РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

Препринт №15

Е.А.Губарев

ДИНАМИКА ОРИЕНТИРУЕМОЙ ТОЧКИ И ЯВЛЕНИЕ ИНЕРЦИИ

Москва
2003

УДК 530.12:531.12

Губарев Е.А. Динамика ориентируемой точки и явление инерции.

Препринт №15. Международный институт теоретической и прикладной физики Российской академии естественных наук, Москва, 2003 г., 32 с., библ. 8 сс.

Рассматриваются проблемы современной физики, связанные с формулированием уравнений движения частицы в неинерциальных системах отсчета общего вида.

Показано, что в рамках теории физического вакуума Г.Шипова неинерциальная система отсчета общего вида может быть представлена только как система отсчета, осуществляющая четырехмерное вращение в пространстве абсолютного параллелизма.

Предложено и сформулировано новое уравнение, описывающее изменение ориентации ориентируемой точки в многообразии угловых переменных. Уравнение ориентации не следует из уравнений движения центра ориентируемой точки теории физического вакуума (уравнений геодезических), но естественным образом дополняет их. Основной вклад в изменение ориентации ориентируемой точки вносит торсионное поле, связанное с введением в пространство событий дополнительных неголономных координат - вращательных степеней свободы ориентируемой точки. Источником торсионного поля может быть: а) торсионные компоненты внешнего поля, б) само пространство событий относительно неинерциальной системы отсчета. Вычислены компоненты торсионного поля в неинерциальной системе отсчета общего вида.

Показано, что в рамках теории физического вакуума неинерциальная система отсчета локально может быть реализована двумя способами, и различие в реализации приводит к двум различным выражениям для сил, действующих на частицу. Показано, что в неинерциальной системе отсчета I рода торсионное поле приводит к появлению сил, тождественным силам инерции в механике.

ISBN 5-88708-041-8

ДИНАМИКА ОРИЕНТИРУЕМОЙ ТОЧКИ И ЯВЛЕНИЕ ИНЕРЦИИ

Е.А.Губарев
e-mail: gea25141@mtu-net.ru

Рассматриваются проблемы современной физики, связанные с формулированием уравнений движения частицы в неинерциальных системах отсчета общего вида.

Показано, что в рамках теории физического вакуума Г.Шипова неинерциальная система отсчета общего вида может быть представлена только как система отсчета, осуществляющая четырехмерное вращение в пространстве абсолютного параллелизма.

Предложено и сформулировано новое уравнение, описывающее изменение ориентации ориентируемой точки в многообразии угловых переменных. Уравнение ориентации не следует из уравнений движения центра ориентируемой точки теории физического вакуума (уравнений геодезических), но естественным образом дополняет их. Основной вклад в изменение ориентации ориентируемой точки вносит торсионное поле, связанное с введением в пространство событий дополнительных неголономных координат - вращательных степеней свободы ориентируемой точки. Источником торсионного поля может быть: а) торсионные компоненты внешнего поля, б) само пространство событий относительно неинерциальной системы отсчета. Вычислены компоненты торсионного поля в неинерциальной системе отсчета общего вида.

Показано, что в рамках теории физического вакуума неинерциальная система отсчета локально может быть реализована двумя способами, и различие в реализации приводит к двум различным выражениям для сил, действующих на частицу. Показано, что в неинерциальной системе отсчета I рода торсионное поле приводит к появлению сил, тождественным силам инерции в механике.

1. Некоторые проблемы современной физики, связанные с неинерциальными системами отсчета.

Большинство законов физики сформулированы в инерциальных системах отсчета, где влияние сил инерции сведено к нулю. Таким образом, исследователями искусственно выделен класс инерциальных систем отсчета.

Введенные специальной теорией относительности преобразования Лоренца установили относительность инерциальных систем отсчета, движущихся друг относительно друга с постоянной поступательной скоростью. Специальный принцип относительности расширил пространство событий классической механики до четырехмерного континуума, имеющего структуру плоского пространства с псевдоевклидовой метрикой.

Создавая релятивистскую теорию тяготения, А.Эйнштейн расширил допустимые преобразования координат. Кроме преобразований Лоренца между системами отсчета, движущимися с постоянной поступательной скоростью, в этой теории допускаются нелинейные преобразования мировых координат, соответствующие переходу к локально-лоренцевой системе отсчета (фактически, к системе отсчета, движущейся с поступательным ускорением).

При переходе в локально-лоренцеву систему отсчета гравитационная сила компенсируется возникшей силой инерции, пропорциональной поступательному ускорению, так что результирующая сила в уравнениях движения

$$\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{1}$$

обращается (локально) в ноль. Здесь Γ^i_{jk} - символы Кристоффеля, x^i - контравариантные координаты частицы, $i, j, k = 0, 1, 2, 3$.

На этом основании А.Эйнштейн сформулировал принцип эквивалентности однородного гравитационного поля и равномерно ускоренной системы отсчета: "В гравитационном поле все физические процессы протекают совершенно так же, как и без гравитационного поля, но в соответствующим образом ускоренной (трехмерной) системе отсчета ("гипотеза эквивалентности")."[1, с.400].

Однако при более глубоком рассмотрении:

а) инерциальной системы отсчета во внешнем гравитационном поле,

б) неинерциальной системы отсчета, движущейся с поступательным ускорением в отсутствие внешнего поля,

мы обнаружим геометрическую величину, которую нельзя считать эквивалентной для рассматриваемых систем - тензор Римана R^i_{jkm}.

Действительно, все компоненты тензора Римана в ускоренной системе отсчета равны нулю, в соответствии с тензорным законом преобразования компонент из инерциальной системы отсчета в отсутствии внешнего поля, где тензор Римана тождественно равен нулю:

$$R^{i'}{}_{j'k'm'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}R^i{}_{jkm} = 0. \tag{2}$$

С другой стороны, основным постулатом общей теории относительности явилось положение о том, что наличие источника гравитационного поля искривляет четырехмерное пространство событий, и оно описывается римановой метрикой общего вида:

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{3}$$

В соответствии с тензорным законом преобразования компонент тензора Римана это положение относится как к инерциальным системам отсчета, так и к ускоренным системам.

Следовательно, в рамках общей теории относительности четырехмерное пространство событий в отсутствии внешних полей является плоским как в инерциальной, так и в ускоренной системе отсчета. Наличие источника гравитационного поля искривляет пространство событий относительно любой системы отсчета - как инерциальной, так и ускоренной. Поэтому в общем случае однородное гравитационное поле в инерциальной системе отсчета не эквивалентно полю инерции в равномерно ускоренной системе отсчета, но может быть представлено таковым при следующих условиях:

а) в локальной области пространства;

б) при слабых гравитационных полях, а также малых ускорениях неинерциальной системы отсчета;

в) при нерелятивистских скоростях частиц.

В 1921 г. А.Эйнштейн поставил задачу нахождения геометрии пространства событий в неинерциальной системе другого вида - во вращающейся системе отсчета. "Пространство и время нельзя определить в K' так же, как они определяются в специальной теории относительности для инерциальных систем. Но, согласно принципу эквивалентности, K' также может рассматриваться как покоящаяся система, в которой есть гравитационное поле (поле центробежных сил и сила Кориолиса)"[2, с.47]. (Здесь K' - система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной системы K с постоянной угловой скоростью, причем ось z' системы K' совпадает с осью z системы K).

Таким образом, А.Эйнштейн фактически пытался расширить введенный им принцип эквивалентности поля инерции, связанного с поступательным ускорением, и однородного гравитационного поля, до более глобального принципа эквивалентности поля инерции во вращающейся системе отсчета и гравитационного поля. Однако такой подход не был реализован по следующей причине. Общеизвестно, что сила гравитационного взаимодействия в нерелятивистском приближении не зависит от скорости пробной частицы, что установлено для составляющей силы инерции во вращающейся системе отсчета - силы Кориолиса.

Рассмотрим формальный подход к описанию геометрии вращающейся системы отсчета, развитый в рамках общего принципа относительности [3, §89].

Квадрат интервала в инерциальной системе отсчета в декартовых координатах имеет общеизвестный вид:

$$ds^2 = (c\,dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{4}$$

Рассмотрим систему отчета, вращающуюся относительно инерциальной системы с постоянной угловой скоростью Ω, причем ось вращения совпадает с осями z' и z. Декартовые координаты точки во вращающейся системе отсчета x', y', z' связаны с декартовыми координатами в инерциальной системе известными кинематическими соотношениями (рассматривается нерелятивистский случай):

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\Omega t - y'\sin\Omega t\,, \\ y &= x'\sin\Omega t + y'\cos\Omega t\,, \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в (4), найдем интервал во вращающейся системе отсчета

$$ds^2 = g_{i'k'}dx^{i'}dx^{k'}, \tag{6}$$

где метрический тензор имеет следующий вид:

$$g_{i'k'} = \left(\begin{array}{cccc} 1 - \frac{\Omega^2}{c^2}(x'^2 + y'^2) & \frac{\Omega}{c}y' & -\frac{\Omega}{c}x' & 0 \\ \frac{\Omega}{c}y' & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\Omega}{c}x' & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right). \tag{7}$$

Основной идеей такого подхода явилось сведение вращения, которое есть изменение взаимной ориентации систем отсчета, к соотношениям между мировыми координатами этих систем отсчета. Таким образом, вращение свелось к поступательной относительности систем отсчета.

Такой метод неверен в своей основе. Известно, что для описания поступательной относительности четырехмерной системы отсчета достаточно четырех координат начала O этой системы. Изменение ориентации такой системы отсчета требует введения шести угловых переменных - трех пространственных углов и трех углов, задающих ориентацию в трех псевдоевклидовых плоскостях [5]. Таким образом, вращательной относительности должно соответствовать пространство событий с дополнительными степенями свободы, соответствующими вращению.

Описание вращения в пространстве событий, построенном без учета дополнительных вращательных степеней свободы ориентируемой точки, ограничено в своей основе и может не дать правильных результатов, особенно при описании эффектов, связанных с некоммутируемыми вращениями.

Остановимся еще раз на проблеме описания системы отсчета, движущейся с поступательным ускорением центра O относительно инерциальной системы $v_x(t) \neq const$. Хорошо известно [5], что такое ускорение вызывает четырехмерное вращение системы отсчета, то есть изменение угла

$$\theta_x(t) = arcth \frac{v_x(t)}{c}, \tag{8}$$

в псевдоевклидовой плоскости XOT с угловой скоростью

$$\frac{d\theta_x(t)}{dt} = \frac{1}{1-\beta^2} \frac{1}{c} \frac{dv_x(t)}{dt}, \tag{9}$$

где $\beta = v_x/c$.

Поэтому поступательное ускорение ориентируемой точки - тела, размерами которого можно пренебречь, с жестко связанной с ним четырехмерной системой отсчета, - строго может быть описано только как ее вращение в псевдоевклидовых плоскостях в пространстве событий вращательной относительности. Использование преобразований вращения, в отличие от нелинейных преобразований координат общей теории относительности, может привести к качественно новым результатам:

а) при сочетании различных четырехмерных вращений ориентируемой точки (например, поступательного ускорения и трехмерного вращения);

б) при релятивистских скоростях и при больших ускорениях частиц.

2. Движение ориентируемой точки в пространстве абсолютного параллелизма.

Развитие фундаментальной физики происходит путем расширения принципа относительности. В 1988 году Г.И.Шипов [6] сформулировал принцип всеобщей относительности, устанавливающий относительность ускоренных вращающихся систем отсчета.

Расширение принципа относительности потребовало расширения соответствуюшего ему пространства событий. В теории физического вакуума, построенной Г.И.Шиповым на фундаменте принципа всеобщей относительности [5], пространство событий представляет собой десятимерное многообразие, состоящее из четырехмерного риманова пространства мировых координат и шестимерного многообразия неголономных угловых координат.

Действительно, четырехмерная система отсчета, жестко связанная с ориентируемой точкой, может быть описана четырьмя координатами начала системы отсчета и шестью координатами, задающими ориентацию системы отсчета в четырехмерном пространстве: тремя углами пространственной ориентации и тремя псевдоевклидовыми углами, соответствующих ориентации системы отсчета в трех пространственно-временных плоскостях. Рассмотренное пространство событий может быть наделено римановой кривизной и геометрическим кручением, связанным с неголономностью угловых координат.

Ввиду того, что тензор полной кривизны этого пространства равен нулю, и, следовательно, параллельный перенос произвольного вектора по замкнутому контуру переводит его в положение, параллельное первоначальному, то такое пространство является геометрией абсолютного параллелизма.

Основой пространства событий теории физического вакуума, наделенного геометрией абсолютного параллелизма, являются поля неголономных тетрад, состоящие из поля контравариантных векторов $e^i{}_a$ и и поля ковариантных векторов $e^b{}_j$, объединенных условием ортогональности

$$\begin{aligned} e^a{}_i e^i{}_b &= \delta^a{}_b, \\ e^i{}_a e^a{}_j &= \delta^i{}_j, \end{aligned} \tag{10}$$

и определяющих метрический тензор этого пространства

$$g_{ij} = \eta_{ab} e^a{}_i e^b{}_j, \;\; \eta_{ab} = diag(1\ -1\ -1\ -1). \tag{11}$$

В формулах (10), (11) i, j, k - мировые индексы, пробегающие значения $0, 1, 2, 3$, а a, b, c - локальные индексы, обозначающие попросту номер вектора тетрады. Условимся, что локальные индексы также будут принимать значения $0, 1, 2, 3$. Сами тетрады могут рассматриваться как системы отсчета в рассматриваемом пространстве событий, удовлетворяющие определенным условиям. Из формулы (11) следует, что пространство событий теории физического вакуума является расслоенным пространством, при этом связь между слоем и базовым пространством мировых координат x^i осуществляется с помощью тетрад $e^i{}_a$ [5].

Действительно, любой вектор $\mathbf{X}$, представимый координатами $\{X^i\}$ в базовом пространстве, может быть разложен по векторам $\mathbf{e}_a$ локального базиса

$$\mathbf{X} = \mathbf{e}_a X^a, \tag{12}$$

откуда следует, что связь между локальными X^a и базовыми X^i координатами вектора $\mathbf{X}$ осуществляется с помощью формулы

$$X^a = e^a{}_i X^i. \tag{13}$$

Общие симметрии пространства событий теории физического вакуума определяются:

- во-первых, координатными преобразованиями, описывающих относительное положение центров произвольных систем отсчета:

$$e^{i'}{}_a = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} e^i{}_a, \ \|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\| \in T_4, \tag{14}$$

где T_4 - группа трансляций (четырехмерная группа координатных преобразований), действующая в пространстве мировых координат (базе);

- во-вторых, преобразованиями угловых переменных, описывающих изменения взаимной ориентации (то есть вращения) произвольных систем отсчета:

$$e^i{}_{a'} = e^i{}_a \Lambda^a{}_{a'}, \ \Lambda^a{}_{a'} \in SO(1.3), \tag{15}$$

где $SO(1.3)$ - псевдоортогональная группа вращений, действующая в многообразии угловых координат (слое).

Произвольный вектор $\mathbf{X}$, таким образом, может быть преобразован по мировым индексам, в связи с преобразованием в другую систему отсчета:

$$X^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} X^i, \ \|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\| \in T_4, \tag{16}$$

и может быть преобразован по локальным индексам, в связи с поворотом (вращением) системы отсчета:

$$X^{a'} = \Lambda^{a'}_a X^a, \ \Lambda^{a'}_a \in SO(1.3). \tag{17}$$

Движение центра ориентируемой частицы в пространстве абсолютного параллелизма описывается уравнениями [5] :

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Delta^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \tag{18}$$

где

$$\Delta^i_{jk} = e^i{}_a e^a{}_{j,k} \tag{19}$$

- связность пространства абсолютного параллелизма, которая может быть представлена в виде суммы

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}. \tag{20}$$

В формуле (20) Γ^i_{jk} - символы Кристоффеля, а T^i_{jk} - коэффициенты вращения Риччи. Поле коэффициентов вращения Риччи, ввиду того, что оно в общем случае обладает ненулевым кручением $T^i_{jk} - T^i_{kj} \neq 0$, называется торсионным полем.

В отсутствии внешних полей метрика является плоской и в декартовых координатах $\Gamma^i_{jk} = 0$. Поэтому в отсутствии внешних полей в декартовых координатах уравнения движения (18) могут быть записаны в виде:

$$\frac{du^i}{ds_0} + T^i_{jk}u^j u^k = 0. \tag{21}$$

Здесь введена четырехмерная скорость частицы относительно избранной системы отсчета

$$u^i = \frac{dx^i}{ds_0} = \gamma_0(1,\, B_x,\, B_y,\, B_z), \qquad B_\alpha = \frac{V_\alpha}{c}, \tag{22}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}, \qquad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \tag{23}$$

- релятивистсткий фактор,

$$ds_0 = \sqrt{\eta_{ij}dx^i dx^j} = \frac{cdt}{\gamma_0},\ \eta_{ij} = diag(1\ -1\ -1\ -1) \tag{24}$$

- интервал плоского пространства.

3. Коэффициенты вращения Риччи (торсионное поле) в инерциальной системе отчета. В пространстве без внешних полей в инерциальной системе отсчета движение свободной частицы происходит с постоянной по величине и направлению скоростью $du^i/ds_0 = 0$, откуда следует условие

$$T^i{}_{jk}u^j u^k = 0. \tag{25}$$

Это эквивалентно требованию антисимметричности по двум нижним индексам для коэффициентов вращения Риччи:

$$T^i{}_{jk} = -T^i{}_{kj}. \tag{26}$$

Из формулы (19) в декартовых координатах получаем условие для векторов тетрады

$$e^i{}_b e^b{}_{j,k} = -e^i{}_b e^b{}_{k,j}. \tag{27}$$

Умножая обе части равенства на $e^a{}_i$ и, производя суммирование по i, получим

$$e^a{}_{j,k} = -e^a{}_{k,j}. \tag{28}$$

Тетрада $e^a{}_i$ определяет метрический тензор плоского пространства

$$g_{ij} = \eta_{ij} = e^a{}_i \, \eta_{ab} \, e^b{}_j, \tag{29}$$

где

$$\eta_{ij} = \eta_{ab} = diag(1 \ -1 \ -1 \ -1). \tag{30}$$

Условия (28) и (29) позволяют найти тетраду $e^a{}_i$ в декартовых координатах в виде тривиального решения

$$\begin{aligned} e^a{}_i &= \delta^a{}_i = diag(1 \ 1 \ 1 \ 1), \\ e^j{}_b &= \delta^j{}_b = diag(1 \ 1 \ 1 \ 1). \end{aligned} \tag{31}$$

Отсюда непосредственно следует, что все коэффициенты вращения Риччи и все компоненты объекта неголономности в декартовых координатах в инерциальной системе отсчета равны нулю:

$$T^i{}_{jk} = e^i{}_a e^a{}_{j,k} = 0, \tag{32}$$

$$\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i} = e^i{}_a e^a{}_{[k,j]} = 0. \tag{33}$$

Ввиду того, что как при активных, так при пассивных преобразованиях по мировых индексам i, j, k (связанных с переходом к другой инерциальной системе отсчета или с переходом в другую систему координат соответственно) коэффициенты вращения Риччи $T^i{}_{jk}$ и объект неголономности $\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i}$ ведут себя как тензоры [5], следует вывод:
в любой инерциальной системе отсчета без внешних полей в любых координатах коэффициенты вращения Риччи и компоненты объекта неголономности равны нулю

$$T^i{}_{jk} = 0, \tag{34}$$

$$\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i} = 0. \tag{35}$$

4. Уравнение ориентации.

Напомним, что уравнение (18) движения частицы в пространстве абсолютного параллелизма описывает движение начала системы отсчета, жестко связанной с ориентируемой точкой.

Формальное применение нелинейных координатных преобразований общей теории относительности, якобы соответствующих переходу в неинерциальную систему отсчета общего вида, приведет к тому, что:

- на фоне плоского пространства (в отсутствие внешних полей) возникнут фиктивные силы, пропорциональные символам Кристоффеля $\Gamma^{i'}_{j'k'} u^{j'} u^{k'}$, выражения для которых могут не согласоваться с данными классической механики [4] (это относится, прежде всего, к последовательности координатных преобразований, соответствующим некоммутируемым вращениям);

- силы, пропорциональные $T^{i'}{}_{j'k'}$, будут равны нулю, так как коэффициенты вращения Риччи при любых координатных преобразованиях преобразуются как тензоры

$$T^{i'}{}_{j'k'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T^i{}_{jk} = 0. \tag{36}$$

Следовательно, уравнение движения частицы в мировых координатах (18) записано, строго говоря, в инерциальной системе отсчета.

В действительности неинерциальная система отсчета общего вида - ускоренная вращающаяся система отсчета - наиболее полно может быть представлена ее четырехмерным вращением в многообразии угловых переменных:

$$e^i{}_{a'} = e^i{}_a \Lambda^a{}_{a'}, \ \Lambda^a{}_{a'} \in SO(1.3). \tag{37}$$

В формуле (37) штрихованные локальные индексы относятся к неинерциальной системе отсчета, осуществляющей четырехмерное вращение относительно исходной инерциальной системы отсчета.

Покажем, что уравнение (18) никак не влияет на собственную ориентацию движущейся частицы. Перейдем от уравнения (18) к эквивалентному уравнению движения частицы в мировых координатах:

$$u^i{}_{,k} + \Delta^i{}_{jk} u^j = 0, \tag{38}$$

где $,k$ обозначает частную производную по контравариантой координате x^k. Переход к координатам слоя в уравнении (38) осуществляется с помощью тетрады $e^a{}_i$

$$e^a{}_i u^i{}_{,k} + e^a{}_i \Delta^i{}_{jk} u^j = 0,$$

откуда следует следующее уравнение

$$\left(e^a{}_i u^i\right)_{,k} - e^a{}_{i,k} u^i + e^a{}_i \Delta^i{}_{jk} u^j = 0. \tag{39}$$

Из определения связности абсолютного параллелизма $\Delta^i_{jk} = e^i{}_a e^a{}_{j,k}$ легко получить

$$e^a{}_{i,k} = e^a{}_l \Delta^l_{ik}. \tag{40}$$

Подставив (40) в (39), получим уравнение

$$u^a{}_{,k} - e^a{}_l \Delta^l_{ik} u^i + e^a{}_i \Delta^i{}_{jk} u^j = 0. \tag{41}$$

Заметив, что второй и третий член в этом уравнении взаимно сокращаются, получим

$$u^a{}_{,k} = 0, \tag{42}$$

или, умножая обе стороны уравнения (42) на $u^k = dx^k/ds$ и, суммируя по k, получим окончательно

$$\frac{du^a}{ds} = 0. \tag{43}$$

Условие (42) является прямым следствием уравнения движения ориентируемой частицы (18) и выведено для общего случая $\Gamma^i{}_{jk} \neq 0$. Таким образом, мы показали, что общее уравнение движения не влияет на ориентацию самой ориентируемой точки, а определяет исключительно ее движение "в целом".

Следовательно, описание ориентации тела, движущегося по мировой линии в пространстве абсолютного параллелизма, должно быть отнесено к отдельному уравнению. Из сказанного выше следует, что это уравнение должно действовать в многообразии угловых переменных и быть инвариантным относительно преобразований, составляющих псевдоортогональную группу $SO(1.3)$.

В качестве уравнения ориентации может быть предложено следующее уравнение

$$\mathbf{u^a}_{,\mathbf{k}} - \mathbf{\Delta^a}_{\mathbf{bk}}\mathbf{u^b} = \mathbf{0}. \tag{44}$$

Покажем, что уравнение ориентации (44) следует из самых общих свойств пространства абсолютного параллелизма. В уравнении (44) $\Delta^a{}_{bk} = e^a{}_i \Delta^i{}_{jk} e^j{}_b$, что, в соответствии с определением связности абсолютного параллелизма (19), может быть преобразовано к следующему виду

$$\Delta^a{}_{bk} = e^a{}_{l,k} e^l{}_b = -e^a{}_l e^l{}_{b,k}. \tag{45}$$

Умножим обе части уравнения (45) на $e^b{}_m$ и, просуммировав по b, получим

$$\Delta^a{}_{bk} e^b{}_m = e^a{}_{l,k} e^l{}_b e^b{}_m = e^a{}_{l,k}\delta^l_m, \tag{46}$$

откуда следует уравнение

$$e^a{}_{m,k} - \Delta^a{}_{bk} e^b{}_m = 0. \tag{47}$$

Умножая каждый член уравнения на четырехмерную скорость $u^k = dx^k/ds$ и, просуммировав по k, получим

$$\frac{de^a{}_m}{ds} - \Delta^a{}_{bk} e^b{}_m u^k = 0. \tag{48}$$

Уравнения (48) представляют собой систему из шести уравнений для шести независимых компонент матрицы $e^a{}_m$. С другой стороны, уравнения (48) можно назвать релятивистским обобщением формул Френе для пространства абсолютного параллелизма в произвольной системе отсчета.

Более простую форму эти уравнения принимают в сопровождающей системе отсчета, то есть в такой системе отсчета, где частица покоится, и вектор четырехмерной скорости равен

$$u^k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Для сопровождающей системы отсчета уравнения (48) можно записать в виде

$$\frac{de^a{}_m}{ds} - \Delta^a{}_{b0} e^b{}_m = 0. \tag{50}$$

Уравнения (50) являются уравнениями Френе для пространства абсолютного параллелизма, которые изначально сформулированы в сопровождающей системе отсчета.

Заметим, что уравнения ориентации (44) - это система четырех уравнений для четырех локальных компонент скорости u^a. Уравнения ориентации можно получить из уравнений (47) путем наложения дополнительного условия ${e^a}_0 = u^a$

$$
{u^a}_{,k} - {\Delta^a}_{bk} u^b = 0. \tag{51}
$$

Для доказательства инвариантности уравнений ориентации (44) относительно группы преобразований $SO(1.3)$ выведем закон преобразования ${\Delta^{a'}}_{b'k} \to {\Delta^{a''}}_{b''k}$ при четырехмерном вращении системы отсчета (37). Из формулы (45) получаем следующее соотношение

$$
\begin{aligned}
{\Delta^{a''}}_{b''k} &= -\,{e^{a''}}_l\, {e^l}_{b'',k} = -\,({\Lambda^{a''}}_{a'}\, {e^{a'}}_l)\, ({e^l}_{b'}\, {\Lambda^{b'}}_{b''})_{,k} = \\
&= {\Lambda^{a''}}_{a'}\, (-{e^{a'}}_l\, {e^l}_{b',k})\, {\Lambda^{b'}}_{b''} - {\Lambda^{a''}}_{a'}\, {e^{a'}}_l\, {e^l}_{b'}\, {\Lambda^{b'}}_{b'',k} = \\
&= {\Lambda^{a''}}_{a'}\, {\Delta^{a'}}_{b'k}\, {\Lambda^{b'}}_{b''} - {\Lambda^{a''}}_{a'}\, {\Lambda^{a'}}_{b'',k},
\end{aligned} \tag{52}
$$

где ${\Lambda^{a''}}_{a'} \in SO(1.3)$ - матрицы перехода из одной вращающейся системы отсчета в другую вращающуюся систему отсчета. Уравнение (52) показывает, что величина ${\Delta^a}_{bk}$ в слое преобразуется не как связность в векторном пространстве (тогда в последней строчке (52) стоял бы знак $+$), а иным образом. Из-за особенностей преобразования величины ${\Delta^a}_{bk}$ в многообразии угловых переменных назовем ее "псевдосвязностью абсолютного параллелизма в слое".

Выведем также закон преобразования $T^{a'}_{b'k} \to T^{a''}_{b''k}$. В общем случае величины T^a_{bk} следующим образом выражаются через компоненты векторов тетрады [5]:

$$
T^a_{bk} = \left(\nabla_k\, {e^a}_j\right)\, {e^j}_b,
$$

где ∇_k - ковариантная производная относительно связности риманова пространства Γ^i_{jk}. Поэтому

$$
\begin{aligned}
T^{a''}_{b''k} &= \left(\nabla_k\, {\Lambda^{a''}}_{a'}\, {e^{a'}}_j\right)\, {e^j}_{b'} {\Lambda^{b'}}_{b''} = \\
&= \left[\left(\nabla_k\, {\Lambda^{a''}}_{a'}\right)\, {e^{a'}}_j + {\Lambda^{a''}}_{a'}\, \left(\nabla_k\, {e^{a'}}_j\right)\right]\, {e^j}_{b'} {\Lambda^{b'}}_{b''} = \\
&= \left(\nabla_k\, {\Lambda^{a''}}_{a'}\right)\, {\Lambda^{a'}}_{b''} + {\Lambda^{a''}}_{a'}\, T^{a'}_{b'k}\, {\Lambda^{b'}}_{b''}.
\end{aligned} \tag{53}
$$

В случае отсутствия внешних полей $\Gamma^i_{jk} = 0$ формула (53) может быть упрощена:

$$
T^{a''}_{b''k} = {\Lambda^{a''}}_{a'}\, T^{a'}_{b'k}\, {\Lambda^{b'}}_{b''} + {\Lambda^{a''}}_{a',k}\, {\Lambda^{a'}}_{b''}. \tag{54}
$$

Замечая, что ${\Lambda^{a''}}_{a',k}\, {\Lambda^{a'}}_{b''} = -{\Lambda^{a''}}_{a'}\, {\Lambda^{a'}}_{b'',k}$, (54) можно записать также в виде соотношения

$$
T^{a''}_{b''k} = {\Lambda^{a''}}_{a'}\, T^{a'}_{b'k}\, {\Lambda^{b'}}_{b''} - {\Lambda^{a''}}_{a'}\, {\Lambda^{a'}}_{b'',k}, \tag{55}
$$

которое показывает, что при отсутствии внешних полей величины T^a_{bk} и ${\Delta^a}_{bk}$ преобразуются одинаковым образом, и, следовательно, совпадают.

Покажем, что уравнение ориентации не зависит от выбора системы отсчета. Для этого запишем уравнение ориентации в произвольной вращающейся системе отсчета

$$
{u^{b''}}_{,k} - {\Delta^{b''}}_{a''k} u^{a''} = 0 \tag{56}
$$

и покажем, что в другой вращающейся четырехмерной системе отсчета оно будет иметь такой же вид.

Подставив в уравнение (56) формулу (52) и соотношение, связывающее локальные компоненты четырехмерной скорости частицы в разных системах отсчета

$$u^{b''} = \Lambda^{b''}_{\ b'} u^{b'}, \ \Lambda^{b''}_{\ b'} \in SO(1.3),$$

получим

$$\Lambda^{b''}_{\ b',k}\, u^{b'} + \Lambda^{b''}_{\ b'}\, u^{b'}_{\ ,k} - \Lambda^{b''}_{\ b'}\, \Delta^{b'}_{\ a'k}\, \Lambda^{a'}_{\ a''}\, \Lambda^{a''}_{\ c'}\, u^{c'} + \Lambda^{b''}_{\ a'}\, \Lambda^{a'}_{\ a'',k}\, \Lambda^{a''}_{\ c'}\, u^{c'} = 0. \tag{57}$$

Умножив обе части уравнения (57) на $\Lambda^{d'}_{\ b''}$ и, просуммировав по b'', получим

$$\Lambda^{d'}_{\ b''}\, \Lambda^{b''}_{\ b',k}\, u^{b'} + u^{d'}_{\ ,k} - \Delta^{d'}_{\ c'k}\, u^{c'} + \Lambda^{d'}_{\ a'',k}\, \Lambda^{a''}_{\ c'}\, u^{c'} = 0. \tag{58}$$

Заметив, что первый и последний члены уравнения (58) взаимно сокращаются ввиду соотношения

$$\Lambda^{d'}_{\ b''}\, \Lambda^{b''}_{\ b',k} + \Lambda^{d'}_{\ a'',k}\, \Lambda^{a''}_{\ b'} = 0,$$

получим следующее уравнение

$$u^{d'}_{\ ,k} - \Delta^{d'}_{\ c'k} u^{c'} = 0, \tag{59}$$

которое суть уравнение ориентации ориентируемой точки в другой системе отсчета. Таким образом, мы показали, что вид уравнения ориентации не зависит от выбора четырехмерной вращающейся системы отсчета. Другими словами, уравнение ориентации инвариантно относительно группы преобразования $SO(1.3)$. Таким же образом доказывается инвариантность относительно преобразований $SO(1.3)$ матричных уравнений (48).

Покажем, что предложенное уравнение ориентации прямо не содержит информацию о движении частицы "в целом", то есть непосредственно не влияет на движение центра системы отсчета, связанной с ориентируемой точкой. Для этого в уравнении ориентации перейдем к координатам базы. Подставив в уравнение (44) следующие соотношения

$$u^b = e^b_{\ m}\, u^m, \ \ u^a_{\ ,k} = e^a_{\ m,k}\, u^m + e^a_{\ m}\, u^m_{\ ,k},$$

и соотношение (45), получим

$$e^a_{\ m,k}\, u^m + e^a_{\ m}\, u^m_{\ ,k} + e^a_{\ m}\, e^m_{\ b,k}\, e^b_{\ n} u^n = 0. \tag{60}$$

Умножив обе части уравнения (60) на $e^p_{\ a}$ и просуммировав по a, получим

$$e^p_{\ a}\, e^a_{\ m,k}\, u^m + \delta^p_m\, u^m_{\ ,k} + e^p_{\ b,k}\, e^b_{\ n}\, u^n = 0.$$

Заметив, что первый и третий члены этого уравнения взаимно уничтожаются в силу свойств (45), получим окончательно

$$u^p_{\ ,k} = 0, \tag{61}$$

что доказывает наше предположение об отсутствии прямого влияния уравнения ориентации на движение частицы "в целом".

Тем не менее, уравнение движения частицы (18) и уравнение ее ориентации (44) не являются независимыми друг от друга. Они внутренне связаны различными компонентами общей величины Δ: $\Delta^i{}_{jk}$ и $\Delta^a{}_{bk}$.

Поэтому движение ориентируемой точки в пространстве абсолютного параллелизма может быть полностью описано только путем решения системы десяти уравнений - четырех уравнений движения частицы и шести уравнений для компонент репера $e^a{}_m$

$$\begin{aligned} \frac{du^i}{ds} + \Delta^i{}_{jk}\, u^j\, u^k &= 0, \\ \frac{de^a{}_m}{ds} - \Delta^a{}_{bk} e^b{}_m u^k &= 0. \end{aligned} \tag{62}$$

Система уравнений (62) определяет четыре мировых координаты частицы x^i, $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3$ и шесть независимых компонент собственного репера ориентируемой частицы $e^a{}_i$, которые однозначным образом соответствуют шести углам ориентации частицы.

Полная система уравнений движения частицы в пространстве абсолютного параллелизма может быть записана через компоненты локальной скорости частицы (m - масса частицы)

$$\begin{aligned} m\,\frac{du^i}{ds} + m\,\Delta^i{}_{jk}\, u^j\, u^k &= 0, \\ m\,\frac{du^a}{ds} - m\,\Delta^a{}_{bk}\, u^b\, u^k &= 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Система уравнений (63) состоит из четырех уравнений движения частицы и четырех уравнений для локальной скорости ("уравнений ориентации") для восьми неизвестных величин - четырех мировых координат (или четырех компонент скорости частицы) и четырех компонент локальной скорости частицы. Необходимо отметить, что эти величины также будут полностью определять движение ориентируемой частицы в пространстве абсолютного параллелизма, так как два недостающих параметра (из десяти) заданы известными калибровочными условиями $e^a{}_0 = u^a$ и $e^i{}_0 = u^i$. (Второе калибровочное условие было использовано для вывода уравнений движения (18) [5]).

В первом уравнении этой системы - уравнении движения ориентируемой точки, относящимся, строго говоря, к инерциальной системе отсчета, основное действие на частицу производится со стороны внешнего поля, так как фактически

$$\Delta^i{}_{jk}\, u^j\, u^k = \Gamma^i{}_{jk}\, u^j\, u^k. \tag{64}$$

Во втором уравнении системы - уравнении ориентации ориентируемой точки, основной вклад вносят коэффициенты вращения Риччи в координатах слоя, так как [7]

$$\Delta^a{}_{bc} = T^a{}_{bc}. \tag{65}$$

Таким образом сила, выраженная в координатах слоя, определяется только торсионными свойствами геометрии абсолютного параллелизма.

Из-за преобладающего влияния T^a_{bc} на псевдосвязность абсолютного параллелизма $\Delta^a{}_{bc}$ мы можем записать уравнение ориентации (44) полностью в переменных слоя в следующем виде

$$m\,\frac{du^a}{ds} - m\,T^a_{bc}\,u^b\,u^c = 0, \tag{66}$$

и будем называть его **торсионным уравнением.**

Одним из источников торсионного поля T^a_{bk}, определяющего свойства ориентации ориентируемой точки, может быть торсионная составляющая внешнего поля. Действительно, любое внешнее поле характеризуется набором компонент символов Кристоффеля $\Gamma^i{}_{jk}$ и компонент коэффициентов вращения Риччи T^a_{bk} [5]. При этом возможно чисто торсионное внешнее поле, относящееся к инерциальной системе отсчета

$$\begin{aligned} \Gamma^i{}_{jk} &= \;\; 0, \\ T^a_{bk} &\neq \;\; 0, \end{aligned} \tag{67}$$

которое изменяет четырехмерную ориентацию ориентируемой точки.

Заметим, что уравнение движения и уравнение ориентации определяют, вообще говоря, компоненты одной величины, относящейся к ориентируемой точке, - мировые u^i и локальные u^a компоненты четырехмерной скорости, которые жестко связаны друг с другом

$$\begin{aligned} u^i \; &= e^i{}_a\,u^a, \\ u^b \; &= e^b{}_j\,u^j. \end{aligned} \tag{68}$$

Не исключено, что действие торсионной составляющей внешнего поля T^a_{bk} приведет к такому изменению локальной скорости частицы u^a, которое повлечет за собой изменение мировых компонент u^i скорости частицы. Таким образом, при некоторых условиях **возможно возникновение реальных сил, обусловленных только торсионной составляющей внешнего поля.**

5. Переход в неинерциальную систему отсчета.

Покажем, что другим источником торсионного поля может быть само пространство событий относительно системы отсчета, осуществляющей четырехмерное вращение, и что возникающие при этом силы можно интерпретировать только как силы инерции, хорошо известные классической механике.

Ограничимся случаем отсутствия внешних полей $\Gamma^i{}_{jk} = 0$. Так как все компоненты коэффициентов вращения Риччи в инерциальной системе отсчета в этом случае равны нулю, то равны нулю и компоненты коэффициентов вращения Риччи, выраженные в переменных слоя

$$T^a_{bk} = 0. \tag{69}$$

Кроме того, относительно инерциальной системы отсчета в отсутствие внешних полей

$$\Delta^a{}_{bk} = T^a_{bk} = 0. \tag{70}$$

Поэтому система уравнений (63) относительно инерциальной системы отсчета в отсутствие внешних полей запишется в виде

$$
\begin{aligned}
m\tfrac{du^i}{ds} &= 0,\\
m\tfrac{du^a}{ds} &= 0.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

При переходе из инерциальной, то есть невращающейся системы отсчета, во вращающуюся четырехмерную систему отсчета формула (52) упрощается и дает

$$
\Delta^{a'}{}_{b'k} = \Lambda^{a'}{}_{a}\,\Delta^{a}{}_{bk}\,\Lambda^{b}{}_{b'} \;-\; \Lambda^{a'}{}_{a}\,\Lambda^{a}{}_{b',k} \;=\; -\,\Lambda^{a'}{}_{a}\,\Lambda^{a}{}_{b',k}. \tag{72}
$$

Таким образом, уравнение ориентации частицы относительно системы отсчета, осуществляющей четырехмерное вращение, можно записать в виде

$$
m\,\frac{du^{a'}}{ds} \;+\; m\,\Lambda^{a'}{}_{a}\,\Lambda^{a}{}_{b',k}\,u^{b'}\,u^{k} = 0, \tag{73}
$$

где $\Lambda^{a'}{}_{a} \in SO(1.3)$ - матрицы перехода из инерциальной (невращающейся) системы отсчета во вращающуюся систему отсчета. Особо отметим, что в (73) u^k - компоненты четырехмерной скорости частицы в исходной невращающейся системе отсчета.

Выберем исходную инерциальную систему отсчета таким образом, чтобы частица не двигалась относительно нее и находилась в ее центре. Таким образом,

$$
u^k \;=\; \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \tag{74}
$$

и (73) сводится к более простой формуле

$$
m\,\frac{du^{a'}}{ds} \;=\; -m\,\Lambda^{a'}{}_{a}\,\Lambda^{a}{}_{b',0}\,u^{b'}. \tag{75}
$$

Данное уравнение записано в координатах слоя системы отсчета, осуществляющей четырехмерное вращение относительно исходной инерциальной системы отсчета. В правой части этого уравнения стоит аналог силы, выраженный в локальных координатах слоя

$$
F^{a'} \;=\; -m\,\Lambda^{a'}{}_{a}\,\Lambda^{a}{}_{b',0}\,u^{b'} \;=\; m\,\Lambda^{a'}{}_{a,0}\,\Lambda^{a}{}_{b'}\,u^{b'}. \tag{76}
$$

Рассуждая последовательно, в результате решения уравнения (75) мы получим траекторию частицы, выраженную в локальных координатах слоя. Для сравнения с экспериментальными данными мы должны спроектировать эту траекторию на векторное пространство мировых координат (базу), где происходит традиционное измерение скоростей и ускорений частиц, и исследовать полученную проекцию.

Однако при малых удельных силах $F^{a'}/m$, вызванных четырехмерным вращением неинерциальной системы отсчета

$$\frac{F^{a'}}{m} = \Lambda^{a'}_{\ a,0}\,\Lambda^{a}_{\ b'}\,u^{b'} \ll 1, \tag{77}$$

мы можем принять приближение, значительно упрощающее исследование. А именно, при выполнении условия (77) мы будем считать, что проекция истинной траектории частицы на пространство мировых координат не будет отличаться от траектории частицы, полученной в результате решения уравнения движения частицы, где в правой части стоит проекция силы $F^{a'}$ на пространство мировых координат

$$F^{i'} = e^{i'}_{\ a'}\,F^{a'}. \tag{78}$$

Таким образом, искомым уравнением движения частицы в неинерциальной системе отсчета, записанным в мировых координатах, будет следующее уравнение

$$m\,\frac{du^{i'}}{ds} = F^{i'}, \tag{79}$$

где

$$\begin{aligned} F^{i'} &= e^{i'}_{\ a'}\,F^{a'} = e^{i'}_{\ a'}\,m\,\Lambda^{a'}_{\ a,0}\,\Lambda^{a}_{\ b'}\,u^{b'} = \\ &= m\,e^{i'}_{\ a}\,\Lambda^{a}_{\ a'}\,\Lambda^{a'}_{\ a,0}\,\Lambda^{a}_{\ b'}\,\Lambda^{b'}_{\ b}\,e^{b}_{\ j'}\,u^{j'} = \\ &= m\,e^{i'}_{\ a}\,\Lambda^{a}_{\ a'}\,\Lambda^{a'}_{\ b,0}\,e^{b}_{\ j'}\,u^{j'}. \end{aligned} \tag{80}$$

Ввиду того, что при переходе к системе отсчета, осуществляющей четырехмерное вращение (37), никакого преобразования по мировым индексам $i \to i'$ не производилось, то вектора тетрады $e^{i'}_{\ a}$ не изменились по сравнению с $e^{i}_{\ a}$, т.е.

$$\begin{aligned} e^{i'}_{\ a} &= \delta^{i'}_{a}, \\ e^{b}_{\ j'} &= \delta^{b}_{j'}, \end{aligned} \tag{81}$$

и выражение для силы $F^{i'}$ может быть записано в следующем виде

$$F^{i'} = m\,P^{i'}_{\ j'}\,u^{j'}, \quad P^{i'}_{\ j'} = \delta^{i'}_{a}\,\Lambda^{a}_{\ a'}\,\Lambda^{a'}_{\ b,0}\,\delta^{b}_{j'}. \tag{82}$$

В формуле (82) $\Lambda^{a'}_{\ a}$ - матрицы поворотов в псевдоевклидовом пространстве, соответствующие преобразованию из инерциальной системы отсчета, относительно которой ориентируемая точка покоится, в неинерциальную систему отсчета, осуществляющую произвольное четырехмерное вращение.

Наиболее общая матрица пространственного поворота в псевдоевклидовом пространстве выглядит следующим образом

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{xx} & \cos\theta_{xy} & \cos\theta_{xz} \\ 0 & \cos\theta_{yx} & \cos\theta_{yy} & \cos\theta_{yz} \\ 0 & \cos\theta_{zx} & \cos\theta_{zy} & \cos\theta_{zz} \end{pmatrix}, \tag{83}$$

где $\cos\theta_{\alpha\beta}$ - направляющие косинусы углов [8].

Наиболее общая матрица поворота в псевдоевклидовой плоскости, не связанного с пространственным поворотом, выглядит следующим образом [8]:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & -\beta_z\gamma \\ -\beta_x\gamma & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_x^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_y\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_y^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\beta_z\gamma & \frac{(\gamma-1)\beta_x\beta_z}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}, \tag{84}$$

где $\beta_\alpha = v_\alpha/c$, v_α - компоненты скорости начала движущейся системы отсчета по отношению к покоящейся,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2 \tag{85}$$

- релятивисткий фактор.

В общем случае четырехмерное вращение системы отсчета, приводящее к неинерциальной системе отсчета, может быть разложено на вращение в псевдоевклидовой плоскости и чисто пространственное вращение. Хорошо известно, что конечные повороты L и R в общем случае не коммутируют между собой и произведение L и R зависит от их последовательности.

Поэтому матрицу четырехмерного вращения можно представить как

$$\Lambda^{a''}{}_{a} = R^{a''}{}_{a'}\, L^{a'}{}_{a}, \tag{86}$$

где $R^{a''}{}_{a'}$ и $L^{a'}{}_{a}$ - соответствующие матрицы поворотов с зависящими от времени параметрами, либо как

$$\Lambda^{a''}{}_{a} = L^{a''}{}_{a'}\, R^{a'}{}_{a}. \tag{87}$$

Первый случай мы будем относить к неинерциальной системе отсчета I рода, второй - к неинерциальной системе отсчета II рода. Покажем, что силы, действующие на частицу в рассмотренных двух системах отсчета, различны, и проинтерпретируем полученные результаты.

Подставив выражения (86) и (87) в формулу (82) и, используя следующие свойства квадратных матриц

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}, \qquad A^{-1}\,A = I,$$

получим формулы для величины $P^{i'}{}_{j'}$ в двух случаях, выраженные через параметры чисто пространственного вращения и вращения в псевдоевклидовой плоскости

$$\begin{aligned} P^{i'}{}_{j'}{}^{(RL)} &= e^{i'}{}_{a}\,\left(\Lambda^{a''}{}_{a}\right)^{-1}\Lambda^{a''}{}_{b,0}\,e^{b}{}_{j'} = \\ &= \delta^{i'}_{a}\left(R^{a''}{}_{a'}\,L^{a'}{}_{a}\right)^{-1}\left(R^{a''}{}_{a'}\,L^{a'}{}_{b}\right)_{,0}\,\delta^{b}_{j'} = \\ &= \delta^{i'}_{a}\left[\left(L^{a'}{}_{a}\right)^{-1}\left(R^{a''}{}_{a'}\right)^{-1}R^{a''}{}_{a',0}\,L^{a'}{}_{b} + \left(L^{a'}{}_{a}\right)^{-1}L^{a'}{}_{b,0}\right]\,\delta^{b}_{j'}, \end{aligned} \tag{88}$$

- для неинерциальной системы отсчета I рода, и

$$P^{i'}_{\ j'}{}^{(LR)} = \delta^{i'}_a \left[\left(R^{a'}_{\ a}\right)^{-1} \left(L^{a''}_{\ a'}\right)^{-1} L^{a''}_{\ a',0}\, R^{a'}_{\ b} + \left(R^{a'}_{\ a}\right)^{-1} R^{a'}_{\ b,0} \right] \delta^b_{j'}, \tag{89}$$

- для неинерциальной системы отсчета II рода.

6. Нерелятивистское приближение. В этом разделе мы рассмотрим нерелятивистский случай, когда скорость начала неинерциальной системы отсчета по отношению к инерциальной системе отсчета мала по сравнению со скоростью света $\beta \ll 1$. Ограничимся случаем, когда движение начала неинерциальной системы отсчета происходит в одной плоскости XOY $(\beta_z = \dot{\beta}_z = 0)$ и ось пространственного вращения системы перпендикулярна к этой плоскости

$$\mathbf{\Omega} = (0,\, 0,\, \Omega) = (0,\, 0,\, \frac{d\varphi}{dt}). \tag{90}$$

В этом случае матрица пространственного вращения представима следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{91}$$

где $\varphi = \varphi(t)$ - угол поворота вокруг оси z.

Матрица псевдоевклидова вращения с точность до $o(\beta)$ выражается следующим образом

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -\beta_x\gamma & -\beta_y\gamma & 0 \\ -\beta_x\gamma & 1 & 0 & 0 \\ -\beta_y\gamma & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{92}$$

где $\beta_x = \beta_x(t), \quad \beta_y = \beta_y(t), \quad \beta^2 = \beta^2(t) = \beta_x^2(t) + \beta_y^2(t)$.

Без ограничения общности положим, что в момент времени t начала неинерциальной и инерциальной систем отчета совпадают.

Произведя прямые вычисления элементов матрицы $P^{i'}_{\ j'}$ с точностью до $o(\beta)$, получим

$$P^{i'}_{\ j'}{}^{(RL)} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\beta}_x - \beta_y\Omega & -\dot{\beta}_y + \beta_x\Omega & 0 \\ -\dot{\beta}_x - \beta_y\Omega & 0 & \Omega & 0 \\ -\dot{\beta}_y + \beta_x\Omega & -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{93}$$

$$P^{i'}_{\ j'}{}^{(LR)} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\beta}_x\cos\varphi + \dot{\beta}_y\sin\varphi & -\dot{\beta}_y\cos\varphi - \dot{\beta}_x\sin\varphi & 0 \\ -\dot{\beta}_x\cos\varphi + \dot{\beta}_y\sin\varphi & 0 & \Omega & 0 \\ -\dot{\beta}_y\cos\varphi - \dot{\beta}_x\sin\varphi & -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{94}$$

В соответствии с уравнением (79) запишем уравнение движения частицы - начала О инерциальной системы отсчета - в неинерциальной системе отсчета:

$$\frac{\gamma'}{c}\frac{du^{i'}}{dt} = P^{i'}_{\ j'}\, u^{j'}, \tag{95}$$

или в матричном виде:

$$\frac{\gamma'}{c}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' B'_x \\ \gamma' B'_y \\ \gamma' B'_z \end{pmatrix} = P^{i'}_{\ j'}\begin{pmatrix} \gamma' \\ \gamma' B'_x \\ \gamma' B'_y \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

При этом необходимо иметь в виду, что скорость $\mathbf{V}'$ точки относительно неинерциальной системы отсчета равна по величине и противоположна по направлению скорости $\mathbf{v}$ начала неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы:

$$\begin{aligned} V'_\alpha &= -v_\alpha, \\ B'_\alpha &= V'_\alpha/c = -\beta_\alpha. \end{aligned} \tag{97}$$

Поэтому релятивистский фактор частицы γ' в неинерциальной системе отсчета равен

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-B'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma. \tag{98}$$

7. Неинерциальная система отсчета I рода. Из (93) и (96) можно получить четыре уравнения движения тела в неинерциальной системе отчета I рода в нерелятивистском случае с точностью до $o(\beta)$.

Уравнение для $i' = 0$:

$$\frac{d\gamma'}{dt} = -\dot\beta_x B'_x - \dot\beta_y B'_y. \tag{99}$$

Умножая обе части этого уравнения на mc^2 и, учитывая что $E = \gamma' mc^2$ - полная энергия тела, получим уравнение для мощности сил инерции:

$$\frac{dE}{dt} = -mw_x V'_x - mw_y V'_y, \tag{100}$$

где $w_\alpha = \dot\beta_\alpha c$ - ускорение начала неинерциальной системы отсчета. Заметим, что, в соответствии с формулой (100), работу совершают силы, связанные с ускорением начала неинерциальной системы отсчета.

Уравнение для $i' = 1$:

$$\frac{dB'_x}{dt} = -\dot\beta_x - \beta_y\Omega + B'_y\Omega = -\dot\beta_x + 2B'_y\Omega. \tag{101}$$

Уравнение для $i' = 2$:

$$\frac{dB'_y}{dt} = -\dot{\beta}_y + \beta_x \Omega - B'_x \Omega = -\dot{\beta}_y - 2B'_x \Omega. \tag{102}$$

Уравнение для $i' = 3$:

$$\frac{dB'_z}{dt} = 0. \tag{103}$$

Здесь использовано $\beta_\alpha = -B'_\alpha$ Умножая левые и правые части этих уравнений на mc, получим уравнения движения частицы в неинерциальной системе отсчета I рода в нерелятивистском случае:

$$m\frac{dV'_x}{dt} = -mw_x + 2mV'_y \Omega, \tag{104}$$

$$m\frac{dV'_y}{dt} = -mw_y - 2mV'_x \Omega, \tag{105}$$

$$m\frac{dV'_z}{dt} = 0. \tag{106}$$

Записав уравнения (104) - (106) в векторном виде

$$m\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = -m\mathbf{w} + 2m[\mathbf{V}'\mathbf{\Omega}], \tag{107}$$

мы видим, что эти уравнения тождественны классическим уравнениям движения частицы в неинерциальной системе отсчета при условии, что в момент времени t частица пересекает начало этой системы отсчета [4].

В 1921 году А.Эйнштейн в работе "Сущность теории относительности"[2, с.43-44] отмечал, что "... закон инерции, по-видимому, вынуждает нас приписать пространственно-временному континууму объективные свойства. ... Чтобы развить эту идею в рамках современной теории действия через среду, свойства пространственно-временного континуума, определяющие инерцию, должны рассматриваться как полевые свойства пространства, аналогичные электромагнитному полю."

Создатель теории физического вакуума Г.И.Шипов еще в 1979 году [7] назвал поле коэффициентов вращения Риччи именно полем инерции и подчеркул тождественность поля $T^i{}_{jk}$ и поля инерции. В книге "Теория физического вакуума"Г.И.Шипов утверждал, что "источником полей инерции $T^i{}_{jk}$ является четырехмерное вращение системы отсчета, при этом в группе трасляций T_4 эти поля преобразуются как тензор, а в группе вращений $O(3.1)$ они имеют нетензорный закон преобразования".

В настоящей работе в соответствии с программой всеобщей теории относительности [5] приведено последовательное доказательство того, что торсионное поле, источником которого является само пространство событий относительно неинерциальной системы отсчета I рода, порождает силы, являющиеся силами инерции.

8. Неинерциальная система отсчета II рода. Для вывода уравнений движения ориентируемой частицы в неинерциальной системе отсчета II рода заметим, что любой переход из одной, исходной системы отсчета, в другую систему отсчета означает фактически поворот исходной системы отсчета на конечный псевдоевклидов угол $\Delta\theta$ и на конечный трехмерный угол $\Delta\varphi$. Траекторий, приводящих к такому конечному повороту в многообразии угловых переменных может быть бесконечно много. Однако в каждой точке такой траектории (локально) система отсчета, производящая четырехмерное вращение, может быть реализована как неинерциальная система отсчета I рода или II рода.

Поэтому реализация типа неинерциальной системы отсчета будет определяться ее локальными параметрами относительно общей траектории поворота, а именно ее локальным псевдоевклидовым поворотом $d\theta$ и локальным трехмерным поворотом $d\varphi$ в данной точке траектории.

Поэтому в формуле, соответствующей реализации неинерциальной системы отсчета II рода, угол φ должен подразумеваться малым. Это приведет к следующим уравнениям движения ориентируемой частицы:
Уравнение для $i' = 0$:

$$\frac{d\gamma'}{dt} = -\dot{\beta}_x {B'}_x - \dot{\beta}_y {B'}_y. \tag{108}$$

Уравнение для $i' = 1$:

$$\frac{d{B'}_x}{dt} = -\dot{\beta}_x + \dot{\beta}_y \varphi + {B'}_y \Omega = -\dot{\beta}_x + {B'}_y \Omega. \tag{109}$$

Уравнение для $i' = 2$:

$$\frac{d{B'}_y}{dt} = -\dot{\beta}_y - \dot{\beta}_x \varphi - {B'}_x \Omega = -\dot{\beta}_y - {B'}_x \Omega. \tag{110}$$

Уравнение для $i' = 3$:

$$\frac{d{B'}_z}{dt} = 0. \tag{111}$$

В уравнениях (109) и (110) мы пренебрегли малой величиной второго порядка $\dot{\beta}_\alpha \varphi$.

Запишем уравнения для $i' = 1,\ 2,\ 3$ в векторном виде

$$m\frac{d\mathbf{V}'}{dt} = -m\mathbf{w} + m[\mathbf{V}'\boldsymbol{\Omega}]. \tag{112}$$

Мы видим, что выражение для силы, связанной с собственным вращением неинерциальной системы отсчета II рода, отличается численным коэффициентом 1/2 от выражения для классической силы Кориолиса.

9. Автор считает приятным долгом выразить искреннюю благодарность академику РАЕН Г.И.Шипову и профессору А.Н.Сидорову за стимулирующее обсуждение работы и полезные замечания, а также академику РАЕН А.Е.Акимову за внимание к работе.

Автор выражает сердечную благодарность И.О.Лысихину за поддержку в период написания работы.

Литература

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т.I. М.: Наука, 1965.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т.II. М.: Наука, 1966.
3. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.II. Теория поля. М.: Наука, 1988. (7-е издание, исправленное).
4. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.I. Механика. М.: Наука, 1988. (4-е издание, исправленное).
5. Шипов Г.И. Теория физического вакуума. М.: Наука, 1997. (2-е издание, исправленное и дополненное).
6. Шипов Г.И. Материалы VII Всесоюзной конференции "Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации". Ереван, 1988. С. 233-235.
7. Шипов Г.И. Проблемы физики элементарных взаимодействий. М.: Изд-во МГУ, 1979.
8. Пул Ч. Справочное руководство по физике. М.: Мир, 2001.