

С.Л. Василенко

### "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 3

В настоящем разделе равнобедренные треугольники используются в качестве элемента доказательного базиса других геометрических положений. В основе ряда экстремальных характеристик лежит константа золотого сечения. Выявлено особое проявление равнобедренных треугольников во фрактале золотых прямоугольников.

Равенство для пессимиста: потаенное желание  
быть равным с теми, кто больше его.  
Равенство для оптимиста: мутит от единообразия.

Абсолютных равенств нет. Это идеализированные объекты математики, логического конструирования и частично повседневной жизни.

Три яблока с одной стороны и три яблока с другой стороны равны только поштучно, в терминологии натурального ряда или натуральных чисел, которых в природе нет. По всем остальным параметрам (весу, форме, цвету и др.) яблоки совершенно разные.

Нет прямых линий. Даже свет распространяется в пространстве согласно волновой, а не прямолинейной теории.

Параллельные прямые линии запросто пересекаются в геометрии Лобачевского.

Аксиоматическая математика – предмет исключительно человеческих договоренностей, лингвистических соглашений, а вовсе не отражения реальностей мира.

Что происходит с плоскостью стола за линией земного горизонта? – Стандарт достоверности математики основан не на экспериментальном подтверждении, а на принятой логической связности и доказуемости.

Математика описывает отношения между объектами, о которых ничего неизвестно, кроме их свойств, постулируемых в качестве аксиом. Для кого-то она играет роль простого подручного, для другого – роль высшего судьи.

Также как в природе нет отрицательных или положительно заряженных частиц, а разделили их физики элементарно для удобства использования, условно говоря, по "сговору". Электрон могли назвать положительным, и ничего бы не поменялось.

С этим приходится мириться и на отдельные вещи закрывать глаза. Видимо, лучше так, чем сумятица и хаос в головах. – *Talis est vita.*

Тем не менее, жизнь продолжается, как и наше небольшое исследование о равнобедренном треугольнике – абстрагированной геометрической фигуре.

#### **Вращение треугольника в квадрате.**

Задача навеяна видео с частным примером ([youtube.com/watch?v=o1qiKJfe\\_3w](https://www.youtube.com/watch?v=o1qiKJfe_3w)).

Квадрат размером  $1 \times 1$  делится диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника с углом при основании  $45^\circ = \pi/4$ .

Будем поворачивать  $\triangle ABC$  по часовой стрелке вокруг точки  $A$ , изменяя длины сторон  $a, b$  так, чтобы точки  $B, C$  двигались вдоль сторон, сохраняя угол  $45^\circ$ :  $B \rightarrow B', C \rightarrow C'$ .

При этом величина  $y$  возрастает,  $x$  убывает (рис. 1).

Слева к квадрату пристроим  $\triangle AB''D$  путем разворота  $\triangle ABB'$  на  $90^\circ$ .

Из построений видно, что  $\triangle AB'C' = \triangle AC'B''$ , поэтому легко определяются все углы.

Кроме того, периметр треугольника  $B'C'C'$  равен  $(1-x) + (1-y) + (x+y) = 2$ , то есть он постоянный и не зависит от угла поворота  $\alpha$ . Периметр  $P$  и площадь  $S$   $\triangle AB'C'$  в определенный момент принимают наименьшие значения (рис. 1).

Опыт предшествующих исследований плюс интуиция подсказывают, что экстремальные свойства снова проявятся в равнобедренном треугольнике.

В этом можно убедиться визуально, проследив формообразование в условиях анимации-движения графики.

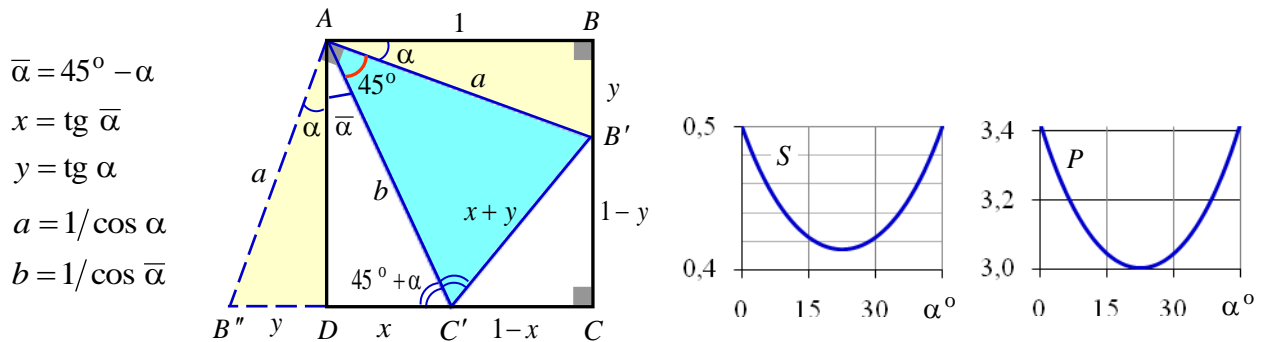


Рис. 1. Вращение треугольника в квадрате:  
экстремум площади и периметра приходится на равнобедренный аналог

Для аналитического решения находим площадь  $\triangle AC'B''$  и, приравняв её производную нулю, определяем угол  $\alpha$ , соответствующий точке экстремума ( $45^\circ - \alpha = \bar{\alpha}$  – вспомогательный угол):

$$S = \frac{x+y}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \bar{\alpha}}{2};$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \bar{\alpha}} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \bar{\alpha}, \quad \alpha = (45/2)^\circ = \pi/8.$$

Аналогично вычисляется периметр

$$P = (a+y) + (b+x) = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1 + \sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\alpha}};$$

$$P' = \frac{1}{1 - \sin \alpha} - \frac{1}{1 - \sin \bar{\alpha}} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \bar{\alpha}, \quad \alpha = (45/2)^\circ = \pi/8.$$

Таким образом, площадь и периметр достигают экстремума, если треугольник  $\triangle AB'C'$  – равнобедренный:  $a = b$ ,  $x = y$ .

Ещё один пример в общую копилку замечательных свойств равнобедренных треугольников в задачах на экстремум [1, 2].

С учетом численных значений тригонометрических величин

$$\sin \pi/8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}/2, \quad \cos \pi/8 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}/2, \quad \operatorname{tg} \pi/8 = \sqrt{2} - 1.$$

находим основные параметры:

$$x = y = \operatorname{tg} \pi/8 = \sqrt{2} - 1, \quad x + y = 2\sqrt{2} - 2;$$

$$a = b = \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}};$$

$$S_{\min} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414;$$

$$P_{\min} = x + y + 2a = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}) \approx 2,993.$$

**Целочисленные углы.**

Целые значения плоских углов в градусах имеют практическое значение. Достаточно сказать, что в правильных многоугольниках с числом сторон  $3 \div 6$  внутренние углы – целые.

Древнеавилонские математики разделили окружность на 360 градусов – весьма удобное число в 60-ричной системе счисления.

Составное избыточное число  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ :

- имеет 24 делителя:  
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360;
- наименьшее число, которое делится на все натуральные числа от 1 до 10, кроме 7;
- сумма двух квадратов  $6^2 + 18^2$ ;
- сумма двух простых чисел-близнецов  $179 + 181$ ;
- один из делителей равен 72 – количеству простых чисел меньше 360.

Ранее равнобедренный треугольник выделялся среди других треугольников как конечное решение некоторой задачи. Можно и наоборот: проанализировать взаимосвязи параметров в априори заданном равнобедренном треугольнике.

**ЗАДАЧА 1.** В равнобедренном треугольнике с фиксированным углом при основании  $\beta$  проводится произвольный отрезок-перемычка  $c$  между боковыми сторонами, в результате чего образуется выпуклый четырехугольник с боковыми сторонами  $b_1, b_2$ , а также диагоналями  $d_1, d_2$  с углами наклона  $\gamma_1, \gamma_2$  (рис. 2-а).

По заданным углам  $\beta, \gamma_1, \gamma_2$  найти угол  $\theta$ , в том числе целочисленные решения в градусах. Знание угла  $\theta$  позволяет определить углы четырехугольника при стороне  $c$ :

$$180 - \beta - \gamma_1 + \theta;$$

$$180 - \beta + \gamma_2 - \theta.$$

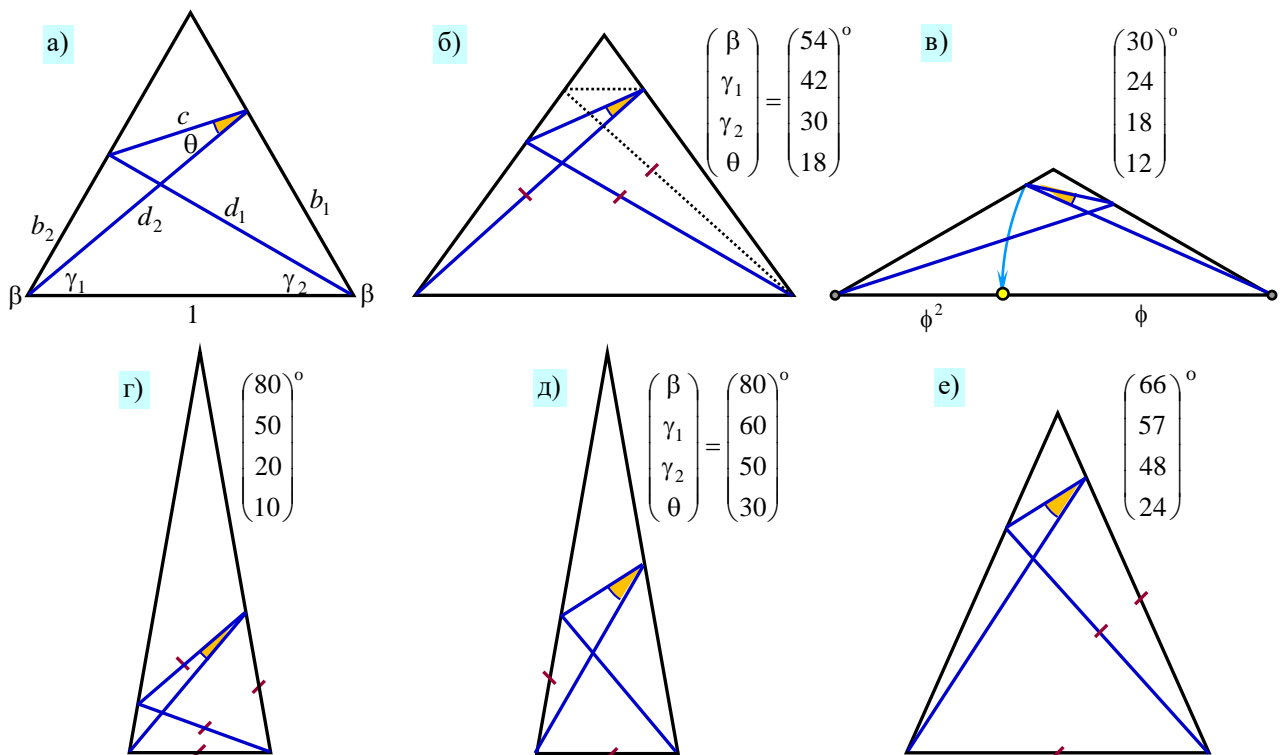


Рис. 2. Равнобедренные треугольники: взаимоотношения между целочисленными углами  $\theta = f(\beta, \gamma_1, \gamma_2)$

Полагая условно длину основания равной 1 и учитывая равенство  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ , по теореме синусов находим стороны и диагонали четырехугольника:

$$b_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\sin(\beta + \gamma_1)}, \quad b_2 = \frac{\sin \gamma_2}{\sin(\beta + \gamma_2)};$$

$$d_1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma_2)}, \quad d_2 = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \gamma_1)}.$$

По теореме косинусов определяется угол:

$$\theta = \arccos\left(\frac{c^2 + d_2^2 - b_2^2}{2 \cdot c \cdot d_2}\right),$$

$$c^2 = b_1^2 + d_1^2 - 2 \cdot b_1 \cdot d_1 \cdot \cos(\beta - \gamma_2).$$

Углы вычисляются машинным перебором целых значений (табл. 1) в интервалах:

$$0 < \gamma_2 < \gamma_1 < \beta < 90.$$

Таблица 1

### Целочисленные углы в равнобедренном треугольнике

№ п/п	Углы, градус				Отрезки				
	$\beta$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\theta$	$b_1$	$b_2$	$d_1$	$d_2$	$c$
1	30	24	18	12	0,503	0,416	0,673	<b>0,618</b>	0,209
2	54	39	27	18	0,630	0,460	0,819	0,810	0,385
3	54	42	30	18	0,673	0,503	<b>0,813</b>	<b>0,813</b>	0,338
4	54	48	42	24	0,760	0,673	0,813	0,827	0,173
5	54	51	42	12	0,805	0,673	0,813	0,838	0,169
6	62	59	56	28	1	0,939	1	1,030	0,105
7	64	58	32	6	1	0,533	0,904	1,060	0,533
8	66	57	33	9	1	0,551	0,925	1,089	0,551
9	66	57	48	24	1	0,813	1	1,089	0,313
10	68	56	34	12	1	0,572	0,948	1,118	0,572
11	74	53	32	16	1	0,551	1	1,204	0,717
12	74	53	37	21	1	0,645	1,030	1,204	0,645
13	76	52	38	24	1	0,674	1,062	1,231	0,674
14	78	51	39	27	1	0,706	1,098	1,259	0,706
15	80	50	20	10	<b>1</b>	0,347	<b>1</b>	1,286	<b>1</b>
16	80	60	50	30	1,347	<b>1</b>	1,286	1,532	0,684
17	80	65	25	5	1,580	0,438	1,020	1,717	1,299
18	80	65	60	40	1,580	1,347	1,532	1,717	0,542
19	80	70	60	20	1,879	1,347	1,532	1,970	0,684
20	82	49	41	33	1	0,782	1,181	1,312	0,782
21	84	42	18	12	0,827	0,316	1,017	1,229	1,017
22	84	42	30	24	0,827	0,547	1,089	1,229	0,900
23	84	48	12	6	1	0,209	1	1,338	1,176
24	84	48	42	36	1	0,827	1,229	1,338	0,827
25	84	66	54	24	1,827	1,209	1,486	1,989	0,919
26	84	69	21	3	2,056	0,371	1,030	2,191	1,835
27	84	69	66	48	2,056	1,827	1,989	2,191	0,636
28	84	72	42	6	2,338	0,827	1,229	2,445	1,645
29	84	72	66	30	2,338	1,827	1,989	2,445	0,760
30	88	46	4	2	1	0,070	1	1,389	1,338

Анализ результатов позволяет установить ряд закономерностей.

1. Особо выделяется первая строка (табл. 1). Углы  $(\beta, \gamma_1, \gamma_2, \theta) = (30, 24, 18, 12)^\circ$  составляют арифметическую прогрессию (рис. 2-в). Сумма углов  $\gamma_1 + \gamma_2 + \theta = 54^\circ$  – характерный угловой параметр, свойственный отношениям в золотой пропорции. В частности, половина внутреннего угла правильного выпуклого пятиугольника или угла между соседними вершинами пентаграммы.

Диагональ четырехугольника  $d_2$  равна малой константе золотого сечения (!).

$$d_2 = \frac{\sin \beta}{\sin (\beta + \gamma_1)} = \frac{\sin 30}{\sin 54} = \frac{1/2}{(\sqrt{5} + 1)/4} = \Phi^{-1} = \phi.$$

Так или иначе, золотое сечение фиксирует-обозначает минимальную границу двух целочисленных углов  $\beta, \gamma_1$ , играя роль некоего ограничителя.

2. В третьей строке (табл. 1) также наличествует арифметическая прогрессия углов  $(\beta, \gamma_1, \gamma_2, \theta) = (54, 42, 30, 18)^\circ$ . Кроме того, угол  $\beta = 54^\circ$  и  $\sin (54 + 42)^\circ = \sin (54 + 30)^\circ$ , а также единственный пример  $\gamma_1 + \gamma_2 + \theta = 90$ , что отразилось на равенстве разновысоких (!) диагоналей  $d_1 = d_2$  – своеобразный уникальный случай (рис. 2-б).

Число 54 отличается и другими свойствами:

– наименьшее число, представимое в виде суммы трех квадратов тремя способами

$$54 = 1^2 + 2^2 + 7^2 = 2^2 + 5^2 + 5^2 = 3^2 + 3^2 + 6^2;$$

– в диапазоне от 1 до  $2^8$  имеется 54 простых чисел.

3. Строка 15 (табл. 1) выделяется равенством  $\beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \theta = 80^\circ$ , что отразилось на равенстве отрезков  $a = b_1 = d_1 = c = 1$  (рис. 2-г). Это равенство лежит в основе геометрического определения угла  $\theta$  через последовательное построение трех равнобедренных треугольников ([youtube.com/watch?v=HQC-54hQ8kw&t=2s](https://www.youtube.com/watch?v=HQC-54hQ8kw&t=2s)).

4. Строка 16 (табл. 1) отражает единственный случай, когда меньшая боковая сторона четырехугольника равна основанию равнобедренного треугольника  $b_2 = a = 1$  (рис. 2-д).

5. Строка 23 (табл. 1): величина  $c^2 = 2 - \phi \approx 1,382$ . Можно сказать, отголоски золотого сечения, связанные с удвоением углов:  $\gamma_2 = 2\theta = 12^\circ$  и  $2\gamma_1 = \beta + \gamma_2 = 96^\circ$  – через равенство синусов.

6. Строка 9 (табл. 1) отражает случай, когда диагональ  $d_1$  четырехугольника равна основанию равнобедренного треугольника и обязательно  $b_1$ , то есть три равных отрезка исходят из одной вершины:  $d_1 = b_1 = a = 1$  (рис. 2-е).

**ЗАДАЧА 2.** В равнобедренном треугольнике с фиксированным углом при основании  $\beta$  проводится наклонная  $d$  так, что на боковой стороне отсекается отрезок, равный основанию (рис. 3-а). Найти угол  $\theta$ , в том числе целочисленные решения в градусах.

Боковая сторона треугольника по теореме Пифагора  $b = \frac{1}{2 \cos \beta}$ .

Длина наклонной находится по теореме косинусов (голубой  $\Delta$ ):

$$d = \sqrt{1 + b^2 - 2b \cos (\pi - 2\beta)}.$$

Угол  $\theta$  определяется по теореме синусов (желтый  $\Delta$ )  $\theta = \arcsin \left( \frac{\sin \beta}{d} \right)$ .

Задача имеет всего два целочисленных решения углов в градусах, одно из которых, как и следовало ожидать, основано на золотой пропорции (рис. 3-б): стороны равнобедренного треугольника соотносятся как периметр к их сумме

$$\frac{b}{a} = \frac{a+2b}{a+b} = \frac{1+2\Phi}{1+\Phi} = \Phi.$$

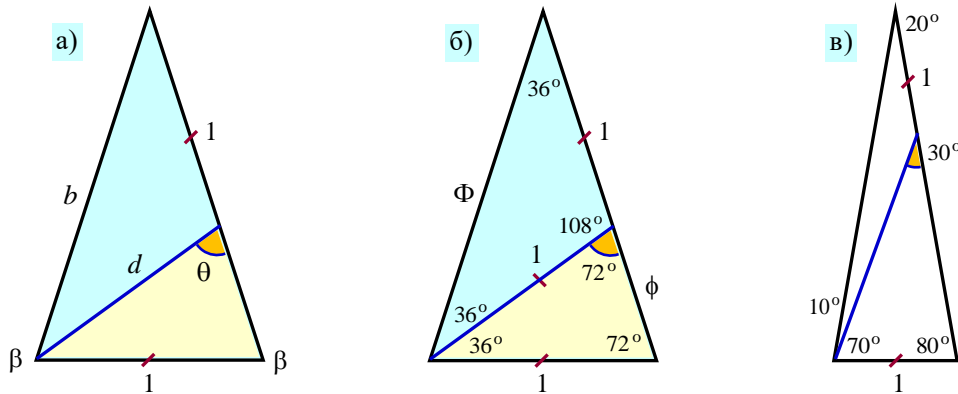


Рис. 3. Целочисленные углы (градусы) в равнобедренном треугольнике, если наклонная  $d$  отсекает на боковой стороне отрезок, равный основанию: вариант (б) соответствует золотой пропорции

Второе решение  $(\beta, \theta) = (80, 30)^\circ$  имеет собственное геометрическое построение ([youtube.com/watch?v=5vhkLRWogzo](https://www.youtube.com/watch?v=5vhkLRWogzo)).

Треугольник (рис. 3-б) относится к так называемым треугольникам Робинсона с углами  $P(36^\circ, 72^\circ, 72^\circ)$ ,  $Q(108^\circ, 36^\circ, 36^\circ)$  и длинами сторон соответственно  $(1, \Phi, \Phi)$  и  $(\Phi, 1, 1)$ , [3–5].

У Воробьева [6, с. 100] они называются треугольниками золотого сечения (ЗС).

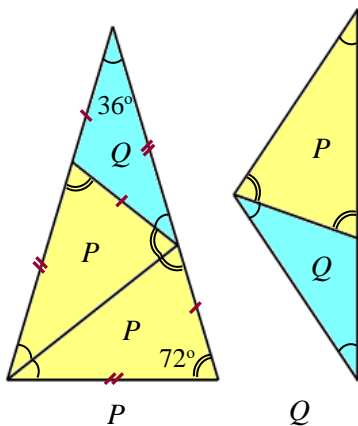


Рис. 4. Инфляция–дефляция треугольников Робинсона

Инфляция (склеивание) и дефляция (разрезание) приводит к линейным размерам в  $\Phi$  раз больше или меньше исходных фигур (рис. 4).

В виду особых гармоничных признаков они используются в задаче на замощение плоскости [7], известной как проблема паркета, а также при размещении композиций по диагонали через центр.

Первый треугольник можно дополнить до ромба. Вместе со своим двойником они образуют пару фигур мозаики Пенроуза. Уникальные свойства этой мозаики, а также иные свойства ЗС, позволяют высказать предположение об особой роли золотого треугольника в структурировании живых (биологических и зоологических) объектов.

Второй треугольник дополняется до квадрата.

То есть корень из двух формирует (символизирует через квадрат) кубическую решетку с её особой ролью в построении твёрдых тел.

Кроме того, прямоугольный треугольник с равными катетами имеет наибольшую площадь среди равнобедренных прямоугольных треугольников с одинаковым периметром.

**Терминологическая ремарка.** Треугольники Робинсона замечательны в своих свойствах. Но в терминологическом аспекте наделяния их золотоносностью не всё очевидно, и в очередной раз сказывается безудержное подражание мифам.

Во всяком случае, воочию проявляется отсутствие преемственной связи при мягкой (непрерывной) трансформации от линейного отрезка с точкой ЗС к плоскому треугольнику путем бесконечно малого вынесения точки ЗС за пределы единичного отрезка.

В этом смысле рассмотренные выше две фигуры являются скорее исключением, чем общим правилом гармоничности треугольников.

При переходе от линии к плоскости и наоборот продолжение ЗС следует искать, прежде всего, из условия сохранения плавности такого перехода. – Когда точка ЗС на отрезке становится пределом аналогичной точки треугольника при его сворачивании в одну линию, например, если тупой угол  $\rightarrow 180^\circ$ .

Треугольники Робинсона этим свойством не обладают, а являются отдельным самостоятельным "золотоносным аттрактором". Если и называть их треугольниками ЗС, то обязательно с неким уточняющим определением, например, "треугольник ЗС второго рода", подразумевая, что "треугольник ЗС первого рода" – фигура, непосредственно взаимосвязанная с точкой ЗС на отрезке и из неё вытекающая в предельных переходах.

**ЗАДАЧА 3.** Основание равнобедренного треугольника с углом при вершине  $\alpha$  совмещено со стороной квадрата (рис. 5-1). Найти целочисленные решения  $(\alpha, \theta)^\circ$ .

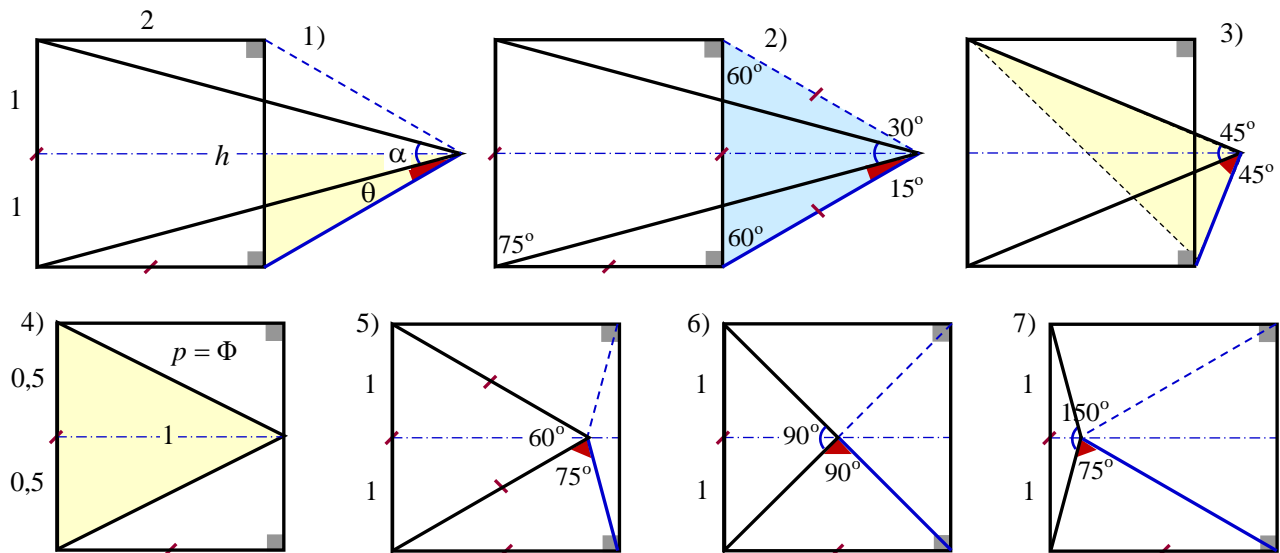


Рис. 5. Основание равнобедренного треугольника является стороной квадрата:  
целочисленные углы  $(\alpha, \theta)^\circ$ , (4) – полупериметр  $p_\Delta = \Phi$

Без потери общности примем сторону квадрата равной 2. Половина угла  $\gamma = \alpha/2$ .

$$h = \operatorname{ctg} \gamma, \quad \operatorname{tg}(\gamma + \theta) = \frac{1}{h-2} \quad \rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma - 2} - \gamma,$$

и если угол получается отрицательным  $\theta < 0$ , то он дополняется до  $\pi = 180^\circ$ .

В результате получаем такие целочисленные решения (в градусах):

$(\alpha, \theta) = (30, 15)^\circ$  – с образованием равностороннего треугольника (рис. 5-2);

$(\alpha, \theta) = (45, 45)^\circ$  – с образованием прямоугольного треугольника (рис. 5-3);

$(\alpha, \theta) = (60, 75)^\circ$  – с образованием внутри равностороннего треугольника (рис. 5-5);

$(\alpha, \theta) = (90, 90)^\circ$  – четыре равных треугольника, образованных диагоналями (рис. 5-6);

$(\alpha, \theta) = (150, 75)^\circ$  – зеркально отражение (рис. 5-5, рис. 5-7).

А где же золотое сечение, и как же без него? – Оно, конечно, есть. Но связано с углами по другому поводу. Значение полупериметра  $p$  равнобедренного треугольника с единичной высотой и основанием  $h = a = 1$  равно константе золотого сечения  $\Phi = 1,618\dots$  – При этом вершина равнобедренного треугольника лежит точно на стороне квадрата, а угол  $\theta$  меняет знак на противоположный.

Другими словами, золотое сечение выполняет своеобразную функцию "углового водораздела".

### Точка в квадрате.

До сих пор в основном рассматривались задачи по выделению среди треугольников равнобедренного варианта с выходом на его отличительные экстремальные характеристики.

Несомненный интерес представляет также использование его свойств, как части-элемента доказательной подосновы в других задачах.

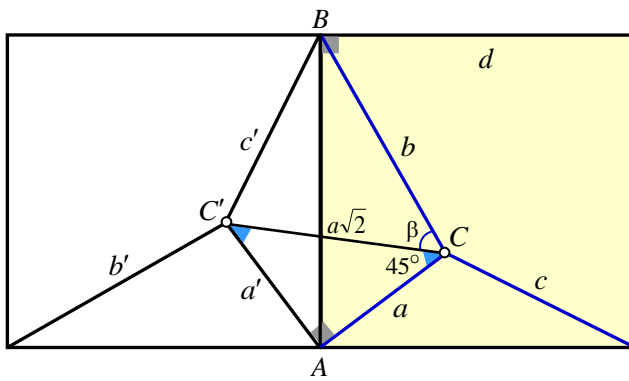


Рис. 6. Внутренняя точка  $C$  в квадрате: решение с применением использования свойств равнобедренного треугольника

Например, найти площадь квадрата  $S = d^2$ , зная фиксированное расположение внутренней точки (рис. 6), соединенной с тремя его вершинами отрезками  $(a, b, c)$ .

Исходный (желтый) квадрат развернем против часовой стрелки и расположим впритык слева. Отрезки  $(a, b, c)$  займут положение  $(a', b', c')$ , точка  $C \rightarrow C'$ .

Отрезок  $a$  развернулся на  $90^\circ$ , поэтому треугольник  $AC'C$  – равнобедренный прямоугольный. Острые углы при основании равны  $45^\circ = \pi/4$ , гипотенуза  $C'C = a\sqrt{2}$ .

По теореме косинусов находим угол  $\beta$ ,

а затем площадь искомого квадрата  $S = d^2$ :

$$\triangle BC'C: \quad c^2 = (a\sqrt{2})^2 + b^2 - 2(a\sqrt{2})b \cdot \cos \beta;$$

$$\beta = \arccos \frac{2a^2 + b^2 - c^2}{ab\sqrt{8}}.$$

$$\triangle ABC: \quad d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\beta + \pi/4).$$

Заменяя тригонометрические функции с учетом значений  $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ , после преобразований получаем

$$2 \cdot S = b^2 + c^2 + \sqrt{8a^2b^2 - (2a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

или с модифицированными переменными  $(x, y, z) = (2a^2, b^2, c^2)$

$$2 \cdot S = y + z + \sqrt{(x + y + z)^2 - 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Отсюда вытекает необходимое параметрическое условие для разрешимости задачи:

$$(x + y + z)^2 \geq 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2).$$



Примеры:

1)  $(a, b, c, S) = (2, \sqrt{17}, 5, 21 + 2\sqrt{34})$  (youtube.com/watch?v=YGYR4UiMRpc).

2)  $a = b = c \Rightarrow \beta = 45^\circ, S = d^2 = 2a^2.$

3)  $a = \sqrt{2}, b = c = 2 \Rightarrow \beta = 60^\circ, S = 4 + 2\sqrt{3}.$

4) Прямой угол  $\beta = 90^\circ$  приводит к равенству  $c^2 = 2a^2 + b^2$ . В частности, можно выделить такие целые величины отрезков  $(a, b, c)$ :

$$\langle a, b, c; d \rangle = \langle 2n, n, 3n; (5 + \sqrt{8})n^2 \rangle, \beta = 90^\circ.$$

Как уже отмечалось [2], квадратный корень  $\sqrt{8}$  широко распространен в математике. Кроме того, число с корнем из восьми, равное  $2 + \sqrt{8}$ , [8, A090488]:

- длина стороны наименьшего квадрата, содержащего пять кругов радиуса 1;
- площадь правильного восьмиугольника с единичной длиной ребра.

**Три полукруга и окружность.**

На диаметре полукруга расположены два касающихся полукруга радиусами  $r_1, r_2$ . Найти радиус  $x$  окружности, касающейся трех полукругов (рис. 7-а).

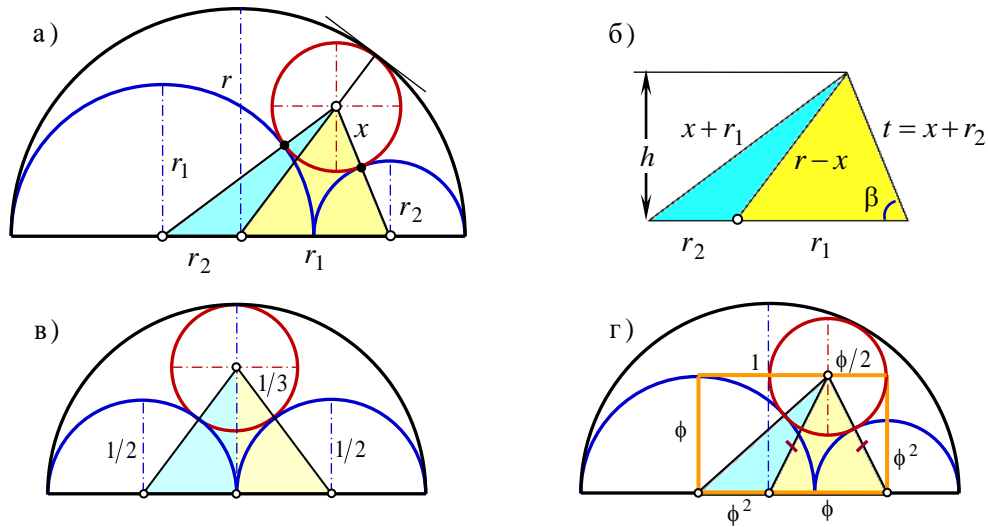


Рис. 7. Окружность радиусом  $x$  вписана между тремя фиксированными полукругами, диаметры которых расположены на одной линии:

г) золотая модель: желтый треугольник равнобедренный, центры всех круговых фигур лежат на сторонах золотого прямоугольника  $1 \times \phi$

Из построений видно, что сумма радиусов внутренних полукругов  $r_1, r_2$  равна радиусу внешнего полукруга  $r_1 + r_2 = r$ , а их центры отстоят от центра внешнего полукруга соответственно на расстоянии  $r_2, r_1$ . Другое замечательное свойство: полупериметры желтого и голубого треугольников постоянны и равны  $r$ :

$$(x + r_2 + r - x + r_1) / 2 = r;$$

$$(x + r_1 + r - x + r_2) / 2 = r.$$

Обозначив  $t = x + r_2$  и угол  $\beta$ , запишем два равенства по теореме косинусов (рис. 7-б):

$$(x + r_1)^2 = t^2 + r^2 - 2t r \cdot \cos \beta;$$

$$(r - x)^2 = t^2 + r_1^2 - 2t r_1 \cdot \cos \beta.$$

Умножив первое равенство на  $r_1/r$  и вычтя из него второе, уходим от  $\cos \beta$ , и после несложных преобразований получаем:  $x = r \frac{r_1 r_2}{r^2 - r_1 r_2}$ .

Это равенство можно также записать в красивой форме обратных величин

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2}.$$

$$\text{Высота } h = (x + r_2) \sin \beta, \quad \cos \beta = \frac{(x + r_2)^2 - (x + r_1)^2 + r^2}{2(x + r_2)r}.$$

Примеры (без потери общности  $r = 1$ ):

- 1) Симметрично-дихотомическая модель (рис. 7-в):  $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$ ,  $\delta = \frac{r_1}{r_2} = 1 \rightarrow x = \frac{r}{3}$ .
- 2) Модель «одна или две трети» [9] (рис. 7-а):  $r_1 = \frac{2}{3}r$ ,  $r_2 = \frac{1}{3}r$ ,  $\delta = 2 \rightarrow x = \frac{2}{7}$ .
- 3) "Золотая" модель с равнобедренным треугольником (рис. 7-г).

Желтый треугольник равнобедренный, если:  $r - x = x + r_2 = \rightarrow x = r_1/2$ .

Подставляя  $x$ , приходим к уравнению золотого сечения  $\delta^2 - \delta - 1 = 0$ , то есть

$$\delta = \Phi, \quad r_1 = h = \phi, \quad r_2 = \phi^2, \quad x = \phi/2.$$

Классическая золотая пропорция относительно радиусов  $r = r_1 + r_2$ :

$$\frac{r}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \Phi.$$

Что же здесь делает равнобедренный треугольник, причем с явно выраженными свойствами золотого сечения? – Прежде всего, его высота равна основанию, а полупериметр  $p$  равен малой константе золотого сечения  $p = \phi$ .

Углы при основании составляют  $\beta = \arctg 2 = 63,44^\circ$ .

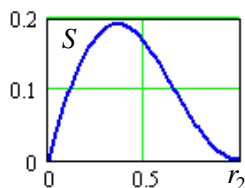
Вершины равнобедренного треугольника лежат в центрах трех фигур: большого и малого полукругов и вписанной окружности. Вместе с центром среднего полукруга они лежат на сторонах золотого прямоугольника  $1 \times \phi$ .

Более того, помимо классического отрезания квадрата от золотого прямоугольника, благодаря данной задаче золотой прямоугольник будто набирает "второе дыхание" и де-факто получает новое геометрическое представление (рис. 8).

Венцом ситуации мог бы стать некий экстремальный параметр, например площадь желтого треугольника. But alas... Площадь выражается довольно сложной формулой ( $r = 1$ ):

$$S(v) = t \frac{1-v}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{t^2 + 1 - (t+1-2v)^2}{2t} \right)^2},$$

$$\text{где } v = r_2, \quad t = t(v) = x + v = \frac{v(1-v)}{1-v(1-v)} + v.$$



Наибольшая площадь треугольника определяется численными методами, и ей отвечают такие параметры:

$$x \approx 0.3, \quad \delta = \frac{r_1}{r_2} = \frac{0.6389}{0.3611} = 1.769, \quad h \approx 0.6, \quad \beta \approx 65.15^\circ, \quad S_{\max} \approx 0.1916.$$

Другой возможный вариант равнобедренности (рис. 7-б)  $r - x = r_1$  не имеет реального воплощения, поскольку дает предельное решение  $x = r_2 = 0$ , когда треугольник вырождается в отрезок.

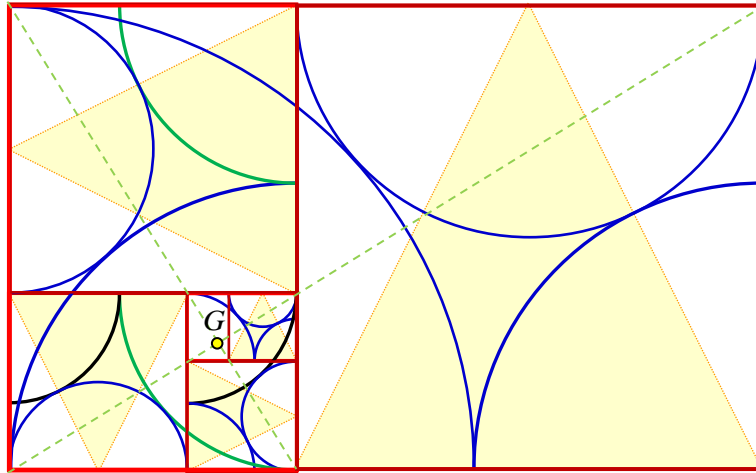


Рис. 8. Фрактал золотых прямоугольников с вписанными половинками и четвертями кругов: стягивается в золотой полюс  $G$  – центр золотой логарифмической спирали

### Простая гидрологическая задача.

Сечение канала – равнобедренный треугольник с фиксированной боковой стороной  $b$ . Какова глубина и ширина канала по верху, чтобы площадь живого сечения потока была наибольшей?

Без потери общности положим  $b = 1$ . Пусть ширина канала равна  $2a$ .

Тогда глубина составит  $h = \sqrt{1 - a^2}$ , площадь  $S(a) = a \cdot \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{a^2 - a^4}$ .

Приравниваем производную нулю  $S'(a) = \frac{2a - 4a^3}{2\sqrt{a^2 - a^4}} = 0 \rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ .

Таким образом, ширина канала равна  $2a = \sqrt{2} \approx 1,414$ , глубина  $h = a = 1/\sqrt{2}$ , угол между ребрами  $\alpha = 90^\circ$ , наибольшая площадь  $S_{\max} = 0,5$ .

### Вместо заключения.

Кратчайшим расстоянием между двумя точками местности считается прямая линия. Однако прямая тропинка в поле – нонсенс, даже если нет препятствий для обхода. Люди «спроектированы и изготовлены» по одному трафарету, образу и подобию. Но у каждого человека разные по длине конечности. Абсолютно равных бедер, как в равнобедренном треугольнике, не бывает.

Во время движения более длинная нога, чаще правая, "загребает" больше, чем другая.

Через некоторое время путник отмечает отклонение от прямолинейной траектории и, смотря на цель, корректирует свой курс. Затем всё повторяется.

В результате вытаптывается извилистая дорожка – плод многих людей.

И коллективный разум бессилен противостоять этому явлению.

По этой же причине на стадионах принято бегать против часовой стрелки.

Есть тому и физиологическое объяснение. Кровь проходит по венам слева направо. Движение против часовой стрелки способствует более быстрому перемещению крови из-за центробежной силы, создаваемой во время бега.

Против стрелки часов двигаются не только бегуны, но и конькобежцы, трековые велосипедисты, лошади на ипподромах, проводятся заезды на мотоциклах, автогонки, кроме "Формулы-1", и так далее.

Напротив, во многих ритуалах избегают движения против часовой стрелки, поскольку они сопровождаются поворотом налево, что ассоциируется с отрицательной энергетикой.

Древние хороводы водили против часовой стрелки. Зато сахар в стакане размешивают ложкой, как правило, по часовой стрелке, как свидетельство порядка и гармонии.

Хотя разумнее помешивать вертикально, снизу вверх.

Математики синтезируют абстрактные модели, с позиций формальной логики.

Обычные люди строят интуитивные модели, – на основе предшествующего опыта и анализа наблюдений. Плюс народные традиции, поверья и обычаи.

Английский писатель Дж. Оруэлл в романе-антиутопии «Скотный двор» (1945) на примере свиньи по имени Наполеон ввел декларацию: «Все животные равны. Но некоторые равнее, чем другие». – Сатирический образ фактического неравенства, которое прикрывается демагогическими рассуждениями о равенстве со стороны тех, кто этим неравенством пользуется. Флаг им в руки, барабан на шею, ветер в спину и поезд навстречу.

Равнобедренные треугольники от такой фальши освобождены.

Aequalitas haud parit bellum. – Равенство не рождает войну (Плутарх)...

### Литература:

1. Василенко С.Л. "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 1 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28020, 12.08.2022. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm.

2. Василенко С.Л. "Золотоносные" и другие замечательные свойства равнобедренных треугольников в задачах на экстремум: от Евклида до наших дней. Часть 2 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28031, 21.08.2022. – URL: trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm.

3. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16007, 22.07.2010. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

4. Василенко С.Л. Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.06.2012. – URL: artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2 // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 17549, 23.06.2012. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm.

5. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – URL: artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110 / Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 10.01.2014. – URL: sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13255.html.

6. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

7. Корепин В.Е. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6. – с. 2–6.

8. Decimal expansion of  $2 + 2\sqrt{2}$  // The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – <https://oeis.org/A090488>.

9. Василенко С.Л. «Одна или две трети», как простая модель рациональной пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 23089, 23.02.2017. – URL: trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00163219.htm.