

1 Уравнения Френе

В середине прошлого века французский математик Ж.Френе написал знаменитые уравнения, описывающие движение ориентируемой точки¹ вдоль произвольной кривой $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, где s – длина дуги.

Уравнения Френе записаны для нормированных на единицу ортогональных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_3 с началом в точке M (см. рис. 1). Они имеют следующий вид [1]

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \kappa(s)\mathbf{e}_2, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{e}_1 + \chi(s)\mathbf{e}_3, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\chi(s)\mathbf{e}_2, \quad (3)$$

где $\kappa(s)$ – кривизна кривой, $\chi(s)$ – кручение кривой.

Френе впервые показал, что произвольная кривая в общем случае определяется двумя параметрами – кривизной $\kappa(s)$ и кручением $\chi(s)$.

Единичный вектор \mathbf{e}_1

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{e}_1, \quad \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = 1 \quad (4)$$

выбирается касательным к кривой в точке M .

Единичный вектор \mathbf{e}_2 направлен по главной нормали, а вектор бинормали \mathbf{e}_3 определяется как

$$\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2].$$

Дифференцируя уравнения Френе (1) и (2) по s и используя условия ортогональности векторов триады, получим уравнения

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \kappa(s)\mathbf{e}_2, \quad (5)$$

$$\frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3} = \frac{d\kappa(s)}{ds}\mathbf{e}_2 - \kappa^2(s)\mathbf{e}_1 + \kappa(s)\chi(s)\mathbf{e}_3, \quad (6)$$

описывающие движение начала триады (движение точки M).

При бесконечно малом смещении точки M вдоль кривой вектора триады одновременно меняют свою ориентацию в пространстве. Для описания этого

¹Под ориентируемой точкой понимается трехгранник Френе, образованный тремя единичными ортогональными векторами.

изменения удобно ввести угловые координаты ψ, φ, ϕ . Выражая, например, компоненты касательного вектора \mathbf{e}_1 через угловые переменные, имеем [2]

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\phi, \quad (7)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\phi, \quad (8)$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin\psi \sin\phi. \quad (9)$$

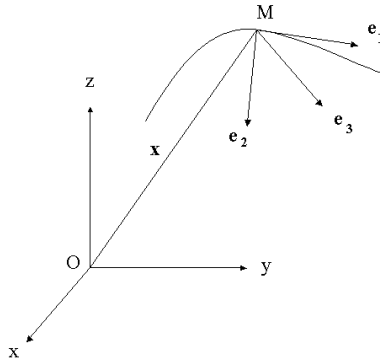


Рис. 1: Движение ориентируемой точки вдоль произвольной кривой

Дифференцируя эти уравнения и исключая из них трансляционные координаты, получаем «вращательные уравнения движения» в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = \chi \frac{\sin\psi}{\sin\phi}, \quad (10)$$

$$\frac{d\psi}{ds} = \kappa - \chi \sin\psi \operatorname{ctg}\phi, \quad (11)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \chi \cos\psi. \quad (12)$$

2 Связь κ и χ с кривизной Риччи

Исследуем вопрос о структуре геометрии, в которой кривые Френе являются геодезическими линиями.

Предложение 1. Кривизна κ и кручение χ являются независимыми компонентами коэффициентов вращения Риччи.

Доказательство. Рассмотрим шестимерное многообразие координат $x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Его удобно представить как *векторное расслоение*² с базой, образованной трансляционными координатами x_1, x_2, x_3 (пусть это будут декартовы координаты) и слоем, заданным в каждой точке x_a ($a = 1, 2, 3$) тремя ортонормированными реперами Френе

$$\mathbf{e}_A, \quad A = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где A означает номер вектора репера.

Согласно теореме Эйлера, бесконечно малые повороты вокруг трех осей репера (13) можно заменить одним поворотом на угол $d\chi$ вокруг определенной оси, проходящей через начало репера O . Бесконечно малый поворот (в отличие от конечного поворота) можно задать вектором

$$d\chi = d\chi \mathbf{e}_\chi,$$

где вектор \mathbf{e}_χ направлен вдоль мгновенной оси вращения системы отсчета. Это направление выбирается так, что если смотреть с конца вектора \mathbf{e}_χ на неподвижную точку O , то поворот совершается против часовой стрелки (правая система отсчета).

Бесконечно малое изменение векторов репера Френе \mathbf{e}_χ при повороте $d\chi$ имеет вид

$$d\mathbf{e}_A = [d\chi \mathbf{e}_A]. \quad (14)$$

Если разделить (14) на ds , то мы получим

$$\frac{d\mathbf{e}_A}{ds} = \left[\frac{d\chi}{ds} \mathbf{e}_A \right] = [\omega \mathbf{e}_A], \quad (15)$$

где $\omega = d\chi/ds$ – трехмерная угловая скорость вращения трехгранника Френе относительно мгновенной оси. Записывая репер Френе в виде

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad e^A_\alpha e^\alpha_B &= \delta^A_B = \begin{cases} 1 & A = B \\ 0 & A \neq B \end{cases}, \\ \text{б)} \quad e^A_\alpha e^\beta_A &= \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$A, B, \dots = 1, 2, 3, \quad \alpha, \delta, \beta = 1, 2, 3,$$

где $\alpha, \delta, \beta, \dots$ – векторные индексы, а A, B, \dots – номер вектора, можно записать соотношения (14) и (15) как

$$de^A_\alpha = d\chi^\beta_\alpha e^A_\beta \quad d\chi^\beta_\alpha = T^\beta_{\alpha\gamma} dx^\gamma, \quad (17)$$

$$\frac{de^A_\alpha}{ds} = \frac{d\chi^\beta_\alpha}{ds} e^A_\beta \quad \frac{d\chi^\beta_\alpha}{ds} = T^\beta_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^A_\beta, \quad (18)$$

где мы ввели обозначение

$$T^\alpha_{\beta\gamma} = e^\alpha_A e^A_{\beta,\gamma} = -e^A_\beta e^\alpha_{A,\gamma}, \quad ,\gamma = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}. \quad (19)$$

²Термин «векторное расслоение» принят в математике.

Впервые величины (19) были введены Г.Риччи [3] и с тех пор получили название *коэффициентов вращения Риччи*. Используя условия ортогональности (16) и правило перехода к локальным индексам

$$T^A_{B\gamma} = e^A_\alpha T^\alpha_{\beta\gamma} e^\beta_B ,$$

перепишем уравнения (18) в локальных индексах

$$\frac{de^A_\alpha}{ds} = T^A_{B\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^B_\alpha . \quad (20)$$

Выберем вектора $e^{(1)}_\alpha, e^{(2)}_\alpha$ и $e^{(3)}_\alpha$ так, чтобы они совпадали с векторами Френе, при этом вектор $e^{(1)}_\alpha$ удовлетворяет условиям (4). Тогда уравнения (20) принимают вид известных уравнений Френе (1-3), в которых

$$\kappa(s) = T^{(1)}_{(2)\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} , \quad \chi(s) = T^{(2)}_{(3)\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} . \quad (21)$$

При выводе (1-3) из (20) мы использовали соотношения

$$\frac{dx^\gamma}{ds} = e^{\gamma(1)} \quad e^{\gamma(1)} e^\gamma_{(1)} = 1 .$$

Из соотношений (21) видно, что кривизна и кручение в уравнениях Френе выражаются через компоненты коэффициентов вращения Риччи (19), что и доказывает утверждение 1.

Коэффициенты вращения Риччи входят в состав связности абсолютного параллелизма и имеют часть, антисимметричную по двум нижним индексам

$$T^\alpha_{[\beta\gamma]} = -\Omega^{\cdot\alpha}_{\beta\gamma} ,$$

$$\Omega^{\cdot\alpha}_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} e^\alpha_A (e^A_{\beta,\gamma} - e^A_{\gamma,\beta}) , \quad (22)$$

которую можно назвать *кручением Риччи*.

3 Кривые Френе как геодезические геометрии абсолютного параллелизма

Отметим, что кривизна и кручение кривой Френе (правильнее было бы их назвать первое и второе кручение, поскольку они выражаются через компоненты кручения Риччи (22)).

До сих пор мы использовали в качестве трансляционных координат декартовы координаты. Перейдем теперь от декартовых координат к произвольным криволинейным координатам.

В общем случае произвольных криволинейных трансляционных координат метрический тензор пространства можно представить как

$$g^0_{\alpha\beta} = \eta_{AB} e^A_\alpha e^B_\beta , \quad \eta_{AB} = \eta^{AB} = \text{diag}(1, 1, 1) ,$$

а трансляционный интервал в виде

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}^0 dx^\alpha dx^\beta = \eta_{AB} e_A^\alpha e_B^\beta dx^\alpha dx^\beta. \quad (23)$$

В произвольных трансляционных координатах полная связность пространства запишется как

$$\Delta_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + T_{\beta\gamma}^\alpha = e_A^\alpha e_{\beta,\gamma}^A,$$

где

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\eta} (g_{\beta\eta,\gamma}^0 + g_{\gamma\eta,\beta}^0 - g_{\beta\gamma,\eta}^0) \quad (24)$$

– символы Кристоффеля,

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = -\Omega_{\beta\gamma}^{\cdot\alpha} + g^{\alpha\eta} (g_{\beta\rho}^0 \Omega_{\eta\gamma}^{\cdot\rho} + g_{\gamma\rho}^0 \Omega_{\eta\beta}^{\cdot\rho}) \quad (25)$$

– коэффициенты вращения Риччи, а $\Omega_{\beta\gamma}^{\cdot\alpha}$ определяется согласно (22). Этот объект отличен от нуля именно тогда, когда при описании динамики вращательного движения возникают угловые неголономные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Теперь равенство (17) запишется в виде

$$d\chi_{\beta\alpha} = \Delta_{\beta\gamma}^\alpha dx^\gamma, \quad (26)$$

где величины

$$\Delta_{\beta\gamma}^\alpha = e_A^\alpha e_{\beta,\gamma}^A = -e_\beta^A e_{A,\gamma}^\alpha. \quad (27)$$

представляют собой локальную связность аффинного пространства. Как и всякая связность, она имеет нетензорный закон преобразования относительно трансляционных координатных преобразований

$$\Delta_{\beta'\alpha'}^{\gamma'} = \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \Delta_{\beta\alpha}^\gamma.$$

Если теперь мы образуем с помощью связности (27) тензор кривизны, то он оказывается равным нулю [4]

$$S_{\beta\gamma\eta}^\alpha = 2\Delta_{\beta[\eta,\gamma]}^\alpha + 2\Delta_{\rho[\gamma}^\alpha \Delta_{|\beta|\eta]}^\rho = 0.$$

По определению, пространство с нулевым тензором кривизны называется *пространством абсолютного параллелизма*, а соотношение (27) определяет связность абсолютного параллелизма.

Частным случаем пространства абсолютного параллелизма является плоское евклидово пространство. Действительно, из формулы (26) видно, что когда вращение отсутствует ($d\chi_{\beta\alpha}^\alpha = 0$, $dx^\gamma \neq 0$), связность $\Delta_{\beta\gamma}^\alpha$ обращается в нуль, при этом пространство абсолютного параллелизма переходит в евклидово.

Предложение 2. Уравнения Френе эквивалентны уравнениям геодезических первого рода (кратчайшим) геометрии абсолютного параллелизма

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds} - T_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\gamma}{ds}. \quad (28)$$

Доказательство. В произвольных координатах уравнения (18) запишутся как

$$\text{а) } \frac{de^A_\alpha}{ds} = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^A_\beta + T^\beta_{\alpha\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^A_\beta, \quad \text{б) } \frac{de^\alpha_A}{ds} = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^\beta_A - T^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} e^\beta_A, \quad (29)$$

Поскольку в уравнениях Френе вектор $e^\alpha_{(1)} = dx^\alpha/ds$, то, подставляя это соотношение в уравнения (29б), получим уравнения геодезических (28).

4 Феноменологическое кручение Картана

Доказанные выше предложения позволяют утверждать, что *любую* произвольную кривую, заданную в пространстве с плоской метрикой (23), можно представить в виде геодезической пространства абсолютного параллелизма с уравнениями (28). Это прямой путь к геометризации физических уравнений, поскольку произвольную кривую можно рассматривать как траекторию частицы, которая движется в каком-либо физическом поле.

Кручение Риччи (22) мы будем называть геометрическим кручением, поскольку оно определяется через производные от векторов триады Френе и геометрически интерпретируется как вращение трехгранника по мере его движения вдоль кривой. Как было показано ранее, геометрическое кручение входит в состав связности (27) геометрии абсолютного параллелизма.

Наряду с геометрическим кручением можно ввести феноменологическое кручение Картана [5], которое обладает такими же свойствами симметрии, что и кручение Риччи, но, в отличие от последнего, не связано с вращением трехгранника Френе, поскольку не зависит от его векторов.

Вначале Э. Картан и Я. Схоутен [6, 7], исходя из групповых свойств пространства абсолютного параллелизма постоянной кривизны, ввели связность (27), в которой компоненты коэффициентов вращения Риччи (25) являются константами.

Суть подхода Э. Картана и Я. Схоутена состоит в следующем. Пусть на n -мерном дифференцируемом многообразии M с координатами x^1, \dots, x^n задано поле n контр-вариантных векторов

$$\xi_a^j = \xi_a^j(x^k), \quad (30)$$

где

$$a, b, c \dots = 1 \dots n$$

являются векторными индексами, а

$$i, j, k \dots = 1 \dots n$$

– координатными.

Предположим, что

$$\det(\xi_a^j) \neq 0$$

и что функции ξ_a^j удовлетворяют уравнениям

$$\xi_a^j \xi_{b,j}^k - \xi_b^i \xi_{a,i}^k = -C_{ab}^{\dots f} \xi_f^k,$$

в которых константы $C_{ab}^{\dots f}$ имеют следующие свойства:

$$C_{ab}^{\dots f} = -C_{ba}^{\dots f}, \quad (31)$$

$$C_{fb}^{\dots a} C_{cd}^{\dots f} + C_{fc}^{\dots a} C_{db}^{\dots f} + C_{fd}^{\dots a} C_{bc}^{\dots f} = 0. \quad (32)$$

Тогда мы можем сказать, что имеем n -параметрическую простую транзитивную группу (группу T_n), действующую на многообразии, причем $C_{ab}^{\dots f}$ являются структурными константами этой группы, удовлетворяющими тождеству Якоби (32). Векторное поле ξ_b^j называется инфинитезимальными генераторами этой группы.

Пусть теперь базис e_b^k , задаваемый в каждой точке многообразия M , удовлетворяет условию

$$\det(e_a^j) \neq 0.$$

Если предположить, что

$$e_a^j(x_0^k) = \xi_a^j(x_0^k),$$

где x_0^k являются координатами некоторой произвольной точки P , то мы имеем для функций $e_a^j(x_0^k)$ уравнения

$$e_a^j e_{b,j}^k - e_b^j e_{a,j}^k = -C_{ab}^{\dots f} e_f^k. \quad (33)$$

В силу условий нормировки базиса

$$e_a^i e^j_a = \delta_i^j, \quad e_a^i e^i_b = \delta_b^a \quad (34)$$

из равенства (33) следует

$$C_{jk}^{\dots i} = 2e_a^i e_{[k,j]}^a = e_a^i C_{bc}^{\dots a} e_j^b e_k^c. \quad (35)$$

Сравнивая соотношение (35) с (22), мы видим, что

$$\Omega_{jk}^{\dots i} = \frac{1}{2} C_{jk}^{\dots i},$$

т.е. все компоненты кручения Риччи однородного пространства абсолютного параллелизма постоянны.

Легко видеть, что

$$\Delta_{[ij]}^k = -\Omega_{ij}^{\dots k} = T_{[ij]}^k = -\frac{1}{2} C_{jk}^{\dots i}.$$

Поскольку константы не зависят от координат или каких-либо других переменных, то Э. Картан и Я. Схоутен ввели связность с феноменологическим кручением [6, 7], представляющим собой тензор S_{jk}^i со свойствами симметрии как у кручения Риччи. Полученная таким образом геометрическая структура называется геометрией Римана-Картана со связностью

$$\bar{\Gamma}_{ijk} = \Gamma_{ijk} + (S_{ijk} - S_{jki} - S_{kij}), \quad (36)$$

где Γ_{ijk} – символы Кристоффеля, а S_{ijk} – тензор кручения Картана. Можно с уверенностью утверждать, что геометрия Римана-Картана возникла в результате развития геометрии абсолютного параллелизма.

5 Общие свойства и различия между кручениями Риччи и Картана

Феноменологическое кручение Картана $S^i{}_{jk}$ имеет много общих свойств с геометрическим кручением Риччи $\Omega^i{}_{jk}$, одна между ними имеется и существенное различие.

5.1 Общие свойства кручения Риччи и Картана

К общим свойствам относятся следующие.

- Одинаковое число независимых компонент и антисимметрия по нижним индексам

$$\Omega^i{}_{jk} = -\Omega^i{}_{kj}, \quad S^i{}_{jk} = -S^i{}_{kj}. \quad (37)$$

- Тензорный закон относительно преобразований трансляционных координат

$$\Omega^i{}_{j'k'} = \Omega^i{}_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad S^i{}_{j'k'} = S^i{}_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}. \quad (38)$$

- Одинаковым образом образуют тензор конторсии

$$T^i{}_{jk} = -\Omega^i{}_{jk} + g^{im}(g_{js}\Omega_{mk}^s + g_{ks}\Omega_{mj}^s), \quad K^i{}_{jk} = -S^i{}_{jk} + g^{im}(g_{js}S_{mk}^s + g_{ks}S_{mj}^s) \quad (39)$$

со свойствами симметрии

$$T_{ijk} = -T_{jik}, \quad K_{ijk} = -K_{jik}. \quad (40)$$

- Одинаково разлагаются на неприводимые части

$$\Omega^i{}_{jk} = \frac{2}{3}\delta_{[k}^i\Omega_{j]} + \frac{1}{3}\varepsilon_{jks}^n\hat{\Omega}^s + \bar{\Omega}^i{}_{jk}, \quad S^i{}_{jk} = \frac{2}{3}\delta_{[k}^iS_{j]} + \frac{1}{3}\varepsilon_{jks}^n\hat{S}^s + \bar{S}^i{}_{jk}, \quad (41)$$

где

$$\Omega^i{}_{jk} = g^{im}g_{ks}\Omega_{mj}^s, \quad S^i{}_{jk} = g^{im}g_{ks}S_{mj}^s$$

и

– вектор

$$\Omega_j = \Omega^i{}_{ji}, \quad S_j = S^i{}_{ji}, \quad (42)$$

– псевдовектор

$$\hat{\Omega}_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jins}\Omega^{ins}, \quad \hat{S}_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jins}S^{ins}, \quad (43)$$

– бесследовая часть кручения

$$\bar{\Omega}^s{}_{.js} = 0, \quad \bar{\Omega}_{ijs} + \bar{\Omega}_{jsi} + \bar{\Omega}_{sij} = 0, \quad \bar{S}^s{}_{.js} = 0, \quad \bar{S}_{ijs} + \bar{S}_{jsi} + \bar{S}_{sij} = 0. \quad (44)$$

5.2 Различия между кручением Риччи и Картана

Отметим следующие различия между кручением Риччи и Картана.

- Кручение Риччи Ω_{jk}^i определяет изменение векторов ортогонального репера (т.е. зависит от угловых координат)

$$\Omega_{jk}^i = -\frac{1}{2}e_a^i(e_{j,k}^a - e_{k,j}^a), \quad i, j, i\dots = 0, 1, 2, 3, \quad a, b, c\dots = 0, 1, 2, 3, \quad (45)$$

а кручение Картана S_{jk}^i зависит только от трансляционных координат x^i .

- В пространстве с четырьмя трансляционными координатами кручение Ω_{jk}^i определено на 10-мерном многообразии, тогда как кручение S_{jk}^i только на четырехмерном.
- Кручение Ω_{jk}^i определяет дополнительную (к трансляционной метрике Римана) вращательную метрику Киллинга-Картана

$$d\tau^2 = T_{bk}^a T_{an}^b dx^k dx^n, \quad (46)$$

а кручение S_{jk}^i нет.

- Кручение Ω_{jk}^i позволяет любую кривую в римановом пространстве представить как геодезическую пространства абсолютного параллелизма. В пространстве с четырьмя трансляционными координатами кручение Ω_{jk}^i определяет три оптических параметра: расширение θ , вращение ω и сдвиг σ . Эти параметры позволяют дать кинематическую интерпретацию компонентам кручения Ω_{jk}^i , в частности связать торсионные свойства материи с оптическим параметром вращения ω . Кручение Картана этим свойством не обладает.
- Эксперименты с электро-торсионными генераторами Акимова [8] находят объяснение через кручение Риччи Ω_{jk}^i , а не через кручение Картана S_{jk}^i .

6 Кинематическая интерпретация кривизны и кручения в уравнениях Френе

Рассмотрим ориентируемую материальную точку,³ которая движется по произвольной кривой

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s).$$

Пусть эта кривая описывается уравнениями Френе (1-5). Для того, чтобы выяснить физический смысл кривизны и кручения рассмотрим два важных предельных случая: а) $\kappa \neq 0$, $\chi = 0$ и б) $\kappa = 0$, $\chi \neq 0$.

³Под ориентируемой материальной точкой подразумевается ориентируемая точка, обладающая массой m и моментом инерции J .

6.1 Кривые с $\kappa \neq 0$, $\chi = 0$

Уравнения (1-5) в этом случае принимают вид

$$\text{а) } \frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \kappa(s)\mathbf{e}_2, \quad \text{б) } \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\kappa(s)\mathbf{e}_1, \quad \text{в) } \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = 0, \quad (47)$$

$$\text{а) } \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \kappa(s)\mathbf{e}_2, \quad \text{б) } \frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3} = \frac{\kappa(s)}{ds}\mathbf{e}_2 - \kappa^2(s)\mathbf{e}_1. \quad (48)$$

Кривые, описываемые этими уравнениями, являются "плоскими", поскольку все ее точки лежат в одной плоскости. Из механики известно, что при движении частиц в полях с центральной симметрией по траекториям, лежащим в одной плоскости, выполняется закон сохранения орбитального момента.

Производная

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v},$$

где t – время, определяет скорость движения материальной точки (скорость движения начала репера Френе) по траектории. Это соотношение можно записать как

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{e}_1 \frac{ds}{dt}. \quad (49)$$

Поскольку \mathbf{e}_1 – единичный вектор, то

$$|\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = v.$$

Полное ускорение $\mathbf{w} = d^2\mathbf{x}/dt^2$ запишется как

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{e}_1 \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (50)$$

Используя уравнения Френе, получим из (50)

$$\mathbf{w} = \mathbf{e}_2 \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathbf{e}_1 \frac{d^2s}{dt^2} = \mathbf{e}_2 \kappa v^2 + \mathbf{e}_1 \frac{dv}{dt}. \quad (51)$$

Из соотношения (51) видно, что ускорение раскладывается на сумму двух слагаемых, одно из которых является касательным и называется *тангенциальным ускорением*

$$\mathbf{w}_\tau = \mathbf{e}_1 \frac{dv}{dt},$$

а другое направлено по главной нормали

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{e}_2 \kappa v^2$$

и называется *нормальным ускорением*. Из последнего соотношения видно, что *кривизна кривой определяет нормальное ускорение ориентируемой материальной точки*.

6.2 Кривые с $\kappa = 0$, $\chi \neq 0$

В этом случае уравнения (1-5) запишутся как

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = 0, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = \chi(s)\mathbf{e}_3, \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\chi(s)\mathbf{e}_2, \quad (52)$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3} = 0. \quad (53)$$

Поскольку уравнения (53) этой системы описывают движение точки М (движение начала трехгранника Френе), то мы видим, что кривая в этом случае является "прямой", вдоль которой направлен касательный вектор \mathbf{e}_1 . При движении точки М вдоль этой "прямой" вектора \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 вращаются в плоскости перпендикулярной вектору \mathbf{e}_1 .

Используя соотношение $ds/dt = v$, перепишем вращательные уравнения (52) в виде

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \omega\mathbf{e}_3, \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{dt} = -\omega\mathbf{e}_2, \quad (54)$$

где

$$\omega = v\chi \quad (55)$$

– собственная угловая скорость вращения ориентируемой материальной точки.

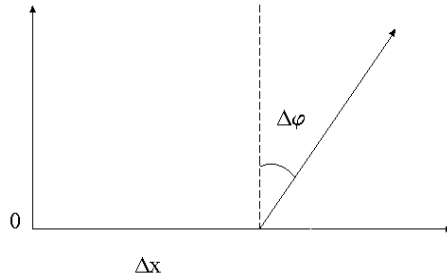


Рис. 2: Поворот плоскости поляризации луча света при движении по траектории с $\chi \neq 0$

Поскольку в нашем случае единичный вектор импульса частицы определяется как

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

то $\omega = v\chi$ можно интерпретировать как спиральность частицы. Если же по кривой с кручением движется поляризованная волна света, то ее плоскость поляризации

вращается с угловой частотой (55) (рис.2). Таким образом кручение χ порождает *собственное угловое вращение материальных объектов*.

7 Динамическая интерпретация уравнений Френе

С физической точки зрения ориентируемая материальная точка представляет собой трехмерную произвольно ускоренную систему отсчета, имеющую в общем случае шесть степеней свободы – три поступательных и три вращательных. Поскольку уравнения Френе (1-5) описывают движение ориентируемой точки так, что производные векторов репера разлагаются по самим векторам, то это значит, что *уравнения Френе записаны в ускоренной системе отсчета*.

Из механики известно, что уравнения движения *материальной точки* массы m в ускоренной системе отсчета под действием одних только сил инерции имеют вид

$$\mathbf{F}^{iner} = -m(\mathbf{W} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] + 2[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]) . \quad (56)$$

Здесь

$$\mathbf{F}_1 = -m\mathbf{W}$$

- поступательная сила инерции,

$$\mathbf{F}_2 = -m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{r}]$$

- сила инерции, связанная с вращательным ускорением,

$$\mathbf{F}_3 = -m[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]]$$

- центробежная сила инерции,

$$\mathbf{F}_4 = -2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}]$$

- сила Кориолиса.

В сопутствующей системе отсчета ($\mathbf{r} = 0$) уравнения (56) принимают вид

$$\mathbf{F}^{iner} = -m\mathbf{W} - 2m[\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}] . \quad (57)$$

Если к тому же трехмерное вращение системы отсчета отсутствует ($\boldsymbol{\omega} = v\boldsymbol{\chi}$), то мы имеем

$$\mathbf{F}^{iner} = -m\mathbf{W} . \quad (58)$$

Сравнивая уравнения (51) с (58), имеем

$$-\mathbf{W} = \mathbf{e}_2 \kappa v^2 + \mathbf{e}_1 \frac{dv}{dt} . \quad (59)$$

Это соотношение показывает, что кривизна в уравнениях Френе определяет *поле инерции*, порождающее поступательную силу инерции.

8 Четырехмерные уравнения Френе в римановом пространстве

Пусть мы имеем произвольную кривую в четырехмерном римановом пространстве с трансляционными координатами x^i ($i=0,1,2,3$), тогда кривая определяется тремя скалярными инвариантами χ_1, χ_2, χ_3 с помощью четырехмерных уравнений Френе вида [9]

$$\frac{De_k^{(0)}}{ds} = \chi_1 e_k^{(1)}, \quad (60)$$

$$\frac{De_k^{(1)}}{ds} = \pm \chi_1 e_k^{(0)} + \chi_2 e_k^{(2)}, \quad (61)$$

$$\frac{De_k^{(2)}}{ds} = \pm \chi_2 e_k^{(1)} + \chi_3 e_k^{(3)}, \quad (62)$$

$$\frac{De_k^{(3)}}{ds} = \pm \chi_3 e_k^{(2)}. \quad (63)$$

Здесь вектора $e_k^{(0)}, e_k^{(1)}, e_k^{(2)}, e_k^{(3)}$ образуют тетраду, а через D обозначен *абсолютный дифференциал* относительно четырехмерных символов Кристоффеля

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{jm, k} + g_{km, j} - g_{jk, m}) \quad (64)$$

Знаки \pm в уравнениях выбираются в зависимости от выбора правой или левой тетрады $e_k^{(a)}$ ($a=0,1,2,3$), а также в зависимости от того, времениподобным или пространственноподобным является тот или иной вектор тетрады [9].

Предложение 3. Любую кривую риманова пространства можно рассматривать как геодезическую первого рода (кратчайшую) пространства абсолютного параллелизма с уравнениями вида

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} - T_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \quad (65)$$

Доказательство. Связность абсолютного параллелизма определяется как [4]

$$\Delta_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + T_{jk}^i = e_a^i e_{j,k}^a = -e_j^a e_{a,k}^i. \quad (66)$$

Эти соотношения можно переписать следующим образом

$$T_{jk}^i = e_a^i \nabla_k e_j^a = -e_j^a \nabla_k e_a^i, \quad (67)$$

где ∇_k – ковариантная производная относительно символов Кристоффеля (64). Умножая равенство (67) на e_a^i (e_a^j) и используя условия ортогональности

$$e_a^i e_j^a = \delta_i^j, \quad e_i^a e_b^a = \delta_b^a, \quad (68)$$

где δ_i^j – символ Кронеккера, представим (67) в виде

$$a) \quad \nabla_k e_j^a = T_{bk}^a e_b^j \quad б) \quad \nabla_k e_a^i = -T_{jk}^i e_j^a. \quad (69)$$

Умножая (62 а)) и (62 б)) на dx^k/ds , получим

$$\frac{De^a_j}{ds} = T^a_{bk} e^b_j \frac{dx^k}{ds}. \quad (70)$$

$$\frac{De^i_a}{ds} = -T^i_{jk} e^j_a \frac{dx^k}{ds}. \quad (71)$$

Раскрывая в уравнениях (71) абсолютный дифференциал и полагая в них $e^i_{(0)} = dx^i/ds$, получим уравнения геодезических (65).

Меняя в уравнениях (62 а)) индексы, по которым идет свертка, находим

$$\frac{De^a_k}{ds} = T^a_{bj} e^b_k \frac{dx^j}{ds}.$$

Выбирая в этих уравнениях тетраду Френе и расписывая их покомпонентно, имеем

$$\frac{De^{(0)}_k}{ds} = T^{(0)}_{(1)j} e^{(1)}_k \frac{dx^j}{ds}, \quad (72)$$

$$\frac{De^{(1)}_k}{ds} = T^{(1)}_{(0)j} e^{(0)}_k \frac{dx^j}{ds} + T^{(1)}_{(2)j} e^{(2)}_k \frac{dx^j}{ds}, \quad (73)$$

$$\frac{De^{(2)}_k}{ds} = T^{(2)}_{(1)j} e^{(1)}_k \frac{dx^j}{ds} + T^{(2)}_{(3)j} e^{(3)}_k \frac{dx^j}{ds}, \quad (74)$$

$$\frac{De^{(3)}_k}{ds} = T^{(3)}_{(2)j} e^{(2)}_k \frac{dx^j}{ds}. \quad (75)$$

Сравнивая уравнения (60)-(63) с уравнениями (72)-(75), получим

$$\chi_1 = T^{(0)}_{(1)j} \frac{dx^j}{ds}, \quad \chi_2 = T^{(1)}_{(2)j} \frac{dx^j}{ds}, \quad \chi_3 = T^{(2)}_{(3)j} \frac{dx^j}{ds}.$$

Поскольку величины T^i_{kj} определяются через кручение Риччи (см.(39)), то, как это следует из полученных выше соотношений, можно геометризовать любые кривые риманова пространства, используя кручение Риччи.

9 Связь коэффициентов вращения Риччи с полем инерции в вакуумной теории гравитации

Следуя программе Клиффорда-Эйнштейна по геометризации физических уравнений, автор нашел уравнения вакуума [4]

$$\nabla_{[k} e^a_{m]} - e^b_{[k} T^a_{|b|m]} = 0, \quad (A)$$

$$R^a_{bkm} + 2\nabla_{[k} T^a_{|b|m]} + 2T^a_{c[k} T^c_{|b|m]} = 0, \quad (B)$$

которые могут быть представлены в виде расширенной системы уравнений Эйнштейна-Янга-Миллса

$$\nabla_{[k} e^a_{j]} + T^i_{[kj]} e^a_i = 0, \quad (A)$$

$$R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R = \nu T_{jm}, \quad (B.1)$$

$$C^i{}_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^i{}_{|j|m]} + 2T^i{}_{s[k}T^s{}_{|j|m]} = -\nu J^i{}_{jkm}, \quad (B.2)$$

с геометризированными источниками:

$$T_{jm} = -\frac{2}{\nu}\{(\nabla_{[i}T^i{}_{|j|m]} + T^i{}_{s[i}T^s{}_{|j|m]}) - \frac{1}{2}g_{jm}g^{pn}(\nabla_{[i}T^i{}_{|p|n]} + T^i{}_{s[i}T^s{}_{|p|n]})\} \quad (76)$$

$$J_{ijkm} = 2g_{[k(i}T_{j)m]} - \frac{1}{3}Tg_{i[m}g_{k]j}. \quad (77)$$

Уравнения (A) и (B) обобщают вакуумные уравнения Эйнштейна

$$R_{ik} = 0 \quad (78)$$

и решают поставленную А.Эйнштейном задачу по геометризации тензора энергии-импульса материи [4]. Полностью геометризованные уравнения гравитационного поля (B.1) содержат в правой части тензор энергии-импульса материи (76), образованный коэффициентами вращения Риччи и их производными, т.е. кручением Риччи.

Теория гравитационного поля, основанная на уравнениях вакуума (A) и (B), позволяет установить связь коэффициентов вращения Риччи с полями и силами инерции. Для этого уравнения вакуума записываются в спинорном базисе с использованием спиновых коэффициентов Ньюмена-Пенроуза [10] и спинорных матриц Кармели [11]

$$\begin{aligned} \partial_{C\dot{D}}\sigma^i{}_{A\dot{B}} - \partial_{A\dot{B}}\sigma^i{}_{C\dot{D}} &= (T_{C\dot{D}})_A{}^P\sigma^i{}_{P\dot{B}} + \sigma^i{}_{A\dot{R}}(T^+{}_{\dot{D}C})^{\dot{R}}{}_{\dot{B}} - \\ &- (T_{A\dot{B}})_C{}^P\sigma^i{}_{P\dot{D}} - \sigma^i{}_{C\dot{R}}(T^+{}_{\dot{B}A})^{\dot{R}}{}_{\dot{D}}, \end{aligned} \quad (\overset{+}{A}{}^s)$$

$$2\Phi_{A\dot{B}C\dot{D}} + \Lambda\varepsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} = \nu T_{A\dot{C}B\dot{D}}, \quad (\overset{+}{B}{}^{s+}.1)$$

$$\begin{aligned} C_{A\dot{B}C\dot{D}} - \partial_{C\dot{D}}T_{A\dot{B}} + \partial_{A\dot{B}}T_{C\dot{D}} + (T_{C\dot{D}})_A{}^F T_{F\dot{B}} + (T^+{}_{\dot{D}C})^{\dot{F}}{}_{\dot{B}} T_{A\dot{F}} - \\ - (T_{A\dot{B}})_C{}^F T_{F\dot{D}} - (T^+{}_{\dot{B}A})^{\dot{F}}{}_{\dot{D}} T_{C\dot{F}} - [T_{A\dot{B}}, T_{C\dot{D}}] = -\nu J_{A\dot{B}C\dot{D}}, \end{aligned} \quad (\overset{+}{B}{}^{s+}.2)$$

$$A, C\dots = 0, 1, \quad \dot{B}, \dot{D}\dots = \dot{0}, \dot{1}.$$

Решение этих уравнений, приводящее к метрике Шварцшильда

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Psi^0}{r}\right)^{-1} dr^2 - \\ &- r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \end{aligned} \quad (79)$$

где

$$\Psi^0 = MG/c^2, \quad (80)$$

в собранном виде запишется так [4]:

1. Координаты: u, r, x^2, x^3 .
2. Компоненты символов Ньюмена–Пенроуза:

$$\begin{aligned} \sigma_{00}^i &= (0, 1, 0, 0), & \sigma_{11}^i &= (1, U, 0, 0), & \sigma_{0i}^i &= \rho(0, 0, P, iP), \\ \sigma_i^{00} &= (1, 0, 0, 0), & \sigma_i^{11} &= (-U, 1, 0, 0), & \sigma_i^{0i} &= -\frac{1}{2\rho P}(0, 0, 1, i), \\ U &= -1/2 + \Psi^0/r, & P &= (2)^{-1/2}(1 + \zeta\bar{\zeta}/4), & \zeta &= x^2 + ix^3, \\ & & & & \Psi^0 &= \text{const.} \end{aligned}$$

3. Спинорные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\begin{aligned} \rho &= -1/r, & \alpha &= -\bar{\beta} = -\alpha^0/r, & \gamma &= \Psi^0/2r, \\ \mu &= -\varepsilon^0/r + 2\Psi^0/r^2, & \alpha &= \zeta/4. \end{aligned}$$

4. Спинорные компоненты тензора Римана:

$$\Psi = -\Psi^0/r^3.$$

Используя это решение, можно рассчитать гравитационные поля (Γ^i_{jk}) и коэффициенты вращения Риччи (T^i_{jk}) в уравнениях геодезических (65), которые в вакуумной теории гравитации рассматриваются как уравнения движения ориентируемой материальной точки.

Уравнения движения пробной частицы в теории физического вакуума совпадают с уравнениями геодезических пространства абсолютного параллелизма (65).

Для простоты изложения перейдем в приведенном решении к квазидекартовым координатам, в которых метрика Шварццильда имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2MG}{rc^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (81)$$

В этих координатах тетрада e^a_i запишется как

$$\begin{aligned} e^{(0)}_0 &= \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)^{1/2}, \\ e^{(1)}_1 &= e^{(2)}_2 = e^{(3)}_3 = \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (82)$$

где в скобках обозначены тетрадные индексы и $\varphi = -MG/r$.

Метрический тензор для тетрады (82) может быть получен с помощью соотношений

$$g_{ik} = \eta_{ab} e^a_i e^b_k, \quad \eta_{ab} = \eta^{ab} = \text{diag}(1 - 1 - 1 - 1). \quad (83)$$

Рассматривая нерелятивистское приближение и считая поля слабыми, т.е. полагая, что

$$\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1, \quad g_{ik} \simeq \eta_{ik}, \quad ds \simeq ds_0 = cdt(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}, \quad (84)$$

$$R^i{}_{jkm} \simeq \overset{\circ}{R}{}^i{}_{jkm} = 0, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad ds \simeq ds_0 \simeq cdt,$$

находим из уравнений (65) следующие приближенные уравнения движения массы m

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = -mc^2(\Gamma^\alpha{}_{00} + T^\alpha{}_{00}). \quad (85)$$

$$\alpha = 1, 2, 3.$$

Используя метрику (81) и тетраду (82), а также формулы (64) и (67), находим

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = -MGx^\alpha/r^3, \quad T^\alpha{}_{00} = MGx^\alpha/r^3.$$

Сравнивая уравнения (85) с уравнениями классической механики в сопутствующей системе отсчета [2]

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} = F_G^\alpha - mW^\alpha = 0, \quad (86)$$

получим, что

$$F_G^\alpha = -mc^2\Gamma^\alpha{}_{00} = mMGx^\alpha/r^3 \quad (87)$$

представляет собой гравитационную силу, вызванную гравитационным полем

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = -MGx^\alpha/r^3,$$

а

$$-mW^\alpha = -mc^2T^\alpha{}_{00} = -mMGx^\alpha/r^3 \quad (88)$$

есть сила инерции, созданная полем инерции

$$T^\alpha{}_{00} = MGx^\alpha/r^3.$$

Эти силы компенсируют друг друга, создавая локально состояние невесомости.

Таким образом, прямыми вычислениями на конкретном примере было показано, что коэффициенты вращения Риччи описывают поля инерции, порождающие силы инерции. Поэтому природа полей и сил инерции связана с кручением Риччи пространства-времени, при этом последовательное описание полей и сил инерции требует введения геометрии абсолютного параллелизма [4].

10 Кручение Риччи в вакуумной электродинамике

Из уравнений вакуума (A) и (B) следуют уравнения вакуумной электродинамики [4]. В этой электродинамике проявляются эффекты кручения Риччи, порожденные спином заряженных частиц.

Так же как и в обычной электродинамике уравнения движения излучающего заряда в вакуумной электродинамике записываются в виде

$$m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{x}}\mathbf{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}, \quad (89)$$

однако в вакуумной электродинамике сила радиационного трения

$$\frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}$$

содержит кручение Риччи, порождаемое спином заряда. Действительно, из уравнений (6) и (21) видно, что кручение Риччи связано с третьей производной координаты по времени. Выбирая в качестве параметра в уравнениях (6) время t и подставляя полученное выражение для $\ddot{\ddot{\mathbf{x}}}$ в силу радиационного трения, имеем

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \left(\frac{d\kappa}{dt} \mathbf{e}_2 - \kappa^2 \mathbf{e}_1 + \kappa\chi \mathbf{e}_3 \right) v^3 + 3(-\kappa \mathbf{e}_1 + \chi \mathbf{e}_3) va + \frac{da}{dt} \mathbf{e}_1 \right\}. \quad (90)$$

Из этих уравнений видно, что сила радиационного трения в вакуумной электродинамике имеет сложную структуру. Она содержит члены, порождаемые не только внешними электромагнитными полями, но и торсионными но и спином электрона. Третий и пятый члены в правой части уравнений (90) содержат кручение χ , поэтому *ускоренная частица, обладающая спином, излучает одновременно как электромагнитные, так и торсионные поля (поля кручения Риччи)*. Этот теоретический вывод блестяще подтверждается многочисленными экспериментальными фактами [8].

Надо отметить, что до сих пор не были проведены специальные эксперименты для исследования структуры силы радиационного трения. Известны только удивительные устройства Н.Тесла, позволяющие передавать электромагнитную энергию не объяснимым традиционной электродинамикой способом.

10.1 Теоретическая оценка электроторсионного излучения в вакуумной электродинамике

Основываясь на соотношении (90), можно произвести приближенную оценку величины силы электроторсионного взаимодействия и сравнить ее с силами электромагнитного и гравитационного взаимодействия. Для этого будем рассматривать электрон как шар, имеющий радиус, равный комптоновскому радиусу электрона

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc} = 3,6 \times 10^{-11} \text{ см}. \quad (91)$$

Все вычисления проведем в системе СГСЕ. Представим спин электрона в виде

$$s = J\omega = Jv\chi = \frac{\hbar}{2}, \quad (92)$$

где момент инерции J электрона вычисляется как момент инерции шара радиуса (91)

$$J = \frac{2}{5}m\lambda^2,$$

а $\omega = v\chi$ – угловая частота собственного вращения электрона. Из соотношения (92) находим эту величину для электрона

$$\omega \approx 10^{21} \text{ рад/с.} \quad (93)$$

Предположим теперь, что электрон излучает при переходе с одного стационарного уровня на другой в атоме водорода. Пусть при этом он находится приблизительно на расстоянии первой боровской орбиты ($E \approx 10^8$ В/см). Тогда легко подсчитать силу электромагнитного \mathbf{F}_e и гравитационного \mathbf{F}_g взаимодействия электрона с ядром:

$$|\mathbf{F}_e| = eE = m\kappa_e^{int} = mv^2\kappa_e = \frac{e^2}{r_0^2} \approx 4,8 \times 10^{-2} \text{ дин,} \quad (94)$$

$$|\mathbf{F}_g| = mG = m\kappa_g^{int} = mv^2\kappa_g = \frac{\gamma mM_{\text{Я}}}{r_0^2} \approx 0,6 \times 10^{-42} \text{ дин.}$$

Из равенства (90) для силы электроторсионного взаимодействия находим

$$|\mathbf{F}_{\kappa\chi}| = \frac{2e^2}{3c^3} \kappa^{int} \omega. \quad (95)$$

С помощью формулы (94) получим

$$\kappa^{int} = v^2\kappa \approx 10^{25} \text{ см/с}^2.$$

Подставляя эту величину в (95) и учитывая (93), находим значение силы электроторсионного взаимодействия

$$F_{\kappa\chi} \approx 2,9 \times 10^{-4} \text{ дин.} \quad (96)$$

Таким образом, сила электроторсионного излучения электрона в ядре оказывается слабее силы электростатического и сильнее силы гравитационного взаимодействия, что также наблюдается в эксперименте [8].

11 Теоретическое исследование физических свойств торсионных полей

Этот раздел включает в себя широкий круг вопросов, поэтому, для краткости, мы ограничимся только перечислением свойств торсионных полей, основываясь на уравнениях вакуума (A) и (B).

Как было показано в работе [4], в теории вакуума существует два типа торсионных полей, порождаемых кручением Риччи:

- а) первичные торсионные, порождаемые Абсолютным «Ничто»;
- б) вторичные торсионные поля, порождаемые материей.

11.1 Свойства первичных торсионных полей

Первичные торсионные поля представляют собой пространственно-временные вихри, удовлетворяющие уравнениям [4]

$$\nabla_{[i} T^i_{|j|m]} + T^i_{s[i} T^s_{|j|m]} = 0, \quad (97)$$

Сравнивая это соотношение с определением тензора энергии-импульса материи (76) в уравнениях вакуума (А) и (В), получаем нулевое значение энергии для первичного торсионного поля

$$E = \int T^{jm} g_{jm} (-g)^{\frac{1}{2}} dV \equiv 0. \quad (98)$$

Точное решение уравнений вакуума в этом случае показывает, что торсионное отлично от нуля и способно вращать плоскость поляризации поляризованной световой волны [4]. Мы здесь имеем случай, когда поле T^i_{jk} несет информацию без переноса энергии. Траектория пробной частицы в первичном торсионном поле будет изменяться под действием поля в соответствии с уравнениями движения

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0,$$

но при этом взаимодействии энергия частицы останется неизменной (безэнергетическое взаимодействие).

Для объекта, энергия которого равна нулю, невозможно сформулировать понятие скорости его распространения. Для обычного наблюдателя такой объект есть «сразу везде и всегда», т.е. его «скорость распространения» мгновенна.

Рождение первичных торсионных полей можно рассматривать как первичную поляризацию вакуума по его спиновым свойствам, при этом одновременно возникают как правые, так и левые поля.

Эксперименты по созданию искусственной торсионной поляризации вакуума путем внесения в некоторую его область материальных предметов с различной геометрией поверхности показывают [8], что возникают одновременно как правые, так и левые первичные торсионные поля. Геометрия пространства в этом случае, представляет собой десятимерное многообразие (4 трансляционные координаты и 6 угловых), причем его риманова кривизна R^i_{jkm} оказывается равной нулю, а кручение Риччи отлично от нуля и удовлетворяет уравнениям (97).

«Распространение» первичных торсионных полей с мгновенными скоростями происходит на фазовом портрете этих полей, а не с помощью групповой скорости, как это происходит у обычных физических полей. Это указывает голографическую структуру полей кручения.

11.2 Свойства вторичных торсионных полей

Вторичные торсионные поля связаны с вращением материальных объектов. Они в значительной степени сохраняют свойства первичных торсионных полей, однако, в отличие от последних, в связанном состоянии могут значительно менять потенциальную энергию материальных систем. Например, потенциал взаимодействия спинующей массы SMS, найденный на основе точного решения уравнений вакуума, имеет вид

$$\varphi_s = -\frac{MGr}{r^2 + r_s^2 \cos^2 \theta}, \quad (99)$$

где r_s – параметр Керра [4]. Когда вращение массы отсутствует, этот параметр обращается в нуль и мы имеем обычный ньютоновский потенциал. На расстояниях $r \approx r_s$ вращение вносит значительный вклад в потенциальную энергию взаимодействия.

Можно показать, что параметр r_s порождает кручение

$$\chi(s) = T^{(2)}_{(3)\gamma} \frac{dx^\gamma}{ds} \quad (100)$$

в нерелятивистских уравнениях движения и приводит к энергетическим изменениям при движении системы.

Пусть теперь в соотношении (99) $M = 0$, но $r_s \neq 0$, что соответствует решению для первичного торсионного поля. Легко видеть что потенциал (99) в этом случае обращается в нуль, а торсионное поле (100) отлично от нуля и способно передавать информацию. Этот результат можно трактовать как возможность вторичных торсионных полей становится свободными, приобретая свойства первичных. В данном примере обращение в нуль потенциала взаимодействия указывает на высокую проникающую способность вторичных (и первичных) торсионных полей, если они не находятся в связанном состоянии.

Собирая результаты, перечислим основные свойства торсионных полей, полученных в результате теоретического анализа уравнений вакуума:

- Переносят информацию без переноса энергии.
- Скорость распространения – бесконечность.
- Высокая проникающая способность.
- Голографическая природа.
- Способность в связанном состоянии менять энергию системы.

Список литературы

- [1] *Frenet F.* Jour. de Math. 1852. Vol. 17. P. 437-447.
- [2] *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.
- [3] *Ricci G.* Mem.Acc.Linc. 1895. Vol. 2. Ser. 5. P. 276-322.
- [4] *Шимов Г.И.* Теория физического вакуума. М.: НТ-Центр, 1993, с.362.
- [5] *Схоутен И.А., Стройк Д.Д.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т.2. М.: ГИИЛ, 1948.
- [6] *Cartan E., Schouten J.* // Proc. Knkl. nederl. akad. 1926. Vol. 29. P. 803-810.
- [7] *Cartan E., Schouten J.* // Ibid. P. 933-938.
- [8] *Акимов А.Е.* Эвристическое обсуждение проблемы поиска дальнодействий. EGS - концепция. М.: МНТЦ ВЕНТ, 1991. 63 с.

- [9] *Ращевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.
- [10] *Newton E., Penrose R.* // J. Math. Phys. 1962. Vol. 3, №3. P.566 – 587.
- [11] *Carmeli M.* // Phys. Rev.D. 1972. Vol. 5. P. 5–8.