С.Л. Василенко

Слово Фибоначчи, золотое сечение и другие закономерности в задачах на переливание

В обобщенной логической задаче на переливание установлены неожиданные базовые связи-отношения между последовательностью операций и бесконечным словом Фибоначчи, в основе которого лежит константа золотого сечения. На основе обширных результатов машинного эксперимента сформулированы соответствующие гипотезы, ждущие своего научного подтверждения.

Переливание из пустого в порожнее –
вечное движение перпетуум-мобиле

Вместо вступления. Недавно попалась на глаза старинная головоломка на переливание воды (вина, кваса...). Есть три емкости 8, 5 и 3 литров. Наибольший 8-литровый сосуд полностью наполняется жидкостью, которую путем ряда переливаний необходимо разделить поровну, то есть по 4 литра.

Наиболее оптимальное решение имеет вид:

$$8\ 0\ 0;\ _{1\to2}\,3\ 5\ 0;\ _{2\to3}\,3\ 2\ 3;\ _{3\to1}\,6\ 2\ 0;\ _{2\to3}\,6\ 0\ 2;\ _{1\to2}\,1\ 5\ 2;\ _{2\to3}\,1\ 4\ 3;\ _{3\to1}\,4\ 4\ 0.$$

Три числа, выделенные синим цветом, – содержимое емкостей на каждом шаге (первый шаг – исходное наполнение наибольшей 8-литровой емкости), приспущенные знаки ниже опорной линии текста $m\to n$ – операции перелива из сосуда m в сосуд n.

В общем случае имеем дело с классом занимательно-логических задач: с помощью сосудов заданных емкостей отмерить некоторое количество жидкости путем переливаний.

Начальные размышления. Первое, что привлекло внимание, объемы сосудов являются числами Фибоначчи: 3, 5 и 8 = 5 + 3.

Другой момент: количество переливаний (шагов), включая начальное наполнение, равно 8, то есть объему наибольшей первой емкости, равной сумме двух остальных емкостей.

Появилось желание расширить задачу, попробовав её на других числах и, в конечном счете, получить по возможности некое обобщенное решение.

Очевидно, первое из чисел должно быть четным, чтобы делиться пополам, а два других – нечетных, давая в сумме первой число.

Хотя допустимы и многие другие варианты, например аналогичная задача Пуассона с емкостями 12, 8, 5 литров и т.п.

Сдается, первое чудо-диво Христа претворения воды в вино (Ин. 2:1-11) также было построено на мудром переливании. Только повторить не могут. Разве что прийти на свадьбу со свои запасом вина и в нужный момент явить кульминацию символического таинства.

Условия и обозначения. Необходимые условия простые и понятные. Все сосуды без делений. Нельзя переливать жидкость "на глазок", – только с полным наполнением или опорожнением, либо наливанием-выливанием остатка. Система "замкнутая": после начального заполнения жидкость ниоткуда не добавляется и не сливается вовне.

С целью компактности представления, объединим некоторые пары последовательных шагов одной записью-операцией. Это позволит нам в последующем установить любопытные закономерности.

Речь идет о таких парах: (1→2, 2→3) и (3→1, 2→3). Во второй паре стрелки удобнее поменять на противоположные направления.

Итак, имеем две двухходовые (2-шаговые) операции:

d (direct) 1→2→3: из 1-го сосуда вода переливается до краев во 2-й, из которого далее переливается в 3-й также до краев;

r (revers) 1←3←2: 3-й сосуд опорожняется в 1-й, а затем наполняется из 2-го.

В операции d связующей является 2-я емкость, по схеме «налили – вылили».

В операции r связующей является 3-я емкость, по схеме «вылили – налили».

Исходная задача (8, 5, 3) в укороченном виде запишется так:

(8, 5, 3): 8 0 0, $_d$ 3 2 3, $_r$ 6 0 2, $_d$ 1 4 3, 4 4 0.

Некоторые примеры и закономерности.

(10, 7, 3): 10 0 0, $_d$ 3 4 3, $_r$ 6 1 3, $_r$ 9 0 1, $_d$ 2 5 3, 5 5 0;

(12, 7, 5): 12 0 0, $_d$ 5 2 5, $_r$ 10 0 2, $_d$ 3 4 5, $_r$ 8 0 4, $_d$ 1 6 5, 6 6 0;

(16, 9, 7): 16 0 0, $_d$ 7 2 7, $_r$ 14 0 2, $_d$ 5 4 7, $_r$ 12 0 4, $_d$ 3 6 7, $_r$ 10 0 6, $_d$ 1 8 7, 8 8 0;

(18, 11, 7): 18 0 0, $_d$ 7 4 7, $_r$ 14 0 4, $_d$ 3 8 7, $_r$ 10 1 7, $_r$ 17 0 1, $_d$ 6 5 7, $_r$ 13 0 5, $_d$ 2 9 7, 9 9 0;

(18, 13, 5): 18 0 0, $_d$ 5 8 5, $_r$ 10 3 5, $_r$ 15 0 3, $_d$ 2 11 5, $_r$ 7 6 5, $_r$ 12 1 5, $_r$ 17 0 7, $_d$ 4 9 5, 9 9 0;

(34, 21, 13): 34 0 0, $_d$ 13 8 13, $_r$ 26 0 8, $_d$ 5 16 13, $_r$ 18 3 13, $_r$ 31 0 3, $_d$ 10 11 13, $_r$ 23 0 11, $_d$ 2 19 13, $_r$ 15 6 13, $_r$ 28 0 6, $_d$ 7 14 13, $_r$ 20 1 13, $_r$ 33 0 11, $_d$ 12 9 13, $_r$ 25 0 9, $_d$ 4 17 13, 17 17 0.

Отметим следующие особенности.

Прямая двухходовая операция d выполняется, если второй сосуд пуст.

Затем следует обратная операция r, которая может осуществляться несколько раз подряд до полного опорожнения второго сосуда.

Далее всё повторяется заново до тех пор, пока во втором сосуде не окажется половина исходного продукта. Остается содержимое третьего сосуда перелить в первый.

Эффективный алгоритм. Пусть (A, B, C) – объемы трех сосудов, выраженные натуральными числами в порядке убывания, $A = B + C$;

(a_n, b_n, c_n) – содержимое сосудов в n-й момент времени двухходовых операций.

Первый шаг – начальное заполнение $(a_1, b_1, c_1) = (A, 0, 0)$.

Далее в процессе переливаний изменение состояний объекта – содержимого сосудов выражается формулой:

$$(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}) =$$
$$= (a_n - B,\ c_n + B - C,\ C) \text{ if } b_n = 0;$$
$$= (a_n + c_n;\ \max(0, b_n - c_n);\ \min(C, b_n)) \text{ if } b_n > 0.$$

Вычисления заканчиваются после достижения величины $b = A / 2$.

Остается последний шаг: перелить остаток $c \to a$.

Компьютерная реализация весьма удобна с помощью распространенной программы Microsoft Excel для работы с электронными таблицами и встроенными формулами.

Функция max (максимум) возвращает наибольшее значение в списке аргументов и в нашем случае, исходя из физических условий, отсекает отрицательные разности $b_n - c_n$.

Функция min (минимум) возвращает наименьшее значение в списке аргументов и в нашем случае равна емкости C, либо содержимому b_n, если оно меньше C.

В большинстве нетривиальных случаев алгоритм прекрасно работает и при $A \neq B + C$, однако количество шагов сильно варьирует и, например, для разных троек (A, B, C) составляет:

(16, 9, 5) – 8; (16, 11, 7) – 8; (16, 11, 6) – 20; (16, 10, 7) – 22;

задача Пуассона (12, 8, 5) – 8; но уже (12, 9, 5) – 22;

(18, 12, 5) – 10; (18, 11, 7) – 18; (18, 11, 5) – 22; (18, 12, 7) – 30 и так далее.

Реализация Фибоначчи и Люка.

1) Рассмотрим числа Фибоначчи $F_{t+1} = F_t + F_{t-1}$, $(F_0, F_1) = (0, 1)$:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Примем для определенности $(A, B, C) = (F_{18}, F_{17}, F_{16}) = (2584, 1597, 987)$, $A/2 = 1292$.

Пошаговое выполнение алгоритма переливаний приводит к существенной вариабельности содержимого сосудов от долгожданной половины $A/2$ и вначале выглядит сумбурно-бессистемным. Но внимательное рассмотрение позволяет выявить характерные закономерности подобно тому, как отношение соседних чисел Фибоначчи по мере их роста приближается к константе золотого сечения:

Шаг, k		2584	1597	987	Отклонение, Δ	
		a_k	b_k	c_k		
1		**2584**	0	0	1292	F_{18} / 2
2	F_3	987	1597	0	305	F_{15} / 2
8	F_6	1364	1220	0	72	F_{12} / 2
34	F_9	1275	1309	0	17	F_9 / 2
144	F_{12}	1296	1288	0	4	F_6 / 2
610	F_{15}	1291	1293	0	1	F_3 / 2
2584	F_{18}	1292	1292	0	0	F_0 / 2

Абсолютные отклонения $\Delta = |a_k - A/2| = |b_k - A/2|$ содержимого сосудов от половины $A/2$ представляют собой знаменатели непрерывной дроби, сходящейся к квадратному корню из пяти [1]: 0, 1, 4, 17, 72, 305, 1292, 5473, 23184, 98209, … или деленные надвое четные числа Фибоначчи, выстроенные в обратном порядке.

2) Остановимся теперь на числах Люка $L_{t+1} = L_t + L_{t-1}$, $(L_0, L_1) = (2, 1)$:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, ...

Выберем такую тройку $(A, B, C) = (L_{18}, L_{17}, L_{16}) = (5778, 3571, 2207)$, $A/2 = 2889$.

Пошаговое выполнение алгоритма переливаний дает следующие результаты:

Шаг, k		5778	3571	2207	Отклонение, Δ	
		a_k	b_k	c_k		
1		**5778**	0	0	2889	L_{18} / 2
2	F_3	2207	3571	0	682	L_{15} / 2
8	F_6	3050	2728	0	161	L_{12} / 2
34	F_9	2851	2927	0	38	L_9 / 2
144	F_{12}	2898	2880	0	9	L_6 / 2
610	F_{15}	2887	2891	0	2	L_3 / 2
2584	F_{18}	2890	2888	0	1	L_0 / 2
5778		2889	2889	0	0	

Абсолютные отклонения $\Delta = |a_k - A/2| = |b_k - A/2|$ содержимого сосудов от половины $A/2$ – числители непрерывной дроби, сходящейся к квадратному корню из пяти [2]: 1, 2, 9, 38, 161, 682, 2889, 12238, 51841, … или деленные надвое четные числа Люка, выстроенные в обратном порядке.

Для других суммирующих последовательностей $x_{t+1} = x_t + x_{t-1}$ с иными начальными условиями (x_0, x_1), подобные закономерности, по-видимому, также существуют, но имеют более сложные формы, поиск которых затруднителен.

Одно установлено точно методом машинного эксперимента: если (A, B, C) – взаимно простые числа (наибольший общий делитель НОД = 1), то предложенный алгоритм сходится за A шагов.

Воистину "золотой" алгоритм переливаний, похожий на сон падишаха в пустыне: «Когда вода в глиняном кувшине закончилась и в медном осталась только половина, он нашел золотой сосуд, где воды было лишь наполовину». Ибо хватило сил пронести через пустыню и дружбу, и разум, и любовь.

Переливание по золотому стрингу. Рассмотрим "троицу" сосудов объемами из трех последовательных чисел Фибоначчи $(A, B, C) = (F_n, F_{n-1}, F_{n-2})$ или чисел Люка $(A, B, C) = (L_n, L_{n-1}, L_{n-2})$, первое из которых A – четное.

Для удобства представления, принятого в комбинаторике цифровых слов, присвоим прямой и обратной операциям соответственно значения $d = 1$, $r = 0$.

Процесс переливаний формализуется в ряд нулей и единиц. На на первый взгляд он хаотичен. – Но не всё так плохо. *Not too bad.*

Мысленно сдвинем бинарный ряд, перескочив через исходный налив в сосуд A и первую двухходовую операцию $d = 1$, и начнем отсчет с нуля $r = 0$.

Анализ образованного двоичного ряда последовательных операций-переливаний свидетельствует о том, что перед нами бинарное слово Фибоначчи (*Fibonacci word*) [3, с. 1004–1005; 4, с. 41] или "*золотой стринг*", – одно из наиболее ярких проявлений в комбинаторике слов при исследовании формальных языков. Имеет приложение в комбинаторном исчислении и фрактальном анализе, появляется в задачах теоретической информатики, теории автоматов, символической динамики, лингвистики.

Слово Фибоначчи S является одним из хорошо изученных примеров комбинаторной теории бесконечных слов. Определять его можно по-разному.

Например, задаются два исходных слова $S_0 = 0$ и $S_1 = 01$.

Каждое последующее слово, как последовательность двоичных цифр или символов из любых двух букв алфавита, является объединением (конкатенацией, сцеплением, присоединением) двух предыдущих слов по схеме $(n \geq 2)$:

$$S_n = S_{n-1}\, S_{n-2}.$$

Напомним, что конкатенация (лат. *concatenatio* сцепление) – операция склеивания объектов линейной структуры, обычно строк. Слово (терм) Фибоначчи – последовательность двоичных цифр, связанная с числами Фибоначчи в том смысле, что обычное сложение целых чисел (в индуктивном определении) заменяется повторяющейся конкатенацией строк.

Другой способ формирования слова начинается с $S_0 = 0$ и далее включает последовательное наращивание с заменой каждого символа в S_n: $0 \to 01$, $1 \to 0$.

В результате такой рекуррентной операции поэтапно формируется бесконечная последовательность S, состоящая из совмещаемых частей:

$S_0 = 0$
$S_1 = 01$
$S_2 = 010$
$S_3 = 01001$
$S_4 = 01001010$
$S_5 = 0100101001001$
$S_6 = 010010100100101001010...$

Бесконечное слово Фибоначчи S имеет такое начало [5]:

0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 …

Значение каждой цифры слова S можно определить аналитически:

$$D_n = 2 - \lfloor (n+1)\Phi + n\Phi \rfloor;$$

$$D_n = \lfloor (n+1)\phi^2 - n\phi^2 \rfloor,$$

где $\Phi = \phi^{-1} = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618\ldots$ – иррациональная константа золотого сечения; скобки $\lfloor \xi \rfloor$ означают округление величины ξ до ближайшего целого вниз (в меньшую сторону). В программировании $\lfloor \xi \rfloor$ соответствует операнду или встроенной функции $\mathrm{floor}(\xi)$.

Данное слово связано с известными числами Фибоначчи, когда посредством индуктивного определения целые числа заменяется конкатенациями так, что длина фрагмента (подслова) S_n равна числу Фибоначчи F_{n+2}.

При этом в S_n число единиц равно F_n, а количество нулей – F_{n+1}:

$$S_n^{(1)} = F_n, \quad S_n^{(0)} = F_{n+1}.$$

"Золотой стринг" имеет множество редкостных полезных свойств [6, 7], в частности:

– бесконечное слово Фибоначчи S – не периодическое;

– все слова S_n без последних двух букв образуют палиндромы, например, $S_6 \Rightarrow 010010100\underline{1}001010010$ – палиндром, то есть одинаково читается в прямом и обратном направлениях;

– в бесконечном слове Фибоначчи отношение числа букв к числу нулей равно константе золотого сечения, также как и отношение нулей – к единицам;

– среднеарифметическое значение слова S_n равно F_n / F_{n+2} и в пределе стремится к величине $\phi^2 = 1 - \phi$;

– фрагменты 11 и 000 не встречаются;

– если w – подслово бесконечного слова S, то S содержит и реверс w^R;

– если w – подслово бесконечного слова S, то наименьший период w – есть число Фибоначчи ...

Основные результаты. Прежде чем подводить итоги, напомним важные тезисы американского математик Р.Хемминга (1962), который заложил два краеугольных камня в основания компьютерных наук и телекоммуникаций: «Цель расчетов понимание, а не числа… Прежде чем решать задачу, подумай, что делать с её результатом» [8, с. 13].

Задачи на переливание развивают логическое мышление, интеллект, воображение, фантазию. Но это не только «гимнастика для ума». Они порождают нетривиальные математические проблемы, имеющие теоретическое и практическое применение.

Нами не проводились строгие математические доказательства полученных результатов, поэтому сформулируем их в виде гипотез:

1. Для любой тройки взаимно простых натуральных чисел (A, B, C), первое из которых четно и равно сумме двух других, минимальное количество шагов по разделению пополам жидкости из полного первого сосуда $A = B + C$ равно его объему A.

2. Если тройки (A, B, C) являются числами Фибоначчи или числами Люка, то последовательность двухходовых операций переливания, начиная с третьей, представляется словом Фибоначчи с его предельной константой золотого сечения.

3. Для сколь угодно больших чисел (A, B, C) процесс переливания заканчивается превращением воды в вино многолетней выдержки.

Последняя теза при её подтверждении может свидетельствовать о том, что Христос что-то знал о золотом сечении.

«Как непостижимы судьбы Его и неисследимы пути Его» (Рим. 11:33).

Investigabiles viae Domini ...

Литература:

1. Denominators of continued fraction convergent to sqrt(5) // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – https://oeis.org/A001076.
2. Numerators of continued fraction convergent to sqrt(5) // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – https://oeis.org/A001077.
3. Berstel J., Perrin D. The origins of combinatorics on words // European J. of Combinatorics. – **28** (2007), 996–1022. – http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Articles/2007Origins.pdf.
4. Lothaire M. Algebraic combinatorics on words / Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **90.** – Cambridge Univ. Press, 2002. – http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Lothaire/AlgCWContents.html.
5. The infinite Fibonacci word // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/A003849.
6. Василенко С.Л. Золотые самородки в математике // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 30.10.2012. – artmatlab.ru/articles.php?id=91&sm=2.
7. Василенко С.Л. От пентаграммы к уникальному разбиению числовой оси на пропорциональные отрезки // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 26809, 03.12.2020. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00164561.htm.
8. Хемминг Р.В. Численные методы (для научных работников и инженеров). 2-е изд., испр. Пер. с англ. – М.: Наука, 1972. – 400 с.

Украина, Харьков