0 \approx 10^{26\div30}\ m$ – радиус Вселенной.

Следующим физически важным решением уравнений Физического Вакуума, полученным с использованием формализма Ньюмена-Пенроуза оказывается решение Вайдя-Керра [64,65]. В трансляционных координатах $x^0 = u,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi$ это решение имеет вид:

1. Для компонент обобщенных матриц Паули (6.11):

$$\sigma^i{}_{0\dot0} = (0,1,0,0), \qquad \sigma^i{}_{1\dot1} = \rho\bar\rho(\Omega, -Y, 0, a),\ \sigma^i{}_{0\dot1} = -\frac{\bar\rho}{\sqrt2}(ia\sin\theta\,, 0,1, i\ cosec\ \theta)\,,$$

$$\sigma^i{}_{1\dot0} = \overline{\sigma^i{}_{0\dot1}},\ \ \sigma_i{}^{0\dot0} = (1,0,0,-a\ sin^2\theta)\,,\ \ \sigma_i{}^{1\dot1} = \rho\bar\rho(Y,(\rho\bar\rho)^{-1}, 0, -a\ sin^2\theta Y)\ ,$$

$$\sigma_i{}^{0\dot1} = -\frac{\bar\rho}{\sqrt2}(ia\sin\theta\,, 0, -(\rho\bar\rho)^{-1}, -i\Omega\sin\theta), \qquad \sigma_i{}^{1\dot0} = \overline{\sigma_i{}^{0\dot1}}, \tag{6.31}$$

где

$$\Omega = r^2 + a^2, \qquad Y = \frac{r^2 + a^2 - 2\Psi^0(u)r}{2}, \qquad a = const,\ \Psi^0 = \Psi^0(u).$$

2. Для спинорных компонент матриц Кармели (6.12) (поля инерции) :

$$\rho = -\frac{1}{r - ia\cos\theta}, \qquad \beta = -ctg\theta\frac{\bar\rho}{2\sqrt2}, \qquad \pi = ia\sin\theta\frac{\rho^2}{\sqrt2}, \qquad \alpha = \pi - \bar\beta, \tag{6.32}$$

$$\mu = Y\rho^2\bar\rho, \qquad \nu = -i\dot\Psi^0 ra\sin\theta\frac{\rho^2\bar\rho}{\sqrt2}, \qquad \gamma = \mu + [r + \Psi^0]\frac{\rho\bar\rho}{2}, \qquad \tau = -ia\sin\theta\frac{\rho\bar\rho}{\sqrt2}.$$

3. Для спинорных компонент тензора Римана (6.14):

$$\Psi_2 = \Psi^0\rho^3,\ \Psi_3 = -i\dot\Psi^0 a\sin\theta\frac{\rho^2\bar\rho}{2\sqrt2} - i2\dot\Psi^0 ra\sin\theta\frac{\rho^3\bar\rho}{\sqrt2}\,,$$

$$\Psi_4 = \ddot\Psi^0 ra^2\ sin^2\theta\frac{\rho^3\bar\rho}{2} + \dot\Psi^0 ra^2\ sin^2\theta\,\rho^4\bar\rho, \tag{6.33}$$

$$\Phi_{12} = -i\dot{\Psi}^0 a \sin\theta \frac{\rho^2\bar{\rho}}{2\sqrt{2}}, \quad \Phi_{22} = -\ddot{\Psi}^0 r a^2 \sin^2\theta \frac{\rho^2\bar{\rho}^2}{2} - \dot{\Psi}^0 r^2 \rho^2 \bar{\rho}^2.$$

В этом решении $\Psi^0(u)$ - функция источника, зависящая от времени $u$ и $a = const$ - параметр Керра, описывающий вращение источника. Трансляционная метрика решения (6.31)-(6.33) имеет вид [7,8]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Psi^0(t)r}{r^2 + a^2cos^2\theta}\right)c^2dt^2 + \frac{4\Psi^0(t)ra}{r^2 + a^2cos^2\theta} sin^2\theta 2d\varphi cdt \; -$$

$$- \frac{r^2 + a^2cos^2\theta}{r^2 - 2\Psi^0(t)r + a^2} dr^2 - 2a\, sin^2 x\, drdy - (\rho\bar{\rho})^{-1}dx^2 \; -$$

$$-(r^2 + a^2cos^2\theta)d\theta^2 \; -$$

$$- \left(r^2 + a^2 + \frac{2\; \Psi^0(t)ra^2}{r^2 + a^2cos^2\theta} sin^2\theta\right) sin^2\theta\, d\varphi^2. \tag{6.34}$$

Решение (6.31)-(6.34) содержит функцию интегрирования источника поля $\Psi^0(t)$ и константу $a = const$. Используя известное решение Вайдя [64], которое описывает гравитационное монопольное излучение источника с переменной массой $M(t)$, поэтому в решении (6.31)-(6.34) мы полагаем

$$2\Psi^0(t) = r_g(t) = \frac{2M(t)G}{c^2} \; . \tag{6.35}$$

Константу Керра $a$ было предложено называть, по аналогии с гравитационным радиусом $r_g$, спиновым радиусом $r_s$ [66]

$$r_s = a = const. \tag{6.35a}$$

Для вычисления нерелятивистской потенциальной энергии $U$, описывающей взаимодействие пробной массы $m$ с источником решения (6.31)-(6.34), мы воспользуемся формулой [7,8]

$$U = L_\infty - L = -mc\left[\left(\eta_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}\right]. \tag{6.36}$$

Отсюда следует простая формула для приближенной оценки потенциальной энергии взаимодействия пробной частицы и источника поля

$$U = \frac{mc^2}{2}(g_{00} - 1). \tag{6.37}$$

Например, из метрики (6.27) с помощью формулы (6.37), находим

$$U = -\frac{mc^2}{2}\left(\frac{r_g}{r} + \frac{\Lambda r^2}{3}\right). \tag{6.38}$$

Применяя формулу (6.37) к метрике (6.34), имеем

$$U = -\frac{mc^2}{2}\frac{r_g(t)r}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = -\frac{mc^2}{2}\frac{r_g(t)}{r} + \frac{mc^2}{2}\frac{r_g(t)}{r}\frac{(a^2\cos^2\theta)}{r^2 + \cos^2\theta} \quad . \qquad (6.39)$$

Мы можем использовать решение (6.31)-(6.34) для описания кулоновского взаимодействия (кулоновского переменного потенциала источника $\varphi_C = Ze(t)/r,\ Z = \pm 1, \pm 2 \ldots \pm n$) с удельным отрицательным зарядом $k = -e/m$ пробной частицы, если введем электромагнитный радиус $r_e(t)$, определяемый как [7,8]

$$r_e(t) = \frac{2eZe(t)}{mc^2} \quad . \qquad (6.40)$$

В этом случае решение (6.31)-(6.34) будет описывать взаимодействие источника с переменной массой $M(t)$, переменным зарядом $\pm Ze(t)$ и постоянным спиновым радиусом $r_s$ с пробной частицей, обладающей отрицательным удельным зарядом $k = -e/m$ . В результате, мы получили возможность объединить гравитационные и электромагнитные взаимодействия естественным образом, не прибегая к феноменологическим теориям объединения. Такой подход представляет собой решение *первой проблемы Эйнштейна,* предполагающей объединение теории гравитации Эйнштейна с электродинамикой Максвелла-Лоренца.

Каждое из решений уравнений Физического Вакуума можно классифицировать по группам изометрий ( группа, которая отставляет инвариантной метрику решения) пространства $\mathrm{A}_4$ (6) .

Калибровочной группой матричный уравнений $(A)$, $(B)$ является полупрямое произведение группы трансляций $T_4$на группу вращений $O(3.1)$ : $T_4 \otimes O(3.1)$. Чтобы отличить одно контрактное решение от другого по групповым свойствам, мы используем технику вложения геометрий $\mathrm{A}_4$ (6) конкретного решения в плоское пространство $E_p$ большего числа измерений $\mathrm{p} > 4$ . Будем рассматривать пространства $\mathrm{A}_4$ (6) различных решения уравнений Физического Вакуума как непрерывную деформацию плоского пространства Минковского $E_4(3.1)$ . У каждого решения уравнений Физического Вакуума существует минимальное плоское пространство вложения $E_p(r,s)$ размерности $p = r + s$, где сигнатура $r + s$ означает $r$ положительных и $s$ отрицательных диагональных элементов метрического тензора $\eta_{ik},\ i,k = 1,2,\ldots,p$ пространства вложения $E_p(r,s)$ [7]. В таблице 6.1 представлены изометрические группы Ли различных конкретных пространств вложения $E_p(r,s)$ и их важнейшие спинорные подгруппы. Например, решение де Ситтера (6.27) имеем минимальное плоское пространство вложения $E_5(4.1)$, группу Ли $SO(4.1)$, спинорную группу *SL(4.C)* и важнейшую подгруппу *SU(2)x SU(2).* Гравитационное решение с метрикой Шварцшильда получаем из метрики (2.27) при $\Lambda = 0$ имеет минимальное плоское пространство вложения $E_6(4.6)$, группу Ли $O(4.2)$, спинорную группу *SU(2.2)* и важнейшую подгруппу *SU(2)x SU(2)* [7]. Таблица 6.1 может служить важным инструментом при поиске спектра масс элементарных частиц.

Таблица 6.1

| p | $E_p(r,s)$ | $L_p(r,s)$ | Спинорные группы | Важнейшие подгруппы |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $E_4(3.1)$ | $SO(3.1)$ | *SL(2.C)* | |
| 4 | $E_4(2.2)$ | $O(3.1)$ | *SU(1.1)x SU(1.1)* | *SU(2)x SU(2)* |
| 5 | $E_5(4.1)$ | $SO(4.1)$ | *SL(4.C)* | *SU(1.1)x SU(1.1)* |
| 5 | $E_5(3.2)$ | $SO(3.2)$ | *SU(1.1.1.1)* | |
| 6 | $E_6(5.1)$ | $O(5.1)$ | *SL(4.C)* | *SU(2)x SU(2)* |
| 6 | $E_6(4.2)$ | $O(4.2)$ | *SU(2.2)* | *SU(1.1)x SU(1.1)* |
| 6 | $E_6(3.3)$ | $O(3.3)$ | *SL(4.C)* | *SU(4)* |
| 7 | $E_7(6.1)$ | $SO(6.1)$ | *SL(8.C)* | *SU(2.2)* |
| 7 | $E_7(5.2)$ | $SO(5.2)$ | *SU(2.2.2.2)* | *SU(2)x SU(2)* |
| 7 | $E_7(4.3)$ | $SO(4.3)$ | *SL(8.C)* | *SU(4)* |
| 8 | $E_8(7.1)$ | $O(7.1)$ | *SL(8.C)* | *SU(4)* |
| 8 | $E_8(6.2)$ | $O(6.2)$ | *SU(1.1)x SU(4.4)* | *SU(2)x SU(2)* |
| 8 | $E_8(5.3)$ | $O(5.3)$ | *SL(16.C)* | *SU(2)x SU(2)* |
| 8 | $E_8(4.4)$ | $O(4.4)$ | *SU(1.1)x SU(2.2.2.2)* | *SU(4)* |
| 9 | $E_9(8.1)$ | $SO(8.1)$ | *SL(16.C)* | *SU(4.4)* |
| 9 | $E_9(7.2)$ | $SO(7.2)$ | *SU(4.4.4.4)* | *SU(4)* |
| 9 | $E_9(6.3)$ | $SO(6.3)$ | *SL(16.C)* | *SU(2)x SU(2)* |
| 9 | $E_9(5.4)$ | $SO(5.4)$ | *SU(2.2.2.2.2.2.2.2)* | *SU(8)* |
| 10 | $E_{10}(9.1)$ | $O(9.1)$ | *SL(16.C)* | |
| 10 | $E_{10}(8.2)$ | $O(8.2)$ | *SU(8.8)* | *SU(4)* |
| 10 | $E_{10}(7.3)$ | $O(7.3)$ | *SL(16.C)* | |
| 10 | $E_{10}(6.4)$ | $O(6.4)$ | *SU(4.4.4.4)* | |
| | $E_{10}(5.5)$ | $O(5.5)$ | *SL(16.C)* | |

## 7. Решение второй проблемы Эйнштейна

Вакуумные уравнения общерелятивистской теории гравитации $R_{ik} = 0$ А. Эйнштейн рассматривал как единственно правильные (фундаментальные) уравнения гравитационного поля. Это связано с тем, что в уравнениях Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \tag{7.1}$$

где $T_{ik}$ - тензор энергии-импульса материи, правая часть (тензор энергии-импульса) не имеет геометрической сущности и, фактически, введена «руками». Различные виды $T_{ik}$ носят феноменологический характер и являются, по мнению А. Эйнштейна, «временным выходом из сложившейся ситуации». По мнению А. Эйнштейна и его ученика Дж. Уиллера эта фундаментальная трудность теории будет снята (решена вторая проблема Эйнштейна), если:

1. Тензор источников поля $T_{ik}$ в уравнениях (6.40) будет геометризирован [67].
2. Этот тензор будет образован спинорными полями, что должно привести к геометризации квантовой электродинамики ( по мнению Дж. Уиллера, к геометризации уравнения Дирака) [68].

Начало решению второй проблемы Эйнштейна было положено в работах [53, 69,70]. В настоящее время, в полностью геометризированных спинорных уравнениях Эйнштейна $(\overset{+}{B}_{s^+}.1)$ геометризированный тензор энергии-импульса $T_{A\dot{C}B\dot{D}}$ и геометризированный спинорный ток $J_{A\dot{C}B\dot{D}}$ в полностью геометризированных уравнениях Янга-Миллса $(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ выражаются через матрицы Кармели (6.12) или (6.13). Спинорный тензор энергии-импульса $T_{A\dot{C}B\dot{D}}$ и спинорный ток $J_{A\dot{C}B\dot{D}}$ определяются следующим образом [7,8]

$$T_{A\dot{C}B\dot{D}} = \sigma^i{}_{A\dot{C}} \sigma^k{}_{B\dot{D}} T_{ik}, \tag{7.2}$$

где тензор энергии-импульса материи $T_{ik}$ $(i, k, n ... = 0,1,2,3)$, записанный в неголономном базисе (4.20)-(4.23). Соответственно, запись спинорных уравнений $(\overset{+}{A}_{s^+}.1)$ -$(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ в неголономном векторном базисе (4.20)-(4.23) имеет вид [7,8]

$$\nabla_{[k} e^a_{j]} + T^i_{[kj]} e^a_i = 0, \tag{$A$}$$

$$R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = \nu T_{jm}, \tag{$B.1$}$$

$$C^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{s[k} T^s_{|j|m]} = -\nu J^i_{jkm}, \tag{$B.2$}$$

$$i, j, k \ldots = 0,1,2,3, \quad a, b, c \ldots = 0,1,2,3,$$

где уравнения *(A)* определяют кручение

$$\Omega^{..i}{}_{jk} = -T^i{}_{[jk]} = -\frac{1}{2} e^i{}_a \left( \nabla_k e^a{}_j - \nabla_j e^a{}_k \right) = e^i{}_a \nabla_{[j} e^a{}_{k]} \tag{7.3}$$

пространства $A_4(6)$ , уравнения *(B.1)* -полностью геометризированные уравнения Эйнштейна, уравнения *(B.2)* – полностью геометризированные уравнения Янга-Миллса. В уравнениях *(B.1)* тензор энергии-импульса материи $T_{jm}$ и тензор тока $J_{ijkm}$

$$T_{jm} = -\frac{2}{\nu}\Big\{\big(\nabla_{[i}T^i_{|j|m]} + T^i_{s[i}T^s_{|j|m]}\big) - \frac{1}{2}g_{jm}g^{pn}\big(\nabla_{[i}T^i_{|p|n]} + T^i_{s[i}T^s_{|p|n]}\big)\Big\}. \tag{7.4}$$

$$J_{ijkm} = 2g_{[k(i}T_{j)m]} - Tg_{i[m}g_{k]j}/3 \tag{7.5}$$

образованы полями инерции $T^i_{jk}$ (коэффициентами вращения Риччи) которые физически можно рассматривать как поля материи, поскольку они образуют тензор энергии-импульса (7.4).

Кручение (7.3) пространства $A_4(6)$ имеет 24 независимых компоненты и разлагается на сумму неприводимых частей следующим образом

$$\Omega^i{}_{.jk} = \tfrac{2}{3}\delta^i_{[k}\Omega_{j]} + \tfrac{1}{3}\varepsilon^n_{jks}\widehat{\Omega}^s + \overline{\Omega}^i_{.jk}, \tag{7.6}$$

где $\Omega^i{}_{.jk} = g^{im}g_{ks}\Omega^{..s}{}_{mj}$ , а вектор $\Omega_j$ , псевдовектор $\widehat{\Omega}_j$ и бесследовая часть $\overline{\Omega}^i_{.jk}$ кручения (7.3) определяются как

$$\Omega_j = \Omega^i{}_{.ji} \ , \tag{7.7}$$

$$\widehat{\Omega}_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jins}\Omega^{ins} \ , \tag{7.8}$$

$$\overline{\Omega}^s_{.js} = 0\,,\ \ \overline{\Omega}_{ijs} + \overline{\Omega}_{jsi} + \overline{\Omega}_{sij} \ . \tag{7.9}$$

При переходе к спинорному $\Delta$ -базису спинорное представление поля инерции (коэффициентов вращения Риччи $T_{ijk}$ имеет вид [52]

$$T_{ijk} \leftrightarrow T_{ABC\dot{C}} = \frac{1}{2}\ \Big(A_{ABC\dot{C}} + \frac{1}{3}\ (\varepsilon_{AC}\alpha_{B\dot{C}} + \varepsilon_{BC}\alpha_{A\dot{C}})\Big), \tag{7.10}$$

где спинор $A_{ABC\dot{C}}$ полностью симметричен по нештрихованным индексам

$$A_{ABC\dot{C}} = A_{(ABC)\dot{C}} \ , \tag{7.11}$$

а спинор $\alpha_{A\dot{C}}$ определяется как

$$\alpha_{A\dot{C}} = A_{AB}{}^{B}{}_{\dot{C}} \ . \tag{7.12}$$

Этот спинор может быть разложен на эрмитову $\kappa_{A\dot{C}}$ и антиэрмитову $\mu_{A\dot{C}}$ части:

$$\alpha_{A\dot{C}} = \kappa_{A\dot{C}} + i\mu_{A\dot{C}}\,, \tag{7.13}$$

где

$$\kappa_{A\dot{C}} = \frac{1}{2}(\alpha_{A\dot{C}} + \overline{\alpha}_{\dot{A}C}), \qquad \mu_{A\dot{C}} = \frac{1}{2}\ i(\ \alpha_{A\dot{C}} - \overline{\alpha}_{\dot{A}C}) \tag{7.14}$$

и

$$\overline{\kappa_{A\dot{C}}} = \overline{\kappa}_{\dot{A}C} = \kappa_{C\dot{A}}, \quad \overline{\mu_{A\dot{C}}} = \overline{\mu}_{A\dot{C}} = -\mu_{C\dot{A}} \ . \tag{7.15}$$

Между неприводимыми частями кручения (7.7)-(7.9) и спинорами (7.11)-(7.15) имеет место следующее соответствие

$$\Omega_j \leftrightarrow \kappa_{A\dot{C}} \ , \tag{7.16}$$

$$\widehat{\Omega}_j \leftrightarrow \ \mu_{A\dot{C}} \ , \tag{7.17}$$

$$\overline{\Omega}^{s}_{.js} \leftrightarrow A_{(ABC)\dot{C}} \ . \tag{7.18}$$

По определению, спинор $A_{(ABC)\dot{C}}$ преобразуется по $D(3/2.1/2)$ неприводимому представлению группы $SL(2.C)$. Соответственно, спиноры $\kappa_{A\dot{C}}$ и $\mu_{A\dot{C}}$ преобразуются по $D(1/2.1/2)$ неприводимым представлениям группы $SL(2.C)$.

Через компоненты матрицы Кармели (6.13) спинор (7.10) представляется как [7,8]

$$T_{ABC\dot{D}} = AB\begin{pmatrix} 00 \\ (01) \\ 11 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} 0\dot{0} & 0\dot{1} & 1\dot{0} & 1\dot{1} \end{array}}^{C\dot{D}} \\ \begin{bmatrix} \kappa & \sigma & \rho & \tau \\ \varepsilon & \beta & \alpha & \gamma \\ \pi & \mu & \lambda & \upsilon \end{bmatrix} \end{array} . \tag{7.19}$$

Используя соотношения (7.10)-(7.19), находим

$$\kappa_{A\dot{C}} = 1/2\begin{pmatrix} (\rho+\overline{\rho})-(\varepsilon+\overline{\varepsilon}) & (\tau+\beta)+(\overline{\alpha}-\overline{\pi}) \\ (\overline{\tau}-\overline{\beta})+(\alpha-\pi) & (\gamma-\overline{\gamma})-(\mu+\overline{\mu}) \end{pmatrix}, \tag{7.20}$$

$$\mu_{A\dot{C}} = 1/2\begin{pmatrix} (\rho-\overline{\rho})-(\varepsilon-\overline{\varepsilon}) & (\tau-\beta)-(\overline{\alpha}-\overline{\pi}) \\ -(\overline{\tau}-\overline{\beta})+(\alpha-\pi) & (\gamma-\overline{\gamma})-(\mu-\overline{\mu}) \end{pmatrix}. \tag{7.21}$$

Теперь вспомним, что уравнения квантовая теории, такие как уравнение Шредингера, Паули и Дирака сформулированы в (квази)инрециальной системе отсчета, в которой компоненты (7.16) и (7.18) обращаются в нуль [7,8]. В этом случае тензор энергии-импульса (7.4) принимает вид

$$T_{jm} = \frac{1}{2\nu}\left\{\widehat{\Omega}_j\widehat{\Omega}_m - \frac{1}{2}g_{jm}\,\widehat{\Omega}^i\widehat{\Omega}_i\right\}. \tag{7.22}$$

Используя формулы (7.2) и (7.17), получим тензор энергии-импульса материи в виде

$$T_{A\dot{C}B\dot{D}} = \frac{1}{2\nu}\left(\mu_{A\dot{B}}\,\mu_{C\dot{D}} - \frac{1}{2}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{\dot{B}\,\dot{D}}\mu_{P\dot{Q}}\mu^{P\dot{Q}}\right). \tag{7.23}$$

В силу соотношения

$$T = g^{jm}T_{jm} = -\frac{1}{2\nu}\,\widehat{\Omega}^i\widehat{\Omega}_i = -\frac{1}{2\nu}\mu_{P\dot{Q}}\mu^{P\dot{Q}} = \rho c^2, \tag{7.24}$$

где $\rho$ – плотность материи, находим вид $\rho$ в (квази)инрециальной системе отсчета

$$\rho = -\frac{1}{2\nu c^2}\mu_{P\dot{Q}}\mu^{P\dot{Q}} = \frac{1}{2\nu c^2}\overline{\mu}_{\dot{Q}P}\mu^{P\dot{Q}} . \qquad (7.25)$$

Здесь мы использовали свойство спиноров (7.15).

Легко видеть, что, с точностью до множителя, четырехкомпонентный спинор $\mu_{P\dot{Q}}$ совпадает со спинором Дирака $(4.15a)$, поэтому (7.25) можно рассматривать как плотность поля Дирака.

Подставляя величины поля инерции $T^i{}_{jk}$ из решения (6.31)-(6.33) и используя метрику (6.34), находим явный вид геометризированного тензора энергии-импульса (7.4) в полностью геометризированных уравнениях Эйнштейна *(B.1)*

$$T_{ik} = \frac{1}{\nu}\left(\left[-\frac{\ddot{\Psi}^0}{2}ra^2 \sin^2\theta\,(\rho\bar{\rho})^2 - \dot{\Psi}^0 r^2(\rho\bar{\rho})^2\right] l_i l_k - \sqrt{2}\dot{\Psi}^0 a \sin\theta\,\rho\bar{\rho}\, Im(\,l_{(i}\bar{m}_{k)}\rho)\right), \qquad (7.26)$$

где

$$l_k l^k = 0, \qquad \dot{\Psi}^0 = \frac{\partial\ \Psi^0}{\partial u} \quad . \qquad (7.27)$$

Таким образом, решение уравнений Физического Вакуума $(\overset{+}{A}_{s^+}.1)$ -$(\overset{+}{B}_{s^+}.2)$ позволяет вычислить явный вид тензора энергии-импульса (7.4) в полностью геометризированных уравнениях Эйнштейна *(B.1)* и, соответственно, тензор тока (7.5) в полностью геометризированных уравнениях Янга-Миллса *(B.2)*.

### 7.1 Модель массивной точечной частицы

Покажем, что полностью геометризированные уравнения Эйнштейна *(B.1)* переходят в уравнения Эйнштейна (7.1) при условии, что источником гравитационного поля является точечная масса.

Действительно, полагая в решении (6.31)-(6.33) параметр $a = 0$, получаем из (7.26)

$$T_{ik} = -\frac{1}{\nu}\left[\dot{\Psi}^0 r^2(\rho\bar{\rho})^2\right] l_i l_k, \qquad l_k l^k = 0. \qquad (7.27)$$

Из определения $T_{ik} = \rho c^2 l_i l_k$ , находим плотность материи

$$\rho = -\,2\dot{\Psi}^0(u)/\nu c^2 r^2, \qquad \dot{\Psi}^0(u) < 0. \qquad (7.28)$$

Рассмотрим предельный переход плотности (7.28) $\Psi^0(u) \to \Psi^0 = \mathrm{const}$, когда источник перестает излучать. Для этого введем параметр $\varsigma$ размерности длинны

$$\varsigma = \frac{\pi r^2}{2\Psi^0}\left|\dot{\Psi}^0(u)\right| \qquad (7.29)$$

и представим плотность (7.28) через этот параметр в виде

$$\rho = \frac{8\pi\Psi^0}{\nu c^2}\frac{1}{2\pi r^2}\frac{\varsigma}{r^2} = \frac{8\pi\Psi^0}{\nu c^2}\frac{1}{2\pi r^2}\frac{\varsigma}{(r^2+\varsigma^2)}\left(1+\frac{\varsigma^2}{r^2}\right). \qquad (7.30)$$

Из (7.29) видно, что при $\Psi^0(u) \to \Psi^0 = \mathrm{const}$ величина $\varsigma \to 0$. Используя известную формулу

$$\frac{1}{2\pi r^2}\frac{1}{\pi}\lim_{\varsigma\to 0}\frac{\varsigma}{(r^2+\varsigma^2)} = \frac{1}{2\pi r^2}\delta(r) = \delta(\vec{r}),$$

где $\delta(\vec{r})$ – трехмерная функция Дирака, запишем (7.30) (полагая $\nu > 0$ ) как

$$\rho = \lim_{\Psi^0(u)\to\Psi^0} \frac{2\left|\dot{\Psi}^0(u)\right|}{\nu c^2 r^2} = \frac{8\pi\Psi^0}{\nu c^2}\frac{1}{2\pi r^2}\lim_{\varsigma\to 0}\frac{\varsigma}{(r^2+\varsigma^2)} =$$

$$= \frac{8\pi\Psi^0}{\nu c^2}\frac{1}{2\pi r^2}\delta(r) = \frac{8\pi\Psi^0}{\nu c^2}\delta(\vec{r}). \qquad (7.31)$$

В это соотношение входят две неопределенные константы: константа интегрирования $\Psi^0$ и множитель $\nu$ . Для определения их значений мы имеем два равенства:

1. При условии $\Psi^0(u) \to \Psi^0 = \text{const}$ метрика (6.34) совпадает с метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (7.32)$$

откуда

$$\Psi^0 = \frac{MG}{c^2} = \frac{r_g}{2} = -\frac{\varphi_N r}{c^2}, \qquad (7.33)$$

где $M$ масса центрального тела, $r_g$ – гравитационный радиус, $\varphi_N = -MG/r -$ потенциал Ньютона.

2. Из соотношения для плотности материи (7.31) следует, что перед $\delta(\vec{r})$ стоит масса источника поля

$$M = \frac{8\pi\Psi^0}{\nu c^2}. \qquad (7.34)$$

Используя (7.33) и (7.34), находим значение множителя $\nu$ в виде

$$\nu = \frac{8\pi G}{c^4} \qquad (7.35)$$

Теперь уравнения *(B.1)* запишутся как

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \;\; T_{ik} = Mc^2\delta(\vec{r})l_i l_k, \qquad l_k l^k = 0. \qquad (7.36)$$

Уравнения (7.36) представляют собой предельный случай излучающего точечного источника с массой $M$ . Именно для этих уравнений выполняется принцип соответствия уравнений Физического Вакуума уравнениям теории гравитации Эйнштейна (7.1) с отличной от нуля правой частью.

### 7.2 Связь поля инерции с волновой функцией квантовой теории

Обратим внимание читателя на два фундаментальных результата, которые мы получили как следствие уравнений Физического Вакуума:

1) Во-первых, решения уравнений Физического Вакуума, в общем случае, носят чисто полевой характер, включая источники полей $T_{jm}$ и $J_{ijkm}$ уравнениях *(B.1)* и *(B.2)* , а точечная частица появляется в чисто полевой теории как предельный случай,

описываемый условием $\Psi^0(u) \to \Psi^0 = const$ . Для массивной и заряженной частицы это условие имеет вид $m(t) \to m = const$ и $e(t) \to e = const$ соответственно.

2) Во-вторых, в (квази)инерциальной системе отсчета плотность материи (7.25) выражается (с точностью до множителя) через 4х компонентный спинор Дирака $\mu_{A\dot{C}}$, который имеет: а) чисто геометрическую природу и порожден кручением (7.3) 10ти мерного пространства $A_4(6)$; б) спинор Дирака $\mu_{A\dot{C}}$ математически интерпретируется как неприводимая псевдовекторная часть (7.17) кручения $\Omega^{..i}{}_{jk}$ , а физически *как поле инерции* $T_{ijk}$ в (квази)инерциальной системе отсчета [1-31].

В педагогических целях, рассмотрим простое доказательство связи волновой функции $\psi$ в уравнении Шредингера с полем инерции $T^i_{kj}$ . Прежде всего отметим, что в пространстве, содержащем неголономные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ уравнений Лагранжа обобщаются и имеют вид [7,8]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} + 2\dot{x}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \Omega^j{}_{ki} = 0, \qquad \dot{x}^k = dx^k/dt, \tag{7.37}$$

где $\Omega^j{}_{ki}$ - кручение пространства $A_4(6)$. Для точечной пробной частицы массы эти уравнения можно переписать как

$$m\frac{d^2x^i}{ds^2} + m\Gamma^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + mT^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{7.38}$$

где, как показывают вычисления [7,8],

$$mT^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \tag{7.39}$$

- сила инерции. Поэтому поле $T^i{}_{jk}$ было названо полем инерции, порождающим силы инерции. Уравнения движения (7.38) совпадают с уравнениями движения пробной частицы теории гравитации Эйнштейна при условии, что сила инерции (3.39) равна нулю

$$mT^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{7.40}$$

Соотношение (7.409) можно рассматривать как уравнение относительно $T^i{}_{jk}$, поскольку это поле имеет симметричную $T^i{}_{(jk)}$ и антисимметричную $T^i{}_{[jk]}$ по индексам $j$ и $k$ части

$$T^i{}_{jk} = -\Omega^{..i}{}_{jk} + g^{im}\left(g_{js}\Omega^{..s}{}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}{}_{mj}\right) = T^i{}_{[jk]} + T^i{}_{(jk)},$$

причем

$$T^i{}_{[jk]} = -\Omega^{..i}{}_{jk}, T^i{}_{(jk)} = g^{im}\left(g_{js}\Omega^{..s}{}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}{}_{mj}\right) = 2\Omega^i{}_{.jk}. \tag{7.41}$$

Решая уравнения (7.40) , находим

$$T_{ijk} = -T_{jik} = T_{jki} = -\Omega_{ijk}. \tag{7.42}$$

Таким образом, в (квази)инерциальной системе отсчета, в которой силы инерции равны нулю, *поле инерции отлично от нуля, антисимметрично по всем трем индексам и совпадает с кручением* $-\Omega_{ijk}$ *геометрии абсолютного параллелизма* $A_4(6)$ .

Ранее мы отметили (см. формулу (7.22)), что в (квази)инерциальных системах отсчета тензор энергии-импульса в геометризированных уравнениях поля *(B.1)* , имеет вид

$$T_{jm} = \frac{1}{2\nu}\left\{\widehat{\Omega}_j\widehat{\Omega}_m - \frac{1}{2}g_{jm}\,\widehat{\Omega}^i\widehat{\Omega}_i\right\} \;. \tag{7.42a}$$

Заметим, что в уравнениях *(B.1)* тензор энергии-импульса (7.4) имеет как симметричную по индексам $j$ и $m$ $T_{(jm)}$ часть, так и антисимметричную часть $T_{[jm]}$ , которая имеет вид

$$T_{[jm]} = \frac{1}{\nu}\left(-\nabla_i\Omega^{..i}{}_{jm} - \nabla_m A_j - A_s\Omega^{..s}{}_{jm}\right), \tag{7.43}$$

где

$$A_j = T^i{}_{ji}. \tag{7.44}$$

В (квази)инерциальной системе отсчета выполняется условие (7.42), поэтому в этой системе отсчета $A_j = 0$ . Кроме того, необходимо считать, что в уравнениях *(B.1)* антисимметричная часть тензора энергии-импульса материи (7.4) также равна нулю $T_{[jm]} = 0$ , тогда из (7.43) следует

$$\nabla_i\Omega^{..i}{}_{jm} = -\nabla_i T^{..i}{}_{jm} = 0. \tag{7.45}$$

Подставляя (7.8) в (7.45), получим

$$\widehat{\Omega}_{m,j} - \widehat{\Omega}_{j,m} = 0, \qquad ,m = \frac{\partial}{\partial x^m} \quad .$$

Эти уравнения имеют два решения: тривиальное $\widehat{\Omega} = 0$ и

$$\widehat{\Omega}_m = \Psi_{,m}\,, \tag{7.46}$$

где $\Psi$ – псевдоскаляр. Через этот псевдоскаляр тензор материи (7.22) записывается как

$$T_{jm} = \frac{1}{2\nu}\left\{\Psi_{,j}\Psi_{,m} - \frac{1}{2}g_{jm}\Psi_{,n}\Psi^{,n}\right\}. \tag{7.47}$$

В квантовой теории поля тензор (7.47) рассматривается как тензор энергии-импульса псевдоскалярного поля [71], однако в нашем случае псевдовектор (7.46) определяется как *поле инерции*, а псевдоскаляр $\Psi$ как *потенциал поля инерции*.

В случае, когда псевдовектор $\widehat{\Omega}_m$ светоподобен, то его можно представить как

$$\widehat{\Omega}_m = \Phi l_m, \quad l_m l^m = 0, \quad \Phi = \Phi\left(x^i\right)$$

и записать тензор энергии-импульса (7.47) в виде

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}\Phi^2\left(x^i\right)l_j l_m\,. \tag{7.48}$$

Отсюда получаем плотность материи

$$\rho = \frac{1}{\nu c^2}\Phi^2\left(x^i\right). \tag{7.49}$$

Сравнивая это выражение с полученным ранее соотношением (7.25) мы видим, что более общее определение плотности материи $\rho$ в (квази)инерциальной системе отсчета оказывается формула (7.25).

Рассмотрим решение (6.31)-(6.34) уравнений Физического Вакуума, которое приводит к уравнениям Эйнштейна (7.36) в пределе $m(t) \rightarrow m = const$ . Согласно (7.27), мы можем ввести комплексное поле инерции $\psi$

$$\psi(x^m) = \sqrt{\frac{1}{m\nu c^2}}\phi(x^m)\,exp\{-i(k_n x^n)\}\,, \tag{7.50}$$

$$\psi^*(x^m) = \sqrt{\frac{1}{m\nu c^2}}\phi(x^m)\,exp\{i(k_n x^n)\}\,, \tag{7.51}$$

нормированное на единицу

$$\int \psi^*\psi dV = 1, \;\; \nu = 8\pi G/\mathrm{c}^4 = const. \tag{7.52}$$

Тогда, учитывая (7.36), плотность материи в соотношении (7.49) можно представить как

$$\rho = m\delta(\vec{r}) = m\psi^*\psi\,. \tag{7.53}$$

Соотношение (7.51) представляет собой аналог квантового дуализма (1.13) «плоская волна (или набор плоских волн) -точечная частица». Если подставить в экспоненту полей (7.50) и (7.51) соотношения Планка-Эйнштейна (1.3), то мы получим волны де Бройля.

Таким образом, мы показали, что в теории Физического Вакуума, в (квази)инерциальной системе отсчета нормированное на единицу поле инерции совпадает с волной де Бройля, для которой выполняется дуализм волна-частица (7.53).

### 7.3 Квантование слабого гравитационного поля точечного источника

Теперь нам осталось найти уравнения движения квантовых гравитационных полей

$$\psi = \psi_0\,exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(p_n x^n)\right\}, \tag{7.54}$$

$$\psi^* = \psi_0\,exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_n x^n)\right\}\,, \tag{7.55}$$

$$\psi_0(x^m) = \sqrt{\frac{1}{8\pi G m}}\phi(x^m). \tag{7.56}$$

Для этого мы используем вторые тождества Бинки для тензора Римана

$$\nabla_{[p}R^i{}_{jk]m} = 0, \tag{7.57}$$

которые позволяют получить закон сохранения тензора энергии-импульса материи в уравнениях (7.36) в виде

$$\nabla_i\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right) = \nu\nabla_i T^{ik} = 0, \tag{7.58}$$

или

$$\nabla_i T^{ik} = 0. \tag{7.59}$$

Подставляя сюда тензор энергии-импульса $T^{ik} = \rho c^2 l^i l^k$, $l^k l_k = 0$, получаем

$$\nabla_i T^{ik} = \nabla_i\left(\rho c^2 l^i l^k\right) = 0. \qquad (7.60)$$

Поскольку $\nabla_i g^{ik} = 0$ [7,8] и для плотности $\rho$ выполняется условие несжимаемости $\nabla_i \rho = 0$ для «идеальной жидкости», то уравнения (7.60) распадаются на:

1) геометризированное уравнение непрерывности

$$\nabla_i(\rho l^i) = \partial_i(\rho l^i) + \rho l^n \Gamma^j{}_{nj} = 0\,; \qquad (7.61)$$

2) геометризированные уравнения, подобные гидродинамическим уравнениям Эйлера

$$\rho \frac{Dl^k}{d\lambda} = \rho \frac{dl^k}{d\lambda} + \rho \Gamma^k{}_{mn} l^m l^n = 0\,; \qquad (7.62)$$

3) геометризированное уравнение для несжимаемой «идеальной жид кости»

$$\nabla_i \rho = \partial_i \rho = 0. \qquad (7.63)$$

В соотношениях (7.61) и (7.62)

$$l^k = \frac{dx^k}{d\lambda}$$

- светоподобный ковектор а $\lambda$ - параметр, меняющийся вдоль дуги, по которой движется светоподобный ковектор $l^k$. Уравнения движения (7.61) и (7.62) действуют на поверхности светового конуса, как и спинор (7.21). Они описывают движение объекта, у которого масса покоя $m$ должна быть равна нулю. Однако, соотношение (7.53) содержит массу $m$ отличную от нуля. Преодолеть это противоречие можно, если предположить, что псевдовектор $\widehat{\Omega}_m$ времениподобен времениподобен, то его можно представить в виде $\widehat{\Omega}_m = \varphi(x^i)u_m$, где $u_m u^m = 1$ и $\varphi(x^i)$– скалярная функция. Подставляя эти соотношения в (7.42a), получим

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}\varphi^2(x^i)\left(u_j u_m - \frac{1}{2}g_{jm}\right) = \rho c^2 u_j u_m + p g_{jm} \qquad (7.64)$$

где

$$a)\ \rho = \frac{1}{\nu c^2}\varphi^2(x^i) > 0, \qquad b)\quad p = -\frac{1}{2}\rho c^2 < 0. \qquad (7.65)$$

По своей структуре *тензор (7.64) напоминает тензор энергии-импульса «идеальной жидкости» с отрицательным давлением,* однако, на самом деле, мы здесь имеем дело с полевым протяженным объектом – сгустком поля инерции. Записывая закон сохранения (7.59) для тензора энергии-импульса (7.64), имеем

$$\nabla_i T^{ik} = \nabla_i\left(\rho c^2 u^i u^k + p g^{ik}\right) = \nabla_i\left(\rho c^2 u^i u^k\right) + \nabla_i\left(p g^{ik}\right) = 0. \qquad (7.66)$$

Условие несжимаемости «жидкости» в этом случае запишется подобно (7.63) $\nabla_i \rho = \partial_i \rho = 0$, поэтому второй член в правой части (7.66) обращается в нуль

$$\nabla_i(p g^{ik}) = p\ \nabla_i g^{ik} + g^{ik}\nabla_i p = 0\,, \qquad (7.67)$$

поскольку $\nabla_i g^{ik} = 0$ по определению, а $p$ определяется согласно $(7.65b)$. Учитывая (7.67), получаем из закона сохранения (7.66) уравнения движения плотности $\rho$, а именно:

- геометризированное уравнение непрерывности

$$\nabla_i(\rho u^i) = \partial_i(\rho u^i) + \rho u^n \Gamma^j{}_{nj} = 0\,; \qquad (7.68)$$

- геометризированные уравнения, подобные гидродинамическим уравнениям Эйлера

$$\rho \frac{Du^k}{ds} = \rho \frac{du^k}{ds} + \rho \Gamma^k{}_{mn} u^m u^n = 0\,. \qquad (7.69)$$

Здесь $ds = \sqrt{g_{ik} dx^i dx^k}$ , при этом плотность материи $\rho$, а также плотность в соотношениях (7.65), является функцией не только трех пространственных координат, но и времени $t$ .

Дополнительный член $\rho u^n \Gamma^j{}_{nj}$ в обобщенных уравнениях неразрывности (7.68) указывает на то, что, в общем случае, масса источника не сохраняется. Для постоянных масс это уравнение принимает вид

$$\partial_i(\rho u^i) = 0 \qquad (7.70)$$

Полагая, что для поля инерции справедливы соотношения дуализма волна-частица (7.53) и, *используя обратную процедуру Э. Маделунга* [72], покажем, что уравнение (7.70 ) распадается на два уравнения Шредингера для функций $\psi$ и $\psi^*$. В самом деле, подставляя плотность поля инерции $\rho = m\,\psi^*\psi$ в (7.70), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \boldsymbol{v}) \to \frac{\partial\, \psi^*\psi}{\partial t} + div(\psi^*\psi\, \boldsymbol{v}) = 0. \qquad (7.71)$$

Это нелинейное по $\psi$ уравнение линеаризуется с помощью подстановок [72]

$$\boldsymbol{v} = \tilde{C} grad \ln\frac{\psi}{\psi^*} = \tilde{C}\left(\frac{grad\,\psi}{\psi} - \frac{grad\,\psi^*}{\psi^*}\right), \quad \psi^*\psi\,\boldsymbol{v} = \tilde{C}(\psi^* grad\psi - \psi grad\,\psi^*),$$

$$\tilde{C} = const\,.$$

В результате из (7.71) имеем

$$\psi\left(\frac{\partial\,\psi^*}{\partial t} - \tilde{C}\Delta\psi^*\right) + \psi^*\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde{C}\Delta\psi\right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde{C}\Delta\psi}{\dfrac{\partial\,\psi^*}{\partial t} - \tilde{C}\Delta\psi^*} = -\frac{\psi}{\psi^*}\,. \qquad (7.72)$$

Равенство (7.72) распадается на два уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \tilde{C}\Delta\psi - f\psi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \tilde{C}\Delta\psi^* + f\psi^* = 0\,, \qquad (7.73)$$

где $f(\vec{r}, t)$ – некоторая функция. Поскольку мы показали, что поле инерции $\psi$ при условиях $(7.52 - 7.55)$ совпадает с волной де Бройля, то мы получим из (7.73) уравнение Шредингера (в.1) и комплексно-сопряженное ему, при этом

$$2m\tilde{C} = \hbar/i\,, \qquad 2m\tilde{C}f = U\,, \qquad (7.74)$$

где

$$U = U_g = -\frac{mc^2}{2}\frac{r_g}{r} = -\frac{mMG}{r} \qquad (7.74a)$$

- ньютоновская потенциальная энергия внешнего гравитационного источника.

Таким образом, исходя из уравнений Физического Вакуума, *мы привели простое доказательство связи волновой функции $\psi$ в уравнениях Шредингера с нормированным на единицу полем инерции*, которое отлично от нуля в (квази)инерциальной системе и описывается псевдовектором (7.8).

В ускоренной системе отсчета плотность материи $\rho$ имеет более общий, чем соотношение (7.25), вид и записывается как

$$\rho = \frac{g^{jm}T_{jm}}{c^2} = \frac{2g^{jm}}{\nu c^2}\left\{\nabla_{[i}T^i_{|j|m]} + T^i_{s[i}T^s_{|j|m]}\right\}. \qquad (7.75)$$

В этом случае плотность материи образована всеми неприводимыми частями (7.7)-(7.9) кручения пространства $A_4(6)$ [7,8] , при этом уравнения движения плотности (7.75) обобщают уравнения движения (7.67), (7.68), принимая следующий вид:

1) геометризированное уравнение непрерывности

$$\nabla^*{}_i(\rho u^i) = \partial_i(\rho u^i) + \rho u^n \Gamma^j{}_{nj} + \rho u^n T^j{}_{nj} = 0\,; \qquad (7.76)$$

2) геометризированные уравнения, подобные гидродинамическим уравнениям Эйлера

$$\rho\frac{D^*u^k}{ds} = \rho\frac{du^k}{ds} + \rho\Gamma^k{}_{mn}u^m u^n + \rho T^k{}_{mn}u^m u^n = 0\,. \qquad (7.77)$$

Здесь ковариантная производная $\nabla^*{}_i$ и абсолютный дифференциал $D^*$ берутся относительно и связности абсолютного параллелизма $\Delta^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk} + T^i{}_{jk}$ геометрии $A_4(6)$. Если ускорения не слишком велики, что можно определить неравенством

$$\left|r_0\frac{D^*u^k}{ds}\right| \ll 1\ , \qquad (7.78)$$

где $r_0$ -характерный радиус взаимодействия, то приближенно можно использовать уравнения движения (7.76), (7.77) при исследовании движения нерелятивистских объектов, считая взаимодействия слабыми. Например, из уравнений движения (7.77) следуют уравнения движения для пробной массы $m$

$$m\frac{D^*u^k}{ds} = m\frac{du^k}{ds} + m\Gamma^k{}_{mn}u^m u^n + mT^k{}_{mn}u^m u^n = 0\,. \qquad (7.79)$$

Вычисляя движение $m$ в метрике Шварцшильда (7.32), находим из уравнений (7.79) в нерелятивистском приближении [7,8]

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -mc^2\Gamma^\alpha{}_{00} - mc^2T^\alpha{}_{00} = \frac{mMG}{r^3}x^\alpha - \frac{mMG}{r^3}x^\alpha = 0. \qquad (7.80)$$

$$\alpha, \beta \ldots = 1.2.3.$$

Легко видеть, что эти уравнения описывают *компенсацию гравитационной силы*

$$F^{\alpha}{}_{g} = \frac{mMG}{r^3} x^{\alpha}, \qquad (7.81)$$

действующей на пробную частицу в ускоренной системе отсчета (в свободно падающем лифте Эйнштейна) *силой инерции*

$$F^{\alpha}{}_{iner} = -\frac{mMG}{r^3} x^{\alpha}, \qquad (7.82)$$

которая равна силе (7.81), но направлена противоположно ей

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U_g}{\partial \vec{r}} - m\vec{W}. \qquad (7.83)$$

Уравнения (7.80) справедливы локально внутри *космического корабля, движущегося по стационарной орбите,* но в этом случае они имеют вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U_g}{\partial \vec{r}} - m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']] = 0\,, \qquad (7.84)$$

где $\vec{\omega}$ – орбитальная угловая скорость. Именно силы инерции $-m\vec{W}$ и $-m[\vec{\omega}[\vec{\omega}\vec{r}']]$ обеспечивают внутри космического корабля состояние невесомости для массивных тел. Сравнивая уравнения (7.80) с уравнениями движениями классической механики

$$m\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} = mg^{\alpha} - mW^{\alpha} = 0, \qquad (7.85)$$

описывающими свободное падение движение массы $m$ в ускоренной системе отсчета, получим

$$g^{\alpha} = -c^2\Gamma^{\alpha}{}_{00}, \qquad W^{\alpha} = c^2T^{\alpha}{}_{00}. \qquad (7.86)$$

Поскольку уравнения (7.85) так же описывает состояние невесомости на стационарной орбите, причем в (7.85) $g^{\alpha}$- гравитационное поле, а $W^{\alpha}$ - поле инерции, то разумно утверждать, что в уравнениях (7.80) символы Кристоффеля $\Gamma^{i}{}_{jk}$ описывают гравитационные поля, а *коэффициенты вращения Риччи* $T^{i}{}_{jk}$ *поля инерции*.

Известно, что в теории гравитации Эйнштейна в качестве уравнений движения «материальной точки» используются уравнения геодезических риманова пространства, умноженные на массу $m$

$$m\frac{du^k}{ds} + m\Gamma^{k}{}_{mn}u^m u^n = 0\,. \qquad (7.87)$$

В слабых полях и при малых скоростях эти уравнения принимают вид уравнений теории гравитации Ньютона

$$m\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2} = -mc^2\Gamma^{\alpha}{}_{00} = \frac{mMG}{r^3}x^{\alpha} = F^{\alpha}{}_{g}. \qquad (7.89)$$

Это уравнение, как известно, записано в (квази)инерциальной системе отсчета, в то время как уравнения (7.84) и (7.85) записаны в ускоренной системе отсчета, поскольку содержат поля инерции, и вызываемыми ими силы инерции. Отсюда можно сделать вывод, что теория гравитации Эйнштейна неполна – ее уравнения движения (7.87), декларируемые как уравнения инвариантные относительно произвольно ускоренных систем отсчета, в действительности *не содержат в явном виде силы и поля инерции*. Следовательно, *они не могут быть инвариантными относительно преобразований между укоренными системами отсчета*.

### 7.4 Физическая интерпретация потенциальной энергии Маделунга

Используя уравнения (3.11) и (3.12), полученные в результате применения прямой процедуры Маделунга [37] к уравнению Шредингера (в.1)

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla(\rho_m \vec{v}) = 0, \quad \rho_m = m\psi^*\psi = m\rho_W, \quad \rho_W = \psi^*\psi, \tag{7.90}$$

$$\rho_m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\rho_m}{m}\nabla U_g - \frac{\rho_m}{m}\nabla Q \tag{7.91}$$

и сравнивая (7.91) с нерелятивистским уравнениями (7.77), и учитывая (7.84) находим

$$Q = -\frac{m}{2}[\vec{\omega}\vec{r}]^2. \tag{7.92}$$

Из формулы (7.92) следует, что вакуумная энергия Маделунга в уравнениях Маделунга (3.11) и (3.12) *оказывается потенциальной энергией центробежной силы инерции.*

На рис. 8 представ лены кривая отрицательной потенциальной энергии $U = -mMG/r$ массы $m$ в гравитационном поле, созданном массой $M \gg m$ и отрицательная потенциальная энергия $Q = -m[\vec{\omega}\vec{r}]^2/2$ центробежной силы инерции. Точка пересечения этих энергий

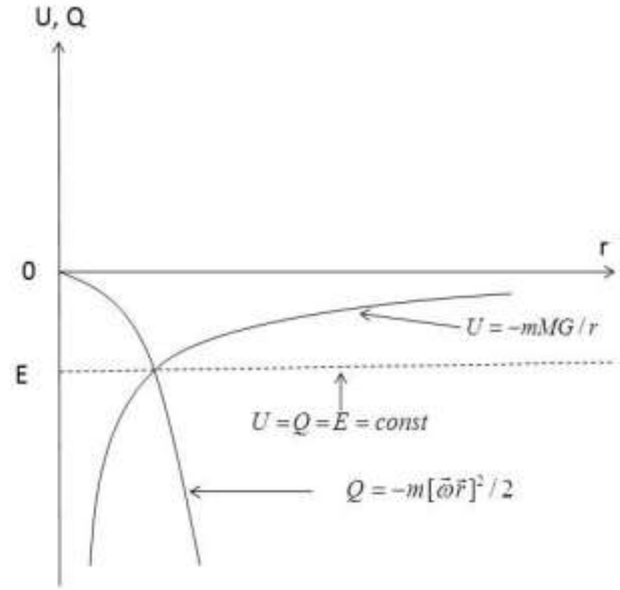


Рис. 8. Условия образования стационарных траекторий в поле центральных сил

определяет энергию $E = U = Q = const$ стационарной траектории движения в гравитационном поле. Таким образом:

1) *стационарность траекторий массы $m$ в гравитационном поле массы $M \gg m$ обеспечивается действием на массу $m$ локального поля инерции, компенсирующего локально гравитационное поле;*
2) *прямая процедура Маделунга, применяемая к уравнению Шредингера, которое не содержит сил инерции, означает запись уравнений квантовой теории в ускоренной системе отсчета, где действуют силы инерции.*

Обратимся теперь к уравнению Шредингера для заряженной частицы, движущейся в электромагнитно поле кулоновского заряда $Ze$. В этом случае мы получим такое же условие стационарности существует для траекторий электрона в атоме, когда кулоновская сила, действующая локально на электрон, скомпенсирована силой инерции. Иными словами, известный принцип Бора, постулирующий существование стационарных орбит в атоме, оказывается следствием теории поля, в которой *поле инерции играет важную роль, наравне с гравитационными и электромагнитными полями.*

## 8. Вакуумная электродинамика

Надо отметить, что квантовая теория возникла в результате появления аномальных экспериментов в классической электродинамике, поэтому развитие квантовой теории поля необходимо связать с развитием классической электродинамики. Именно это утверждение подтверждает новую квантовую электродинамику, которая следует и уравнений Физического Вакуума.

### 8.1 Тензорный потенциал электромагнитного поля в электродинамике сильных полей

С позиций Всеобщего принципа относительности линейные уравнения электродинамики Максвелла-Лоренца

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \qquad j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}, \rho = e\delta(\vec{r}), \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{8.2}$$

$$\frac{du^i}{ds_0} = \frac{e}{mc^2} F^{ki} u_k, \tag{8.3}$$

$$ds_0 = cdt \left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\}^{1/2} = cdt\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \tag{8.3a}$$

$$i, k \ldots = 0,1,2,3,$$

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (8.3b)$$

неверны уже потому, что они «инвариантны» только относительно инерциальных систем отсчета, которые в природе отсутствуют. Уравнения $(8.1) - (8.3)$ частично верны только в ускоренных (квази)инерциальных системах отсчета [7,8,30,73] (или слабых электромагнитных полях), которые в электродинамике определяются неравенством

$$\left| \frac{e^3}{m^2 c^4} F^{ik} \frac{dx_k}{ds_0} \right| \ll 1. \qquad (8.4)$$

Это неравенство следует из уравнений движения (8.3) после умножения его на характерную константу классической электродинамики

$$r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2} \qquad (8.5)$$

- классический радиус электрона.

Проще всего получить уравнения электродинамики сильных полей, если исходить из уравнений Физического Вакуума, записанных в виде расширенной, полностью геометризированной системы уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса

$$\nabla_{[k} e^a_{j]} + T^i_{[kj]} e^a_i = 0, \qquad (A)$$

$$R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = \nu T_{jm}, \qquad (B.1)$$

$$C^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{s[k} T^s_{|j|m]} = -\nu J^i_{jkm}, \qquad (B.2)$$

$$i, j, k \ldots = 0,1,2,3, \quad a, b, c \ldots = 0,1,2,3.$$

Используя решение (6.31)-(6.34) этих уравнений, можно получить, в приближении $\Psi^0(u) \to \Psi^0 = \text{const}$ , трансляционную метрику вида (7.32),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_e}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_e}{r}\right)^{-1} dr - r^2 (d\theta^2 + sin^2 \theta \, d\varphi^2), \qquad (8.6)$$

где

$$r_e = -\frac{2e\varphi_C r}{mc^2}, \qquad (8.7)$$

- электромагнитный радиус [73,74] и $\varphi_C = Ze/r,\ Z = \pm 1, \pm 2 \ldots \pm n)$ - потенциал Кулона.

Для точечного заряженного источника вместо уравнений Максвелла (8.1) мы имеем полностью геометризированные уравнения Эйнштейна вида

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi e}{mc^4} T_{ik}, \ \ T_{ik} = Zec^2 \delta(\vec{r}) l_i l_k, \qquad l_k l^k = 0, \qquad (8.8)$$

подобные уравнениям (7.36), но описывающие сильные электромагнитные поля.

Пространство событий электродинамики сильных полей представляет собой точечное многообразие со структурой параметрического риманова пространства и на котором задана трансляционная риманова метрика [74]

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, i, k, \dots = 0,1,2,3 \tag{8.9}$$

с метрическим тензором

$$g_{ik}(x^i, k) = \eta_{ik} + k a_{ik}, \tag{8.10}$$

зависящим от координат $x^i$ и от удельного заряда пробной частицы $k = e/m$. В общем случае потенциал сильного электромагнитного поля представляет собой симметричный тензор

$$a_{ik} = a_{ki}. \tag{8.11}$$

Для вывода уравнений движения пробного заряда (уравнений геодезических) в этом пространстве запишем функцию действия в виде

$$S = -mc \int ds = -\, mc \int \left(g_{ik} dx^i dx^k\right)^{1/2} . \tag{8.12}$$

Решая вариационную задачу с действием (313), получим уравнения движения заряженной пробной частицы с массой $m$ и зарядом $e$ в сильном электромагнитном поле в виде уравнений геодезических [74]

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{e}{mc^2} E^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}, \tag{8.13}$$

параметрического риманова пространства с метрическим тензором (8.10). Здесь напряженность сильного электромагнитного поля $E^i{}_{jk}$ определяется как

$$E^i{}_{jk} = -\frac{c^2}{2} g^{im}\left(a_{jm,k} + a_{km,j} - a_{jk,m}\right) = -\frac{mc^2}{e} \Gamma^i{}_{jk} \tag{8.14}$$

и, подобно символам Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$, имеет не как тензорный закон преобразования относительно трансляционных координатных $x^i$

$$E^{i'}{}_{j'k'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} E^i{}_{jk}. \tag{8.15}$$

Умножая (8.13) на классический радиус электрона (8.5), получим условие слабости поля $E^i{}_{jk}$ в виде

$$\left| \frac{e^3}{m^2 c^4} E^i{}_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right| \ll 1. \tag{8.16}$$

Напряженность сильных электромагнитных полей мы описываем величинами (8.14), через которые тензор Римана определяется как [74]

$$R^i{}_{jkm} = -2 \frac{e}{mc^2} \partial_{[k} E^i{}_{|j|m]} + 2 \frac{e^2}{m^2 c^4} E^i{}_{s[k} E^s{}_{|j|m]}. \tag{8.17}$$

Свертывая этот тензор по индексам $i$ и $k$, получим тензор Риччи $R_{jm} = R^i{}_{jim}$

$$R_{jm} = -2\frac{e}{mc^2}\partial_{[i}E^{i}{}_{|j|m]} + 2\frac{e^2}{m^2c^4}E^{i}{}_{s[i}E^{s}{}_{|j|m]}, \tag{8.18}$$

Для точечного источника с плотностью заряда $\rho = Ze\delta(\vec{x})$ и времениподобного вектора $u_i$ уравнения поля запишутся как уравнения (8.8)

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}. \tag{8.19}$$

$$T_{ik} = \rho c^2 u_i u_k = e\delta(\vec{x})c^2 u_i u_k, \qquad u^i u_i = 1. \tag{8.20}$$

Мы теперь можем видеть, что метрика (8.6) может быть получена как решение вакуумных $R_{ik} = 0$, следующих из уравнений (8.19). Это решение подобно сферически- симметричному решению подобно решению Шварцшильда, но зависящее от кулоновского потенциала источника $\varphi_C = Ze/r$ и от удельного заряда $k = e/m$ пробной частиц

## 8.2 Уравнения поля Максвелла как нерелятивистский предел электродинамики сильных полей

Для дальнейших рассуждений удобно представить метрику (8.6) в (квази)декартовых координатах

$$ds^2 = \left(1 + \frac{e}{m}\frac{2\varphi_C}{c^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{e}{m}\frac{2\varphi_C}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \tag{8.21}$$

где

$$a_{00} = \frac{2\varphi_C}{c^2}, \qquad a_{\alpha 0} = 0, \qquad a_{\alpha\beta} = \frac{2\varphi_C}{c^2},. \tag{8.22}$$

$$\alpha, \beta, \ldots = 1,2,3.$$

Для заряда, движущегося со скоростью $u_\alpha$, вместо метрики (8.21), мы имеем метрику следующего вида (формула 55.44 в книге А. Фока [75])

$$ds^2 = \left(1 + \frac{e}{m}\frac{2\varphi_C}{c^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{e}{m}\frac{2\varphi_C}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$
$$+ \frac{8}{c^2}\frac{e}{m}(\varphi_c{}^x dx + \varphi_c{}^y dy + \varphi_c{}^z dz)dt. \tag{8.23}$$

$$a_{00} = \frac{2\varphi_C}{c^2}, \qquad a_{\alpha 0} = \frac{2}{c^2}a_{00}u_\alpha, \qquad a_{\alpha\beta} = a_{00}\delta_{\alpha\beta}. \tag{8.24}$$

Введем обозначения

$$A_0 = \frac{c^2}{2}a_{00} = \varphi_C = \frac{Ze}{r}, \tag{8.25}$$

$$A_\alpha = \frac{c^2}{2}a_{\alpha 0} = \frac{c^2}{2}2a_{00}u_\alpha = 2\varphi_C u_\alpha = \frac{2Ze}{r}u_\alpha, \tag{8.26}$$

$$A_{\alpha\beta} = \frac{c^2}{2}a_{\alpha\beta} = \varphi_C\delta_{\alpha\beta} = \frac{Ze}{r}\delta_{\alpha\beta} \quad . \tag{8.26a}$$

В слабых электромагнитных полях вакуумные уравнения общерелятивистской электродинамики $R_{ik} = 0$ представляются как [75]

$$R_{ik} = -\frac{k}{2}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)a_{ik} = 0, \tag{8.27}$$

где $a_{ik}$ – тензорный потенциал сильного гравитационного поля (8.11). Используя нерелятивистское приближение векторного потенциала (8.25), (8.25) несложно показать, что из уравнений (8.27) следуют уравнения для 4D потенциала $A_i = A_i(A^0, A^\alpha)$ вида

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_i = 0, \tag{8.28}$$

Представим уравнения (8.19) в виде

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{8.29}$$

Следуя А. Фоку [75], мы потребуем для уравнений поля (8.29) выполнения следующих условий:

1. Условия слабости поля (8.16) для тензора кривизны $R^i{}_{jkm}$.
2. Условие гармоничности для (квази)декартовых $x^i$координат

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)x^i = 0. \tag{8.30}$$

В этом приближении для $R_{ik}$ находим

$$R_{ik} = -\frac{k}{2}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)a_{ik}. \tag{8.31}$$

Расписывая уравнения (8.29) покомпонентно, имеем

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)ka_{00} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right), \tag{8.32}$$

$$R_{\alpha 0} = -\frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)ka_{\alpha 0} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{\alpha 0} - \frac{1}{2}g_{\alpha 0}T\right), \tag{8.33}$$

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)ka_{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right). \tag{8.34}$$

где

$$T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T = \frac{1}{2}\rho c^2, \tag{8.35}$$

$$T_{\alpha 0} - \frac{1}{2}g_{\alpha 0}T = \rho c^2 v^\alpha, \tag{8.36}$$

$$T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T = \frac{1}{2}\rho c^2\delta_{\alpha\beta}. \tag{8.37}$$

Подставляя (8.35) в (8.32), находим

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{a_{00}}{2} = -\frac{4\pi}{c^2}\rho, \tag{8.38}$$

Умножая это соотношение слева на $c^2 u^0 = c^2 dx^0/ds_0$, получим

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_0 = -\frac{4\pi}{c}j_0, \tag{8.39}$$

где в нерелятивистском приближении порядка $v/c$ компонента $A_0$, с учетом решения имеет вид

$$A_0 = \frac{c^2}{2}a_{00} = \varphi_C = \frac{Ze}{r}, \tag{8.40}$$

что совпадает с компонентой $A_0$ потенциала (8.25), а $j_0$ определяется как

$$j_0 = j^0 = \rho c u^0 = \rho\frac{dx^0}{dt}. \tag{8.41}$$

Здесь $\rho$ —плотность источника поля в системе отсчета, где он покоится. Таким образом, потенциал $A_0$ для слабых электромагнитных полей удовлетворяет уравнению (8.39).

Подставляя в уравнения (8.33), (8.34) потенциалы (8.26), (8.26а) и учитывая (8.36), (8.37), получим, кроме (8.39) уравнения

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_\alpha = -\frac{4\pi}{c}j_\alpha, \tag{8.42}$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi_C\delta_{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c}\rho\delta_{\alpha\beta}. \tag{8.43}$$

Объединяя уравнения (8.39) и (8.42), получим 4D уравнения Максвелла, записанные через 4D потенциал $A_i$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A_i = -\frac{4\pi}{c}j_i, \qquad j^i = (\rho c, \rho u^\alpha), \quad i = 0,1,2,3, \tag{8.44}$$

что, с учетом формулы

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad , \tag{8.45}$$

эквивалентно уравнениям Максвелла (8.1).

## 8.3 Уравнения движения Лоренца как следствие уравнений движения электродинамики сильных полей

В слабых электромагнитных полях условия (8.4) и (8.16) дают приблизительно одинаковые результаты. Запишем известное соотношение [76]

$$\Gamma^i{}_{jk} = \eta^{im}\Gamma_{m,jk} = \pm\Gamma_{i,jk}\begin{pmatrix} i = 1,2,3 \\ i = 0 \end{pmatrix}.$$

Разделяя в уравнениях движения пробного заряда (8.13) пространственную и временную части, находим

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = \Gamma_{0,jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = -\frac{e}{mc^2}E_{0,jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \tag{8.46}$$

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha,jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{e}{mc^2}E_{\alpha,jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}, \tag{8.47}$$

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots = 1,2,3, i, j, k \ldots = 0,1,2,3.$$

Используя условие слабости поля (8.16), заменим в уравнениях (8.46), (8.47*)* $ds$ на интервал пространства Минковского (8.3a) . Кроме того, в нерелятивистском приближении выполняются приближенные равенства

$$ds_0 \approx cdt, \frac{dx^0}{ds_0} \approx 1, \quad \frac{dx^\alpha}{ds_0} \approx \frac{1}{c}\frac{dx^\alpha}{dt}, \quad \frac{dx^i}{ds_0}\frac{dx^k}{ds_0} \approx \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \tag{8.48}$$

Используя формулу для перехода от параметра $ds_0$ к параметру $dx^0$ [76, стр. 634]

$$\frac{d^2x^\alpha}{{dx^0}^2} = \frac{\dfrac{d^2x^\alpha}{{ds_0}^2}\dfrac{dx^0}{ds_0} - \dfrac{d^2x^0}{{ds_0}^2}\dfrac{dx^\alpha}{ds_0}}{\left(\dfrac{dx^0}{ds_0}\right)^3} \approx \frac{d^2x^\alpha}{{ds_0}^2} - \frac{d^2x^0}{{ds_0}^2}\frac{dx^\alpha}{ds_0},$$

запишем (8.47) в виде

$$\frac{d^2x^\alpha}{{dx^0}^2} = \frac{e}{mc^2}\left\{E_{\alpha,jk}\frac{dx^j}{ds_0}\frac{dx^k}{ds_0} + E_{0,jk}\frac{dx^j}{ds_0}\frac{dx^k}{ds_0}\frac{dx^\alpha}{ds_0}\right\}. \tag{8.49}$$

В силу условий (8.48) сохраним во втором члене справа компоненты $E_{0,jk}$ с $j = k = 0$ , а в первом члене компоненты с $j = k = 0$, $j = 0, \kappa = \beta$ , $j = \beta, \kappa = 0$ , тогда из (8.49) имеем

$$\frac{d^2x^\alpha}{{dx^0}^2} = \frac{e}{mc^2}\left\{E_{\alpha,00}\frac{dx^0}{ds_0}\frac{dx^0}{ds_0} + 2E_{\alpha,\beta 0}\frac{dx^\beta}{ds_0}\frac{dx^0}{ds_0} + E_{0,00}\frac{dx^0}{ds_0}\frac{dx^0}{ds_0}\frac{dx^\alpha}{ds_0}\right\}. \tag{8.50}$$

Используя формулу

$$E_{i,jk} = -\frac{c^2}{2}\left(a_{ij,k} + a_{ik,j} - a_{jk,i}\right),$$

находим

$$E_{\alpha,00} = c^2\left(\frac{1}{2}\frac{\partial a_{00}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{c}\frac{\partial a_{\alpha 0}}{\partial t}\right), 2E_{\alpha,\beta 0} = -c^2\left(\frac{\partial a_{\alpha 0}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_{\beta 0}}{\partial x^\alpha}\right) - c^2\frac{1}{c}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t},\ E_{0,00} =$$
$$= -c^2\frac{1}{2c}\frac{\partial a_{00}}{\partial t}, \qquad \alpha \neq \beta. \tag{8.51}$$

Введем обозначения

$$A_0 = \frac{c^2}{2}a_{00}, A_\alpha = c^2 a_{\alpha 0}. \tag{8.52}$$

Поскольку в нашем приближении $dx^0 / ds_0 \approx 1$, то вместо (8.52) мы можем записать

$$A_0 = \frac{c^2}{2}a_{00}\frac{dx^0}{ds_0}, \qquad A_\alpha = a_{\alpha 0}c^2\frac{dx^0}{ds_0}, \alpha, \beta = 1,2,3. \tag{8.53}$$

В принятых обозначениях уравнения (8.50) принимают вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2{}_0} = -\frac{e}{mc^2}\left\{\left(A_{\alpha,0} - A_{0,\alpha}\right)\frac{dx^0}{ds_0} + \left(A_{\alpha,\beta} - A_{\beta,\alpha}\right)\frac{dx^\beta}{ds_0} + c^2\frac{1}{c}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dx^\beta}{ds_0}\frac{dx^0}{ds_0}\right.$$
$$\left. + c^2\frac{1}{2c}\frac{\partial a_{00}}{\partial t}\frac{dx^0}{ds_0}\frac{dx^0}{ds_0}\frac{dx^\alpha}{ds_0}\right\}$$

или

$$\frac{du^\alpha}{ds_0} = \frac{e}{mc^2}\left\{F^{\alpha 0}u_0 + F^{\alpha\beta}u_\beta - c^2\frac{1}{c}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{dx^0}{ds_0}u^\beta - \frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}\frac{dx^0}{ds_0}u^\alpha\right\}, \tag{8.54}$$

где

$$F_{\alpha k} = A_{k,\alpha} - A_{\alpha,k}, \alpha, \beta, \gamma \ldots = 1,2,3, i, j, k \ldots = 0,1,2,3. \tag{8.55}$$

Используя (8.55), запишем (8.54) как

$$\frac{du^\alpha}{ds_0} = \frac{e}{mc^2}\left\{F^{k\alpha}u_k - \frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}\frac{dx^0}{ds_0}u^\alpha - c^2\frac{1}{c}\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}u^\beta\right\}, \tag{8.56}$$

- где $F^{k\alpha}$ компоненты тензора электромагнитного поля (8.3b). Уравнения (8.56), как легко видеть, совпадают с пространственной частью уравнений движения (8.3) электродинамики Максвелла-Лоренца, если пренебречь последними двумя членами в правой части (8.56). Второй член в правой части (8.56) исчезает, как известно, при выборе кулоновской калибровке потенциала $A_k$. Как будет показано ниже, учет этого слагаемого позволяет описывать системы с переменным зарядом, в которых лоренцова, а с ней и кулоновская калибровки нарушаются.

Далее, расписываем временную часть (8.46) в виде

$$\frac{du^0}{ds_0} = -\frac{e}{mc^2}E_{0,jk}u^j u^k = -\frac{e}{mc^2}\left\{E_{0,00}u^0u^0 + E_{0,\beta 0}u^\beta u^0\right\}, \tag{8.57}$$

где

$$E_{0,\beta 0} = -\frac{c^2}{2}\left(a_{0\beta,0} + a_{00,\beta} - a_{\beta 0,0}\right) = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial a_{00}}{\partial x_\beta} \tag{8.58}$$

или

$$E_{0,\beta 0}\frac{dx^0}{ds_0}\frac{dx^\beta}{ds_0} = -c^2\frac{\partial a_{00}}{\partial x_\beta}\frac{dx^0}{ds_0}u^\beta = -\frac{\partial A_0}{\partial x_\beta}u^\beta. \tag{8.59}$$

Учитывая (8.59), имеем для (8.57) соотношение

$$\frac{du^0}{ds_0} = \frac{e}{mc^2}\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}u^0 + \frac{\partial A_0}{\partial x_\beta}u^\beta\right\}. \tag{8.60}$$

Первый член в правой части (8.60) равен нулю в силу постоянства заряда (кулоновская калибровка), а второй можно записать как

$$\frac{\partial A_0}{\partial x_\beta}u^\beta = -F^{0\alpha}u_\alpha. \tag{8.61}$$

Таким образом, при условии кулоновской калибровки, (8.61) совпадает с временной частью уравнений движения (8.3) электродинамики Максвелла-Лоренца,

$$\frac{du^0}{ds_0} = -\frac{e}{mc^2}F^{0\alpha}u_\alpha. \tag{8.62}$$

Мы видим, что уравнения (8.62) и (8.56) объединяются в уравнения Лоренца (8.3) при выборе кулоновской калибровки и при условии слабых электромагнитных полей (8.16).

Подводя итог, мы приходим к заключению, что:

1) Геометризированные уравнения движения Лоренца

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}\vec{H}\right] \tag{8.63}$$

и геометризированные уравнения Максвелла

$$div\vec{E} = 4\pi\rho, \qquad rot\vec{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + 4\pi\rho\vec{u}\right), \qquad div\vec{H} = 0, \qquad rot\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \tag{8.64}$$

следуют из уравнений (8.13) и (8.8) общерелятивистской электродинамики сильных полей при условии а) постоянства заряда $e = const$ ; б) слабости поля (8.16) и с точностью до релятивистских членов порядка $v^2/c^2 \ll 1$.

2) Уравнения электродинамики (8.63) и (8.64) допускают четырехмерную запись (8.1)-(8.3b) при условии (квази)инерциальности (8.16) системы отсчета, связанной с зарядом.

### 8.4 Геометризированная электродинамика переменных зарядов и скалярные электромагнитные поля

Уравнения *(B.1)* вакуумной электродинамики для переменного заряда запишутся как

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \nu T_{jm}\,, \tag{8.65}$$

где тензор энергии-импульса $T_{jm}$ принимает вид (7.27)

$$T_{jm} = \rho c^2 l_j l_m = -\frac{\dot{r}_e(t)}{\nu r^2} l_j l_m, \dot{r}_e(t) < 0 \ , \tag{8.66}$$

причем

$$r_e(t) = \frac{2eZe(t)}{mc^2} = \frac{e}{m}\frac{2Ze(t)}{c^2} \neq const \tag{8.67}$$

- переменный электромагнитный радиус (8.7), порождаемый переменным зарядом $Ze(t)$ . Записывая плотность заряженной материи$\rho$ в (8.66) в пределе

$$\dot{r}_e(t) \to r_e = const, \tag{8.68}$$

получаем

$$\rho = \frac{4\pi r_e}{\nu c^2}\delta(\vec{r}) = \frac{8\pi Ze^2}{\mu c^4}\delta(\vec{r}) = Ze\delta(\vec{r}), \tag{8.69}$$

где $\delta(\vec{r})$ - 3D функция Дирака и $Ze = const$. Из (8.69) следует, что в этом предельном случае в уравнениях (8.65) константа $\nu$ определяется как

$$\nu = \frac{8\pi e}{mc^4}, \tag{8.70}$$

что совпадает с множителем в уравнениях (8.8).

С учетом (8.67) и метрики (8.21), описывающей источник электромагнитного поля с переменным зарядом

$$ds^2 = \left(1 + \frac{e}{m}\frac{2\varphi_C(t)}{c^2}\right)c^2dt^2 - \left(1 + \frac{e}{m}\frac{2\varphi_C(t)}{c^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{8.71}$$

запишем трехмерную часть уравнений движения (8.56) в метрике (8.71) как

$$\frac{du^\alpha}{ds_0} = \frac{e}{mc^2}\left\{F^{k\alpha}u_k - \frac{1}{c}\frac{\partial A_0}{\partial t}\frac{dx^0}{ds_0}u^\alpha\right\}, \tag{8.72}$$

откуда следует скалярное поле

$$S_{\mathrm{E}} = A_{0,0} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial Ze(t)}{c\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t}, \tag{8.73}$$

порожденное переменным зарядом *Ze(t)*. С учетом (8.73), 3D уравнения движения (8.72) в нерелятивистском приближении принимают вид

$$\mu\frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\{[\vec{v}\vec{H}] + S_E\vec{v}\}. \tag{8.74}$$

В общем случае, в общерелятивистской электродинамике уравнение непрерывности для плотности заряженной материи запишется как

$$\nabla_i(\rho u^i) = \partial_i(\rho u^i) + \rho u^n \Gamma^j{}_{nj} = 0. \tag{8.75}$$

Используя метрику (8.71), находим в нерелятивистском приближении

$$\partial_i(\rho u^i) = -\rho u^n \Gamma^j{}_{nj} = -(\rho u^0 \Gamma^j{}_{0j} + \rho u^\alpha \Gamma^j{}_{\alpha j}) \approx -\rho u^0 \Gamma^j{}_{0j} \tag{8.76}$$

или, учитывая (8.51) и (8.52) , имеем

$$E_{0,00} = -c^2 \frac{1}{2c}\frac{\partial a_{00}}{\partial t},$$

$$\partial_j(\rho u^j) = \rho \frac{e}{\mu c^2} u^0 E_{0,00} = -\rho \frac{e}{\mu}\frac{1}{rc}\frac{\partial Ze(t)}{\partial t}. \tag{8.77}$$

Очевидно, что для случая переменного заряда источника электромагнитного поля уравнение неразрывности $\partial_j(\rho u^j) = 0$ нарушается, в результате в электродинамике возникает *монопольное скалярное излучение (8.73)* .

Требование зависимости зарядов от координат и времени приводит к фундаментальному обобщению электродинамики Максвелла-Лоренца. Однако, более подробный анализ этого нововведения, показывает, что ограничение электродинамики Максвелла-Лоренца, связанное с описанием постоянных зарядов, нарушает ее релятивистскую инвариантность [73]. Действительно, условие сохранения заряда $e' = e = \mathrm{const} = inv$ при преобразованиях Лоренца представляют собой искусственное ограничение на плотность заряда $\rho$ . Пусть, например, заряд движется со скоростью $v_x$ вдоль оси $x$ . В работах А. Пуанкаре и А. Эйнштейна [77,78], использующих преобразования Лоренца, показано, что плотность заряда $\rho$ при переходе из системы отсчета $S,$ в которой заряд покоится, в движущуюся инерциальную систему отсчета $S'$ преобразуется в соответствии с формулой [78]

$$\rho' = \rho\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)\beta = \rho\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)\beta\,, \;\; \beta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{8.78}$$

Здесь $v_x$ – скорость движения заряда, которая (при движении во внешнем поле) всегда переменна, а $v$ - скорость инерциальной системы отсчета, которая всегда постоянна. Точечный заряд с плотностью $\rho = e\delta(\vec{r})$ в системе отсчета $S'$ определяется из соотношения

$$e' = \int \rho' dV' = const, \;\; dV' = dx'dy'dz' = \;\; \beta dxdydz$$

или

$$e'(x,t) = \int \rho\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)\beta^2 dxdydz = e\beta^2\left(1 - \frac{v_x(x,t)v}{c^2}\right). \tag{8.79}$$

Из этой формулы видно, что, в общем случае, заряд всегда зависит от скорости частицы, которая, вообще говоря, при движении заряда во внешних полях электромагнитных полях переменна. Из этой же формулы следует, что инвариантность заряда

$$e' = e = \mathrm{const} = inv \tag{8.80}$$

имеет место при условии

$$\beta^2\left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right) = 1. \tag{8.81}$$

Очевидно, что это равенство выполняется, если только

$$v_x = v = const. \tag{8.82}$$

Итак, условие постоянства точечного заряда в электродинамике Максвелла-Лоренца при преобразованиях Лоренца выполняется если:

1) заряд $e$ связан с системой отсчета $S'$;
2) система отсчета $S'$движется прямолинейно и равномерно (или покоится) относительно инерциальных систем отсчета.

Условия 1) и 2) выполнимы только тогда, *когда внешние электромагнитные поля равны нулю, т.е. для свободных зарядов*, а мы ведем расчеты для зарядов, движущихся во внешних полях $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Это противоречие снимается А. Пуанкаре и А. Эйнштейном предположением, что *ускорение зарядов мало* и в этом приближении можно считать, что система отсчета, связанная с ускоренно движущимся зарядом, является «почти инерциальной» [77,78]. Именно этот факт лишает уравнения (8.1) и (8.3) релятивистской инвариантности, которая выполняется всегда лишь приближенно и только для слабых полей, удовлетворяющих неравенству (8.7)[79]. Таким образом, уравнения вакуумной электродинамики (8.8) и (8.13) дополнительно *описывают монопольное излучение источника электромагнитного поля, которое в электродинамике Максвелла-Лоренца отсутствует в силу закона сохранения заряда*. Свободные векторные электромагнитные поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$представляют собой дипольное излучение и их свойства хорошо изучены. Они используются во многих технологических приложениях.

Впервые скалярное излучение (8.73) *наблюдалось в экспериментах Николой Тесла еще в конце 19 века* [80-85], когда не были построены такие основополагающие теории как специальная, общая теории относительности и квантовая механика. Особенно впечатляют эксперименты Тесла по беспроводной передаче электроэнергии [85,86], повторенные автором экспериментально в Таиланде и описанные теоретически в работах [11, 13,14,30].

### 8.5 О двух видах скалярного электромагнитного поля и их связь с квантовой теорией

Как было показано выше, в классической электродинамике Максвелла-Лоренца выполняется закон сохранения заряда $e = const$ и, как следствие этого закона, сохраняется четырехмерный ток $J^i$

$$\frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{J} = 0. \tag{8.83}$$

Напомним, что 4D ток имеет следующие компоненты $J^i = \left(J^0 = \rho c, \vec{J} = \rho \vec{v}\right)$. В свою очередь, следствием закон сохранения (8.83) является условие калибровки Лоренца

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\vec{A} = 0\,, \tag{8.84}$$

при этом 4D потенциал имеет следующие компоненты $A^i = \left(A^0 = \varphi, \quad \vec{A}\right)$ $A_i = \left(A_0 = \varphi, \quad -\vec{A}\right)$. Соответственно, для переменного заряда $e = e(\vec{x}, t) \neq const,$ законы (8.83) и (8.84) нарушаются. В этом случае, дополнительно к векторным электромагнитным полям $\vec{E}$ и $\vec{H}$ , появляется скалярное поле $S$, которое, в общем случае, мы определим как

$$S = S_E + S_H = -\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = -\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + div\vec{A}\right) \neq 0\,, \tag{8.85}$$

где мы обозначили «электромагнитное» скалярное поле

$$S_E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \tag{8.86}$$

и «магнитное» скалярное поле

$$S_H = -div\vec{A}\ . \tag{8.87}$$

С учетом скалярного электромагнитного поля (8.85) уравнения Максвелла принимают вид

$$\Box\, \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} = -4\pi\rho, \tag{8.88}$$

$$\Box\, \vec{A} + grad\, S = \frac{4\pi}{c}, \tag{8.89}$$

где $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ - оператор Даламбера.

Легко видеть, что при $S = 0$ уравнения (8.88) и (8.89) переходят в обычные уравнения Максвелла с источниками. Через векторные поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ уравнения (8.88) и (8.89) запишутся как

$$div\,\overrightarrow{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t} = 4\pi\rho, \tag{8.90}$$

$$rot\vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + grad\, S = \frac{4\pi}{c}\vec{J}\ . \tag{8.91}$$

Из этих уравнений видно, что они могут быть получены из уравнений Максвелла заменой

$$\rho \to \rho' = \rho + \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial S}{\partial t}\quad , \tag{8.92}$$

$$\vec{J} \to \vec{J}' = \vec{J} - \frac{c}{4\pi} grad\, S.\ , \tag{8.93}$$

Согласно квантовой модели Маделунга, описываемой уравнениями (3.16) и (3.17), суть квантования связана с движением плотность материи $\rho$, определяемой, в нашем случае, полем инерции. Поэтому, вместо уравнений (8.74) необходимо использовать уравнения (7.61), (7.62). Для простоты, мы используем уравнения движения классической электродинамики (8.63), записанные в представлении Маделунга

$$m\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = e\left\{\rho\,\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{J}\vec{H}\right]\right\}, \tag{8.94}$$

где $\rho = \psi^*\psi = |\psi|^2 > 0$ и $\overrightarrow{J} = \rho\vec{v}$ .

Используя (8.92) и (8.93), преобразуем правую часть уравнений (9.84) как

$$\rho\,\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{J}\vec{H}]\to\left(\rho+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\left(\vec{J}-\frac{c}{4\pi}grad\,S\,\right)\vec{H}\right]=$$
$$=\left(\rho\,\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{J}\vec{H}]\right)+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial S}{\partial t}\,\vec{E}-\frac{1}{4\pi}[gradS\vec{H}]. \qquad (8.95)$$

Далее представим здесь

$$\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial S}{\partial t}\,\vec{E}=\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial(S\vec{E})}{\partial t}-\frac{1}{4\pi c}\,S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

и используем тождество $[gradS\vec{H}]=rot\,(S\vec{H})-Srot\vec{H}$ . Тогда из (8.95) имеем из (8.94)

$$m\left(\rho+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial S}{\partial t}\right)=\left(\rho\,\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{J}\vec{H}]\right)+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial(S\vec{E})}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}rot\,(S\vec{H})\;+S\frac{1}{4\pi}rot\vec{H}-\frac{1}{4\pi c}\,S\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
$$=\left(\rho\,\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{J}\vec{H}]\right)+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial(S\vec{E})}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}rot(S\vec{H})+S\frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+rot\vec{H}\right)$$
$$=\left(\rho\,\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{J}\vec{H}]\right)+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial(S\vec{E})}{\partial t}-rot(S\vec{H})+S\frac{1}{4\pi}\left(\frac{4\pi}{c}\vec{J}-grad\,S\right)$$
$$=\left(\rho\,\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{J}\vec{H}]+\frac{1}{c}\vec{J}S\right)+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial(S\vec{E})}{\partial t}-rot(S\vec{H})-\frac{1}{4\pi}SgradS. \qquad (8.96)$$

В правой части соотношения (9.96) сила $\vec{F}_S=\vec{J}S/c$ , дополнительная к силе Лоренца, порождена скалярным полем $S$ , направлена вдоль скорости движения плотности $\rho$ (продольная сила). Эта сила отсутствует в уравнениях движения электродинамики Максвелла-Лоренца и была нами впервые получена ранее, исходя из метрики (8.71), которая описывает поле переменного во времени заряда (системы зарядов). Остальные дополнительные члены в (9.86) имеют нелинейный характер по электромагнитному полю, описывая взаимодействие скалярного поля $S$ с векторными полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а также самодействие поля $S$. Весь этот разнообразный арсенал дополнительных сил в уравнениях движения вполне может претендовать на объяснение аномального поведения электродинамических нерелятивистских систем, наблюдаемых в экспериментах Н. Тесла [80-66] и других многочисленных исследователей [7-13, 17, 18, 80-91]. В этих экспериментах наблюдались отклонения от законов как классической, так и квантовой электродинамики. В экспериментах исследовалось поведение системы распределенных в пространстве и времени системы зарядов с нерелятивистским потенциалом $\varphi(\vec{x},t)=-Q(\vec{x},t)/r$ , при этом экспериментальное наблюдение полей (8.85) происходило в системах с большим потенциалом $\varphi(\vec{x},t)$, который быстро меняется с течением времени. Именно такие процессы наблюдали Н. Тесла и его последователи[в экспериментах с заряженной сферой, на которую от генератора подается высоковольтный потенциал $\varphi(\vec{x},t)$ с больной частотой. С другой стороны, «магнитное» скалярное поле (8.87) может существовать независимо от «электромагнитного» скалярного поля (8.86) и действительно наблюдается в сильных магнитных системах с большой пространственной неоднородностью векторного потенциала $\vec{A}(\vec{x},t)$ (например, эффект Ароноава-Бома).

**Заключение**

В настоящее время все большее число здравомыслящих физиков приходят к выводу, что *современная теоретическая физика находится в глубоком кризисе*. Наука физика дошла до такого состояния по нескольким причинам. Я назову четыре основных причины, которые отмечены не только мной, но и другими исследователями:

1. Игнорирование заветов «пророка» физики А. Эйнштейна и отсутствие в современной физике «пророков» уровня А. Эйнштейна. Переизбыток на ключевых позициях в современной науке ученых с мышлением «ремесленника» (Ли Смолин [93]).
2. Современные физики-теоретики упустили из вида («прозевали») что-то очень важное для понимания и дальнейшего развития теоретической физики (Рожер Пенроуз [94]).
3. Преимущественное развитие теоретической физики по «горизонтали» после революции в физике в начале 20 го века, при этом с середины 20 го века начали сказываться последствия забвения первых двух пунктов, необходимых для развития физики по «вертикали». В результате в обществе появились основания не доверять широко разрекламированным в науке результатам , полученным в Стандартной модели и в теории струн (Сабина Хоссенфельд [95]).
4. Полное игнорирование экспериментов «на столе» (например, экспериментов Н. Тесла), которые не описываются уравнениями Стандартной модели или теории струн и противоречат современной научной парадигме (Геннадий Шипов [20,27, 29,30, 96]) .

В настоящей работе было представлено решение первой и второй проблем Эйнштейна, а именно, геометризация уравнений электродинамики (см. раздел 8 – «Вакуумная электродинамика») и геометризация квантовой механики (см. раздел 7 – «Решение второй проблемы Эйнштейна») в соответствии с идеями и мечами А. Эйнштейна. В окончательном виде, решения первой и второй проблем Эйнштейна привели к созданию теории Физического Вакуума [6-8]. Результаты этой теории, опубликованы в многочисленных работах [1-31,53,61,66,69,70,73,74] и доложены на международных конференциях в Южной Корее, Германии, Бельгии, Америки и других зарубежных странах [98,99].

Начиная со времен Л. Эйлера (примерно 250 лет назад) физики «упустили из вида» неголономные вращательные координаты (углы Эйлера)

$$\varphi = \angle\vec{e}_1\vec{e}_\xi, \quad \theta = \angle\vec{e}_3\vec{e}_3', \quad \psi = \angle\vec{e}_\xi\vec{e}',$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi$$

как элементы пространства событий, на котором задан бесконечно малый поворот Эйлера [97]

$$\vec{d}\vec{\chi} = d\chi\vec{e}_\chi = \vec{e}_3 d\varphi + \vec{e}_\xi d\theta + \vec{e}_{3'} d\psi$$

и на котором действует динамическая группа вращений *O(3)* . Со временем, это «упущение» привело к тому, что физика 250 лет развивалась как теория *трансляционной относительности* и ее фундаментальные уравнения формулировались коваринантными относительно трансляционных координат $x, y, z, ct$, при этом была *полностью игнорирована* *вращательная относительность уравнений*, подразумевающая ковариантность уравнений физики относительно неголономных вращательных координат (в четырехмерном пространстве $x, y, z, ct$ существует 6 неголономных вращательных координат: три пространственных угла $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и три пространственно-временных угла $\theta_1, \theta_2, \theta_3$). Это и есть то важное, что, как предполагал Р. Пенроуз, «прозевали» физики. В результате этого «зевка» физики «не заметили» существование в природе третьего (после гравитационного и электромагнитного) фундаментального физического поля – поля инерции [27], которое дано каждому из нас в повседневных ощущениях. Более того, как было показано в работах автора [9-31] и в данной работе, существует квантовая механика, в которой геометризированные уравнения Шредингера, Дирака и т.д. описывает простейшую динамику реального физического поля – поля инерции. Волновая функция $\psi$ в этих уравнениях представляет собой поле инерции, нормированное на единицу, и аналитически описывается кручением пространства абсолютного параллелизма $A_4(6)$. Этот результат согласуется с идеями А. Эйнштейна относительно релятивистской природы квантовых явлений, порожденных в физике вращательной относительностью [3,9,10,13,26].

Открытие поля инерции и установленная связь этого фундаментального поля с волновой функцией $\psi$ квантовой теории материи представляет собой результат мирового уровня и, безусловно, нуждается в поддержке научного сообщества России. Принимать эти работы или продолжать умалчивать полученные результаты научным сообществом России – решать не мне, а тем, кто отвечает в России за науку и политику. Так что, господа, выбор за Вами.

## Литература


1. *Шипов Г.И.//* Проблемы теории элементарных взаимодействий. Часть I. Элементарные частицы как инерционы. М., МГУ, Химфак, 1979, с. 144.
2. *Шипов Г.И.//* Квантовая механика, о которой мечтал Эйнштейн, следует из теории Физического Вакуума. М., МНТЦ ВЕНТ, 1992, с. 63.
3. *Шипов Г.И.//* Торсионная природа квантовой механики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15902, 02.05.2010. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1021-sh.pdf
4. *Шипов Г.И.* // Программа Всеобщей относительности и теория Физического Вакуума. ВИНИТИ, № 6948-В88, Москва, 1988, сс. 1-131.
5. *Шипов Г.И.* // Математические основы калибровочной модели Физического Вакуума. ВИНИТИ, № 5326-В87, Москва, 1987, сс. 1-159.
6. *Шипов Г.И.//* Теория физического вакуума. М.: Н-Т Центр, 1993. 362~с.
7. *Шипов Г.И.*// Теория физического вакуума, теория эксперименты и технологии, М., Наука, 1997. с.450
8. *Shipov G.* // A theory of Physical Vacuum, M.: ST-Center, 1998. P. 312.
9. *Шипов Г.И.//* Всеобщая относительность и квантовая механика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12464, 29.09.2005. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/02310011.pdf
10. *Шипов Г.И.//* Связь между инерцией и квантовой теорией в механике Декарта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14047, 01.12.2006. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1016-shipov.pdf

11. *Шипов Г.И.//* Физический вакуум, торсионные поля, квантовая механика и эксперименты Н. Тесла // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15740, 07.01.2010. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1081-sh.pdf
12. *Шипов Г.И.//* Об экспериментальном измерении волновой функции квантовой механики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15879, 10.04.2010. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1635-sh.pdf
13. *Шипов Г.И.//* Квантовая механика как динамика полевых гироскопов // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16483, 13.04.2011. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1087-sh.pdf
14. *Шипов Г.*// Электродинамика Тесла в теории физического вакуума // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16470, 05.04.2011. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1086-shp.pdf
15. *Шипов Г.И.//* Квантовая механика в Теории Физического Вакуума // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17352, 10.03.2012. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1024-shp.pdf
16. *Шипов Г.И.*, Подаровская М.И. // Спин-торсионная формулировка квантовой механики и поля инерции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17418, 14.04.2012. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1110-sh.pdf
17. *Шипов Г.И.//* Программа Всеобщей относительности и Теория Физического Вакуума. 25 лет спустя // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18170, 02.09.2013. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1030-shp.pdf
18. *Шипов Г.И.*, Подаровская М.И. // О Спин - Торсионных Полях в Уравнениях Дирака-Такабаяши // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18245, 11.10.2013. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1032-sp.pdf
19. *Шипов Г.И.//* Уравнения движения спина и торсионные поля // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18265, 19.10.2013. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1033-shp.pdf
20. *Шипов Г.И.//* О зависимости массы от угловой скорости в классической механике // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18361, 10.12.2013. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1122-shp.pdf
21. *Шипов Г.И.//* Застой в теоретической физике и пути выхода из него. Квантовая механика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.19717, 01.11.2014. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1131-shp.pdf
22. *Шипов Г.И.//* Эфир Тесла, вакуум Эйнштейна и теория физического вакуума // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.20635, 25.05.2015. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1137-shp.pdf
23. *Шипов Г.И.//* Физико-математические основы теории физического вакуума и торсионных полей // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.21349, 27.10.2015. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1140-shp.pdf
24. *Шипов Г.И.//* . Вакуумная энергия и торсионные поля // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.21942, 30.03.2016. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1142-shp.pdf
25. *Шипов Г.И.//* . Вакуумная механика и поля инерции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.22131, 27.05.2016. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1144-shp.pdf
26. *Шипов Г.И.//* Вращение материи как источник квантования в природе // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.23330, 04.05.2017. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1036-shp.pdf
27. *Шипов Г.И.//* Открытие в России поля инерции и сумма торсионных технологий // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.24354, 18.03.2018. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1158-shp.pdf

28. *Шипов Г.И.//* О 50 летней работе в фундаментальной физике // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.24760, 08.09.2018. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1160-shp.pdf
29. *Шипов Г.И.*, Подаровская М.И. *//* Поля и силы инерции в механике и гравидинамике // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.26384, 11.05.2020. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/1038-shpd.pdf
30. *Шипов Г.И.*, Подаровская М.И. *//* Электродинамика больших ускорений и переменных зарядов // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.26439, 01.06.2020. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008b/1171-shpp.pdf
31. *Шипов Г.И.//* Физический Вакуум - парадигма науки XXI века // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.26851, 25.12.2020. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008b/1172-shp.pdf
32. *Дирак П.*// Пути физики. М.: Энергатомиздат, 1983.
33. *Эйнштейн А. //* Собр. науч. тр. М.: Наука, 1966. Т. 3, с. 617-622.
34. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Теория поля. М.: Наука, 1973.
35. *Блохинцев Д.И.*// Основы квантовой механики, Высшая школа, М.: 1963.
36. *Schrödinger E.* //Naturwissenshaften. 1926 . Jg. 14, № , № 28. S. 664-666.
37. *Madelung E.*// Quantum Theory in Hydrodynamic Form, Z. Physic, **40** (1926), p.p. 332 - 336.
38. *Barnett S.J.* // Science, **30**, 413, 1909, **42**, 163, 459, 1915.
39. *Procopiu S.* //Sur les éléments d’énergieю Annales scientifiques de l'Université de Jassy. (1911-1913). T. 7. C. 280.
40. *Einstein A., De Haas W.J//* Verch. Deutsch. Phys. Ges**. 17,** 152, (1915).
41. *Gerlach W., Stern O.//* Das magnetishe Moment des Silberatoms. Zeit. Fur Phys. **9.** (1922), p. 352-355.
42. *Uhlenbeck G.E., Goundsmit S. //* Spinning Electrons and Structure of Spectra, Nature **177** № 2988 (1925), p. 264-265.
43. *Пенроуз Р., Риндлер В.* // Спиноры и пространство-время. Т.1. М.: Мир, 1987.
44. *Takabayasi T.* // Progr. Theor. Phys. 1955. Vol. 14. № 4. P.283.
45. *Takabayasi T., Vigier J.P.* // Progr. Theor. Phys. 1957. Vol. 18. № 6. P.573.
46. *Takabayasi T.* // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69. № 5. P.1323.
47. *Takabayasi T.* // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 70. № 1. P.1.
48. *Takabayasi T.* // Progr. Theor. Phys. 1981. Vol. 66. № 2. P.736.
49. *Bloch F.//* Physics Review. 1946, **70**, P. 460-473.
50. *Альфорс Л. .//*Преобразования Мебиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.
51. *Fock V., Iwanenko D.*// Géometrie quantique linéaire et déplacement paralléle, Compt. Rend. Acad Sci. Paris, v.188, p.1470-1472, 1929.
52. Newman E., *Penrose R.* // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3, \No 3. P.566 -587.
53. *Шипов Г.И. //* Уравнения поля тетрад в пространстве абсолютного параллелизма. Известия вузов, Физика, 1976, № 6, с. 132.
54. Heisenberg W. // Rev. Mod. Phys. 1957. Vol. 29. P. 269.
55. Duerr H.P., Heisenberg W., Mitter H., et al. // Ztschr. Naturforsch. A. 1959. Bd. 14. S. 441.
56. *Carmeli M.* // J. Math. Phys. 1970. Vol.2. P.27-28.
57. *Carmeli M.* // Lett. nuovo cim. 1970. Vol.4. P.40-46.
58. *Carmeli M.* // Phys. Rev. D. 1972. Vol.5. P.5-8.
59. *Carmeli M.* // Classical Fields. General Relativity and Gauge Theory. World Scientific Publish. 2001. P. 650.

60. *Carmeli M.* // Group Theory and General Relativity. World Scientific Publish. 2000. P. 391.
61. *Шипов Г.И. //* Поля Янга-Миллса в геометрической модели Вакуума. Труды 6 Всесоюзной конференции по общей теории относительности и гравитации, Москва, Изд-во МГПИ им. Ленина, 1984, с.333. (*Впервые предложены уравнения физического вакуума*).
62. *Schwarzschild K.* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1916, Bd. 189. S. 195.
63. *De Sitter W.* **//** Proceedings of Nederlandse Akademie van Wetenschappen (1917) **19** 1217-1225.
64. *Vaidya P.* // Tensor. 1972. Vol. 24. P. 1.
65. *Kerr R.P., Schild A.//* Atti del Covegno sulla Relativita Generale. G. Barbera (Hrsg.). Fiarenze, 1965, p. 173.
66. *Шипов Г.И. //* Физический вакуум, торсионные поля, квантовая механика и эксперименты Н. Тесла, «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15740, 07.01.2010, http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1081-sh.pdf .
67. *Шипов Г.И.* // О решении второй проблемы Эйнштейна. М.: Кириллица, 2007, с.59.
68. *Уилер Дж.//* Гравитация нейтрино и Вселенная. ИЛ, 1962, 153 с.
69. *Шипов Г.И. //* Общерелятивистские нелинейные спинорные уравнения. Известия вузов, Физика, 1977, № 3, с. 121.
70. *Шипов Г.И. //* Теория гравитации в пространстве абсолютного параллелизма. Известия вузов, Физика, 1977, № 6, с. 142.
71. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* // Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1976. С. 29.
72. *Маделунг Э. //* Математический аппарат физики, М., Наука, 1961, с.618.
73. *Шипов Г.И.* // Застой в теоретической физике и пути выхода из него. Классическая электродинамика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.18636, 09.03.2014, http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/1125-shp.pdf
74. *Шипов Г.И.* // Общерелятивистская нелинейная электродинамика с тензорным потенциалом. Известия вузов, Физика, 1972, № 10, с. 98- 102.
75. *Фок В.А.* // Теория пространства, времени и тяготения. М., ГИТТЛ, 1955, сс. 238-241, 245-251, 295-297.
76. *Рашевский П.К.* // Риманова геометрия и тензорный анализ. 1964. М.: Наука, с. 664.
77. *Пуанкаре А.//* В сб. статей «Принцип относительности». М.: Атомиздат. 1973, сс.90-97.
78. *Einstein A.* // Ann. Phys. 1905. Vol. 17. P.891.
79. *Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М.* // Теория поля. Т.2. М.: Наука, 1988.
80. *Tesla N.* // Coil for electro-magnets, United States Patent 512,340, January 9 1894.
81. *Tesla N.* // Apparatus for producing electric currents of high frequency and potential, United States Patent 568,176, September 22 1896.
82. *Tesla N.* // The one-wire transmission system. U.S. Patent 0,593,138, "*Electrical Transformer*" 1897.
83. *Tesla N.* // Means for increasing the intensity of electrical oscillations, United States Patent 685,012, October 22 1901.

84. *Tesla N.* // Method of intensifying and utilising effects transmitted through natural media, United States Patent 685,953, November 5 1905.
85. *Tesla N.* "The True Wireless". Electrical Experimenter (May 1919).
86. *Tesla N.* // "World System of Wirelrss Trasmission of Energy", Telegraph and Telephon Age, Oct. 16, 1927, p. 457.
87. *Николаев Г.В.//* Тайны электромагнетизма. Томск. 2001.С.77.
88. *Заев Н.Е., Авраменко С. В., Лисин В.Н.* // Измерение тока проводимости, возбуждаемого поляризационным током // Журнал «ЖРФМ», 1991, № 2, стр. 68 – 81.
89. *Стребков Д.С.* // Резонансные методы передачи и применения электрической энергии. – М.: ГНУ ВИЭСХ, 2008 – 352с.
90. *Monstein C., Wesley J.P.//* Europhys. Lett., 59 (4), pp. 514-520 (2002).
91. *Henriksson M. and all.//* Laser guiding of Tesla coil high voltage discharges. OPTICS EXPRESS, 2012 / Vol. 20, No. 12.
92. *Ампер А.М.* Электродинамика. - М.: АН СССР, 1954.
93. *Смолин Л. //* Неприятности с физикой: взлет теории струн, упадок науки и что за этим следует. Бостон, 2006, 1955 с. (См. перевод с английского на русский на сайте http://www.rodon.org/sl/nsfvtsunichzes/).
94. *Пенроуз. Р //* Путь к Реальности. Из-во: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" 2007 г., *Penrose R.* // The Road to Reality. Alfred F. Knopf - New York, 2005. P.1099.
95. *Hossenfelder S*. //Science needs reason to be truste. Nature Physics. (2017), **13,** pp 316–31.

    *Хоссенфельдер С.//* У народа есть все основания не доверять науке. Nature Physics. (2017), **13,** pp 316–31, 5 апреля.
96. *Шипов Г.И.* // Теоретические и экспериментальные предпосылки для смены научной парадигмы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12844, 20.01.2006. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/003a/02310014.pdf
97. *Ольховский И.И.// Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. с. 359.*
98. *Шипов Г.И.* // О международных конференциях в Южной Корее, посвященных новой научной парадигме // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.26210, 17.03.2020 . http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008b/02311169.htm
99. *Shipov G.* // Decartes' Mechanics – Fourth Generalization of Newton's Mechanics. In "7 th Intern. Conference Computing Anticipatory Systems " ~ HEC - ULg, Liege, Belgium, 2005, ISSN 1373-5411 ISBN 2-930396-05-9 P. 178 .