

**Теория поля.
Системы Ранжированных Потенциалов и
Вихрей точечного источника**

Москва 2009

Оглавление

Предисловие	3
Системы базовых (элементарных) ранжированных потенциалов и вихрей точечного источника	5
Ранг поля и принципы ранжирования полей	5
Базовые ранжированные сферически симметричные потенциалы.....	6
Базовые ранжированные моноаксиальные потенциалы и вихри	7
Свойства и особенности базовых ранжированных моноаксиальных потенциалов и вихрей точечного источника	9
Иллюстрации базовых ранжированных потенциалов и вихрей точечного источника	11
«Локализованный» вихрь Хилла.....	16

Предисловие

Во всех разделах современной физики (в т.ч. и в классической физике) существует одна уже весьма старая проблема: до сих пор физикам непонятен механизм вихреобразования и волнообразования. Физикам до конца не ясны механизмы и условия образования внутренних течений и водоворотов в жидкости, рождение океанских волн, возникновение смерчей или тайфунов. Существуют только полумпирические модели, которые позволяют очень условно и приближительно описать нерегулярное движение сплошной среды. В то время как обычное уравнение непрерывности или волновое уравнение являются широко распространенными и достаточно общими соотношениями, описывающими свойства всех сплошных сред, условия возникновения вихрей и турбулентности представляют собой «тёмный лес»¹.

Более того, в физике отсутствует даже общепринятая система классификации вихрей, нет представления о точечных вихрях, их типах. В результате остается недоразвитым математический аппарат описания вихрей, отсутствует раздел вихревой физики. И эта проблема не только гидро- или газодинамики, — это общая проблема всей физики.

В теории поля на основе арсенала средств стандартного векторного анализа существует теорема Гельмгольца, в которой сформулирована идея разделения векторных полей на поля двух типов: вихревые и потенциальные. Однако скалярные поля, относящиеся, как известно, также к потенциальному типу, теорема Гельмгольца обходит стороной. Хотя любому математику абсолютно ясно, что векторные потенциалы и скалярные потенциалы — это совсем не одно и то же. Возникает вопрос: если среди потенциальных полей существует очевидное разделение на векторные и скалярные потенциалы, то существует ли подобное разделение внутри вихревых полей и в чем оно заключается? Так, например в 6-ом издании своего трактата по гидродинамике «*Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids*», опубликованного еще в 1932 г. Г. Лэмб уже различал вихри различных видов (эллиптические, сферические, цилиндрические, круговые, винтовые, кольцевые и т.д.).

Физик и математик В.М. Ельсассер показал, что любое вихревое векторное поле можно представить как сумму вихрей двух типов (эта же идея различения вихрей приписывается так же Лэмбу²):

- тороидальные вихри
- полоидальные вихри

Согласно этой идее любое вихревое векторное поле \vec{S} ($\text{div} \vec{S} = 0$) может быть представлено в виде суммы ротора некоторого вихревого поля ($T \cdot \vec{r}$) и векторного лапласиана некоего другого вихревого поля ($S \cdot \vec{r}$):

$$\vec{S} = \nabla \times (T \cdot \vec{r}) + \nabla^2 (S \cdot \vec{r}) = \vec{T} + \vec{P},$$

где $\vec{T} = \nabla \times (T \cdot \vec{r}) = -\vec{r} \times (\nabla T)$ - тороидальное вихревое векторное поле

и $\vec{P} = \nabla^2 (S \cdot \vec{r}) = \nabla \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot S) \right] - \vec{r} \nabla^2 S$ - полоидальное вихревое векторное поле,

а T и S - некие скалярные поля, определения которых зависят от выбора системы функций разложения.

Наиболее же «популярное» в теоретической физике полное разложение векторных полей носит название декомпозиции Неймана-Дебая и имеет вид:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \text{grad} \varphi(\vec{r}) + \text{rot}(\vec{r} \psi(\vec{r})) + \text{rot rot}(\vec{r} \chi(\vec{r})),$$

где $\psi(\vec{r})$ и $\chi(\vec{r})$ - т.н. дебаевские потенциалы, а $\varphi(\vec{r})$ - обычный скалярный потенциал.

¹ см. Репченко О.Н. «Полевая физика», М. «Галерея» 2008 г., стр. 157-158

² см. <http://mathworld.wolfram.com/DivergencelessField.html>

К сожалению, декомпозиция Неймана-Дебая осложнена проблемой калибровочных свобод, а также выбором полной системы скалярных функций разложения (чаще всего для компактных объектов используется система векторных сферических функций разложения), а также прочими математическими трудностями. Кроме того, декомпозиция Неймана-Дебая, так же, как и теорема разложения Гельмгольца не охватывает скалярные потенциалы. И, к сожалению, ни основная теорема разложения стандартного векторного анализа, ни декомпозиция Неймана-Дебая при всех их достоинствах так и не проливают свет на глубинные связи между потенциалами и вихрями и не дают ясного ответа на вопросы о механизмах и условиях возникновения вихрей в сплошных средах.

В связи с этим в рамках расширенного векторного анализа был разработан алгоритм построения системы базовых (элементарных) полей и создана альтернативная их классификация, охватывающая как векторные, так и скалярные поля.

В новой классификации базовых (элементарных) полей выделено всего три разные категории полей, в каждой из которых различаются по два типа полей:

- **Потенциальные** поля (они же безвихревые потенциалы):
 - Потенциальные поля скалярного типа U
 - Потенциальные поля векторного типа \vec{G}
- **Вихревые** поля (они же вихревые векторные потенциалы) \vec{S} :
 - Вихревые поля поперечно-осевого типа (замкнутые вихри) \vec{T}
 - Вихревые поля продольно-осевого типа (открытые вихри) \vec{P}
- **Вихре-потенциальные** поля:
 - Однородные вихре-потенциалы (поля Лапласа) \vec{L} (или $L_v = const$)
 - Неоднородные вихре-потенциалы (конфлюэнтные поля) $\vec{C} \neq const$

Идея построения системы базовых (элементарных) полей исходит из того неоспоримого факта, что всякое вихревое и/или потенциальное поле имеет свои причины, в качестве которых могут быть физические источники/стоки полей или иные физические факторы. При этом источниками/стоками таких полей (и волн) могут быть неточечные устройства довольно сложной конфигурации и структуры. Тем не менее, какими бы сложными и хитроумными ни были реальные источники, их всегда и во всех случаях можно рассматривать как «геометрическое место точечных источников», подобно тому, как в геометрии рассматриваются многие фигуры. И это означает, что модель полей точечного источника является элементарной, базовой моделью. А поля (и волны) от любых неточечных источников можно рассматривать как интегральную суперпозицию полей (интерференцию волн) от базовых полей точечных источников. Например, штыревую антенну можно рассматривать как геометрическое место базовых точечных источников (элементов переменного тока), каждый из которых излучает в окружающее пространство свою элементарную сферическую ЭМ волну³, в состав которой входят базовые (элементарные) ЭМ поля-компоненты. В результате в окружающее пространство излучается вся интегральная композиция элементарных сферических ЭМ волн, представляющая собой интерференционную картину базовых сферических ЭМ волн и суперпозицию их компонентов. В итоге при заданной геометрической конфигурации штыревой антенны ЭМ волна на ближней дистанции оказывается уже не сферической. Хотя на дальней дистанции ее все-таки можно рассматривать как близкую к сферической или даже к плоской ЭМ волне.

Сам же алгоритм построения системы базовых (элементарных) полей проливает свет на неведомый доселе генезис вихреобразования и выявляет глубинные связи между потенциалами и вихрями, о существовании которых физики ранее могли лишь догадываться.

³ Со свойственной для ЭМ волн анизотропией, отражаемой диаграммой направленности

Системы базовых (элементарных) ранжированных потенциалов и вихрей точечного источника

Ранг поля и принципы ранжирования полей

Для стационарных полей, имеющих вокруг точечного источника, характерна зависимость интенсивности поля от дистанции до источника. Например, силовое поле электрической напряженности вокруг электрического заряда обратно пропорционально квадрату дистанции от него. Аналогичный характер имеет и зависимость силового гравитационного поля вокруг материальной точки, обладающей массой. В то же время потенциалы этих силовых полей обратно пропорциональны дистанциям. Поэтому введем термин «**ранг поля**», понимая под ним показатель степени (как правило, целочисленный) зависимости интенсивности поля от дистанции до его точечного источника.

Тогда вышеназванные силовые поля имеют ранг -2 , а их скалярные потенциалы будут полями ранга -1 . При этом силовые поля взаимосвязаны с соответствующими скалярными потенциалами правилами ранжирования: силовое гравитационное поле является градиентом поля гравитационного потенциала, а силовое электростатическое поле является контраградиентным полем от электростатического потенциала, т.к. направлено противоположно градиенту. Специфической особенностью объемного дифференцирования и интегрирования в векторном анализе является дискретное изменение ранга дифференцируемого или интегрируемого поля. Ранг поля любой объемной производной поля ровно на единицу ниже ранга самого поля. Справедливо и обратное утверждение: ранг поля любой объемной первообразной поля ровно на единицу выше ранга самого поля.

Именно поэтому в основу построения новой системы базовых (элементарных) ранжированных потенциалов и вихрей точечного источника целесообразно положить ранжированное семейство потенциалов точечного источника типа потенциала Ньютона (Кулона). Во-первых, благодаря тому, что представляет собой степенную функцию, он легко ранжируется, а во-вторых, многие фундаментальные физические поля описываются законами, соответствующими именно потенциалу Ньютона. Нет иных резонов для выбора Ньютонова потенциала, как, впрочем, нет и принципиальных запретов для выбора любого другого (не степенного) закона изменения поля вокруг точечного источника.

У Ньютонова потенциала при отрицательных рангах есть один хорошо известный «математический недостаток»: наличие единственной точки сингулярности, положение которой совпадает с центром источником. Тем не менее, именно такая закономерность присуща многим физическим полям. И если полагать точечный источник физическим объектом (корпускулой, имеющей малый, но ненулевой размер и объем), то проблемы сингулярности **вокруг** такого источника вообще не возникает.

Другой характерной особенностью Ньютонова потенциала точечного источника является присущая ему неоднородность со строгой сферической симметрией и изотропией. При этом существует лишь один Ньютонов потенциал скалярного типа ранга 0 , который является однородным полем.

В качестве принципа пространственно-иерархического ранжирования системы базовых (элементарных) ранжированных потенциалов примем Пуассоновское ранжирование. Если ранжированные Ньютоновы потенциалы скалярного типа обозначить как U_0_k , а ранжированные Ньютоновы потенциалы векторного типа обозначить как \vec{G}_0_k , где k – ранг потенциала, то принцип Пуассоновского ранжирования можно сформулировать в следующих правилах:

$$\begin{cases} U_0_k = \nabla \vec{G}_0_{k+1} = \Delta U_0_{k+2} \\ \vec{G}_0_k = \nabla U_0_{k+1} = \Delta \vec{G}_0_{k+2} \end{cases} \quad (2.1)$$

Тогда на основе этого принципа можно построить две различные и непересекающиеся иерархические системы Ньютоновых полей:

Ранжированные базовые потенциалы с конфлюэнтным полем:

Ранжированные базовые потенциалы со скалярным полем Лапласа:

$$\begin{cases} \dots \\ \vec{G}0_2(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ U0_1(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ \vec{G}0_0(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ U0_{-1}(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ \vec{G}0_{-2}(\vec{r}, \vec{r}_s) = \vec{C}0_{-2}(\vec{r}, \vec{r}_s) \end{cases} \begin{cases} \dots \\ U0_4(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ \vec{G}0_3(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ U0_2(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ \vec{G}0_1(\vec{r}, \vec{r}_s) \\ U0_0(\vec{r}, \vec{r}_s) = L_U = 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

где \vec{r}_s - радиус-вектор месторасположения источника поля

\vec{r} - координата точки в пространстве вокруг источника

В системе базовых (элементарных) ранжированных сферически симметричных потенциалов с конфлюэнтным полем у потенциалов векторного типа четные ранги, тогда как в системе базовых (элементарных) ранжированных сферически симметричных потенциалов со скалярным полем Лапласа у потенциалов векторного типа нечетные ранги.

Поскольку у конфлюэнтных и Лапласовых полей объемная производная вырождается, то нижеследующее ранжирование сферически симметричных потенциалов на этих полях терминируется, несмотря на то что формально их так же можно было бы определить.

Базовые ранжированные сферически симметричные потенциалы

Дадим определения базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов точечного источника:

- Базовые ранжированные сферически симметричные скалярные потенциалы точечного источника:

$$U0_k(\vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{1}{(k+1)!} |\vec{r} - \vec{r}_s|^k, \quad \forall k \geq -1 \quad (2.3)$$

- Базовые ранжированные сферически симметричные векторные потенциалы точечного источника:

$$\vec{G}0_k(\vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{(k+1)}{(k+2)!} |\vec{r} - \vec{r}_s|^{k-1} (\vec{r} - \vec{r}_s), \quad \forall k \geq -2 \wedge k \neq -1 \quad (2.4)$$

Сферически симметричный ранжированный потенциал векторного типа ранга -2 является одновременно сферически-симметричным вихре-потенциалом конфлюэнтного типа:

$$\vec{G}0_{-2}(\vec{r}, \vec{r}_s) = \vec{C}0_{-2}(\vec{r}, \vec{r}_s) = -\frac{(\vec{r} - \vec{r}_s)}{|\vec{r} - \vec{r}_s|^3} \quad (2.5)$$

Тогда силовое кулоновское поле можно выразить в терминах базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов следующим образом:

$$\vec{E}_q(q, \vec{r}, \vec{r}_s) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{G}0_{-2}(\vec{r}, \vec{r}_s) \quad (2.6)$$

(2.7)

а силовое гравитационное поле Ньютона в терминах базовых ранжированных потенциалов сферически симметричных определяется следующим образом:

$$\vec{E}_M(M, \vec{r}, \vec{r}_s) = G_N M \cdot \vec{G}0_{-2}(\vec{r}, \vec{r}_s), \quad (2.8)$$

где ϵ_0 - электрическая постоянная

G_N - гравитационная постоянная

Кулоновский электростатический потенциал в терминах базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов определяется следующим образом:

$$\varphi_q(q, \vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} U_{0_{-1}}(\vec{r}, \vec{r}_s), \quad (2.9)$$

а электрический вектор Герца в терминах базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов определяется следующим образом:

$$\vec{\Pi}_q(q, \vec{r}, \vec{r}_s) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \vec{G}_{0_0}(\vec{r}, \vec{r}_s), \quad (2.10)$$

Поля всех базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов сферически симметричны и изотропны.

Не существует сферически симметричных вихревых полей, зато существует однородный скалярный потенциал Лапласова типа U_{0_0} и неоднородный сферически симметричный векторный вихре-потенциал конфлюэнтного типа $\vec{G}_{0_{-2}} = \vec{C}_{0_{-2}}$.

Изотропный базовый сферически симметричный векторный потенциал нулевого ранга \vec{G}_{0_0} не является однородным полем, т.к., хотя все векторы \vec{G}_{0_0} и равны по величине, но при этом они имеют разную (радиальную) ориентацию.

Далее перейдем к определению ранжированных семейств *базовых моноаксиальных ранжированных потенциалов и вихрей* точечного источника, для которых характерна моноаксиальная симметрия и анизотропия. При этом за основу их построения примем уже имеющиеся в нашем распоряжении *базовые ранжированные сферически симметричные потенциалы* точечного источника, а [ориентированную] *ось симметрии* зададим вектором \vec{L}^4 . В качестве инструмента построения моноаксиальных ранжированных потенциалов и вихрей точечного источника используем *диморфизм конвективных производных поля*.

Базовые ранжированные моноаксиальные потенциалы и вихри

Используя диморфизм конвективных производных поля, построим систему базовых ранжированных моноаксиальных потенциалов и вихрей точечного источника. Правила построения этой системы очень просты и понятны:

- ❖ От каждого *базового ранжированного сферически симметричного потенциала скалярного типа* $U_{0_{k+1}}$ сформируем пару сопряженных с ним базовых моноаксиальных полей точечного источника:
 - базовый ранжированный моноаксиальный вихрь замкнутого типа $\vec{T}1_k$ (или поперечно-осевой вихрь), структурированный поперек заданного вектора оси \vec{L}
 - базовый ранжированный моноаксиальный потенциал скалярного типа $U1_k$, структурированный вдоль заданного вектора оси \vec{L} :

$$U1_k \leftarrow \frac{(\vec{L} \cdot \nabla) U_{0_{k+1}}}{U_{0_{k+1}}} U_{0_{k+1}} \xrightarrow{[\vec{L} \times \nabla] U_{0_{k+1}}} \vec{T}1_k \quad (2.11)$$

- ❖ От каждого *базового ранжированного сферически симметричного потенциала векторного типа* $\vec{G}_{0_{k+1}}$ так же сформируем пару сопряженных с ним базовых моноаксиальных полей:

⁴ По сути, вектор заданного направления оси выступает в роли Лапласова поля $\vec{L} = const$

- базовый ранжированный моноаксиальный вихрь незамкнутого типа $\vec{P}1_k$ (или продольно-осевой вихрь), структурированный вдоль заданного вектора оси \vec{L} ;
- базовый ранжированный моноаксиальный потенциал векторного типа $\vec{G}1_k$, структурированный вдоль заданного вектора оси \vec{L} ;

$$\vec{G}1_k \xleftarrow{(\vec{L}\cdot\nabla)\vec{G}0_{k+1}} \vec{G}0_{k+1} \xrightarrow{[\vec{L}\times\nabla]\times\vec{G}0_{k+1}} \vec{P}1_k \quad (2.12)$$

Таким образом, формулы определения базовых ранжированных моноаксиальных потенциалов и вихрей⁵ точечного источника в символическом формализме Гамильтона имеют следующий вид:

- Базовые ранжированные моноаксиальные потенциалы скалярного типа:

$$U1_k(\vec{r}, \vec{r}_s, \vec{L}) = (\vec{L}\cdot\nabla)U0_{k+1}(\vec{r}, \vec{r}_s) \quad (2.13)$$

- Базовые ранжированные моноаксиальные вихри замкнутого типа (поперечно-осевые вихри):

$$\vec{T}1_k(\vec{r}, \vec{r}_s, \vec{L}) = [\vec{L}\times\nabla]U0_{k+1}(\vec{r}, \vec{r}_s) \quad (2.14)$$

- Базовые ранжированные моноаксиальные потенциалы векторного типа:

$$\vec{G}1_k(\vec{r}, \vec{r}_s, \vec{L}) = (\vec{L}\cdot\nabla)\vec{G}0_{k+1}(\vec{r}, \vec{r}_s) \quad (2.15)$$

- Базовые ранжированные моноаксиальные вихри открытого типа (продольно-осевые вихри):

$$\vec{P}1_k(\vec{r}, \vec{r}_s, \vec{L}) = [\vec{L}\times\nabla]\times\vec{G}0_{k+1}(\vec{r}, \vec{r}_s) \quad (2.16)$$

где \vec{L} - направляющий вектор, задающий ориентацию в пространстве оси симметрии моноаксиальных потенциалов или вихрей.

k - ранг моноаксиального потенциала или вихря

\vec{r}_s - радиус-вектор точечного источника

\vec{r} - координаты точки в трехмерном Евклидовом пространстве

Как видно из определений (2.13) - (2.16) базовые ранжированные моноаксиальные потенциалы и вихри точечного источника определяются *различными формами конвективных производных* базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов. Поэтому они сопряжены со *сферически симметричными потенциалами*, а их пространственные структуры привязаны к заданному направлению \vec{L} оси симметрии (анизотропии).

В прикладных задачах ранжированные моноаксиальные потенциалы и вихри точечного источника являются различными формами конвективных производных поля. При этом в роли направляющего вектора оси \vec{L} выступает вектор скорости источника $\dot{\vec{r}}_s$ (либо ускорения $\ddot{\vec{r}}_s$). В таких случаях в формулах определения моноаксиальных потенциалов и вихрей (2.13)-(2.16) вместо скалярного оператора $(\vec{L}\cdot\nabla)$ необходимо использовать оператор $(\dot{\vec{r}}_s\cdot\nabla_{\vec{r}_s})$, а вместо векторного оператора $[\vec{L}\times\nabla]$ необходимо использовать оператор $[\dot{\vec{r}}_s\times\nabla_{\vec{r}_s}]$

⁵ Буквы T и P в идентификаторах вихрей являются просто «реликтами» от терминов toroidal и poloidal [field]

Свойства и особенности базовых ранжированных моноаксиальных потенциалов и вихрей точечного источника

Базовые ранжированные моноаксиальные ранжированные потенциалы и вихри так же соответствуют принципам ранжирования по Пуассону:

$$\begin{cases} \Delta U_{k+2} = U_{1_k} \\ \Delta \vec{G}_{k+2} = \vec{G}_{1_k} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \Delta \vec{T}_{k+2} = \vec{T}_{1_k} \\ \Delta \vec{P}_{k+2} = \vec{P}_{1_k} \end{cases} \quad (2.18)$$

Ранжирование базовых моноаксиальных потенциалов и вихрей взаимно согласовано:

$$\begin{cases} \nabla U_{k+1} = \vec{G}_{1_k} \\ \nabla \vec{G}_{k+1} = U_{1_k} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{T}_{k+1} = \vec{P}_{1_k} \\ \nabla \times \vec{P}_{k+1} = -\vec{T}_{1_k} \end{cases} \quad (2.20)$$

Моноаксиальный потенциал векторного типа $\vec{G}_{1_0}(\vec{r}, \vec{L}) = \frac{1}{3} \vec{L} \quad \forall \vec{r}$, а также моноаксиальный вихрь открытого типа $\vec{P}_{1_0}(\vec{r}, \vec{L}) = \frac{2}{3} \vec{L} \quad \forall \vec{r}$ - являются однородными вихре-потенциалами Лапласового типа.

Моноаксиальный потенциал векторного типа $\vec{G}_{1_{-3}}(\vec{r}, \vec{L}) = \frac{2\vec{L}}{r^3} - \frac{3[\vec{r} \times [\vec{L} \times \vec{r}]]}{r^5}$, а также моноаксиальный вихрь открытого типа $\vec{P}_{1_{-3}}(\vec{r}, \vec{L}) = \frac{2\vec{L}}{r^3} - \frac{3[\vec{r} \times [\vec{L} \times \vec{r}]]}{r^5}$ - являются неоднородными вихре-потенциалами конфлюэнтного типа $\vec{C}_{1_{-3}}$, и они относятся к иерархической системе с конфлюэнтным полем.

Моноаксиальные потенциалы скалярного типа $U_{1_1} = \frac{1}{3}(\vec{L} \cdot \vec{r})$ и $U_{1_{-2}} = \frac{(\vec{L} \cdot \vec{r})}{r^3}$, а также моноаксиальные вихри замкнутого типа $\vec{T}_{1_1} = \frac{1}{3}[\vec{L} \times \vec{r}]$ и $\vec{T}_{1_{-2}} = \frac{[\vec{L} \times \vec{r}]}{r^3}$ оказываются гармоническими полями.

При построении системы базовых ранжированных моноаксиальных потенциалов и вихрей точечного источника в качестве инструмента построения мы использовали **диморфизм конвективных производных** в пространстве \vec{r} . В стандартном векторном анализе ни о каком диморфизме конвективных производных поля ранее даже идей не было.

В стандартном векторном анализе издавна используется лишь **потенциальная форма конвективной производной поля**, которая в символическом формализме Гамильтона имеет следующий вид: $(\vec{L} \cdot \nabla)$. (В качестве примера см. определения (2.13) и (2.15)). Потенциальная форма конвективной производной в применении к скалярному или векторному потенциалу дает в результате соответственно скалярный или векторный потенциал.

В расширенном векторном анализе вводится определение **вихревой формы конвективной производной поля**, которая в символическом формализме Гамильтона имеет следующий вид: $[\vec{L} \times \nabla]$. (В качестве примера см. определения (2.14) и (2.16)). Вихревая

форма конвективной производной в применении к скалярному или векторному потенциалу дает в результате соответственно замкнутый или открытый вихрь.

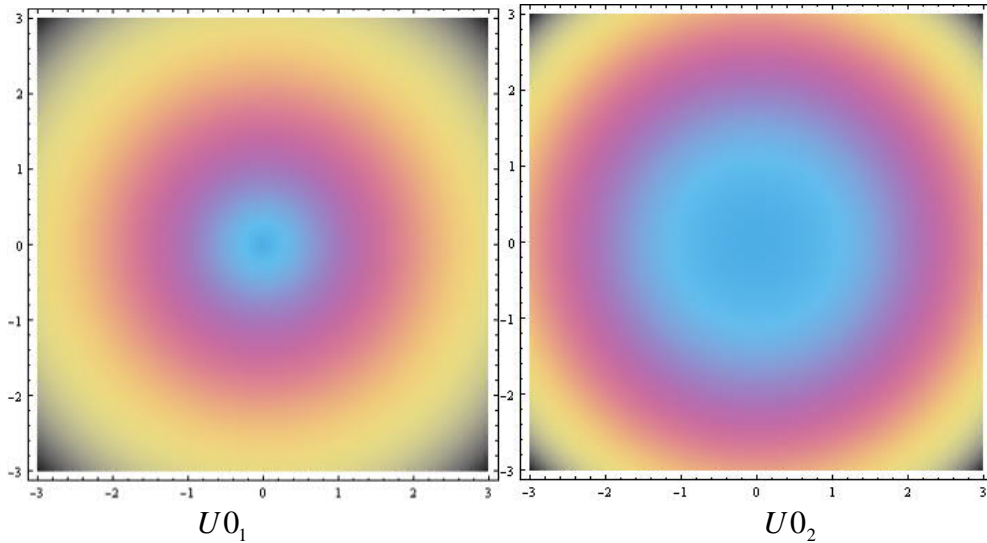
Отсутствие концепта вихревой формы конвективной производной поля в математическом аппарате векторного анализа и в физике явилось одной из основных причин отсутствия вихревой физики вообще и неучета вихревых производных в гидро- и газодинамике в частности. В свою очередь это приводит к большим проблемам при моделировании турбулентных режимов течений на основе решения уравнения Навье-Стокса. Как известно, в уравнении Навье-Стокса присутствует лишь потенциальная форма конвективной производной скоростей течения сплошной среды $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$, но при этом упущена вихревая форма конвективной производной скоростей течения сплошной среды $[\vec{v} \times \nabla] \times \vec{v}$. Это упущение, на наш взгляд, и является одной из главных причин неадекватного описания уравнением Навье-Стокса течения сплошной среды, особенно при повышении степени турбулентности потока. Отсюда возникает потребность вводить дополнительные полуэмпирические «костыли» в программы математического моделирования.

Более того, диморфизм конвективной производной поля позволяет из закона Кулона построить (аналитически вывести) все известные и еще не известные законы классической электромагнитодинамики, а при некоторых дополнительных условиях построить инженерную теорию электромагнитной и магнитоэлектрической индукции и механизма распространения электромагнитных волн.

Надо надеяться, что тот же диморфизм конвективной производной поля позволит и из закона Ньютона построить (аналитически вывести) все известные и еще не известные законы классической гравимагнетодинамики и построить инженерную теорию гравимагнетной и магнетогравитационной индукции и механизма распространения гравитационных волн.

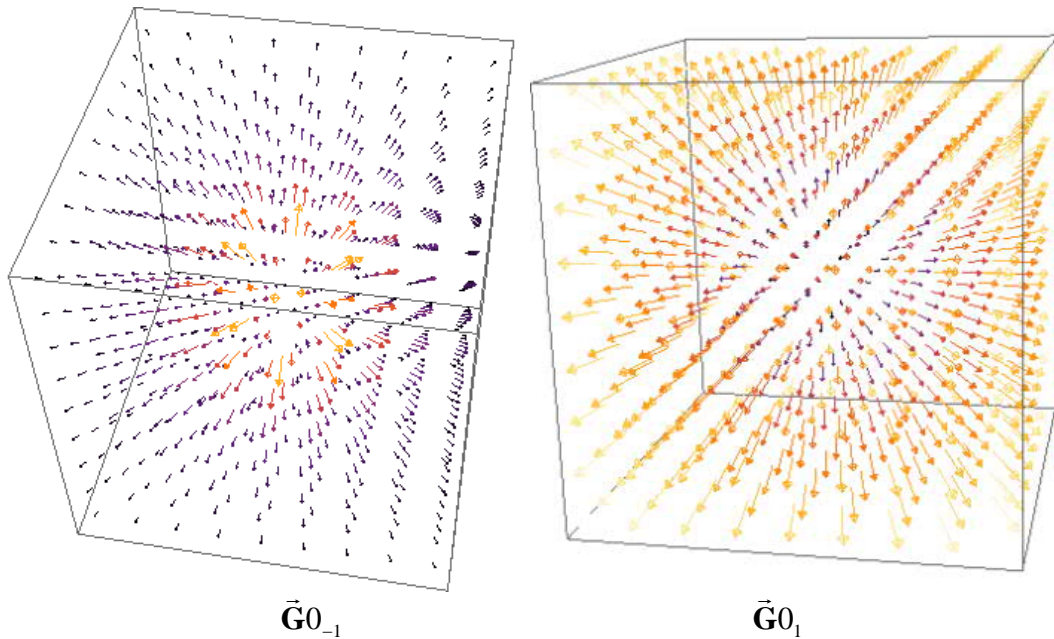
Иллюстрации базовых ранжированных потенциалов и вихрей точечного источника

В качестве иллюстраций представим диаграммы сечений базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов скалярного типа точечного источника различного ранга:



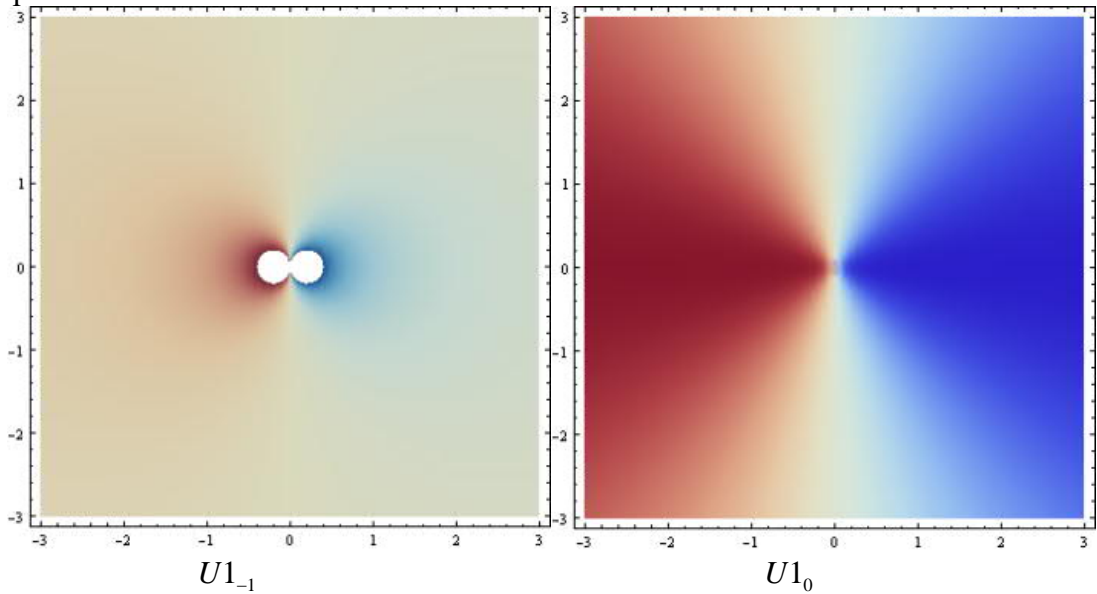
Диаграммы сечений скалярных U_{0_k} -потенциалов k -ого ранга точечного источника

Приведем также иллюстрации векторных диаграмм базовых ранжированных сферически симметричных потенциалов векторного типа точечного источника различного ранга:



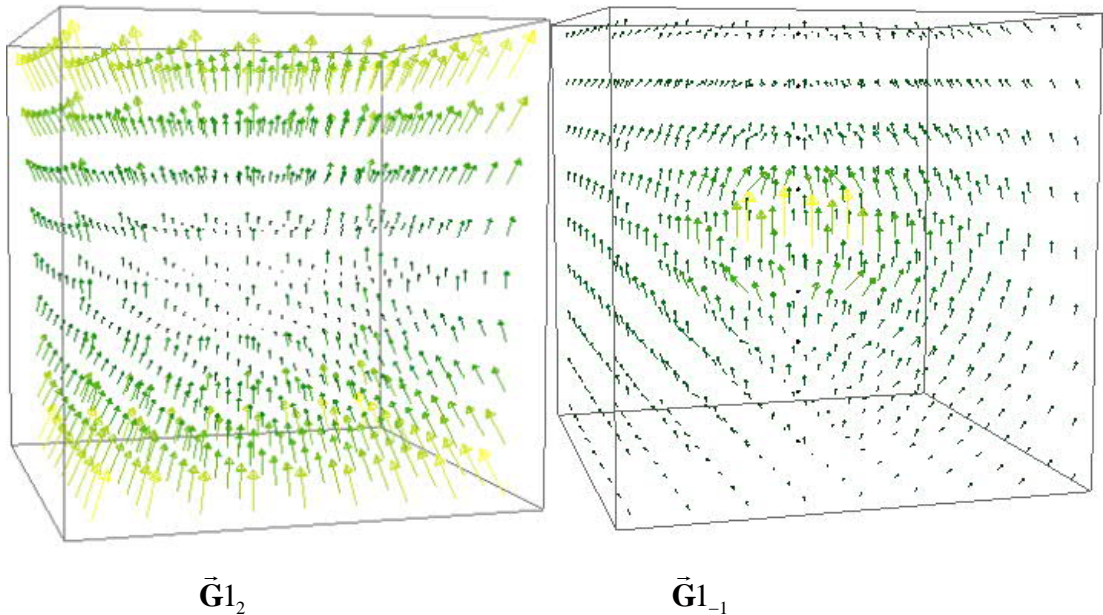
Векторные диаграммы векторных \vec{G}_{0_k} - потенциалов k -ого ранга точечного источника

Приведем также иллюстрации векторных диаграмм базовых ранжированных моноаксиальных потенциалов скалярного типа точечного источника с горизонтальной осью симметрии:

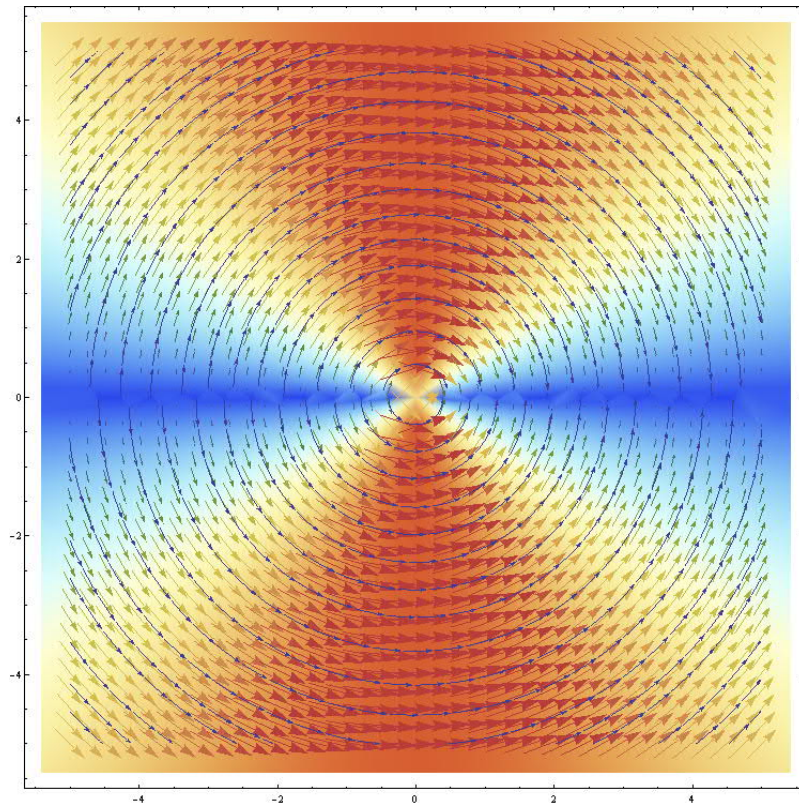


Диаграммы сечений моноаксиальных скалярных потенциалов точечного источника

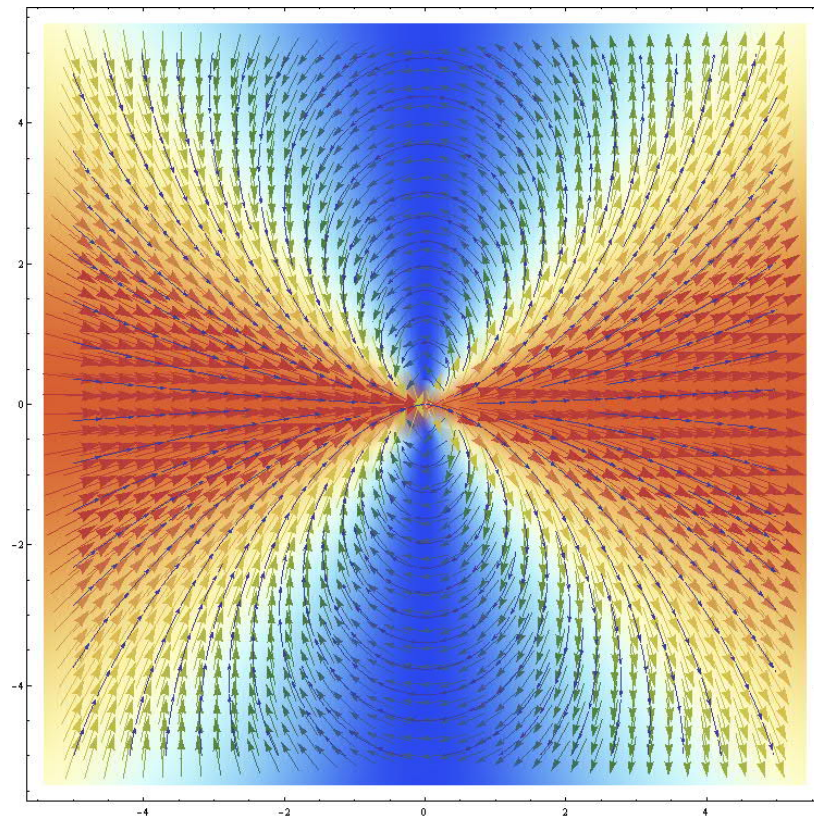
Приведем также иллюстрации векторных диаграмм базовых ранжированных моноаксиальных потенциалов векторного типа точечного источника с вертикальной осью симметрии:



Векторные диаграммы моноаксиальных векторных потенциалов точечного источника

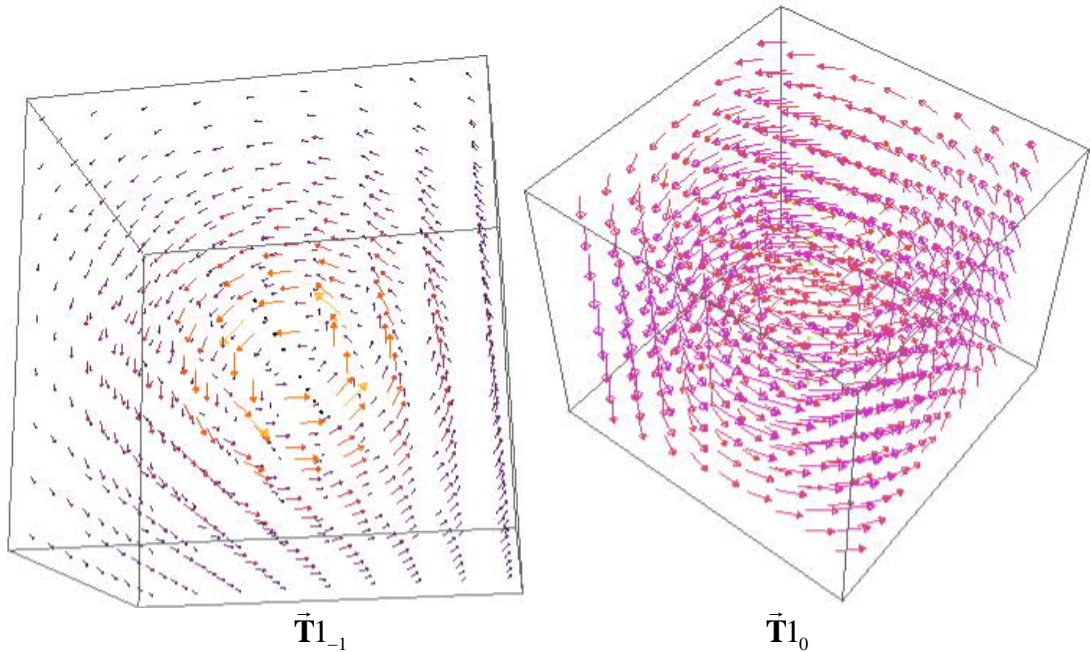


Поле продольного сечения моноаксиального потенциала векторного типа \vec{G}_{1-1} с горизонтальной осью симметрии (анизотропии)



Конфлюэнтное поле моноаксиального вихре-потенциала $\vec{G}_{1-3} = \vec{P}_{1-3} = \vec{C}_{1-3}$ с горизонтальной осью симметрии (анизотропии)

Иллюстрации векторных диаграмм базовых ранжированных моноаксиальных вихрей \vec{T}_k поперечно-осевого типа точечного источника с вертикальной осью симметрии:

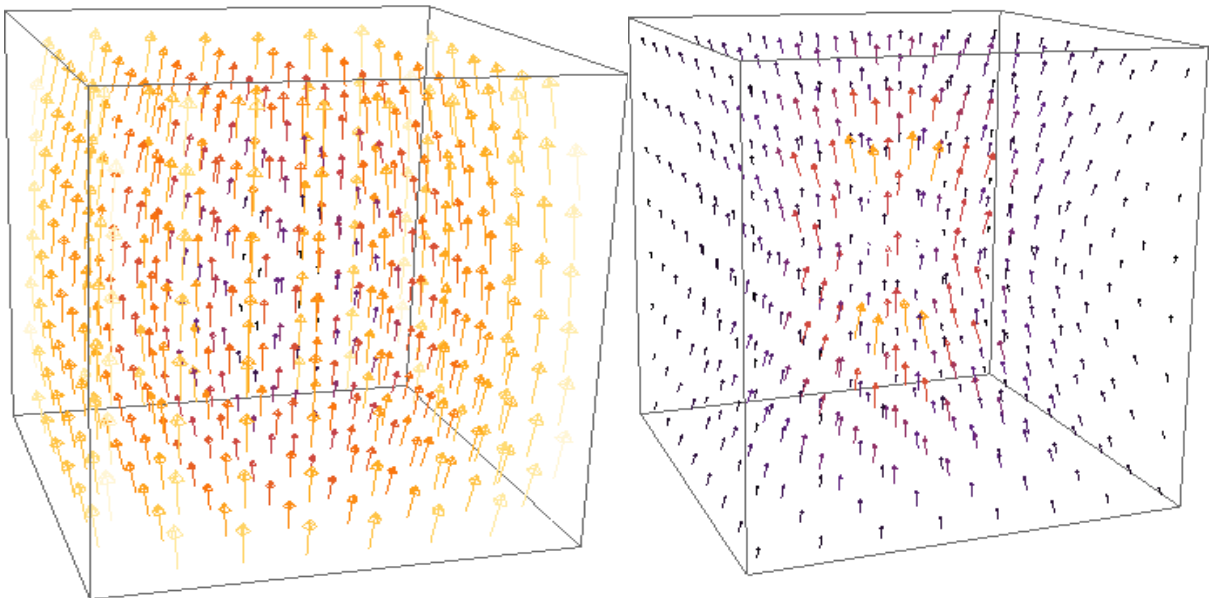


Векторные диаграммы моноаксиальных вихрей поперечно-осевого типа \vec{T}_k

Поля моноаксиальных вихрей \vec{T}_k замкнутые и имеют поворотную симметрию относительно оси симметрии.

Напротив, базовые ранжированные моноаксиальные вихри \vec{P}_k продольно-осевого типа незамкнуты!

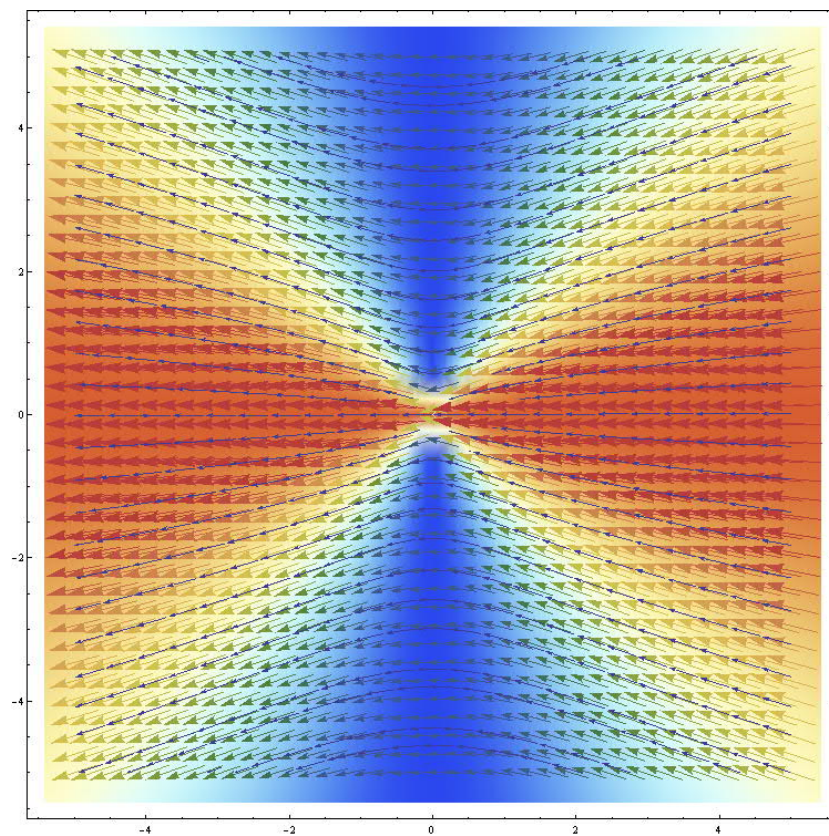
Иллюстрации векторных диаграмм базовых ранжированных моноаксиальных вихрей \vec{P}_k продольно-осевого типа точечного источника с вертикальной осью симметрии:



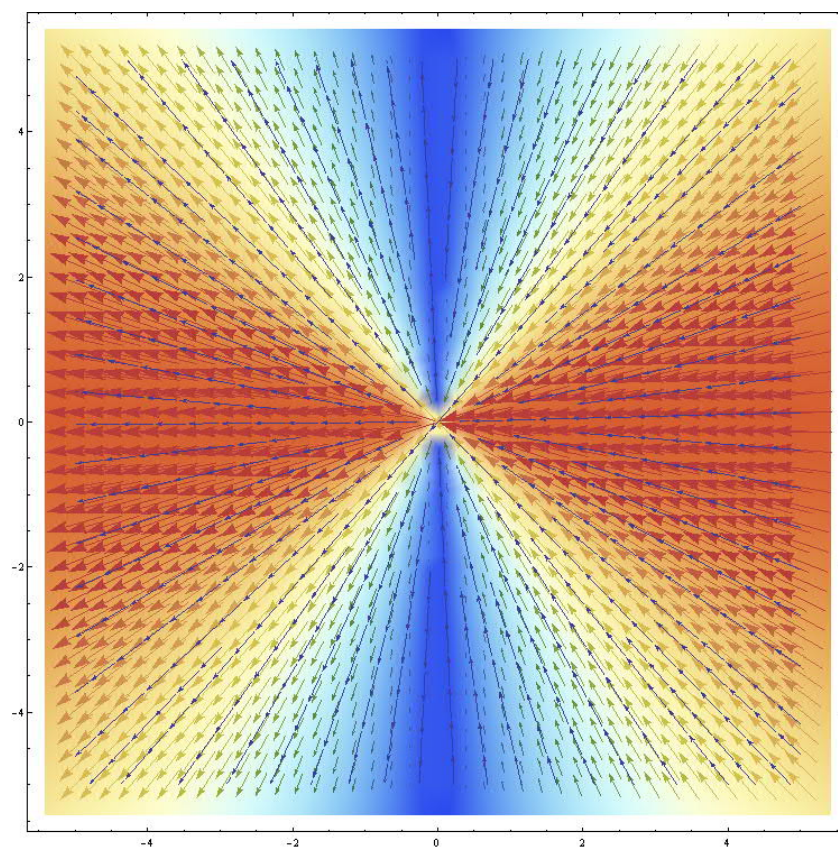
Бочкообразный $\vec{P}_{1_{-1}}$ -вихрь

Гиперболоидный $\vec{P}_{1_{-1}}$ -вихрь

Векторные диаграммы моноаксиальных открытых вихрей продольно-осевого типа \vec{P}_k



Поле моноаксиального вихря открытого типа \vec{P}_{1-1} с горизонтальной осью симметрии



Поле моноаксиального вихря открытого типа \vec{P}_{1-2} с горизонтальной осью симметрии

В качестве дополнительного примера приложения Системы Ранжированных Потенциалов и Вихрей точечного источника проведем исследование структуры «локализованного» вихря Хилла с позиций этой системы.

«Локализованный» вихрь Хилла

Классический вихрь Хилла – это комбинированный осесимметричный вихрь, локализованный в сферической области радиуса a , представляющийся закрученным вокруг кольцевой оси радиусом $\frac{a}{\sqrt{2}}$, где a - радиус сферы, в которую вырождается и в которую вписан тороид вращения вихря.

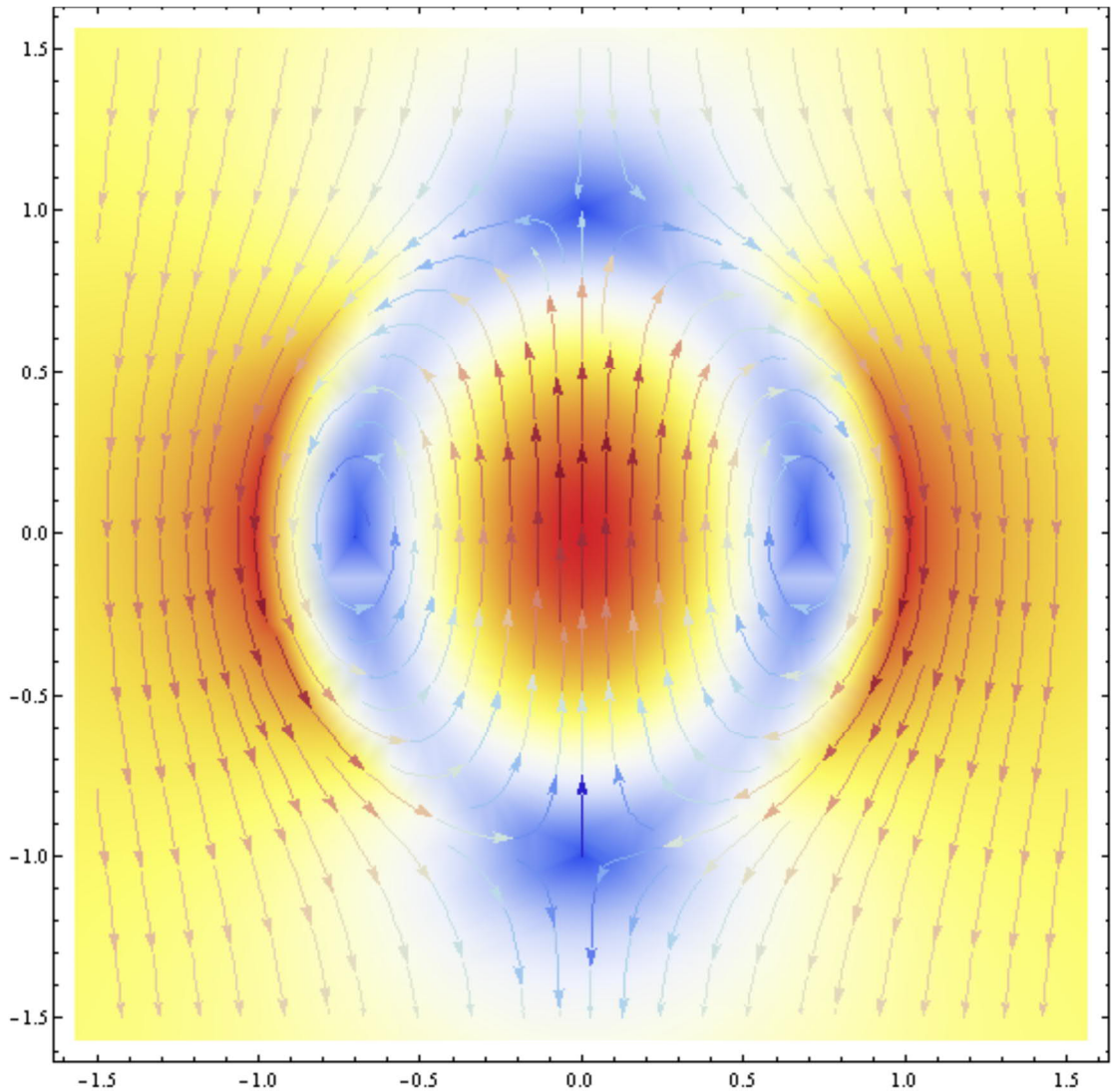


Рис. 1 Вихрь Хилла, совмещенный с картой интенсивности скоростей течения

Скорости течения внутри и вне сферы локализации в цилиндрической системе координат описываются двумя различными векторными полями:

$$v_r = \begin{cases} \frac{3}{2} U \frac{rz}{a^2}, & r^2 + z^2 \leq a^2 \\ \frac{3}{2} U \frac{rz}{a^2} \left(\frac{a^2}{r^2 + z^2} \right)^{\frac{5}{2}}, & r^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \quad (2.21)$$

$$v_z = \begin{cases} \frac{3}{2}U \left(1 - \frac{2r^2 + z^2}{a^2}\right), & r^2 + z^2 \leq a^2 \\ U \left(\left(\frac{a^2}{r^2 + z^2}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{2z^2 - r^2}{2a^2} - 1 \right), & r^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \quad (2.22)$$

(формулы взяты из монографии «Введение в теорию концентрированных вихрей» Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.)

Переход от цилиндрических координат к декартовым координатам дает:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \begin{cases} \frac{3}{2}U \frac{x \cdot z}{a^2}, & x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ \frac{3}{2}U \frac{x \cdot z}{a^2} \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{\frac{5}{2}}, & x^2 + y^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \\ v_y = \begin{cases} \frac{3}{2}U \frac{y \cdot z}{a^2}, & x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ \frac{3}{2}U \frac{y \cdot z}{a^2} \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{\frac{5}{2}}, & x^2 + y^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \\ v_z = \begin{cases} \frac{3}{2}U \left(1 - \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) - z^2}{a^2}\right), & x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ U \left(\frac{3z^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2a^2} \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{\frac{5}{2}} - 1 \right), & x^2 + y^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Компоненту v_z разложим следующим образом:

$$v_z = \begin{cases} \frac{3}{2}U \frac{z \cdot z}{a^2} - 3U \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} + \frac{3}{2}U, & x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \\ \frac{3}{2}U \frac{z \cdot z}{a^2} \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}U \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^{\frac{3}{2}} - U, & x^2 + y^2 + z^2 > a^2 \end{cases} \quad (2.24)$$

Далее, определим единичный вектор $\vec{\mathbf{L}}_1$ оси симметрии вихря Хилла. Он направлен вдоль оси z : $\vec{\mathbf{L}}_1 = \mathbf{k}$. Выделим также в отдельное поле постоянные составляющие в компоненте v_z :

$$\vec{\mathbf{L}}_2 = \frac{3}{2}U\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \quad \vec{\mathbf{L}}_3 = -U\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 + z^2 > a^2,$$

Тогда мы можем переписать определение вихря Хилла в векторной форме:

$$\vec{\mathbf{v}}_{Hill} = \begin{cases} \vec{\mathbf{P}}_{Hill} + \vec{\mathbf{L}}_2, & r^2 \leq a^2 \\ \vec{\mathbf{C}}_{Hill} + \vec{\mathbf{L}}_3, & r^2 > a^2 \end{cases}, \text{ где}$$

$$\vec{\mathbf{P}}_{Hill} = \frac{1}{2} \frac{U}{a^2} (3(\vec{\mathbf{L}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{r}} - 6\vec{\mathbf{L}}_1)$$

$$\vec{\mathbf{C}}_{Hill} = \frac{1}{2} U \frac{a^3}{r^5} (3(\vec{\mathbf{L}}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{r}} - r^2\vec{\mathbf{L}}_1),$$

откуда становится очевидным, что поле $\vec{\mathbf{P}}_{Hill}$ является вихрем, классификация которого в новой классификационной системе определяется моноаксиальным незамкнутым продольно-осевым $\vec{\mathbf{P}}_1$ -вихрем точечного источника ранга 2, расположенного в начале

системы координат, вида. Ротор (завихренность) этого поля линейно возрастает с ростом дистанции r (т.е. представляет собой моноаксиальный замкнутый поперечно-осевой вихрь вида \vec{T}_1).

$$\text{rot } \vec{P}_{Hill} = \frac{15U}{2a^2} [\vec{L}_1 \times \vec{r}]$$

Поле \vec{C}_{Hill} является конфлюэнтным вихре-потенциалом точечного источника вида \vec{C}_{1-3} .

$$\text{rot } \vec{C}_{Hill} = 0, \text{ div } \vec{C}_{Hill} = 0$$

Оба поля \vec{P}_{Hill} и \vec{C}_{Hill} определены во всем пространстве, за исключением особой точки в начале системы координат, где \vec{C}_{Hill} имеет особенность. Ввиду того, что поле \vec{P}_{Hill} неограниченно возрастает (по параболическому закону) с ростом дистанции, М. Хилл предположил, что характер течения вида \vec{P}_{Hill} справедлив только локально, внутри сферы радиуса a , а снаружи нее характер течения соответствует полю \vec{C}_{Hill} . После «сшивания» скоростей течения на границе сферы и было получено определение сферического вихря Хилла.

Наше исследование структуры вихря обнаруживает в его составе также однородные Лапласовы поля: \vec{L}_2 внутри сферы и \vec{L}_3 снаружи нее. Значения именно этого однородного поля достигает поле \vec{P}_{Hill} на расстоянии $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Поэтому оно и меняет направление своей z -компоненты на противоположное, хотя само поле \vec{P}_{Hill} не имеет тут никаких особенностей. В результате складывается иллюзия «возникновения локального тороидального вихря», вписанного в сферу радиуса a , хотя все поля-компоненты суммы глобальны, как это следует из проведенного анализа!

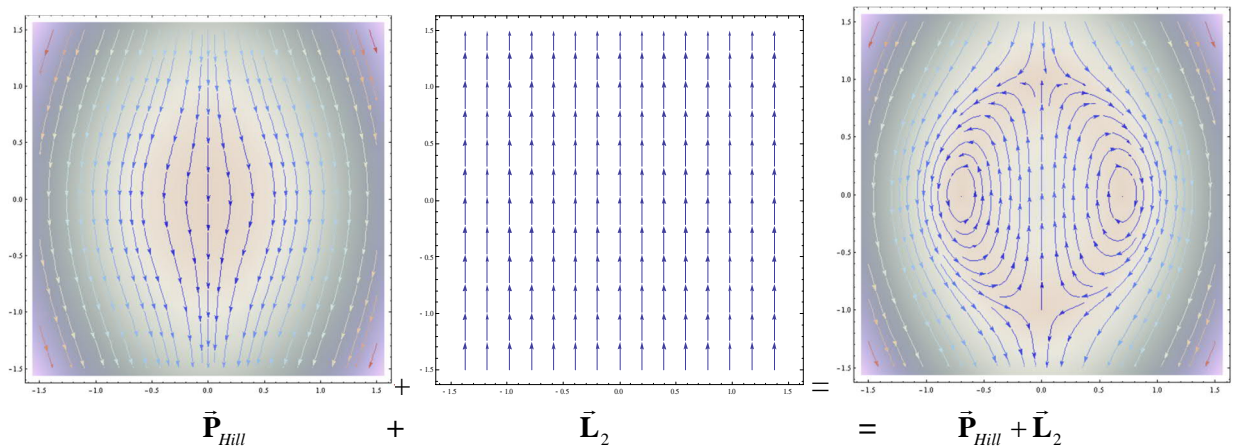


Иллюстрация аддитивной структуры «локализации» вихря Хилла

Прделаем аналогичные построения для полей \vec{C}_{Hill} и \vec{L}_3 :

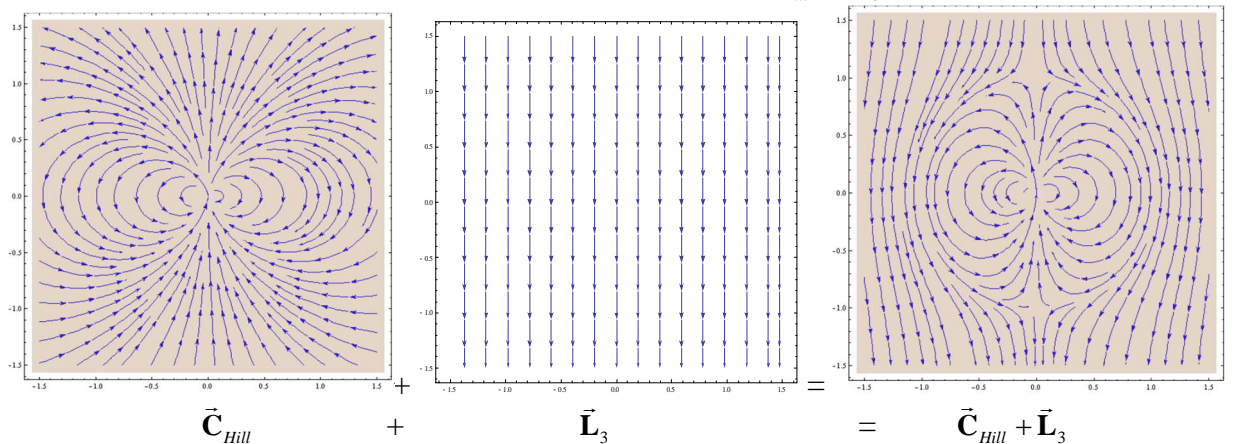


Иллюстрация аддитивной структуры «локализации» поля \vec{C}_{hill}

Мы видим, что и в этом случае происходит такая же иллюзия «локализации» поля \vec{C}_{hill} , хотя оно глобально!! С уменьшением доли внешнего однородного потока \vec{L}_3 радиус сферы «локализации» неограниченно возрастает, и наоборот, он уменьшается при увеличении скорости набегающего внешнего потока. При этом сама структура суммарного поля не меняется.

Поскольку поле \vec{C}_{hill} конфлюэнтное, а поле \vec{L}_3 - однородное Лапласово поле, то их сумма $\vec{C}_{hill} + \vec{L}_3$ является и ротором и градиентом одновременно:

$$\vec{C}_{hill} + \vec{L}_3 = \text{rot } \vec{H} = \text{grad } N.$$

Поэтому представляет интерес определить оба объемные первообразные поля \vec{H} и N .

Однако, эта задача имеет, строго говоря, неоднозначное решение. Дело в том, что, как известно из теории потенциалов и вихрей точечного источника, множество полей имеют объемными производными однородные Лапласовы поля вида \vec{L}_3 . Эти поля известны как гармонические поля. В то же время конфлюэнтное поле \vec{C}_{hill} имеет всего два объемных первообразных поля (с точностью до конфлюэнтных и Лапласовых полей): И этими полями являются векторное поле вида \vec{T}_{1-2} , более известное, как поле Био-Савара, и скалярное поле U_{1-2} , менее известное, как поле Николаева.

$$\vec{C}_{hill} = \text{rot } \vec{T}_{1-2} = \text{grad } U_{1-2}, \text{ где}$$

$$\vec{T}_{1-2} = \frac{1}{2} U \frac{a^3}{r^3} [\vec{L}_1 \times \vec{r}]$$

$$U_{1-2} = -\frac{1}{2} U \frac{a^3}{r^3} (\vec{L}_1 \cdot \vec{r})$$

Таким образом, с точностью до произвольного гармонического поля мы определили объемные первообразные поля $\vec{C}_{hill} + \vec{L}_3$.

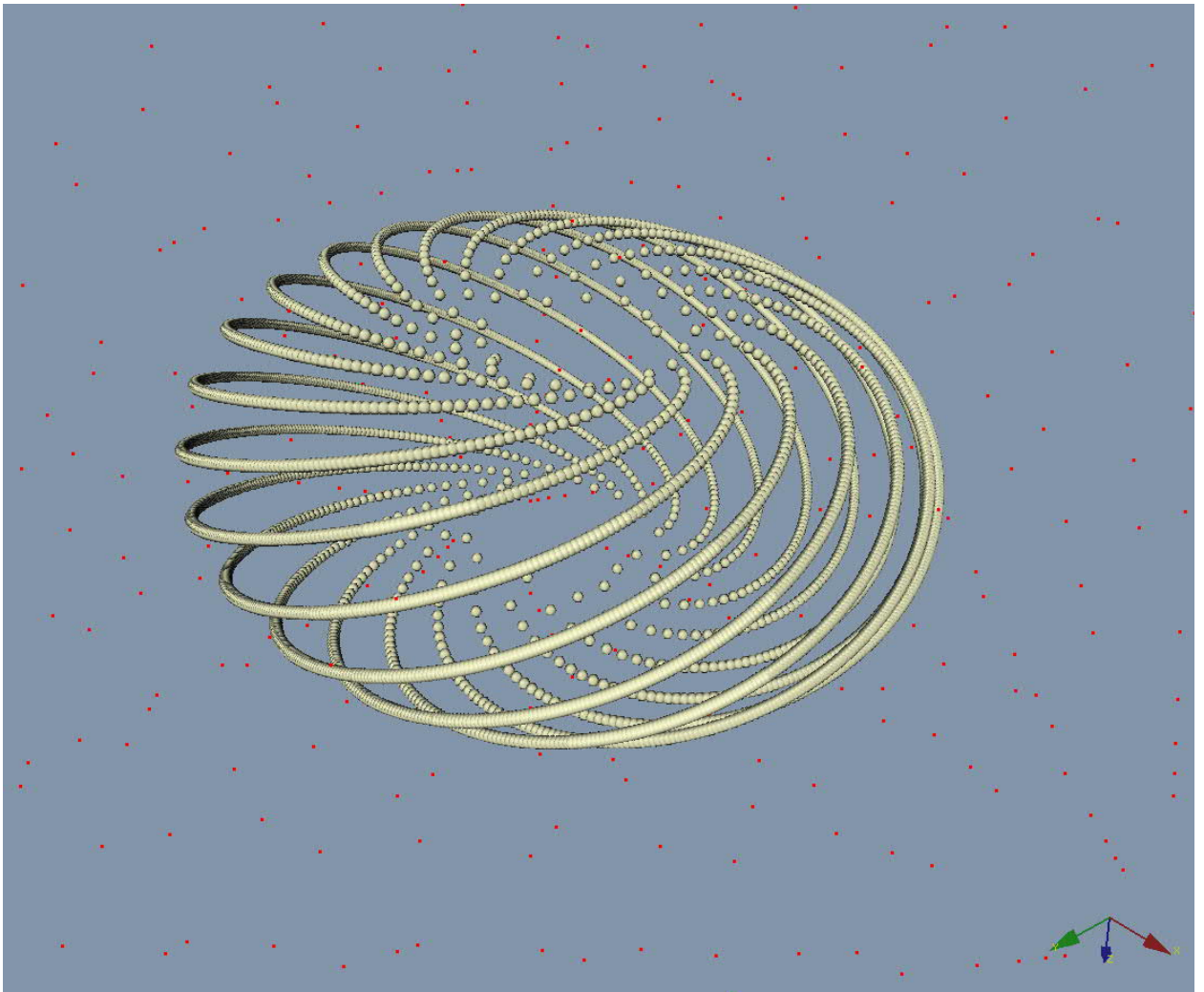
Дополнительно в качестве бонуса построим поле \vec{S}_{hill} , представляющее собой «локализованное» тороидальное поле с закруткой потока как вдоль оси тороида, так и поперек ей.

Поскольку поле \vec{C}_{hill} представляет собой конфлюэнтное поле -3 ранга, и обеспечивает закрутку потока вокруг кольцевой оси тороида, «локализованного» в сферической области, то добавив к нему вихрь \vec{T} такого же ранга и с такой же ориентацией, обеспечивающий закрутку потока вдоль кольцевой оси тороида, мы получим искомое поле:

$$\vec{S}_{hill} = \vec{T}_{1-3} + \vec{C}_{hill} + \vec{L}_3, \text{ где}$$

$$\vec{T}_{1-3} = \frac{1}{2} U \frac{a^3}{r^4} [\vec{L}_1 \times \vec{r}]$$

Построим линии тока комбинированного тороидального вихря $\vec{T}_{1-3} + \vec{C}_{hill}$



Линии тока комбинированного тороидального вихря $\vec{T}_{1-3} + \vec{C}_{\text{hill}}$

И наконец, приведем иллюстрацию линий тока комбинированного тороидального вихря \vec{S}_{hill} во внешнем однородном потоке \vec{L}_3 :

