С.Л. Василенко

Формальные нееединичные конструкции троичной структуризации

К знанию ведут три пути (Конфуций):
путь *размышления* – это путь самый *благородный*,
путь *подражания* – это путь самый *легкий*,
путь *опыта* – это путь самый *горький*.

В работе [1] рассмотрены абстрактно-математические модели троичной структуризации на основе единичных конструкций.

Одна из них является продолжением векторной модели академика Раушенбаха [2].

Однако с заменой ортогонального расположения единичных векторов на их ориентацию вдоль боковых рёбер правильной трёхгранной пирамиды высотой "одна треть".

В результате сумма трёх единичных векторов становится равной по модулю единице.

В отличие от исходной модели, которая по своей сути представляет свёртку-разложение в связке «три вектора – один вектор», когда модуль суммирующего вектора в √3 раза больше составляющих его ортов-компонентов.

В этом контексте модель типа √3-вектора мало чем отличается от многих других математических структур, объединяющих три числа.

И не только числа...

Всё это наводит на мысль применить расширительный подход к формированию троичного (триединого) образа, отодвинув на второй план непременное использование единичных составляющих. То есть понятие целого вовсе не обязательно интерпретировать или увязывать с математической единицей. – В конечном счёте, всё это донельзя условно.

Но одновременно занимательно и захватывающе.

О тайнах математических троиц (триад) размышлял выдающийся математик современности Владимир Арнольд [3, 4][1].

Его ключевое наблюдение состоит в том, что в математике встречается много троиц.

Высказана мысль, что все они объединяют несколько прямоугольных коммутативных диаграмм. Эти знания позволяют выдвинуть новые гипотезы, которые могут оказаться истинными теоремами.

Среди 12 троек, в частности, выделяются:
- тройка чисел вещественных – комплексных – кватернионов;
- алгебры Ли $E6 - E7 - E8$;
- тройка тел Платона в виде тетраэдра – куба – додекаэдр и др.

Оказывается, тема троичного структурирования одновременно интересна в математической и тринитарной сферах.

Итак, рассмотрим некоторые формальные нееединичные конструкции с элементами реализации троичных особенностей.

Мы не будем проводить здесь тщательные сборки-разборки объектов синтеза. Основное внимание сосредоточим на самой возможности генерирования-формирования троичных образов в их триединой структуризации.

Допустимо говорить и о триаде – «совокупности из трёх элементов, каким-то образом связанных друг с другом» [5, п. 1.1] в рамках цельной тринитарной методологии, архетипа триединства и системно-триадного пути к синтезу [6, п. 2].

Логично начать с обычных числовых конструкций, ограничившись позиционной десятичной системой счисления.

---

[1] См. также le Bruyn, Lieven (20 June 2008), *Arnold's trinities version 2.0*.

Магия чисел состоит в том, что они обладают неким абсолютным авторитетом точности и беспристрастности. Поэтому число является одним из главных объектов манипуляций-преобразований. И это не случайно.

Числовой язык воспринимается нами максимально достоверным, ибо не может лгать.

Обращение с числами как с цифровыми структурами и манипуляции с такими цифровыми объектами часто позволяют увидеть ранее не проявляемые закономерности.

Но сначала небольшое уточнение.

Два или три? – Запись общего плана $X \oplus Y \oplus Z \Leftrightarrow W$ – не есть модель Троицы в чистом виде.

Ибо помимо трёх объединяющихся субстанций (X, Y, Z) присутствует и некоторая четвёртая W – формальная сумма-объединение, в определённой мере отдельная "ипостась". Или личность, сущность, индивидуум, единица, бог (Д. Бернар[2]).

Как говорил Алексей Лосев: «Если строго придерживаться конструкции триады у Прокла, то всякая триада должна будет иметь у нас еще и такой момент, который выше самой триады и является ее подлинным, уже сверхтриадным единством» [7, ч. 4, II, § 6].

Другими словами, в рамках целочисленных структур не удаётся в полной мере абсолютизировать троичный образ.

Три на входе и один на выходе, как ни крути, но всё-таки немного больше трёх. Хотя бы за счёт структурирования. Даже если составляющие элементы-сущности присутствуют разномоментно.

Все они выходят за рамки обычных n составляющих, добавляя сумму – конечную итоговую структуру по принципу $n + 1$ [8].

На формальном уровне Троица де факто склоняется к кварте.

Так что минимальное число взаимодействующих объектов для возникновения троичности – два:

$$X \oplus Y \Leftrightarrow W.$$

В таком контексте арифметическое произведение $1 \times 1 = 1$ или векторную сумму $\overline{1} + \overline{1} = \overline{1}$ с таким же успехом можно считать минимальными структурами троичности.

В конечном счёте, это дело вкуса и предпочтений.

Как говорится, «если бы треугольники создали себе бога, он был бы с тремя сторонами» (Шарль Монтескье).

Нечто похожее в математике отражает пифагорова тройка – кортеж из трёх целых чисел (a, b, c), удовлетворяющих соотношению $a^2 + b^2 = c^2$.

Неединичные конструкции.

Мы уже обращались к теме формального отображения триады.

Так, в статье [9] рассмотрена возможность применения концепции триномиальной гармонии, основанной на трёхчленных уравнениях, применительно к анализу христианского догмата о Троице.

В работе [1] синтезированы математические модели "троично-единичной" структуризации.

Ниже излагаются новые взгляды-варианты и разнообразные интерпретации удивительного и собирательного образа, каковым является троичный феномен.

---

[2] http://www.trinitas.ru/rus/doc/0205/002a/02050018.htm.

1) Достаточно информативной и содержательной, на наш взгляд, является *тройка базовых троичных числовых тождеств*:

$$1^1 + 2^1 = 3^1;$$
$$3^2 + 4^2 = 5^2;$$
$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Как говорилось выше, объединение двух объектов в третий также допустимо характеризовать понятием "триединства".

Примечательно, что следующие степени уже не обладают такими уникальными свойствами: два по два или три по три подряд идущих натуральных чисел.

То есть три шестерки $6^3 = 6\cdot6\cdot6$ выступают завершающей кульминацией (!) этого необыкновенного и краткосрочного действа.

Конечно, возможны иные расширительные образования, например:

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3; \qquad 1^3 + 6^3 + 8^3 = 9^3.$$

Причём последнее равенство оригинально записывается через первые три числа:

$$1^3 + (2\cdot3)^3 + \left(2^3\right)^3 = \left(3^2\right)^3.$$

Есть ещё одно великолепное свойство, связанное с тройкой элементов. Число 6 является одновременно треугольным числом $(1+2+3 = 6)$ и факториалом $(3! = 1\times2\times3 = 6)$.

То есть $1+2+3 = 1\times2\times3$.

Подобными числами (и треугольными, и факториалами) ещё являются только 1 и 120 (гипотеза Томашевски): $1+2+...+15 = 120$; $5! = 120$.

Как здесь не вспомнить оригинальное троичное произведение факториалов:

$$1! \cdot 3! \cdot 5! = 6!$$

Или сочетание степеней «*трёх сумм по три слагаемых и трём степеням*»:

$$336 = (3^1 + 3^1 + 6^1) + (3^2 + 3^2 + 6^2) + (3^3 + 3^3 + 6^3).$$

Есть смысл обратить внимание на то, как «сумма трёх даёт одно».

Например, уравнение $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ не имеет натуральных корней.

А вот для уравнения Эйлера $\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{y}^3 + \boldsymbol{z}^3 = \boldsymbol{w}^3$ справедливо решение Рамунаджана:

$$\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{a}^2 + 5\boldsymbol{ab} - 5\boldsymbol{b}^2;$$
$$\boldsymbol{y} = 4\boldsymbol{a}^2 - 4\boldsymbol{ab} + 6\boldsymbol{b}^2;$$
$$\boldsymbol{z} = 5\boldsymbol{a}^2 - 5\boldsymbol{ab} - 3\boldsymbol{b}^2;$$
$$\boldsymbol{w} = 6\boldsymbol{a}^2 - 4\boldsymbol{ab} + 4\boldsymbol{b}^2.$$

В частном случае $a = 1, b = 0$ получаем великолепие третьих степеней $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

Вместе с тем существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх точных кубов. Например, числа вида $8k + 7$.

2) *Сумма трёх кубов* [10]. В контексте троичной структуризации особый смысл приобретают числа, которые раскладываются на три секции, которые затем возводятся в куб.

То есть число, содержащее $3m$ цифр, разбивается на три секции по m цифр так, что сумма третьих степеней этих секций образует исходное число:

$$\underline{a...b}\,\underline{c...d}\,\underline{f...e} = (\underline{a...b})^3 + (\underline{c...d})^3 + (\underline{f...e})^3,$$

где подчёркивание означает одно число, состоящее из нескольких десятичных цифр.

Подобных чисел достаточно много, и они составляют последовательность (A056733[3]): 153, 370, 371, 407, 165033, 221859, 336700, 336701, 340067, 341067, 407000, 407001, 444664, 487215, 982827, 983221, 166500333, 296584415, 333667000, 333667001...

Например,

$$\underline{22}\,\underline{18}\,\underline{59} = 22^3 + 18^3 + 59^3,$$
$$\underline{333}\,\underline{667}\,\underline{001} = 333^3 + 667^3 + 1^3.$$

Числа Армстронга (идеальные цифровые инварианты, pluperfect digital invariants – PPDI) – содержат n цифр и раскладываются в виде суммы этих цифр в степени n:

$$\underbrace{\overline{ab\,...\,cd}}_{n} = a^n + b^n + ... + c^n + d^n .$$

В десятичной системе счисления они представлены последовательностью A005188 и для $n = 3$ равны: 153, 370, 371, 407. Например, $135 = 1^3 + 3^3 + 5^3$.

В нашем случае модельно-числовые конструкции *Армстронга* являются частным случаем «суммы трёх кубов».

3) Весьма любопытным выглядит иное сочетание сумм степеней:

$$336 = (3^1 + 3^1 + 6^1) + (3^2 + 3^2 + 6^2) + (3^3 + 3^3 + 6^3).$$

Выбирая приемлемый ракурс представления-интерпретации, данная числовая запись также легко проходит "кастинг" на роль формальной неединичной конструкции троичной структуризации.

4) *Три двойки*. Поль Дирак нашёл способ выразить любое натуральное число всего через три двойки и допустимые математические операции: $n = -\lg_2\left(\lg_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}_{n}\right)$, где количество радикалов равно n.

Например, $5 = -\lg_2\left(\lg_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}\right)$.

То есть *три двойки выражают любое натуральное число*! – Чем не модель триады, воспроизводящей бесконечную ($n \to \infty$) сущность?

Небезынтересно предложить и обратные модели-процедуры. Пользуясь знаками математических действий, *любое действительное число в своих трёх повторениях можно привести к единице*.

Например,

$$\left(\frac{n}{n}\right)^n = \left(\frac{n\,!}{n\,!}\right)^n = (n-n)^n = 1 .$$

5) *Рекуррентно-цифровые инварианты* (recurring digital invariant – RDI) [10].

<u>Трёхзвенное превращение</u> чисел 55–250–133 <u>по кубам</u> их цифр:

55: $5^3 + 5^3 = 250$,

250: $2^3 + 5^3 + 0^3 = 133$,

133: $1^3 + 3^3 + 3^3 = 55$.

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™) – http://oeis.org/.

Здесь хорошо отражена идея подвижного преобразования-перевоплощения структуры.

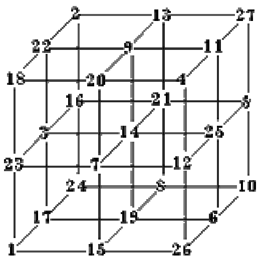
Можно сказать, имеет место числовая динамическая модель.

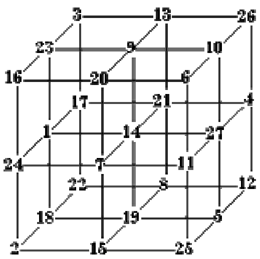
6) *Магический куб*. Весьма любопытна чисто числовая модель троичной структуризации в виде магических кубов (МК). Это трёхмерная версия магического квадрата, где воочию просматриваются признаки трёхмерного единства.

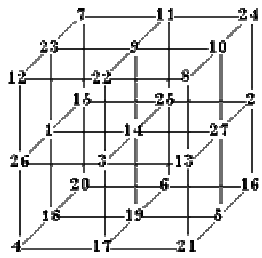
В таких конструкциях однотипные числа (натуральный ряд, простые числа и др.) определенным образом выстраиваются в красивый и связный трёхмерный массив $n \times n \times n$ или n квадратных таблиц $n \times n$.

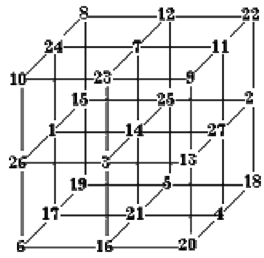
Первейшее условие для простого МК – это равенство сумм чисел в столбцах, строках и колонках, а также главных пространственных диагоналях.

Четыре базовых простых магических куба $3 \times 3 \times 3$ имеют вид[4]:









Традиционный (классический) простой магический куб порядка n – куб размерами $n \times n \times n$, заполненный различными натуральными числами от 1 до n^3 так, что суммы чисел в любом из $3n^2$ рядов, параллельных рёбрам куба, а также на четырёх (пространственных) диагоналях куба равны одному и тому же числу – магической константе куба [11].

Хотя для трёхмерного куба с магической константой 42 подобных диагоналей, проведенных через центр с числом 14, оказывается не 4, а 10 (на примере левого куба):

- пространственные 1–27, 2–26, 4–24, 10–18;
- плоскостные 5–23 и 12–16, 6–22 и 11–17, 8–20 и 13–15.

Математическим образом единства здесь выступает полная трёхмерная упорядоченность первых 27 натуральных чисел

Теоретически количество чисел в ряду неограниченно.

Таким образом можно структурировать весь натуральный ряд. Причём многими способами.

Позволим себе небольшое отклонение. Ибо, как тут не вспомнить афоризм Л. Кронекера[5] (1886), что «Бог создал натуральные числа, всё остальное – дело рук человеческих».

Действительно, это люди придумали и определяют для своих вычислений иррациональные и трансцендентные числа типа $\sqrt{2}$, e, π и другие.

Природе нет нужды их "держать в своей голове". Равно как и выражать тот же корень из двух $\sqrt{2}$ конкретным числом.

Вполне хватает двух катетов 1:1 под прямым углом.

Да и где они те квадраты в реальной жизни?

Видел ли их кто-нибудь, когда-нибудь и где-нибудь, кроме как в своём воображении, учебнике или рукотворном произведении?

Это человек соизмеряет диагональ квадрата с его стороной.

Природе это ни к чему.

---

[4] *Harvey Heinz*. Perfect Magic Hypercubes. – 2009. – http://members.shaw.ca/hdhcubes/cube_perfect.htm.

[5] «Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk».

Нет таких процессов, где она могла бы это использовать.

Собственно и человек может без этого обойтись. Просто предполагая там, где это нужно, что $\sqrt{2}$ – это мыслимая диагональ квадрата 1×1.

Если природа без этого спокойно обходится, то зачем это нужно человеку?

В чём выражается исключительная радость или наоборот минорная драма познания о несоизмеримости отрезков 1 и $\sqrt{2}$? – Она лишь свидетельствует о том, что придуманные системы счисления не совершенны и далеки от идеальных прототипов.

Точно также как несоизмеримы длины окружности и диаметра.

Вот и выкручиваемся, как можем. Кстати сказать, довольно не плохо.

Хотя природа действует в ином ключе.

Она просто не выстраивает идеальных форм (кривых, фигур, расстояний).

Почему мы об этом здесь говорим? – Всё это касается и триединого образа.

Даже если он реально существует или воплощается, то совершенно не обязательно в трёх (много) или более (очень много) абсолютно равных ипостасях.

Именно поэтому неединичные конструкции вполне полноправны для создания-воспроизводства объектов троичной структуризации.

7) *Золотое сечение*. Иногда Троицу рассматривают сквозь призму золотого сечения.

Это пошло ещё от математика-монаха древности Луки Пачоли с его восторженным гимном золотой «Божественной пропорции» и необычным триединством.

Подразумевалось, что малый часть геометрического отрезка олицетворяет бога-сына, большая часть – бога-отца, а весь отрезок – бога-духа святого.

Божественная квалификация-символика – знак трепетного отношения к замечательному аддитивно-двучленному образу, асимптотически связанного со знаменитыми числами Фибоначчи. Тем более, в то время просто ещё не существовало подходящего материала-пластилина, из которого математик мог бы слепить удобоваримую божественную символику.

Хотя в транскрипции и созвучности элементов золотое сечение при всей его уникальности здесь маловыразительно.

Целое делится всего лишь на две части. Причём большую и меньшую.

При этом само целое, так или иначе, выступает противовесом своим частям.

Их равнозначность или равноценность нарушается. Разве что частично проявляется в соотношениях, образующих золотую пропорцию.

То есть тройственная конструкция трёх равноправных предметов просматривается с трудом и недюжинным воображением.

Наиболее предпочтительна здесь модель тройственной конструкции – *три*боначчи.

8) Пьер де Ферма́ сформулировал (1637) так называемую "золотую теорему": всякое натуральное число – либо треугольное, либо сумма двух или трёх треугольных чисел.

Или в общем случае: всякое натуральное число – либо k-угольное, либо сумма (от двух до k) k-угольных чисел вида $K_n = n\cdot\dfrac{(k-2)(n-1)+2}{2}$.

Этой теоремой занимались многие выдающиеся математики. Полное доказательство сумел дать Огюстен Коши (1813) [12, с. 10–11].

Любое натуральное число представимо в виде <u>суммы не более трёх треугольных чисел</u>.

Треугольное число[6] – это количество кружков, которые могут быть расставлены в форме равностороннего треугольника.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_number; http://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html.

Арифметически n-е треугольное число – это сумма первых n натуральных чисел

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

По мнению пифагорейцев, фигурные числа играют важную роль в структуре мироздания.

Нам же остаётся добавить, что они идеально подходят для троичного структурирования.

9) *Репьюниты и репдигиты*. Моноцифровое число или репдигит (от англ. repdigit – repeated digit) – число с повторяющимися цифрами. Его также называют как "репдиджит" [13, с. 10].

Достаточно удобной, на наш взгляд, является его визуализация (обозначение) с применением нижнего индекса:

m_n – число, запись которого в выбранной позиционной системе счисления содержит n одинаковых цифр (знаков) m.

То есть цифра m повторяется n раз. Например, $1_4 = 1111$, $6_3 = 666$, $4_2 = 44$ и т.д.

Понятно, что запись m_0 буквально означает "пустое место".

В репдигитах геометрическое и арифметическое среднее их цифр совпадает.

Частный случай $m = 1$ в математике выделен отдельно.

Репьюниты (*repunit* [14] от англ. *repeated unit* – повторенная единица) – натуральные числа, которые в любой позиционной системе счисления записаны одними единицами [15; 16, с. 379]. Это слово всё чаще появляется в зарубежных статьях, приобретая силу нового международного термина.

Репьюнит[7] порядка (длиной) n – число, состоящее из n единиц: $R_n = 1_n$.

В роли числовой троичной структуры вполне может выступать любой репьюнит вида $\underline{kkk}$: 111, 222, ..., 999.

Примечательно, что 111 = 3·37. Или $\underline{kkk} = 3k \cdot 37$.

Кроме того, $(111)_n = 111 \cdot 1(001)_{n-1} = 3 \cdot 37 \cdot 1(001)_{n-1}$.

Например, 111 111 111 = 111·1001001.

Кстати, $37 = 3^2 + 7^2 - 3 \cdot 7$. Подобным числом является ещё только 48.

При замене минуса на плюс образуются ещё три числа 13, 63 и 91.

Например, $63 = 6^2 + 3^2 + 6 \cdot 3$.

Или в общем виде $\underline{ab} = a^2 + b^2 + a \cdot b$.

Кроме того, $37 \cdot (3+7) = 3^3 + 7^3$.

Среди репдигитов особо выделяется число 666 [17].

Например, куб числа 666 представляется как сумма кубов трех "моноцифровых" чисел:

$$333^3 + 444^3 + 555^3 = 666^3.$$

А сумма 666-ти первых простых чисел-палиндромов (A002385) равна 2391951273.

Удивительно, но цифры данной суммы удовлетворяют следующему замечательному равенству (G.L.Honaker Jr., 1998):

$$2^3 + 3^3 + 9^3 + 1^3 + 9^3 + 5^3 + 1^3 + 2^3 + 7^3 + 3^3 = 666 + 666 + 666.$$

Само число 666 является суммой трех последовательных чисел-палиндромов

$$666 = 212 + 222 + 232.$$

[7] http://ru.wikipedia.org/wiki/Репьюниты, http://en.wikipedia.org/wiki/Repunit, http://mathworld.wolfram.com/Repunit.html.

И уже совсем плотно облегает троичные основы-устои *оригинальная степенная модель*:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 = 6;$$

$$1^4 - 2^4 + 3^4 = 66;$$

$$1^6 - 2^6 + 3^6 = 666.$$

Ничего похожего в теории чисел мы больше не находим.

10) Существует *только три числа*, которые могут быть записаны в виде суммы четвертых степеней их цифр:

$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$ $\quad 8208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$ $\quad 9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$

И наоборот, существует только четыре числа, которые могут быть записаны в виде *суммы третьих степеней* их цифр:

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$, $\quad 370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$,

$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$, $\quad 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$.

Вот такое взаимное дополнение.

Для пятых степеней таковых чисел уже шесть: 4150, 4151, 54748, 92727, 93084, 194979. Причём среди них 4-значные, 5-значные и одно 6-значное число.

Относительно общего отображения чисел в виде сумм степеней известна общая замечательная теорема[8]:

для любого натурального k существует такое натуральное N (зависящее от k), что каждое натуральное число представимо в виде суммы не более чем N слагаемых, являющихся k-ми степенями целых чисел.

Что касается функции $N(k)$, то здесь в настоящее время почти ничего не ясно.

Всякое натуральное число представимо в виде суммы четырех квадратов, девяти кубов (число 9 не может быть уменьшено), 21 штуки четвертых степеней (вот тут, кажется, что 21 может быть уменьшено до 19). Далее – полный туман.

Напомним гипотезу Эйлера о сумме степеней: n-ю степень натурального числа нельзя представить в виде суммы n-х степеней $(n-1)$ других натуральных чисел.

Гипотеза была высказана в 1769 г. как обобщение великой теоремы Ферма, которая верна для частного случая $n = 3$.

Однако во второй половине 20 века последовали сенсации в математике.

В 1966 г. Ландер–Паркин (L.Lander–T.Parkin) нашли контрпример для $n = 5$:

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5.$$

В 1988 Элкис обнаружил аналогичное равенство для случая $n = 4$:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

Как оказалось, подобных троичных сумм существует гораздо больше[9].

Позже Роджер Фрай (Roger Frye) усовершенствованным методом перебора нашёл наименьший аналог для $n = 4$:

$$95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4.$$

Для $n = 6$ гипотеза Эйлера по-прежнему остается открытой проблемой.

---

[8] http://virlib.eunnet.net/books/numbers/text/20.html.

[9] http://euler413.narod.ru/. – Приведено 27 решений $A^4 = B^4 + C^4 + D^4$.

11) *Египетский треугольник.*

1) Алгебраически это частный случай более общей закономерности про *равные суммы квадратов последовательных чисел*.

В левой части $n+1$, в правой части n слагемых.

Первое число равно $x = n(2n+1)$.

Например (n = 2): $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$.

В общем виде: $\sum_{k=0}^{n} (x+k)^2 = \sum_{k=n+1}^{2n} (x+k)^2$.

2) Числа египетского треугольника (3, 4, 5) образуют пифагорейскую тройку.

Примечательно, что квадрат любого комплексного числа $(a+ib)^2 = x+iy$ даёт именно такую тройку чисел $(x,\ y,\ z) = \left(a^2 - b^2,\ 2ab,\ a^2 + b^2\right)$.

В общем случае комплексное число можно возвести в любую целую степень $(a+ib)^n = x+iy$. По-прежнему $z = a^2 + b^2$. Только теперь тройка числе удовлетворяет диофантому уравнению: $x^2 + y^2 = z^n$.

Например, $(4+i)^3 = 52+47i,\ \ z = 4^2 + 1^2 = 17$. Откуда $52^2 + 47^2 = 17^3$.

Египетский треугольник образуется при $(2+i)^2 = 3+4i,\ \ z = 2^2 + 1^2 = 5$.

12) *Формула Эйлера* $e^{\pi i} = -1$ – самая красивая одиночная формула во всей математике. В ней в высшей степени неожиданно **объединены три константы** (не считая –1), которые были открыты в различные эпохи и с очень разной мотивацией [18, с. 24–25].

Число π = 3,1415926… – наследие греков. Само его существование как действительного числа (то есть как чего-то подобного длине отрезка или площади квадрата) нельзя осознать без дополнительного мыслительного усилия.

Проблема квадратуры круга – это не просто очередная геометрическая задача; это тест на легитимность с неясным результатом.

Напротив, число *e* = 2,718281828… является продуктом уже зрелой математики середины XVII века. Это – теоретический побочный продукт, с одной стороны, изобретенных в это время таблиц логарифмов, являвшихся средством оптимизации численных алгоритмов (замена умножения сложением), и с другой стороны – задачи о "квадратуре гиперболы".

Никакие классические геометрические конструкции не приводили к числу *e* и не наводили на мысль о существовании соотношения между *e* и π.

Это уже позже появились разные математические соотношения, среди которых, на наш взгляд, особо выделяется непревзойдённое числовое тождество гениального математика С. Рамануджана [19, с. 63; 20]

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{2}{1+}\ \frac{3}{1+}\ \frac{4}{1+}\ldots\right)=\sqrt{\frac{\pi\cdot e}{2}}\ .$$

Здесь воистину фантастически-непостижимым образом числа π, *e* выражаются через сумму бесконечного ряда и бесконечной цепной дроби!

Наконец, определение "мнимого" числа $i = \sqrt{-1}$, рассматривавшегося многими современниками как нечто чудовищное, было для Кардано буквально вынужденным шагом, предпринятым в связи с формулами для решения кубического уравнения в радикалах. Когда все три корня являются вещественными, при использовании этих формул в промежуточных вычислениях появляются комплексные числа.

Формула Эйлера представляет собой замечательный пример "бесконечных" тождеств, с которыми он (а позднее – Рамануджан) блестяще умел обращаться.

На самом деле тождество $e^{\pi i} = -1$ является частным случаем ряда $e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$, дающего более общее выражение для степени $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

13) Очень необычным выглядит связующее триединство фундаментальных констант (π, e, ϕ) [21, 22]. Наиболее отчётливо оно проявляется через их "квадратичное происхождение" в обычных конических сечениях с порождением трёх типов кривых второго порядка: окружности–эллипса, гиперболы и параболы.

Развитие квадратичной темы приводит к базовому тождеству в математических началах гармонии – видоизмененному равенству Эйлера $e^{i\pi} + \phi(\phi + 1) = 0$.

Здесь присутствует отношение шести констант математики: нуля, двух единиц (действительной 1 и мнимой i) и тройки "квадратичных" чисел (π, e, ϕ).

Данное тождество не следует воспринимать буквально для вычисления одних чисел по другим. Оно имеет больше методологический и философский смысл содержательности понятия "единства" в математике. Ну, и конечно, как замечательная триада, имеющая общий "корень жизни" в конических сечениях.

14) *Тримормно-троичная модель*. В математике известны десятичные триморфные числа, куб которых оканчивается цифрами самого числа.

Например, **249**^{3} = 15 438 **249**.

Аналогично для автоморфного числа его квадрат оканчивается цифрами этого числа. Например, **625**² = 390**625**.

Каждое автоморфное число является триморфным. Обратное действо верно не всегда.

Автоморфных чисел не так уж и много.

Примечательно, что они имеют любопытную схему своей бесконечной самогенерации или воспроизводства

$$5^2 = \underline{2}5;$$
$$25^2 = \underline{6}25;$$
$$625^2 = 3\underline{90}625;$$
$$90625^2 = 8212\underline{8}90625;$$
$$890625^2 = 793212\underline{\mathbf{2}}890625;$$
$$\mathbf{2}890625^2 = 835571\underline{1}2890625;$$
$$12890625^2 = 166168\underline{2}12890625$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Хорошо видно как последовательно наращиваются цифры: 2, 6, 90, 8, 2, 1, 2.

Причём, каждая добавочная цифра в начале нового числа – это предшествующая цифра в квадрате предыдущего числа.

В своём проявлении этот процесс бесконечен.

То есть мы можем легко нарастить сколь угодно большое автоморфное число.

Но его первая и третья степени тоже оканчиваются абсолютно такой же последовательностью цифр.

В частности, три степени (1, 2, 3):

$\underline{1665095808638110005574234232308961090041066199773922562599182128906 25}^{\mathbf{1}}$ =
16650958086381100055742342323089610900410661997739225625991821289 0625;

$\underline{1665095808638110005574234232308961090041066199773922562599182128906 25}^{\mathbf{2}}$ =
27725440519442014550562124852694477867544093531653803118978548952562**166509580863**
81100055742342323089610900410661997739225625991821289 0625;

$\underline{1665095808638110005574234232308961090041066199773922562599182128906 25}^{\mathbf{3}}$ =
461655148015681219316252416899730114632903633498516876924793816313559473082487 84
75212298111688871659584849339636637926619776998568483812**16650958086381100055742 3**
42323089610900410661997739225625991821289 0625.

Данное свойство имеет чётко обусловленную математическую запись равенства чисел по модулю (n – количество цифр исходного числа M_n):

$$M_n^1 \left(\mathrm{mod}\, 10^n\right) = M_n^2 \left(\mathrm{mod}\, 10^n\right) = M_n^3 \left(\mathrm{mod}\, 10^n\right),$$

Таким образом, первая, вторая и третья степени исходного n-цифрового десятичного числа имеют абсолютно одинаковые n-цифровые окончания.

Принимая исходное число с теоретически бескрайним количеством цифр как некоторую единичную монаду, мы имеем де-факто равенство (по модулю) трёх числовых сущностей (ипостасей), выражаемые через первые три степени.

Так что налицо *цифровая триморфно-троичная модель*.

Каждая из трёх степеней существует сама по себе.

И одновременно они имеют единую общую подоснову.

15) **Калейдоскопы.** Название калейдоскоп (от греч. *красивый вид смотреть*) придумал сэр Дэвид Брюстер, написавший трактат о его теории и истории [23, с. 62].

Это детская игрушка, в которой разноцветные кусочки стекла, многократно отражаясь в трёх зеркалах, воссоздают единый красивый узор.

Зеркала составляют боковые грани правильной треугольной призмы, образуя между собой углы, равные $\pi/3$.

Если бы эти углы были другими, то отражения накладывались бы друг на друга и не создавали единого симметричного узора.

Описание теоретически возможных калейдоскопов равносильно описанию многоугольников <многогранников> Коксте ра, <двугранные> углы которых являются целыми частями π [24].

Нетрудно найти все многоугольники Коксте ра на евклидовой плоскости. Как известно, сумма углов n-угольника равна $\pi(n-2)$, так что среднее арифметическое его углов равно $\pi(1-2/n)$, что при $n = 4$ составляет $\pi/2$.

Как следует из определения, все углы многоугольника Коксте ра не больше $\pi/2$.

Поэтому единственным четырехугольником Коксте ра является прямоугольник.

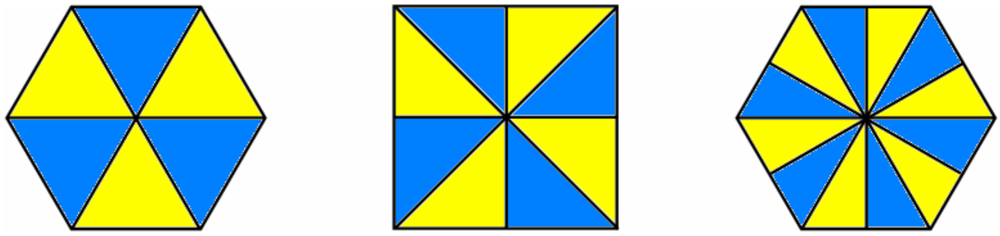
Ну, а многоугольников Коксте ра с большим числом сторон вообще не существует.

Так как сумма углов треугольника равна π, то для треугольника Коксте ра с углами π/k, π/l, π/m мы получаем (после деления на π) диофантово уравнение

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1.$$

С точностью до перестановки тройки чисел $(k,\ l,\ m)$ имеются три решения:

(3, 3, 3) (2, 4, 4) (2, 3, 6)



Таким образом, имеется ровно три треугольника Кокстера: равносторонний, равнобедренный прямоугольный и прямоугольный с углами 30 и 60 градусов ($\pi/3$ и $\pi/6$). – С соответствующим разбиением плоскости.

Не считая прямоугольника, это дает три типа плоскостных евклидовых калейдоскопов.

Одна, из наглядно-демонстрационных троичных моделей.

Как триада порождает одно целое. – В виде структурированного проявления трёх в одном.

16) *Нулевые формы*. Ряд выражений с наличием нуля приводит к неопределённостям. Некоторые из них могут раскрываться[10].

Например, выражение 0^0 не определено, однако $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

Поэтому верно: $0^0 \equiv 1,\quad 0^1 \equiv 0$. Откуда получаем степенную "нулевую" модель по аналогии с 1-моделью

$$\boxed{0^{0^0} \equiv 0}\,.$$

Но вот уже $0^0 \equiv 0^{0^{0^0}} \equiv 1$.

Понятно, что толкование триединой сущности через ассоциативные связи с нулём вызывает изначально некий психологический барьер.

Но это только на первый взгляд.

В действительности, ноль – это полноправный и всеобъемлющий математический объект.

Более того, он нам позволяет частично, а возможно и полностью, избавиться от комплекса неполноценности в интерпретации триединства в видимой части нашего временно-пространственного бытия. И перенести необъяснимые или трудно воспринимаемые положения «три в одном» в некую запредельную область с её условной монадой, описываемой свойством нуля.

То есть, как бы происходит трансформация двух миров: божественного и его видимой нами проекции воспринимаемого бытия. С соответствующей «заменой переменных» $0 \Leftrightarrow 1$.

В этой связи, как ни странно, но вместо единичной модели $1\times1\times1 \equiv 1$ более реалистичной выглядит именно нулевая троичная модель

$$\boxed{0 \times 0 \times 0 \equiv 0}\,.$$

[10] Раскрытие неопределённостей // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=38428840.

Ноль здесь являет-воплощает *предельную формализацию* невидимого (глазами земного наблюдателя) божьего мира!

То есть целое может вполне изображаться нулём.

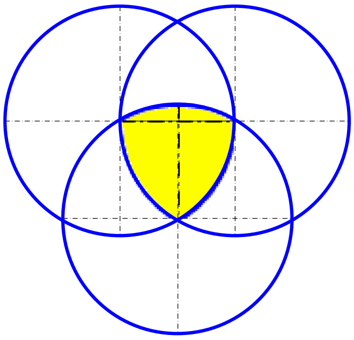
Более того, здесь просматриваются соответствующие физические концепции, например, о формировании мироздания из абсолютного вакуума.

Ноль – также символ невидимого присутствия действенной силы.

При желании допустимо выстроить красивую нуль-гипотезу (0-теорию).

17) *Треугольник Рело*[11] – плоская выпуклая геометрическая фигура постоянной ширины a. Среди прочих подобных фигур она выделяется рядом экстремальных свойств: наименьшей площадью, минимальным возможным углом при вершине, наименьшей симметричностью относительно центра.

А вот круг – фигура, обладающая противоположным экстремальным свойством. Среди всех фигур постоянной ширины его площадь максимальна.



Треугольник строится с помощью одного циркуля путём проведения трёх равных окружностей радиусом a: 1-центр выбирается произвольно, 2-центр – любая точка первой, 3-центр – любая из двух точек пересечения первых двух окружностей.

Для единичной ширины $a = 1$ имеем основные геометрические характеристики с использованием корня из трёх: площадь – $S = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$, периметр – $p = \pi$, радиусы вписанной и описанной окружностей $r = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Заметим, что существует бесконечно много кривых с заданной постоянной ширины, равной, например единице.

Все они обладают одинаковым периметром π. При этом окружность ограничивает максимальную площадь, а треугольник Рело – минимальную.

Так что имеем красивый математический объект, совершенно подходящий на роль троичной модели во главе с "богом математики" – вездесущим числом "пи" – π.

Его экстремальные свойства становятся очень даже кстати.

Наименьшая площадь ассоциируется с монадой.

Минимально возможные углы при вершине воссоздают образ максимального сближения-тяготения вершин-ипостасей.

И катится такое колесо между двумя параллельными прямыми ... в вечность.

Кстати, треугольник, составленный из равных дуг окружности, использовал в своих рукописях ещё Леонардо да Винчи в XV веке, в том числе при составлении карты мира.

В целом совершенно точно можно говорить о системной триаде, где три дуги – «три равноправных элемента находятся на одном уровне общности» [5, п. 1.1]. При этом триадой замыкается каждый из расходящихся углов.

Вместо заключения. Как мы убедились на частных примерах, можно наблюдать немалое количество разнообразных тройственных математических структур.

Они в разной мере отображают триединые лини-связи и могут служить прообразами троичной структуризации.

Хорошо это или плохо? – Как говорится, туда-сюда.

Что Троица являет собой отвлечённо-умозрительную модель Бога.

Что числовой или геометрический серпантин, как отражение этой модели.

---

[11] http://ru.wikipedia.org/?oldid=41841950.

И то и другое – всё одно, чистой воды абстракция.

Вот и получается модель на модель или модельная модель.

То есть троично-математическая модель триединой модели Бога.

Всё бы и ничего, если бы не тщетные размышления о том <структуре Бога>, чего не знает никто из людей.

«В поисках достоверности мы натолкнулись на такое сочетание терминов, которое для рассудка не может иметь смысла. "Троица во Единице и Единица в Троице" для рассудка ничего не обозначает» [25, с. 224].

Потому льётся нескончаемый поток вопросов, не имеющих внятных ответов:

Кому молился Иисус? – Сам себе или своей части?

Бессмертный Бог умирает – обычная софистика.

Или чудо из чудес про воскресение итак вечного существа!

Либо вечно существующий сын...

«Бог, как хочешь, так и выкручивайся. Но мы тут посоветовались и решили, какой ты есть. Послушай наш постулат веры. И не спорь». – Примерно так выглядят земляне со стороны. А Он, подобно деду с говорливой и философствующей внучкой на коленях, и не возражает. Только улыбается в усы... – Как говорил А.Шмеман: «Верующий, неверующий – какие это, в сущности, отвлеченные слова! Как будто верующий всегда, всё время верит. Как будто неверующий всё время живет своим неверием» [26].

В этой связи не стоит ожидать от наших модельных конструкций полной ясности-точности.

Тем боле в том аспекте, который не существует в принципе.

Их следует воспринимать и интерпретировать как троично-структурированные образы-модели всего сущего, что прямо или косвенно подходит под такое единение.

Ну, а если кто видит во всём этом подтверждение-объяснение триад, троичных или тринитарных подходов-идей, то вполне нормально.

С другой стороны, вдохновителю (основателю) Вселенных, вероятнее всего, совершенно безразлично, кто, что и как о нём думает. Примерно как человеку, о котором судачат муравьи около своего собрата, раздавленного ступнёй.

Не тот уровень или масштаб, и не тот полёт мыслей.

Для главного архитектора мироздания, которым может быть и «Его величество обычный случай», вполне достаточен общий пульс планеты Земля, будущее которой давно предопределено.

Никто не собирается упразднять законы бытия, несмотря на мольбы к небу, истуканам или иконам.

Вера должна объединять людей в другом, более реалистичном порыве:

– В своей слабости и беззащитности перед стихиями-коллизиями природы и глобального космоса.

– В соединении земных помыслов на совместное выживание.

– В надежде на общее лучшее завтра в общем доме и т.п.

«Когда-то Владимир Соловьев написал книгу с парадоксальным заглавием "Оправдание добра"; в ней он так ясно показал, что слабость христиан почти всегда в том, что они сами не верят в свое добро и, когда приходит час борьбы со злом, противопоставляют ему такое же зло, такую же ненависть и тот же страх. Так вот, пора, пора оправдать добро, и это значит – снова поверить в его силу, в его внутреннюю Божественную непобедимость» [26].

И модель троичного (много большего) единения здесь как нельзя кстати.

Только не нужно её оглуплять, уродовать или наоборот возводить в ранг недосягаемости.

Модель 3-структуризации обязана быть простой, наглядной и приемлемой для восприятия. Образно говоря, быть не сложнее "пареной репы". И нести-нести Добро...

Именно такая направленность преследовалась в озвученных нами модельных конструкциях.

И ещё... Предложенные выше модели-зарисовки нельзя воспринимать буквально.

Да и Троицу они дословно не объясняют и уж тем более ничего не доказывают. Ибо она не подлежит логическому объяснению. Как ни стараться, либо ухищряться.

Три цветка не равны одному цветку, но составляют один букет.

Три капли, взаимодействуя и сливаясь, могут образовать одну объединённую каплю.

Но это уже новый объект, с другими свойствами.

В частности, изменились объём, масса, площадь соприкосновения с воздухом и т.д.

То есть это уже не капля, а "мапля" [27] или "трипля".

Проводить между ними идентичность нельзя. – Применяя логический закон тождества, всякий предмет в процессе всего рассуждения должен мыслиться одним и тем же, в неизменном содержании его исходных признаков.

Именно потому мы избегали доскональных интерпретаций троичных (триадных) моделей.

Вместе с тем это позволяет каждому окунуться в кухню их приготовления.

Остаётся лишь надеяться, что в продолжение работы [1] и тематических публикаций других авторов мы создаём некий прообраз поля.

Теперь любой желающий может попробовать свои силы и погонять на нём свой "троичный мячик".

Всё вместе это ведёт к новым знаниям. Ибо «все религии, искусства и науки являются ветвями одного дерева» (А. Эйнштейн) – древа познания.

А постигать его лучше благородным путём – через размышления (по Конфуцию).

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Абстрактные модели троичной структуризации: формально-единичные конструкции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17601, 31.07.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261112.htm.

2. *Раушенбах Б.В.* Логика троичности // Вопросы философии.– 1993. – № 3. – С. 63–70. – http://www.bellabs.ru/Articles/Troitsa/Source.html, http://www.trinitas.ru/rus/doc/0017/001a/00170000.htm.

3. *Arnold V.I.* Mysterious mathematical trinities // Surveys in modern mathematics, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **321**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, 1–12.

4. *Arnold V.I.* Symplectization, complexification and mathematical trinities // The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997), Fields Inst. Commun., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 23–37. – http://www.neverendingbooks.org/index.php/arnolds-trinities.html; ...org/DATA/ArnoldTrinities.pdf.

5. *Баранцев Р.Г.* Становление тринитарного мышления // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14882, 23.09.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0226/002a/02261086.htm.

6. *Баранцев Р.Г.* Избранное. – Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 489 с. – http://www.math.spbu.ru/user/brem/RUS/izbrannoe.pdf.

7. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Том VII. – М.: Искусство, 1988.

8. *Василенко С.Л.* Математическая структура $\langle N \,\&\, 1\rangle$ для описания социоэнергетических процессов // Социоэнергетика: Научн. сб. – Харьков: Экограф, 2001. – Вып. 2. – С.61–64.

9. *Василенко С.Л.* Триномиальная гармония // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 22.07.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11240.html / http://vasilenko.trinitas.pro/files/2012/07/259.pdf.

10. *Василенко С.Л.* Числовые совпадения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17477, 23.05.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161960.htm.

11. *Макарова Н.* Магические кубы третьего порядка. – 2010. – http://www.natalimak1.narod.ru/kub3.htm.

12. *Виленкин Н.Я.* Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 208 с.

13. *Ейтс С.* Репьюниты и десятичные периоды: Пер. с англ. – М.: Мир, 1992. – 256 с.

14. *Василенко С.Л.* Числовая гармония моноцифровой мозаики: репьюниты и репдигиты // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16152, 10.11.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161720.htm.

15. *Beiler A.H.* "11111 ... 111." Ch. 11 in Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains. New York: Dover, 1966.

16. *Гарднер М.* От мозаик Пенроуза к надежным шифрам: Пер. с англ. – М.: Мир, 1993. – 416 с.

17. *Василенко С.Л.* 666 – символ совершенства и актуальной бесконечности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15872, 08.04.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161632.htm.

18. *Манин Ю.И.* Математика как метафора. – М.: МЦНМО, 2008. – 400 с. http://www.math.ru/lib/files/pdf/manin.pdf.

19. *Жуков А.В.* Вездесущее число "пи". – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

20. *Гигидикин С.Г.* Загадка Рамануджана // Квант. – 1987. – № 10. – С. 14–20, 41.

21. *Василенко С.Л.* Базовое тождество математических основ гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.

22. *Василенко С.Л.* Базовые соотношения между фундаментальными константами // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.

23. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – http://eek.diary.ru/p165970944.htm.

24. *Винберг Э.Б.* Калейдоскопы // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 2. – С. 121–127. – http://window.edu.ru/resource/746/20746/files/9702_121.pdf.

25. *Лосев А.Ф.* Форма. Стиль. Выражение. – М.: Мысль, 1995. – 944 с.

26. *Шмеман А.* О вере и неверии. – http://shmeman.ru/modules/myarticles/article_storyid_64.html.

27. *Как Троица академика под монастырь подвела.* – 2008. – http://www.ateism.ru/article.htm?no=1513.