

Деление пополам и золотая пропорция. Часть 17. Физические задачи: механика

«Дайте мне достаточно длинный рычаг и точку опоры, на которой я могу его разместить, и я переверну мир». – Архимед

Введение.

Многие физики относятся к золотому сечению (ЗС) снисходительно.

Можно даже сказать, с элементами пренебрежения, не считая его серьезным занятием.

Сдается, всё с точностью до наоборот. Это ЗС не желает особо баловать физиков.

Все параметры физических систем, включая эталонные единицы измерения, – приближенные и находятся экспериментально с весьма ограниченной точностью измерения.

ЗС – математическая константа, такая же, как π или e . "Сидит" она где-то в глубине реальных фундаментальных явлений, процессов и с иронией наблюдает, как седовласые ученые-мужи скользят-лазают по вершине айсберга знаний.

Иногда пустит свой золотой зайчик, может, кто успеет его поймать. И снова за тучку.

Так, в работе [1] конспективно приведено несколько примеров золотого сечения в физических задачах. Дабы физики не хмурили брови, молодой автор придал своей работе контекст раздаточного материала, который можно рассматривать как разрядку-отвлечение от глубинных хитросплетений и фундаментальных физических проблем. – Почему бы и нет.

Их удел – пьедестал ученых мужей. Хотя со временем всё возвращается на круги своя. Сложные и непонятные вещи способны в одночасье становиться простыми, доступными.

В некоторых задачах связь с золотым сечением просматривается-угадывается сразу, в других не так явно. Вероятно, есть много и третьих, до которых просто не дошли руки, ибо они "надежно" скрыты завесой многочисленных шумовых воздействий, затеняющих действительную картину, откуда их не так просто выудить.

Золотое сечение – идеальная аналитико-геометрическая конструкция со своей математической константой. Поэтому и проверять его следует в неких идеализированных условиях, выделяя главное и обнуляя те или иные несущественные физические параметры.

Мы уже обращались к данной теме [2-4]. В частности, было установлено, что центры масс выпуклых однородных тел с осевой симметрией и самоподобными вырезами при определенных условиях располагаются на границе (поверхности) этих тел.

Так, в двумерном евклидовом пространстве R^2 такая ситуация наблюдается для пластинчатых тел с самоподобным вырезом и коэффициентом подобия k , численно равным константе золотого сечения $\phi = (\sqrt{5} - 1) / 2$. В трехмерном евклидовом пространстве R^3 коэффициент подобия k вырезаемого тела в таком случае равен константе Трибоначчи.

Довольно неожиданным и любопытным является взаимосвязь физической переменной (центра масс) с аттракторами рекуррентных числовых последовательностей, вычисляемых по характеристическим алгебраическим уравнениям. Данный факт заслуживает особого внимания хотя бы потому, что до сих пор подобные числовые последовательности рассматривались в основном абстрактно, без увязки с физическими процессами.

Есть смысл продолжить исследования в контексте рассмотрения физических задач, ответы на которые прямо или косвенно содержат золотое сечение. Естественно начать с механики, изучающей движение и взаимодействие материальных тел. Науки древней и вечно молодой. Включая *статику* с её условиями равновесия механических систем под действием приложенных сил и возникающих моментов, *динамику* с изучением причин изменения механического движения, *кинематику*, дающую математическое описание движения идеализированных тел без рассмотрения причин движения, и др.

I. МЕХАНИКА

1.1. Уравновешивание плоских форм.

Механическая система состоит из трех плоских форм плотностью массы ρ в виде прямоугольной пластины размером $L \times w$, помещенной между двумя круглыми дисками радиусами r без трения [5, с. 42].

В точках касания прямоугольников с дисками радиусы образуют с горизонтом угол наклона θ (рис. 1.1-а).

Найдем минимальную горизонтальную силу, которую необходимо приложить к дискам, чтобы удержать их вместе, а также угол θ , при котором эта сила достигает максимума.

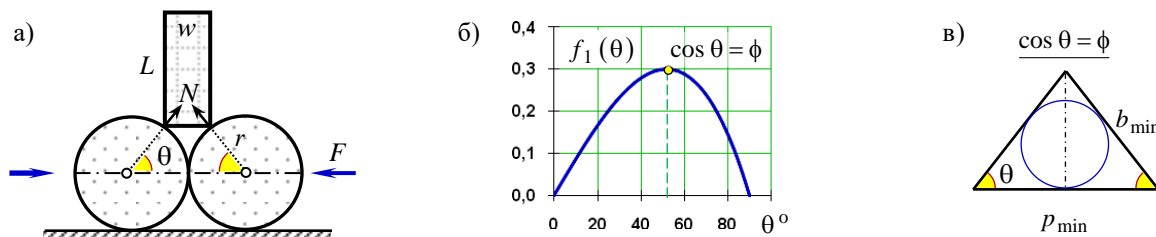


Рис. 1.1. Уравновешивание плоских фигур – двух кругов и прямоугольника: для сцепления кругов максимумы функции $f_1(\theta)$ и минимальной силы F достигаются, если $\cos \theta = \phi$, $\theta \approx 51,83^\circ$

Пусть N – сила нормальной реакции <опоры>.

Масса прямоугольной пластины равна ρLw , где её снование w находится из геометрических размеров $w = 2r(1 - \cos \theta)$.

Приравниваем вес пластины и вертикальные составляющие нормальных сил $2N \sin \theta$:

$$N = g\rho rL(1 - \cos \theta) / \sin \theta.$$

Тогда горизонтальная составляющая силы N равна

$$N \cos \theta = g\rho rL \cdot f_1(\theta),$$

$$f_1(\theta) = (1 - \cos \theta) \cdot \operatorname{ctg} \theta. \tag{1}$$

Функция $f_1(\theta)$ равна нулю в точках $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$ (рис. 1.1-б), поскольку при малых углах θ величина $1 - \cos \theta \approx \theta^2/2$ стремится к нулю быстрее, чем $\sin \theta \approx \theta$.

Обозначим $z = \cos \theta$ и приравняем нулю производную функции $f_1(\theta)$:

$$z^3 - 2z + 1 = (z^2 + z - 1)(z - 1) = 0.$$

Корень $z = \cos \theta = 1$ не дает максимуму функции, поэтому

$$z^2 + z - 1 = 0 \rightarrow z = \phi = (\sqrt{5} - 1) / 2.$$

Таким образом, максимум минимального значения силы F для удержания дисков вместе достигается, если косинус угла равен малой константе золотого сечения ϕ :

$$\boxed{\cos \theta = \phi \rightarrow \theta \approx 51,83^\circ}.$$

Данный угол обладает примечательным свойством [6]: среди всех равнобедренных треугольников с фиксированным радиусом вписанной окружности, боковая сторона b_{\min} и полупериметр p_{\min} являются минимальными в треугольнике с углом $\cos \theta = \phi$ (рис. 1.1-в).

1.2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту.

Тело, брошенное со скоростью v_0 под углом α к горизонту, испытывает силу сопротивления среды F , которая направлена против скорости тела, тормозит его движение и при небольших скоростях пропорциональна скорости движения $F = -kv$, где k – коэффициент сопротивления. Пусть начальная сила сопротивления равна весу тела mg .

Найдем угол α , при котором достигается максимальное расстояние, пройденное телом, прежде чем оно достигнет своей наибольшей высоты подъема h_{\max} (рис. 1.2) [5, с. 80].

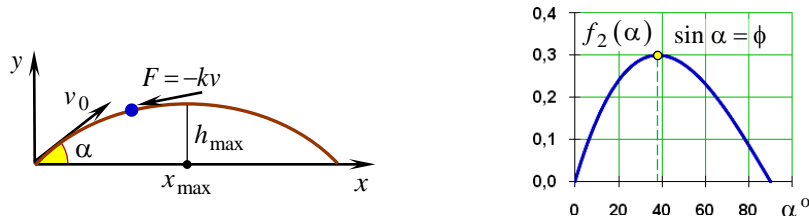


Рис. 1.2. Движение тела, брошенного под углом к горизонту: максимум функции $f_2(\alpha)$ и расстояния x_{\max} достигается, если $\sin \alpha = \phi$, $\alpha \approx 38,17^\circ$

Запишем уравнения движения тела в поле тяжести Земли по осям координат:

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y.$$

Из первого уравнения с учетом начальных условий получаем (t – время полета):

$$v_x = v_0 \cos \alpha e^{-kt}, \quad x = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}).$$

Аналогично по оси ординат y :

$$v_y = \left(v_0 \sin \alpha + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} = (v_0 \sin \alpha + v_0) e^{-kt} - v_0,$$

где $g/k = v_0$ – из условия $mkv_0 = mg$.

В точке максимального подъема: $v_y = 0 \rightarrow e^{-kt} = (1 + \sin \alpha)^{-1}$.

Следовательно, x -расстояние в этот момент равно:

$$x = \frac{v_0^2}{g} f_2(\alpha), \quad f_2(\alpha) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}.$$

Приравнявая нулю производную, находим:

$$f_2'(\alpha) = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha}{(1 + \sin \alpha)^2} \rightarrow \sin^3 \alpha + 2\sin^2 \alpha - 1 = 0,$$

$$z = \sin \alpha, \quad (z^2 + z - 1)(z + 1) = 0 \rightarrow \sin \alpha = \phi.$$

Расстояние максимально, если синус угла равен малой золотой константе:

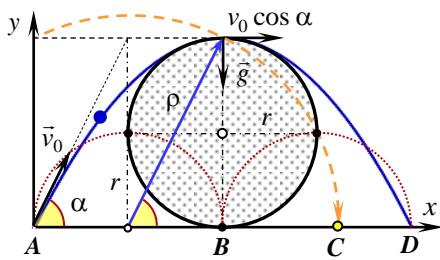
$$\boxed{\sin \alpha = \phi \rightarrow \theta \approx 38,17^\circ}.$$

По сути, это минимальное положительное решение уравнения $\sin \alpha = \text{tg } \alpha$.

Угол α и угол θ из предыдущей задачи (см. рис. 1.2) являются дополнительными, то есть $\alpha + \theta = 90^\circ$.

1.3. Перелет предмета через сферу.

На земле находится сфера радиусом r . Найдем наименьшую скорость v_0 и угол броска предмета, чтобы он перелетел через наивысшую точку сферы [7, с. 10] (рис. 1.3-а).



В условиях отсутствия сопротивления среды траекторией полета станет симметричная парабола, радиус кривизны которой R во всех точках не должен быть меньше радиуса сферы $R \geq r$.

Радиус кривизны $R = v^2/a_n$ минимален в верхней точке полета, где нормальное ускорение максимально и равно ускорению свободного падения $a_n = g$, а скорость становится наименьшей $v = v_0 \cos \alpha$.

Рис. 1.3-а. Переброска предмета через сферический резервуар

$$\text{Поэтому } R = (v_0 \cos \alpha)^2 / g \geq r.$$

В верхней точке вертикальная проекция скорости исчезает $v_0 \sin \alpha - gt = 0$.

Отсюда находим время полета $t = (v_0 \sin \alpha) / g$ до набора наибольшей высоты h , которая совпадает с диаметром сферы $d = 2r$:

$$h = v_0 \sin \alpha \cdot t - gt^2 / 2 = (v_0 \sin \alpha)^2 / 2g = 2r.$$

Объединяя приведенные соотношения с учетом тождества $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, находим:

$$5gr / v_0^2 \leq 1 \rightarrow v_{0 \min} = \sqrt{5gr} = (\phi + \Phi) \sqrt{gr}.$$

Подставляя эту скорость в равенство для высоты h , получаем

$$5gr \sin^2 \alpha = 4gr \rightarrow \sin \alpha = 2/\sqrt{5}, \quad \text{tg } \alpha = 2, \quad \alpha \approx 63,43^\circ;$$

$$\boxed{\text{cosec } \alpha = \phi + 1/2 = \Phi - 1/2}.$$

Расстояние от места броска до вертикальной оси резервуара равно

$$AB = t \cdot v_0 \cos \alpha = 5r \sin \alpha \cos \alpha = 5r \text{tg } \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = 2r.$$

То есть на всей дальности полета AD можно расположить две касающиеся полуокружности радиусом r , таким же, как в исходной сфере.

Угол наклона $\text{tg } \alpha = 2$ соответствует отношению катетов в прямоугольном треугольнике 2:1, которое лежит в основе классического построения золотого сечения.

Проведя дугу радиусом $\rho = \sqrt{5} \cdot r$, на горизонтальной оси получаем золотые сечения:

$$B = G(AC), \quad C = G(BD).$$

Уравнение параболы $y - d = -(x - d)^2 / d$ или $y = -x^2 / d + 2x$, где d – диаметр сферы.

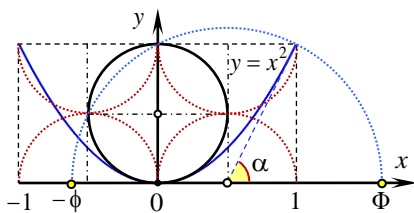


Рис. 1.3-б. Адекватная геометрическая задача об окружностях в параболе: $\text{tg } \alpha = 2$

Рассмотренная переброска предмета через сферический резервуар перекликается с задачей о последовательности кругов, вписанных в параболу [8].

В частности, наибольший круг, который ещё "проваливается" в параболу $y = x^2$, имеет единичный диаметр (рис. 1.3-б).

В обоих случаях касающаяся окружность имеет одинаковую кривизну с параболой в точке касания.

4. Прыганье мяча между кольцами.

Два неподвижных круговых кольца стоят в вертикальной плоскости, соприкасаясь друг с другом. Между ними упруго подпрыгивает мяч (рис. 1.4).

Начальные условия заданы так, что движение мяча всегда происходит по одной параболе, которая входит в кольца под углом θ к горизонту [5, с. 191].

Найдем угол, при котором изменение горизонтальной составляющей импульса мяча Δp_x при каждом отскоке будет максимальным.

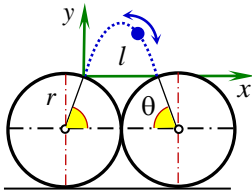


Рис. 1.4. Прыганье мяча между обручами

Пусть v_0 – начальная скорость мяча после отскока.

Уравнения движения мяча, отскочившего от левого обруча без учета сопротивления воздуха, в проекциях на оси:

$$x = v_x t = v_0 \cos \theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - gt^2/2.$$

При падении мяча на второй обруч:

$$y = 0 \rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}, \quad x = l = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g}.$$

Геометрически расстояние между точками отскока равно $l = 2r(1 - \cos \theta)$.

Приравнявая l , находим $v_0 = \sqrt{\frac{gr(1 - \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta}}$, и с учетом равенства (1) имеем:

$$v_x = v_0 \cos \theta = \sqrt{gr \cdot (1 - \cos \theta) \operatorname{ctg} \theta} = \sqrt{gr \cdot f_1(\theta)}.$$

Модуль изменения горизонтального импульса равен удвоенной скорости $|\Delta p_x| = 2v_x$.

Следовательно, максимизация Δp_x достигается за счет максимума функции $f_1(\theta)$.

Значит, косинус угла равен малой золотой константе $\cos \theta = \phi, \theta \approx 51,83^\circ$.

Казалось бы, такие разные физические задачи (см. 1.1), но имеем идеально совпадающие решения.

1.5. Гармонические колебания масс на пружинах.

Золотое сечение (ЗС) появляется в классической механике в задаче о связанных осцилляторах, в которой определяются моды – нормальные (собственные, свободные) колебания и соответствующие им частоты. В частности, задача приведена без решения в учебнике британского профессора Taylor J. [9, с. 448-449, 766], хотя он не упоминает ЗС.

Две одинаковые массы m и две одинаковые бесмассовые пружины с жесткостью k соединены между собой и неподвижной стенкой. После выведения системы из положения равновесия массы совершают нормальные (собственные, свободные) колебания – моды под действием упругих сил вдоль горизонтального стола без трения (рис. 1.5-а) [5, с. 126].

Найдем возможные частоты ω незатухающих гармонических колебаний системы.

Задача решается с помощью ньютоновского подхода либо с помощью лагранжиана.

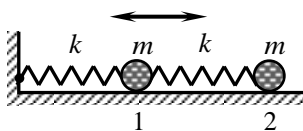


Рис. 1.5-а. Колебание системы: 2 пружины + 2 груза

Согласно второму закону Ньютона движение масс описывается линейными однородными дифференциальными уравнениями [10]:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = 0, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – смещение масс относительно положения равновесия, точки над буквами означают производную по времени; \ddot{x}_1, \ddot{x}_2 – ускорения.

Данная модель является универсальным линейным приближением колебаний с малой амплитудой вблизи потенциального минимума при разложении действующей силы (в виде гладкой потенциальной функции) в ряд Тейлора. Представим общее решение в виде:

$$x_1(t) = A_1 e^{i\omega t}, \quad x_2(t) = A_2 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t},$$

где A_1, A_2 – комплексные амплитуды, ω – определяемая частота, $i^2 = -1$.

Отметим, что мнимая единица i явно помещена в показатель степени, но это не теряет общность. Если частота ω оказывается мнимой, то показатель степени действителен.

Поэтому не принципиально, ставить или не ставить i .

Подставляем это решение в исходные дифференциальные уравнения

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\omega_0^2 = k/m$. Обратим внимание на асимметрию в матрице 2×2 и наличие коэффициента 2. Физически он возникает из-за того, что левая масса испытывает усилия от двух пружин.

Тривиальное решение $A_1 = A_2 = 0$ соответствует состоянию покоя.

Для колебательного процесса определитель матрицы 2×2 должен обратиться в нуль.

Сделав замену переменной $z = (\omega/\omega_0)^2$, находим:

$$\begin{vmatrix} -z + 2 & -1 \\ -1 & -z + 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad z^2 - 3z + 1 = 0, \quad z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = (\Phi^2, \phi^2).$$

Отсюда получаем $\boxed{\omega_1/\omega_0 = \pm \Phi, \quad \omega_2/\omega_0 = \pm \phi}$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Заметим, что идея использовать экспоненциальные функции в линейных дифференциальных уравнениях столь же грандиозна, как изобретение логарифмов.

И если логарифмы позволяют заменить умножение сложением, то дифференцирование заменяется умножением с использованием равенства $(i\omega)^2 = -\omega^2$.

Пример. Удерживая левую массу в равновесном положении, правую массу (рис. 1.5-а) сместим вправо на расстояние d от её равновесного положения и отпустим.

Система начинает колебаться. Начальные условия: $x_1 = 0, \quad x_2 = d, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$.

Введем безразмерные переменные: $\tilde{x}_1 = x_1/x_0, \quad \tilde{x}_2 = x_2/x_0, \quad \tau = \omega_0 t$.

Положение масс во времени описывается следующими функциями (рис. 1.5-б):

$$\tilde{x}_1(\tau) = \frac{\cos(\phi\tau) - \cos(\Phi\tau)}{\phi + \Phi}, \quad \tilde{x}_2(\tau) = \frac{\Phi \cos(\phi\tau) + \phi \cos(\Phi\tau)}{\phi + \Phi}.$$

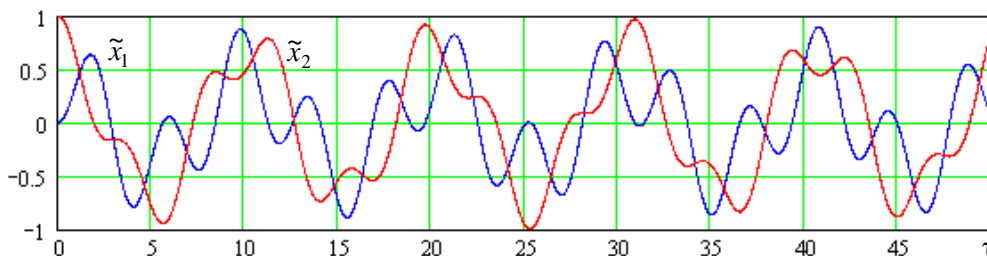


Рис. 1.5-б. Положение масс золотого осциллятора

Рассмотренная задача появляется и в других литературных источниках, только повернута на 90° так, что массы и пружины движутся в однородном гравитационном поле.

При этом получаются те же собственные частоты, – независимо от того, решаем горизонтальный или вертикальный вариант [10]. Однако в формулировках вертикальной задачи мы, как правило, не находим упоминания о ЗС.

За редким исключением, как например, в работе [11, с. 91-92], в которой также обозначены подходы к обобщению задачи о связанных осцилляторах с разным количеством материальных масс и модами, пропорциональными целым степеням Φ^{2n} .

Физики – не лирики, и о золотом сечении скромно молчат. Или просто забывают, что «в действительности всё совершенно иначе, чем на самом деле» (Антуан де Сент-Экзюпери).

Идем дальше...

1.6. Подпружиненная масса на ободе колеса.

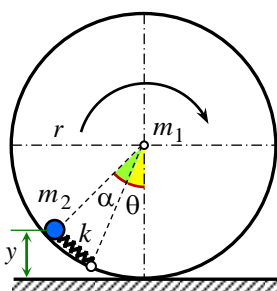


Рис. 1.6. Колебания груза внутри колеса

Шарик массой m_2 может свободно без трения скользить по гладкому ободу колеса радиусом r , которое катится по земле без проскальзывания. Вся масса колеса m_1 сосредоточена в его центре.

Шарик прикреплен к пружине нулевой начальной длины с коэффициентом жесткости (упругости) k , другой конец которой закреплен в точке на ободе (рис. 1.6).

Предположим, что пружина вынуждена двигаться вдоль обода, а груз может свободно проходить через место, где пружина прикреплена к ободу.

Определим частоту колебаний для частного случая $g/r = k/m$, где $m = m_1 = m_2$ [5, с. 255].

Пусть θ – угол поворота колеса относительно положения, при котором точка соединения пружины с колесом находилась на земле, α – угол (по часовой стрелке), стягиваемый пружиной. Разложение синуса в ряд Тейлора $\sin \alpha = \alpha - \alpha^3/3! + \alpha^5/5! - \dots$, и при углах $\alpha < 10^\circ$: $\sin \alpha \approx \alpha$. Тогда при малом угле θ горизонтальное смещение крепежной точки и центра колеса, равно $r \sin \theta \approx r\theta$.

Положение и скорость груза на конце пружины определяются равенствами:

$$\begin{cases} x = r\theta - r \sin (\theta + \alpha), & y = r - r \cos (\theta + \alpha); \\ \dot{x} = r\dot{\theta} - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \cos (\theta + \alpha), & \dot{y} = r(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \sin (\theta + \alpha). \end{cases}$$

Раскладывая в ряд Тейлора скорость груза v_2 , при малых отклонениях можно пренебречь слагаемыми высших порядков малости, тогда она определяется его угловой скоростью и равна $v_2 = r\omega_2 = r\dot{\alpha}$.

Уравнения движения можно получить, продифференцировав по времени законы сохранения энергии и момента импульса. Если связанная система имеет несколько степеней свободы, в данном случае «колесо – шарик», уравнения проще определять через функцию Лагранжа $L = K - U$ в виде разности кинетической K и потенциальной U энергий, записывая уравнения Лагранжа-Эйлера:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0.$$

Лагранжиан системы имеет вид:

$$L = \frac{m_1}{2} (r\dot{\theta})^2 + \frac{m_2}{2} (r\dot{\alpha})^2 - \left[\frac{k}{2} (r\alpha)^2 - m_2 g \cdot r \cos(\theta + \alpha) \right].$$

Находим производные ($m = m_1 = m_2$): $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \ddot{\theta} \cdot mr^2$, $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = \ddot{\alpha} \cdot mr^2$,

$$\partial L / \partial \theta = -mgr \sin(\theta + \alpha), \quad \partial L / \partial \alpha = -mgr \sin(\theta + \alpha) - kr^2 \alpha.$$

При малых углах $\sin(\theta + \alpha) \approx \theta + \alpha$, отсюда получаем уравнения движения:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}(\theta + \alpha) = 0, \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{r}(\theta + \alpha) + \frac{k}{m} \alpha = 0.$$

Положим $\omega_0^2 = g/r = k/m$. Представив общее решение в виде $\alpha = Ae^{i\omega t}$, $\theta = Be^{i\omega t}$ и обозначив $z = (\omega/\omega_0)^2$, получаем
$$\begin{cases} -Bz + B + A = 0; \\ -Az + B + 2A = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $z^2 - 3z + 1 = 0$, $z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = (\Phi^2, \phi^2)$, что соответствует

полноправным решениям:
$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \pm \Phi, \quad \frac{\omega_2}{\omega_0} = \pm \phi, \quad \text{где } \omega_0 = \sqrt{g/r} = \sqrt{k/m}.$$

To be continued...

Литература:

1. QiLin Xue. The Golden Ratio In High School Physics Problems. – August 8, 2020. – <https://physoly.tech/static/files/golden.pdf>.
2. Василенко С.Л. Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15957, 20.06.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1661-vs.pdf>.
3. Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В. Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16023, 30.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm>.
4. Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В. Барицентры-аттракторы в многомерных пространствах с приложением об эволюции Вселенной // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16061, 05.09.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161696.htm>.
5. David Morin. Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions. – Harvard University, 2008. – 720 p. – <https://handoutset.com/wp-content/uploads/2022/07/Introduction-to-classical-mechanics-with-problems-and-solutions-David-Morin.pdf>.
6. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Ч. 8. Треугольные формы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28314, 30.01.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165221.htm>.
7. Механика и теория относительности. Задачи и методы их решения: Учеб. пособие / Ю.Н. Колмаков, Ю.А. Пекар, В.А. Семин. – Тула: Тул. гос. ун-т, 2002. – 189 с. – https://cdn.bc-pf.org/resources/physics/problem_sets/TulGU_Mekhanika_i_teoriya_otnositelnosti.pdf.
8. Василенко С.Л. Последовательности кругов, вписанных в параболу, и золотая пропорция // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28133, 26.10.2022. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165132.htm>.
9. Taylor J.R. Classical Mechanics. – California: University Science Books, 2005. – 800 p. – <https://neuroself.files.wordpress.com/2020/09/taylor-2005-classical-mechanics.pdf>.
10. Moorman C.M., Goff J.E. Golden ratio in a coupled-oscillator problem // European Journal of Physics, 28 (2007), 897-902. – https://faculty.lynchburg.edu/goff_j/Moorman_Goff_EJP_2007.pdf.
11. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. – Ridero, 2023. – 398 с.

