

## Деление пополам и золотая пропорция. Часть 18. Физические задачи: механика, маятники и гармонические колебания

Колебания – проверка на прочность, они расшатывают даже гибкость.

В классической и квантовой механике одну из главных ролей играет *гармонический осциллятор* (ГО). Большое количество систем ведут себя как ГО при малом отклонении от равновесия. К ним относятся разные маятники (математический, физический, торсионный), грузы на пружинах, электрические колебательные контуры, колебания атомов в молекулах и твердых телах, движение с большой скоростью в вязкой среде и др.

Свободное (гармоническое) колебание такой системы представляет собой периодическое движение около положения равновесия, и описывается простым дифференциальным уравнением второго порядка  $x'' + \omega^2 x = 0$ , где  $\omega$  – циклическая частота.

В зависимости от природы ГО и характера колебательного процесса под переменной  $x$  могут пониматься разнообразные физические величины: смещение материальной точки, угол отклонения, ток в электрическом колебательном контуре и т.д.

Колебания изохронны, то есть их период не зависит от амплитуды.

Конечно, ГО – всего лишь приближенная модель, описывающая реальные процессы, но во многих случаях модель весьма удобная и полезная. Хотя далеко не всегда она пригодна для описания сложных колебательных процессов, встречающихся в природе и технике.

Золотое сечение (ЗС) – идеальная аналитико-геометрическая конструкция со своей математической константой. Поэтому и проверять его следует в неких идеализированных условиях, выделяя главное и обнуляя те или иные несущественные физические параметры.

ЗС также иногда называют *гармоническим делением*. Но это не верно.

Любое деление целого на две неравные части в произвольном отношении всегда образует гармоническую пропорцию, в которую входит классическое (с древних времен) среднее гармоническое.

То есть ЗС – частный случай гармонического деления, которому соответствует золотая пропорция. При этом больший отрезок в ЗС является средним геометрическим меньшего и целого отрезков. Поэтому, если появляется желание как-то выделить и особо подчеркнуть гармонию ЗС, то следует употреблять слово-пароним: "гармоничное деление".

Тем не мене, гармонические колебания и золотое сечение с его особой гармонией имеют общее основание – "гармонию", и просто обязаны иметь общие точки-контакты не только в терминологически-описательной форме, но и в конкретных физических задачах.

Будем искать...

## I. МЕХАНИКА

### 1.7. Пружинный маятник.

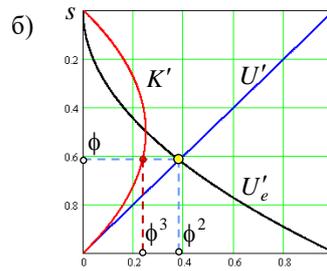
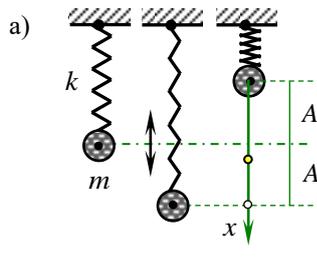
Рассмотрим гармонический осциллятор в виде вертикального пружинного маятника.

Механическая система состоит из пружины с коэффициентом упругости (жесткостью)  $k$ , один конец которой жестко закреплен, а ко второму подвешен груз массой  $m$  (рис. 1.7-а)

Пружина является идеально упругой, её масса мала по сравнению с массой груза и не учитывается. Груз движется в окружающей среде без трения. Привести систему в движение можно посредством отклонения массы из положения равновесия.

Без потери общности будем считать, что в начальный момент времени пружина не деформирована и находится в расслабленном состоянии.

После того как груз отпущен, возникают свободные незатухающие колебания с одной степенью свободы по вертикали, под воздействием силы упругости пружины и силы тяжести.



$$s = \frac{x}{2A}$$

$$(U', U_e', K') = (U, U_e, K) \cdot E^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} U' & K' & U_e' \\ \phi^2 & \phi^3 & \phi^2 \end{array}$$

$$\phi = \phi^2 + \phi^3$$

Рис. 1.7. Превращение энергии в вертикальном пружинном маятнике:

б) равенство потенциальных энергий груза  $U$  и пружины  $U_e$  соответствует золотому сечению

Рассмотрим процесс перманентного превращения механической энергии:

$K, U$  – соответственно кинетическая и потенциальная энергия груза;

$U_e$  – потенциальная энергия упруго деформированной пружины или упругая (*elastic*) потенциальная энергия.

Начало отсчета поместим на оси  $x$ , направленной вниз, в точке  $x = 0$  с наивысшим положением груза, максимальным значением его потенциальной энергии  $U(x) = mg(2L - x)$  и минимальным значением упругой потенциальной энергии пружины  $U_e(x) = kx^2/2$ .

Интервал колебаний равен  $2A$ , где  $A$  – амплитуда, как максимальное расстояние от точки равновесия. Общая энергия системы равна сумме двух потенциальных и одной кинетической энергии:

$$E(x) = U + U_e + K = mg(2A - x) + kx^2/2 + mv_x^2/2 = \text{const}.$$

В крайних точках кинетическая энергия равна нулю.

В самой высокой ( $x = 0$ ) и самой низкой ( $x = 2A$ ) точках общая энергия обусловлена потенциальными энергиями соответственно груза  $E(0) = 2mgA$  и пружины  $E(2A) = 2kA^2$ .

В точке равновесия существует равенство силы тяжести  $F_g = mg$  и силы упругости пружины  $F_{тен.} = kA$ , откуда следует  $k = mg/A$ ,

Найдем положение материальной точки, при котором  $U = U_e$ .

$$U = U_e \Rightarrow mg(2A - x) = kx^2/2 = mgx^2/(2A) \rightarrow (2A - x) = x^2/(2A).$$

Решение этого квадратного уравнения относительно переменной  $x > 0$ :

$$x = A \cdot (\sqrt{5} - 1) = 2A \cdot \phi,$$

где  $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$  – малая константа золотого сечения.

Таким образом, положение маятника, при котором потенциальные энергии груза и пружины равны  $U = U_e$ , делит интервал колебаний золотым сечением.

Перейдем к относительным (безразмерным) параметрам (см. рис. 1.7-б):

$$U'(s) = \frac{U}{E} = 1 - s, \quad U_e'(s) = \frac{U_e}{E} = s^2, \quad K'(s) = \frac{K}{E} = s - s^2, \quad s = \frac{x}{2A}.$$

Равенство относительных потенциальных энергий в точке  $s = x/(2A) = \phi$  дает целые степени константы золотого сечения:  $U'(\phi) = U_e'(\phi) = \phi^2$ ,  $K'(\phi) = \phi^3$ .

### 1.8. Математический маятник с пружиной.

На невесомом стержне длиной  $l$  находится груз массой  $m$ . К середине стержня прикреплен невесомая пружина жесткостью  $k$ . Второй конец пружины прикреплен к стене.

При вертикальном положении стержня пружина не деформирована.

Трение отсутствует, колебания малые гармонические. Начало координат совместим с точкой закрепления стержня (рис. 1.8).

Полная энергия системы складывается из кинетической  $K$  и потенциальной  $U$  энергий массы и потенциальной энергии  $U_e$  деформированной пружины.

Координаты точечной массы  $x = l \sin \theta$ ,  $y = l \cos \theta$ ;

компоненты её скорости  $v_x = \dot{x} = l \cos \theta \cdot \dot{\theta}$ ,  $v_y = \dot{y} = -l \sin \theta \cdot \dot{\theta}$ ;

кинетическая энергия:

$$K = m(v_x^2 + v_y^2)/2 = m(l\dot{\theta})^2/2.$$

Примем без потери общности, что в равновесном положении потенциальная энергия маятника равна нулю. Тогда при отклонении на малый угол  $\theta$  потенциальная энергия составит:

$$U = mgl(1 - \cos \theta) \approx mg l \theta^2 / 2,$$

где  $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$ ,  $g$  – ускорение свободного падения.

Координата конца пружины  $x = l/2 \cdot \sin \theta$ .

Потенциальная энергия деформированной пружины

$$U_e = k(l/2)^2 \sin^2 \theta / 2 \approx k(l\theta)^2 / 8.$$

Полная энергия системы – постоянная величина, не зависящая от времени:

$$W = \frac{m(l\dot{\theta})^2}{2} + \frac{mgl\theta^2}{2} + \frac{k(l\theta)^2}{8}.$$

Продифференцировав  $W$  по времени, получаем дифференциальное уравнение колебаний механической системы:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta} + \frac{kl^2\theta\dot{\theta}}{4} = 0.$$

После деления на  $ml^2\dot{\theta}$ , получаем уравнение гармонического осциллятора:

$$\ddot{\theta} + \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{4m}} \theta = 0.$$

Положим  $\omega_0^2 = g/r = k/m$ , тогда  $\omega = \omega_0 \sqrt{5}/2$ , где  $\omega_0$  – частота колебаний,

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \Phi - \frac{1}{2} = \phi + \frac{1}{2}.$$

Как видим, одним из факторов появления золотого сечения в задаче стало деление стержня пополам в точке его крепления с пружиной.

Параметр  $\sqrt{5}/2 = \Phi - 1/2$  численно равен длине диагонали прямоугольника со сторонами 1 и 1/2 – классической фигуры для геометрического построения золотого сечения.

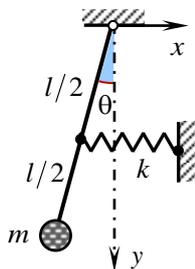
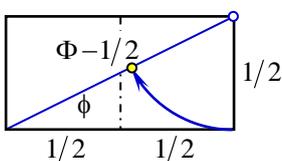


Рис. 1.8. Маятник на стержне + пружина



**1.9. Математический маятник с несколькими грузами.**

Логическим обобщением математического маятника является маятник с несколькими грузами [12].

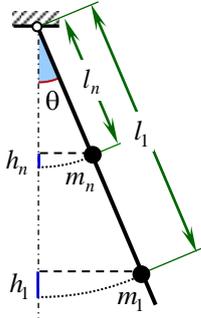


Рис. 1.9-а. Математический маятник с массами  $m_1 \div m_n$

Пусть к жесткому невесомому стержню прикреплены точечные массы  $m_k$  на расстоянии  $l_k$  соответственно от точки подвеса,  $k = 1, 2, \dots, n$ . В положении равновесия стержень расположен вертикально. В системе отсутствуют потери энергии из-за трения в оси вращения и сопротивления воздуха. Качнем стержень (рис. 1.9-а).

При некотором угле  $\theta$  каждая масса поднимается на высоту  $h_k = l_k(1 - \cos \theta)$ , их линейные скорости движения равны  $v_k = \Omega l_k$ , где  $\Omega$  – угловая скорость вращения стержня.

Подставляя эти величины в закон сохранения кинетической и потенциальной энергии

$$m_1 v_1^2 / 2 + \dots + m_n v_n^2 / 2 = m_1 g h_1 + \dots + m_n g h_n,$$

получаем  $\Omega^2 = \frac{2g}{L}(1 - \cos \theta)$ , где  $L = \frac{m_1 l_1^2 + \dots + m_n l_n^2}{m_1 l_1 + \dots + m_n l_n}$  – длина математического маятника, колебания которого эквивалентны исходной системе с  $n$  массами.

Квадрат частоты колебаний системы равен  $\omega^2 = g \frac{m_1 l_1 + \dots + m_n l_n}{m_1 l_1^2 + \dots + m_n l_n^2}$ .

1) Пусть  $n = 2$ . Зафиксируем длину  $l_1$  и будем изменять длину  $l_2$ .

Сравним колебания  $\omega$  исследуемого маятника с колебаниями независимого (опорного) математического маятника с частотой  $\omega_1 = \sqrt{g/l_1}$ :

$$y(x) = \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = \frac{1 + \mu x}{1 + \mu x^2},$$

где  $\mu = m_2/m_1$  – принятое отношение масс,  $x = l_2/l_1$  – переменное отношение длин.

Найдем экстремум функции  $y(x)$ , приравнявая нулю производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu(1 + \mu x^2) - 2(1 + \mu x)\mu x}{(1 + \mu x^2)^2} = 0 \rightarrow (1 + \mu x^2) - 2(1 + \mu x)x = 0;$$

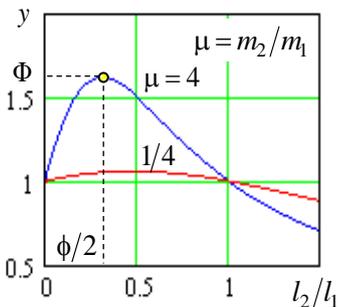


Рис. 1.9-б. Маятник с двумя грузами  $m_k$

$$\mu x^2 + 2x - 1 = 0, \quad x = \frac{\sqrt{1 + \mu} - 1}{\mu}, \quad y_{\max} = \frac{\sqrt{1 + \mu} + 1}{2}.$$

Примечательно, что в точке экстремума соблюдается равенство:  $x \cdot y_{\max} = 0,5$ .

Визуально просматривается связь с золотым сечением.

Действительно (рис. 1.9-б):

$$\mu = 4 \rightarrow \boxed{x = \frac{\phi}{2}, y_{\max} = \Phi}; \quad \mu = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x = 2\phi^3, y_{\max} = \frac{\Phi^3}{4}}.$$

В частности, если к математическому маятнику длиной  $l_1$  и массой  $m_1$  на стержень прикрепить дополнительную массу  $m_2 = 4m_1$ , то максимум изменившегося отношения частот  $(\omega/\omega_1)^2$  соответствует расстоянию  $l_2 = l_1 \cdot \phi/2$  и равен константе золотого сечения  $\Phi$ .

2) Для одинаковых масс  $m = m_1 = m_2 = \dots = m_n$  формулы имеют вид:

$$\omega^2 = g \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_n^2}, \quad y = \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = \frac{1 + l'_2 + \dots + l'_n}{1 + l'^2_2 + \dots + l'^2_n}, \quad l'_i = l_i/l_1.$$

Можно поэкспериментировать с распределением равных масс.

Например, рассредоточить массы на стержне единичной длины с использованием геометрической прогрессии (знаменатель  $q < 1$ ) и постепенным их концентрированием:

а) ближе к концу маятника:

$$l_k = \frac{1 - q^k}{1 - q^n} \rightarrow y_k = \frac{A}{B}, \quad A = n\alpha - \frac{q}{1 - q}, \quad B = n\alpha^2 - \frac{q}{1 - q^2}(q + 2\alpha);$$

б) ближе к оси вращения маятника:

$$l_k = \frac{q^{k-1} - q^n}{1 - q^n} \rightarrow y_o = \frac{A}{B}, \quad A = \frac{1}{1 - q} - n\beta, \quad B = n\beta^2 + \frac{1}{1 - q^2}(1 - 2\beta q).$$

где отношение  $\frac{l_{k+1} - l_k}{l_k - l_{k-1}} = q < 1$  – постоянно,  $l_1 = 1$ ;  $\alpha = \frac{1}{1 - q^n}$ ;  $\beta = \frac{q^n}{1 - q^n}$ .

Характер поведения маятника с  $n$  точечными массами, распределенными на единичном стержне  $l_1 = 1$ , представлен на рисунке 1.9-в.

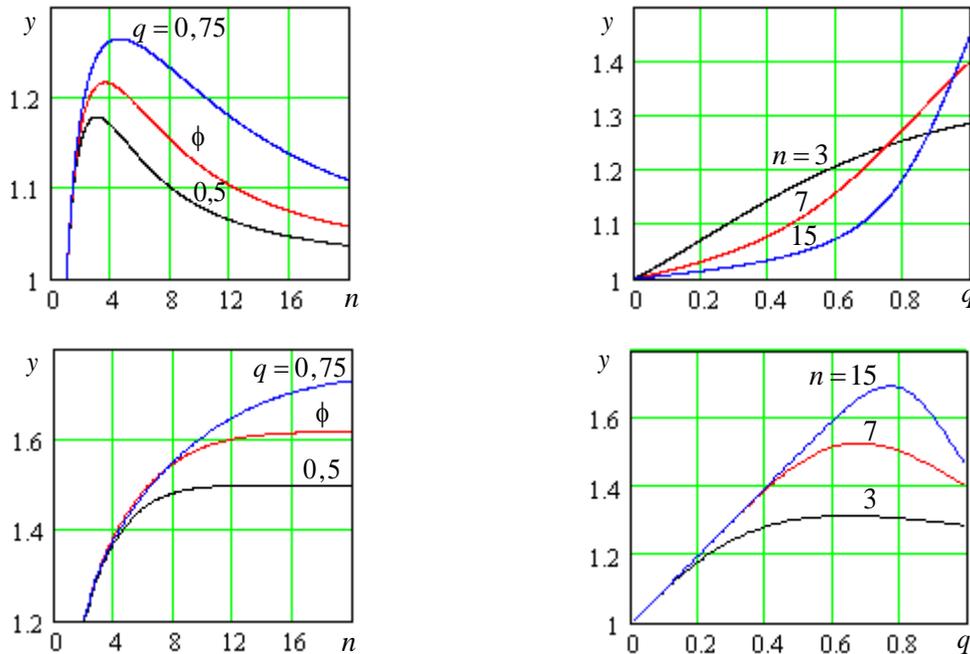


Рис. 1.9-в. Поведение системы: математический маятник с  $n$  точечными массами, распределенными на единичном стержне  $l_1 = 1$  согласно геометрической прогрессии

Пределы отношений  $y = (\omega/\omega_1)^2$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_k = \left\| \frac{\alpha}{\alpha^2} \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n) = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_o = \frac{1 - q^2}{1 - q} = 1 + q.$$

Визуальное распределение масс на стержне согласно золотому сечению  $q = \phi$  показано на рисунке 1.9-г и, по сути, является разбиением целого на множество аддитивных пропорциональных частей [13].

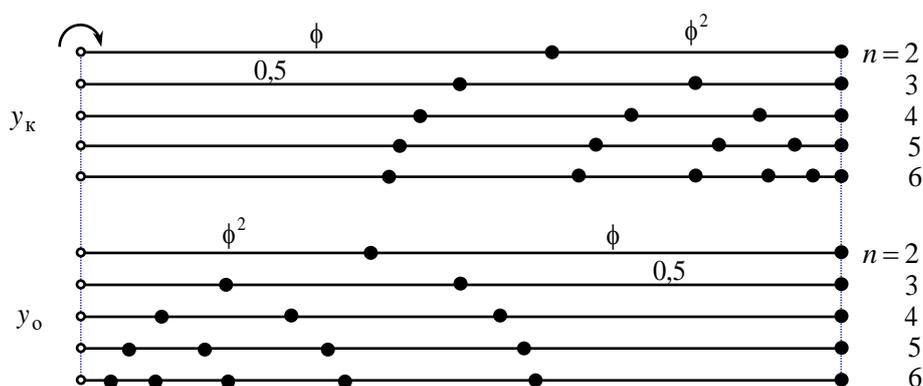


Рис. 1.9-г. Примеры распределения масс на стержне единичной длины  $l_1 = 1$ : каждая материальная точка является золотым сечением отрезка между соседними точками

### 1.10. Двойной маятник.

Двойной маятник – это система с двумя степенями свободы, которая образуется в результате последовательного соединения двух маятников посредством различных связей: твердых, упругих, электромагнитных и т.п.

Золотое сечение просто обречено своему проявлению в подобных двойственных механических системах (структурах, образованиях), поскольку удвоение или деление пополам вместе с целым являются предвестником золотой модели – пятого порядка  $\sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$ .

Если его вывести из равновесия произвольным образом и предоставить самому себе, то в общем случае каждый из шариков будет совершать сложные интригующие движения, в которых трудно уловить какую-либо закономерность.

В зависимости от начальных условий, проявляет разнообразное динамическое поведение, демонстрируя, как регулярные, так и хаотические виды движения [14].

Чувствительность к изменению начальных условий – одна из определяющих характеристик хаоса. Поведение системы хаотично, но не случайно, хотя всё равно не поддается точному предсказанию. Разве что чисто теоретически, с абсолютным знанием начального запускаящего воздействия. Любая погрешность в начальных условиях не позволяет нам спрогнозировать результат на продолжительный отрезок времени.

При некоторых малых возмущениях движение маятника оказывается достаточно простым: оба шарика совершают гармонические колебания с практически одинаковой частотой. Такие типы движения называются нормальными колебаниями системы или модами. Амплитуды и фазы колебаний находятся в определенном отношении друг с другом.

Нет смысла искать золотое сечение среди хаоса, пусть даже детерминированного.

Логично ограничиться гармоническими колебаниями. Хотя гармоничный и гармонический – разные по значению слова-паронимы, они имеют одинаковое происхождение от слов, гармония, лад, упорядоченность и т.п.

Рассмотрим двойной плоский маятник – механическую систему, состоящую из точечных масс  $m_1, m_2$ , подвешенных на невесомых нерастяжимых нитях или невесомых стержнях длиной  $l_1, l_2$  в однородном поле тяжести (ускорение силы тяжести  $g$ ), с неподвижной точкой подвеса (рис. 1.10).

Выведенный из равновесия маятник совершает свободные колебания в плоскости чертежа. Система консервативная, то есть без трения и потерь энергии.

Начало координат в точке подвеса, ось  $y$  – по вертикали вниз. Математическое описание удобно провести в рамках Лагранжевого формализма, выбрав в качестве обобщенных координат углы отклонений  $\theta_1, \theta_2$  точечных масс от положения равновесия.

Заметим, что Лагранжиан не вносит нового физического содержания по сравнению с уравнением Ньютона, но является удобной формой движения при переходе от декартовых координат к любым другим координатам, – свойство ковариантности.

Двойной маятник подробно исследован в литературе по теоретической механике.

Функция Лагранжа системы равна разности кинетической энергии  $K$ , зависящей от скорости, и потенциальной  $U$  энергии, зависящей от координат масс:

$$L = (K_1 + K_2) - (U_1 + U_2) = \sum_n \frac{m_n v_n^2}{2} - \sum_n m_n g y_n,$$

где  $v_n^2 = \dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2$  – скорости масс по координатам,  $n = 1, 2$ .

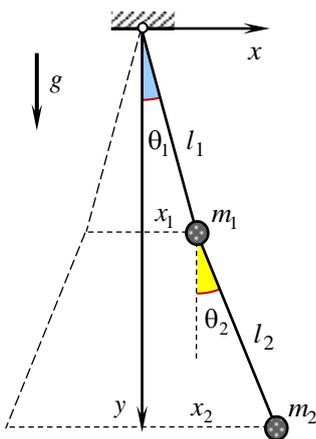


Рис. 1.10. Двойной маятник: 2 нити – 2 груза

Выразим декартовы координаты через обобщенные:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1, & x_2 &= x_1 + l_2 \sin \theta_2; \\ y_1 &= l_1 \cos \theta_1, & y_2 &= y_1 + l_2 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Находим производные и скорости масс:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1, & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2; \\ \dot{y}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1, & \dot{y}_2 &= \dot{y}_1 - \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2; \\ v_1^2 &= \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = (l_1 \dot{\theta}_1)^2; \\ v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_2 \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

После подстановки этих величин в равенство для  $L$  получаем [15, с. 22, 94; 16, с. 44-46]:

$$L = \frac{M}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + M g l_1 \cos \theta_1 + m_2 g l_2 \cos \theta_2.$$

Если отклонения углов малы  $\theta_1 \ll 1, \theta_2 \ll 1$ , то колебания маятников вблизи положения равновесия будут гармоническими.

При этом косинусы углов вблизи нулевого аргумента допустимо разложить в ряд Тейлора, ограничившись только квадратичными членами:  $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ .

Лагранжиан с точностью до константы принимает вид:

$$L = \frac{M}{2} l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - \frac{M}{2} g l_1 \theta_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \theta_2^2,$$

где  $M = m_1 + m_2$  – общая масса системы,  $\cos(\theta_1 - \theta_2) \approx 1$ .

## Часть 18. Физические задачи: механика, маятники и гармонические колебания

Соотношения Лагранжа-Эйлера дают уравнения движения системы в виде двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = Ml_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + Mgl_1 \theta_1 = 0; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 gl_2 \theta_2 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ml_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + Mgl_1 \theta_1 = 0; \\ l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 + gl_2 \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Представим общее решение в виде  $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$ :

$$\begin{pmatrix} M(g - \omega^2 l_1) & -\omega^2 m_2 l_2 \\ -\omega^2 l_1 & g - \omega^2 l_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Равенство  $A_1 = A_2 = 0$  соответствует состоянию покоя.

Нетривиальное решение получается, если определитель матрицы  $2 \times 2$  равен нулю:

$$M(g - \omega^2 l_1)(g - \omega^2 l_2) - \omega^4 m_2 l_1 l_2 = 0,$$

откуда следует характеристическое биквадратное уравнение:

$$\omega^4 m_1 l_1 l_2 - \omega^2 MLg + Mg^2 = 0,$$

где  $L = l_1 + l_2$  – суммарная длина двойного маятника (от Лагранжиана уже ушли).

Решением уравнения являются две собственные частоты нормальных мод:

$$\omega^2 = g \frac{M}{m_1} \frac{1}{2l_1 l_2} \left( L \pm \sqrt{L^2 - 4 \frac{m_1}{M} l_1 l_2} \right).$$

Красивая формула с любопытным подкоренным выражением. Рассмотрим наиболее характерные частные случаи: равных масс  $m_1, m_2$  и равных длин  $l_1, l_2$ .

1)  $m_1 = m_2 = m, M = 2m$ :

$$\omega^2 = g \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 2l_1 l_2}}{l_1 l_2} = g \frac{L \pm \sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1 l_2}.$$

Полученная формула симметрична относительно длин.

Если равны и длины  $l_1 = l_2 = l$ , то  $\omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega_0^2$ , и движение материальных масс происходит с одной из частот:

$$\omega' = \omega/\omega_0 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 0,765 \text{ – в одинаковой фазе;}$$

$$\omega'' = \omega/\omega_0 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 1,848 \text{ – в противофазе,}$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  – "опорная" частота одного осциллятора,  $c^{-1}$ .

Данные величины связаны с параметрами правильного восьмиугольника:

$\omega' = 2 \sin(\pi/8)$  – длина ребра с единичным радиусом описанной окружности;

$\omega'' = 2 \sin(3\pi/8)$  – отношение длины короткой диагонали к стороне.

Выбрав отношение длин один к двум, получаем:

$$\omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{g}{l} \rightarrow \boxed{\frac{\omega}{\omega_0} = \Phi^{\pm 1}}$$

Таким образом, при равных массах и соотношении длин нитей 1 : 2 (в любом порядке) отношение частот равно большой  $\Phi$  или малой  $\phi = \Phi^{-1}$  константе золотого сечения.

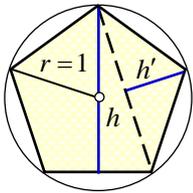
2)  $l_1 = l_2 = l$ ,  $L = 2l$ . Тогда  $\gamma = 1 + m_2 / m_1$

$$\omega^2 = g \frac{M}{m_1} \frac{1}{2l^2} \left( 2l \pm \sqrt{4l^2 - 4 \frac{m_1}{M} l^2} \right) = \left( \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \gamma} \right) \cdot \frac{g}{l}, \quad \gamma = 1 + \frac{m_2}{m_1}$$

Положив  $m_1 / m_2 = 4 \rightarrow \gamma = 5/4$ , получаем:

$$\omega_{1,2}^2 = \left( \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4} \right) \cdot \frac{g}{l} \rightarrow \boxed{\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = \frac{1 + \Phi^{\pm 2}}{2}}$$

Данное отношение можно переписать в эквивалентном виде  $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 \pm \frac{\Phi^{\pm 1}}{2}$  или как



два числа  $1 + \Phi/2$  и  $1 - \phi/2$ , которые связаны с параметрами правильного пятиугольника, вписанного в окружность единичного радиуса:

$\omega' = 1 - \phi/2 = 1 - \sin(\pi/10) \approx 0,691$  – высота  $h'$  равнобедренного треугольника, образованного диагональю фигуры и двумя смежными сторонами;

$\omega'' = 1 + \Phi/2 = 1 + \cos(\pi/5) \approx 1,809$  – высота  $h$  фигуры,

То есть при равных длинах нитей двойного маятника отношение квадратов частот колебаний характеризуется "отклонением" половины малой или большой константы ЗС от единицы.

Примерные начальные условия ( $t = 0$ ):

$x_1 = x_2 = \dot{x}_2 = 0$ ,  $\dot{x}_1 = C$  – соответствует небольшому толчку по первому шарик;

$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{x}_2 = 0$ ,  $x_1 = C$  – отведение в сторону и отпускание первого шарика.

Если тяжелый маятник  $m_1 \gg m_2$  слегка отвести в сторону и опустить, то через некоторое время его колебания внезапно прекращаются. Одновременно легкий маятник приходит в быстрое движение, которое спустя некоторое время также прекращается, и снова возникают колебания тяжелого маятника. Такие чередующиеся колебания двух масс сопровождаются циклическим обменом энергий и носят название *биений*.

Внешне картина выглядит довольно неожиданно, но эффектно: без видимых причин один маятник "замирает", а другой, особенно маленький, "пускается в пляс".

На частоту колебаний это не влияет.

Подобные движения могут возникать, например, при спуске на парашюте, подъеме по веревочной лестнице и т.п.

### Вместо заключения.

Всё-таки колебания – великая вещь.

Всюду, где есть энергия и движение, от квантов до Вселенной, так или иначе всё пульсирует, вибрирует, колеблется.

Богу, видимо, тоже свойственны колебания, что породило философию.

Но «ничто так не может заколдовать, как колебания женщины» (В. Плетинский).

Постоянные колебания простительны только маятнику...

*To be continued...*

**Литература:**

1. QiLin Xue. The Golden Ratio In High School Physics Problems. – August 8, 2020. – <https://physoly.tech/static/files/golden.pdf>.
2. Василенко С.Л. Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15957, 20.06.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1661-vs.pdf>.
3. Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В. Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16023, 30.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm>.
4. Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В. Барицентры-аттракторы в многомерных пространствах с приложением об эволюции Вселенной // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 16061, 05.09.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161696.htm>.
5. David Morin. Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions. – Harvard University, 2008. – 720 p. – <https://handoutset.com/wp-content/uploads/2022/07/Introduction-to-classical-mechanics-with-problems-and-solutions-David-Morin.pdf>.
6. Василенко С.Л. Деление пополам и золотая пропорция. Ч. 8. Треугольные формы // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28314, 30.01.2023. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165221.htm>.
7. Механика и теория относительности. Задачи и методы их решения: Учеб. пособие / Ю.Н. Колмаков, Ю.А. Пекар, В.А. Семин. – Тула: Тул. гос. ун-т, 2002. – 189 с. – [https://cdn.bc-pf.org/resources/physics/problem\\_sets/TuIGU\\_Mekhanika\\_i\\_teoriya\\_otnositelnosti.pdf](https://cdn.bc-pf.org/resources/physics/problem_sets/TuIGU_Mekhanika_i_teoriya_otnositelnosti.pdf).
8. Василенко С.Л. Последовательности кругов, вписанных в параболу, и золотая пропорция // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 28133, 26.10.2022. – URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001h/00165132.htm>.
9. Taylor J.R. Classical Mechanics. – California: University Science Books, 2005. – 800 p. – <https://neuroself.files.wordpress.com/2020/09/taylor-2005-classical-mechanics.pdf>.
10. Moorman С.М., Goff J.E. Golden ratio in a coupled-oscillator problem // European J. of Physics, 28 (2007), 897-902.
11. Ковалев А.Н. В поисках пятого порядка. – Ridero, 2023. – 398 с.
12. Хаджи П., Михайленко А. Маятник с несколькими грузами. – <http://kvant.mccme.ru/pdf/1998/03/kv0398khadji.pdf>.
13. Василенко С.Л. Разбиение целого на множество аддитивных пропорциональных частей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 22071, 06.05.2016. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001e/00162943.htm>.
14. Levien R.B. Double pendulum: An experiment in chaos // American J. of Physics, 61 (11), 1993, 1038-1044. – <http://itl7.elte.hu/~zsolt/Oktatas/Klab/AJP001038.pdf>.
15. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – В 10 томах. Т. 1: Механика.– 4-е изд., испр. – М: Наука, Физматлит, 1988. — 216 с. – <https://kzf.kpi.ua/wp-content/uploads/2021/09/landau1.pdf>.
16. Малые колебания. 1. Линейные колебания: учеб. пособие / А.С. Ковалев, Е.В. Езерская, З.А. Майзелис, Т.С. Чебанова. – Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2013. – 112 с.

