

Н.Н.Попов

НОВЫЕ

*представления
о структуре
пространства-
времени*

и Проблема

ГЕОМЕТРИЗАЦИИ
МАТЕРИИ



УРСС

Н.Н.Попов³

НОВЫЕ

*представления
о структуре
пространства-
времени*

и проблема
ГЕОМЕТРИЗАЦИИ
МАТЕРИИ



УРСС

Попов Николай Николаевич

Новые представления о структуре пространства-времени и проблема геометризации материи. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 88 с.

ISBN 5–354–00048–3

В монографии рассматривается ряд математических моделей физических явлений, указывающих на возможно бóльшую размерность реального физического пространства-времени.

Предлагается новая схема построения объединительных теорий физических взаимодействий в формализме расслоений на базе шестимерного пространственно-временного многообразия с абсолютным параллелизмом.

Решается конкретная задача восстановления геометрической структуры пространства по заданной совокупности структурных групп симметрий в случае единой теории гравитационного и электромагнитного взаимодействий.


Рецензент: д-р физ.-мат. наук Г. А. Калябин

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 9.

Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 10.12.2001 г.

Формат 60×84/16. Тираж 400 экз. Печ. л. 5,5.

Отпечатано в ООО «Атлас». Московская обл., г. Ногинск, ул. Гончарова, 12.

	ИЗДАТЕЛЬСТВО	УРСС
	НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	
	E-mail: urss@urss.ru	
	Каталог изданий в <i>Internet</i> : http://urss.ru	
	Тел./факс: 7 (095) 135-44-23 Тел./факс: 7 (095) 135-42-46	

ISBN 5–354–00048–3

© Н. Н. Попов, 2002

© Едиториал УРСС, 2002

Введение

В предлагаемой читателю работе рассматривается одна из самых интригующих проблем нашего мироздания, а именно вопрос о том, каков Источник окружающего нас мира и какова природа законов, управляющих этим миром. По своей глубине и общности эта проблема носит скорее философский характер и обсуждалась еще со времен создания Упанишад и Вед в древней Индии и трудов Аристотеля и Пифагора в древней Греции. Но к сожалению, философские теории никогда не отвечали тем критериям доказательности, а следовательно, убедительности, которые выработало человечество в течении истории своего развития. Однако за последние два столетия эти философские проблемы все чаще стали попадать в область чисто научных интересов. Видные ученые XIX, XX вв. начали нащупывать подходы к ее разрешению. Их усилиями был сформулирован достаточно глубокий принцип, суть которого состоит в том, что наш мир со всеми его явлениями и законами есть ничто иное как проявление геометрических свойств реального пространства-времени. Этот принцип был блестяще реализован при создании в первой четверти XX столетия современной теории гравитации, имеющей чисто геометрическую природу. Однако затем наступила некоторая пауза. К сожалению, не удалось также изящно построить геометрическую теорию электромагнитных, сильных и слабых взаимодействий. Конечно, в настоящее время существуют многомерные объединительные теории, основанные на механизме Калуцы—Клейна и их обобщений в виде суперсимметричных моделей в теории супергравитации. Однако они представляются слишком искусственными и громоздкими. Не удалось также в рамках самой теории гравитации объяснить природу гравитационной массы. В общем, вопросов как всегда оказалось больше чем ответов.

Автор предлагаемой работы приглашает читателя принять участие в обсуждении и увлекательном поиске новых подходов в решении этих сложнейших проблем на основе новейших и пока еще гипотетических представлений о размерности и структуре нашего реального пространства-времени. В ней читатель узнает

о возможном геометрическом механизме образования гравитационной массы, являющейся важнейшей составляющей нашего материального мира, о геометрической природе квантовых характеристик кирпичиков мироздания — кварков, о возможности движения с бесконечно большой скоростью без нарушения причинно-следственных связей в реальном пространстве-времени, о релятивистской поправке в законе тяготения Ньютона, которая опрокидывает многие устоявшиеся представления, а также о новых геометрических принципах построения единой теории взаимодействующих физических полей.

§ 1. Основные принципы

К началу XXI в. теоретическая физика вышла на качественно новый уровень развития, позволяющий поставить вопрос об обнаружении и изучении того первичного Принципа, который лежит в основании устройства нашей Вселенной и предопределяет всю ее структуру. По-видимому, этот Принцип может быть изящнее всего сформулирован на языке достаточно общих и исключительных по своим внутренним свойствам математических структур, к которым в первую очередь относится геометрия реального пространства-времени. К такому выводу нас приводит и весь ход развития физики XIX и XX столетий. В наиболее общем виде этот Принцип можно сформулировать следующим образом.

Весь материальный мир и все физические законы, действующие в нем, есть ничто иное как проявление геометрических и алгебраических свойств реального пространства-времени.

Этот Принцип не нов и восходит еще к работам Н. Лобачевского [1], Б. Римана [2], В. Клиффорда [3], а позднее А. Пуанкаре [4], А. Эйнштейна [5], Д. Гильберта [6], Г. Вейля [7], Т. Калуцы [8], Ч. Мизнера, Дж. Уиллера [9] и других. Несмотря на очевидный успех в осознании геометрической природы гравитационных взаимодействий, что нашло свое отражение в Общей Теории Относительности, эти идеи не получили удовлетворительного дальнейшего развития в силу принципиальных трудностей, с которыми столкнулись исследователи.

Нам представляется, что корень всех проблем лежит в необоснованном использовании в качестве реального пространства-времени четырехмерного многообразия сигнатуры $(- - - +)$. Поэтому если мы принимаем Принцип геометрической природы всех физических явлений, то первый шаг на этом пути состоит в выборе наиболее подходящего пространства-времени и наделения его соответствующими геометрическими и алгебраическими свойствами. Такой выбор, к сожалению, нельзя обосновать чисто логическим путем, он сам является фундаментальным постулатом, основанным на внутренней интуиции и на анализе уже накопленных знаний. Перейдем теперь к тем геометрическим свойствам, которыми необходимо наделить реальное физическое пространство-время, чтобы успешно реализовать выдвинутую программу.

Первым и, как нам представляется, принципиально важным является постулат о размерности физического пространства-времени.

I. Пространство-время представляет собой шестимерное топологическое многообразие с тремя пространственными и тремя временными измерениями.

Сформулированный постулат сразу же вызывает ряд критических вопросов, например, почему мы реально воспринимаем трехмерность пространственной части Вселенной, не ощущая присутствия дополнительной трехмерной временной ее части? Или, если мы не в состоянии непосредственно наблюдать временное подпространство, то в каких эффектах оно себя реально обнаруживает? Именно на такого рода вопросы мы и попытаемся дать ниже ответ, объяснив как в шестимерном пространстве может возникать гравитационная масса элементарных частиц и как геометрия пространства отражается в квантовых характеристиках кварков. Но прежде, чем решать эти задачи, нам понадобится наделить пространство-время некоторой геометрической структурой.

II. Пространственно-временное многообразие метризуемо.

Этот постулат означает, что между любыми двумя точками многообразия можно определить расстояние. К таким про-

пространствам относятся, например, псевдоримановы пространства, характеризующиеся только полем метрического тензора g (или, проще, метрикой g).

Простейшим пространством этого типа является псевдоевклидово пространство с фиксированной диагональной метрикой $g_{ij} = \pm \delta_{ij}$.

Отметим, что в псевдоевклидовом пространстве параллельное перенесение вектора между двумя произвольными точками пространства не зависит от выбранного пути. В произвольном псевдоримановом пространстве, если параллельное перенесение вектора осуществляется относительно Римановой связности Γ , это свойство не выполняется. Однако, всегда можно по метрике g построить несимметричную связность Δ , согласованную с метрикой g , такую, что параллельное перенесение вектора относительно этой связности не зависит от выбранного пути. Пространства, обладающие таким свойством, называются пространствами с абсолютным параллелизмом. Они относятся либо к типу локальноаффинных пространств, либо к типу пространств Римана—Картана, обладающих кручением [10]. Для нас представляют интерес пространства Римана—Картана, что и фиксируется следующим постулатом.

III. Пространственно-временное многообразие обладает структурой пространства Римана—Картана.

Везде ниже мы ограничимся рассмотрением частного случая пространств Римана—Картана, а именно пространства с абсолютным параллелизмом, которое в дальнейшем будем обозначать как M^6 .

§ 2. Свойства пространства M^6

Пусть задано шестимерное многообразие с абсолютным параллелизмом M^6 . В каждой точке $x \in M^6$ можно построить касательное подпространство к M^6 , представляющее собой псевдоевклидово пространство $R_{3,3}$ сигнатуры $(- - - + + +)$. Касательное пространство называют слоем над точкой x , а само пространство M^6 базой [11].

Пространство с абсолютным параллелизмом полностью характеризуется метрикой g и связностью Δ , которые всегда могут быть выражены через некоторый набор ортогональных векторов h^α , h_α ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$) по формулам:

$$g_{ij} = \eta_{\alpha\beta} h_i^\alpha h_j^\beta, \quad (1)$$

$$\Delta_{ij}^l = h_\alpha^l h_{i,j}^\alpha \quad (2)$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — псевдоевклидова метрика слоя $R_{3,3}$ касательного расслоения к пространственно-временному многообразию,

$$h_{i,j}^\alpha = \frac{\partial h_i^\alpha}{\partial x^j},$$

$$h_\alpha^i h_i^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad h_\alpha^i h_j^\alpha = \delta_j^i. \quad (3)$$

Из формул (1), (2), (3) следует, что связность Δ можно представить в виде

$$\Delta_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l + K_{ij}^l,$$

где $\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lr} (g_{ir,j} + g_{jr,i} - g_{ij,r})$ — символы Кристоффеля или Риманова связность, $K_{ij}^l = (2g^{lr} g_{p(j} \Omega_{|r|i)}^p - \Omega_{ij}^l)$ — тензор конторсии, $\Omega_{ij}^l = \Delta_{[ji]}^l$ — тензор кручения пространства.

Тензор кривизны многообразия с абсолютным параллелизмом тождественно равен нулю:

$$R_{jkr}^l(\Delta) = 2\Delta_{j[k,r]}^l + 2\Delta_{p[r}^l \Delta_{|j|k]}^p = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) можно преобразовать к виду:

$$R_{jkr}^l(\Gamma) = 2D_{|k}(\Gamma) K_{|j|r]}^l + 2K_{p[k}^l K_{|j|r]}^p = 0, \quad (5)$$

где $D_k(\Gamma)$ — ковариантная производная относительно связности Γ , $R_{jkr}^l(\Gamma)$ — тензор кривизны Римана.

Уравнение (5) представляет собой основное структурное уравнение пространства с абсолютным параллелизмом. Из него, в частности, нетрудно вывести уравнение типа Гильберта—Эйнштейна с геометризованной правой частью.

Пусть $R_{jr}(\Delta) = R_{jkr}^k(\Delta)$ — тензор Риччи и $R(\Delta) = g^{jr} R_{jr}(\Delta)$ — скалярная кривизна пространства M^6 . В силу (4)

выполняются тождества $R_{j,r}(\Delta) \equiv 0$, $R(\Delta) \equiv 0$. Введем функционал действия Гильберта в виде:

$$S_\Gamma = \int R(\Delta)(|g|)^{1/2} d^6 x,$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Для пространств с абсолютным параллелизмом произвольной размерности n имеет место следующий результат.

Теорема. Пусть задано n -мерное дифференцируемое многообразие, наделенное структурой пространства с абсолютным параллелизмом, и $g < 0$, тогда:

$$\frac{\delta S_\Gamma}{\delta g_{ij}} = R_{ij}(\Delta) - \frac{1}{2}g_{ij}R(\Delta) = 0.$$

Доказательство теоремы можно найти в работе [12].

Из уравнения (5) и результата теоремы непосредственно следует уравнение типа Гильберта—Эйнштейна с геометризованной правой частью:

$$R_{ij}(\Gamma) - \frac{1}{2}g_{ij}R(\Gamma) = 2D_{[j}(\Gamma)K_{|i|l]}^l + 2K_{p[j}^l K_{|i|l]}^p - g_{ij}g^{rm} \left(D_{[r}(\Gamma)K_{|m|l]}^l + K_{p[r}^l K_{|m|l]}^p \right). \quad (6)$$

Отметим, что вид левой части уравнения (6) не зависит от конкретной структуры расслоенного пространства над базой M^6 и полностью определяется тензором кривизны Римана. Правая часть уравнения (6) интерпретируется как тензор энергии-импульса физической системы или, более обще, как тензор материи и имеет чисто геометрическую природу, в отличие от соответствующего тензора в известном уравнении Гильберта—Эйнштейна общей теории относительности.

На многообразии M^6 можно ввести несколько инвариантных квадратичных дифференциальных форм. Пусть $x(s)$ — дифференцируемая кривая в M^6 , зависящая от натурального параметра s , тогда, в силу определения натурального параметра,

$$ds^2 = g_{ij} dx^i(s) dx^j(s). \quad (7)$$

Дифференциалы dx^i представляют собой компоненты ковариантного вектора $dx = (dx^1, \dots, dx^6) \in R_{3,3}$. Сама форма (7) остается инвариантной при любых дифференцируемых преобразованиях координат.

В пространстве $R_{3,3}$ в качестве базиса можно выбрать линейно независимую систему контравариантных векторов $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^6})$ [13]. Возникает вопрос, каким образом относительно таких контравариантных векторов можно построить квадратичную дифференциальную форму, инвариантную относительно любых дифференцируемых преобразований координат? Формальная замена дифференциалов на частные производные в формуле (7) не приводит к требуемому результату в силу того, что $\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ не преобразуется как тензор при произвольной замене координат. Более того, квадратичная форма при такой замене не будет симметричной в силу операторной природы контравариантных векторов. Однако, если использовать свойство метричности связностей Γ и Δ , которое выражается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} D_k(\Gamma)g_{ij} &= g_{ij,k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 0, \\ D_k(\Delta)g_{ij} &= g_{ij,k} - \Delta_{ik}^l g_{lj} - \Delta_{jk}^l g_{il} = 0, \end{aligned}$$

где $D_k(\Gamma)$, $D_k(\Delta)$ - ковариантные производные относительно связностей Γ и Δ , то можно построить две инвариантные, симметричные, квадратичные формы:

$$g^{ij} D_i(\Gamma) D_j(\Gamma), \quad g^{ij} D_i(\Delta) D_j(\Delta), \quad (8)$$

которые представляют собой дифференциальные эрмитовы операторы второго порядка. Продолжив эти формы до самосопряженных операторов, получим собственные значения таких операторов, которые будут инвариантными величинами в многообразии M^6 . Уравнения на собственные значения операторов (8) принимают вид:

$$(g^{ij} D_i(\Gamma) D_j(\Gamma) - m^2) \Psi_\Gamma = 0, \quad (9)$$

$$(g^{ij} D_i(\Delta) D_j(\Delta) - \mu^2) \Psi_\Delta = 0, \quad (10)$$

где $\Psi_{(\cdot)}$ — собственные функции квадратичных форм (8) из Гильбертова пространства $L^2(M^6)$ — квадратично интегрируемых функций на множестве M^6 .

Уравнения (9) и (10) имеют чисто геометрическую природу, однако они указывают на возможность развития формализма квантовой механики исключительно на языке дифференциальной геометрии. Мы не будем здесь развивать дальше эту идею в виду ее масштабности, однако отметим, что квантовомеханическое уравнение Клейна—Гордона есть частный случай уравнения (9), если последнее записать в локальной псевдоевклидовой системе координат, диагонализующей метрику g^{ij} .

Во всех построениях, проведенных выше, размерность многообразия M^6 не играла никакой роли — использовалось только свойство абсолютного параллелизма рассматриваемого пространства. Однако очень важным для дальнейшего анализа является возможность описания действительного многообразия M^6 с помощью многообразия другой математической природы, например, комплексной. При этом размерность многообразия M^6 начинает играть значительную роль, а элементы квантовомеханического формализма в искривленном пространственно-временном многообразии начинают проявляться отчетливее.

§ 3. Представление многообразия M^6 с помощью комплексного четырехмерного многообразия Z^4

В силу постулата I, многообразии M^6 является топологическим. В дальнейшем будем считать, что оно обладает структурой локально-евклидова Хаусдорфова пространства. Это значит, что для каждой точки $x \in M^6$ существует такие окрестность $U \subset M^6$ и гомеоморфизм Φ окрестности U на открытое подмножество $R_{3,3}$, что пара (U, Φ) , называемая картой точки x , определяет локальную систему координат на многообразии M^6 , причем локальными координатами точки $x \in U$ являются компоненты функции $\Phi(x) = (x^1(x), \dots, x^6(x))$ со значениями в $R_{3,3}$.

В дальнейшем для простоты будем обозначать локальные координаты произвольной точки $x \in M^6$ как $x = (x^1, \dots, x^6)$.

Построим комплексное четырехмерное топологическое многообразие Z^4 , связанное с многообразием M^6 следующим образом. Сопоставим каждой точке $x = (x^1, \dots, x^6) \in M^6$ семейство точек $z = (z^1, \dots, z^4) \in Z^4$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned} x^1 &= z^1 z^{\dot{1}} - z^2 z^{\dot{2}}, & x^2 &= \frac{z^1 z^{\dot{2}} - z^{\dot{1}} z^2}{i}, & x^3 &= z^1 z^{\dot{2}} + z^{\dot{1}} z^2, \\ x^4 &= z^3 z^{\dot{3}} - z^4 z^{\dot{4}}, & x^5 &= \frac{z^3 z^{\dot{4}} - z^{\dot{3}} z^4}{i}, & x^6 &= z^3 z^{\dot{4}} + z^{\dot{3}} z^4, \end{aligned} \quad (11)$$

где $z^{\dot{n}}$ — комплексно сопряженная к z^n компонента, i — мнимая единица.

Такое семейство представляет собой совокупность унитарно эквивалентных относительно группы $U(1)$ точек. Этот факт имеет далеко идущие последствия, указывающие на существование скрытых групп преобразований, оставляющих инвариантными (неподвижными) точки самого пространства-времени.

Формулы (11) можно представить в более изящном виде. Для этого рассмотрим полную матричную алгебру $M(4, C)$ в многообразии Z^4 . Выберем в этой алгебре матрицы:

$$\begin{aligned} \sigma^j &= \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j &= 1, 2, 3, \\ \sigma^k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}^k \end{pmatrix}, & k &= 4, 5, 6, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\hat{\sigma}^{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}^{2,5} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}^{3,6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрицы Паули.

Каждой паре $(\sigma^j, z) \in M(4, C) \otimes Z^4$ можно однозначно сопоставить j -ую координату x^j точки $x \in M^6$ по формуле:

$$x^j = \sigma_{\nu\mu}^j z^\nu z^\mu, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (13)$$

Нетрудно видеть, что представления (11) и (13) эквивалентны. Правая часть соотношения (13) есть эрмитова квадратичная

форма. Ясно, что представление вещественных координат в форме (13) с матрицами вида (12) не единственно. Действительно, любой внутренний автоморфизм Λ матричной алгебры $M(4, C)$, принадлежащий группе $GL(4, C)$, задает новое представление точки $x = (x^1, \dots, x^6) \in M^6$ в Z^4 по формуле:

$$x^j = \Lambda_\nu^\nu \sigma_{\nu\mu}^j \Lambda_\mu^{\mu'} \Lambda_{\mu'}^{\nu'} z^{\nu'} \Lambda_{\nu'}^{\mu'} z^{\mu'}, \quad (14)$$

где $\Lambda_\mu^\mu \Lambda_\nu^{\mu'} = \sigma_\nu^{\mu'}$.

Множество пар $(\tilde{\sigma}^j, \tilde{z})$, отличающихся от пары (σ^j, z) , задаваемой соотношением (13) лишь преобразованием из группы $GL(4, C)$, образуют класс $GL(4, C)$ — эквивалентных пар. Итак, между точками пространства M^6 и классами $GL(4, C)$ — эквивалентных пар из $M(4, C) \otimes Z^4$ существует взаимнооднозначное соответствие.

Не имеет принципиального значения в дальнейшем какое из представлений действительного многообразия M^6 в комплексном виде мы выбираем. Поэтому договоримся рассматривать представление в форме (11). Итак, мы поместили все точки многообразия M^6 семействами унитарно эквивалентных точек многообразия Z^4 . Теперь остановимся на том, что с геометрической точки зрения представляет собой это комплексное многообразие и какова его структура. Оказывается, что оно во многом наследует структуру действительного пространства M^6 и, что совсем неожиданно, в свою очередь влияет на свойства самого пространства M^6 , выделяя в нем некоторое четырехмерное подпространство, которое можно отождествить с общепринятым в настоящее время четырехмерным пространственно-временным многообразием.

§ 4. Метризуемость многообразия Z^4

На многообразии M^6 изначально была задана структура пространства с абсолютным параллелизмом. Покажем, что на комплексном многообразии Z^4 можно построить метрику.

Пусть в M^6 задана некоторая дифференцируемая кривая $x(s)$, зависящая от натурального параметра s , тогда

$$ds^2 = g_{ij} dx^i(s) dx^j(s)$$

и выполняется условие нормировки обобщенной скорости

$$g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1, \quad \text{где} \quad \dot{x}^j = \frac{dx^j}{ds}.$$

Вектор $x(s)$ лежит в касательном слое $R_{3,3}$ над точкой $x(s)$, координаты которой могут быть представлены в форме (13):

$$x^j(s) = \sigma_{\nu\mu}^j z^\nu(s) z^\mu(s), \quad j = 1, \dots, 6. \quad (15)$$

Договоримся в дальнейшем считать, что при движении по кривой $x(s)$ матрицы σ^j , входящие в (15), остаются инвариантными, а меняются лишь компоненты $z^\nu(s)$ и $z^\mu(s)$. Так как $z(s)$ определяется по $x(s)$ неоднозначно, а лишь с точностью до унитарных преобразований из группы $U(I)$, то в Z^4 индуцируется пучок унитарно эквивалентных траекторий $\{e^{i\varphi(x(s))} z(s)\}$, где φ — некоторая действительная дифференцируемая функция.

Комплексные векторы $\dot{z}(s) = \frac{dz}{ds}$ принадлежат касательному слою C^4 над точкой $z(s)$ многообразия Z^4 , где C^4 — комплексное и; как будет показано ниже, псевдоевклидово пространство с эрмитовой метрикой. Построим метрику на многообразии Z^4 по метрике на M^6 . Из (15) следует

$$\dot{x}^j = \sigma_{\nu\mu}^j \dot{z}^\nu z^\mu + \sigma_{\nu\mu}^j z^\nu \dot{z}^\mu. \quad (16)$$

С другой стороны существует элемент $\xi \in C^4$, что

$$\dot{x}^j = \sigma_{\nu\mu}^j \xi^\nu \xi^\mu. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что \dot{z}^ν и ξ^μ связаны соотношениями:

$$\sigma_{\nu\mu}^j \dot{z}^\nu z^\mu + \sigma_{\nu\mu}^j z^\nu \dot{z}^\mu = \sigma_{\nu\mu}^j \xi^\nu \xi^\mu, \quad j = 1, \dots, 6.$$

Лемма I. Метрика g на M^6 индуцирует метрику G на Z^4 по формуле:

$$G_{\nu\mu} = g_{ij} \sigma_{\nu\lambda}^i \sigma_{\gamma\mu}^j \xi^\lambda \xi^\mu, \quad (18)$$

обладающую следующим свойством:

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = G_{\nu\mu}\xi^\nu\xi^\mu. \quad (19)$$

Доказательство. Формулы (18) и (19) непосредственно следуют из (17). Остается показать, что $G_{\nu\mu}$ обладает свойствами метрики. Из (18) следует, что $G_{\nu\mu}$ преобразуется при замене координат в Z^4 как тензор 2-го ранга. Метрика $G_{\nu\mu}$ обладает свойством эрмитовости, то есть $G_{\nu\mu} = G_{\mu\nu}$, следовательно, определяет эрмитово скалярное произведение в Z^4 . Таким образом, G — корректно определенная метрика в Z^4 и лемма доказана. ■

Следствие. Свойства метрики G :

1) существует ковариантная метрика $G^{\nu\mu}$ такая, что:

$$G^{\nu\mu}G_{\mu\kappa} = \delta_{\kappa}^{\nu};$$

2) поднятие и опускание индексов:

$$\xi_\nu = G_{\nu\mu}\xi^\mu, \quad \sigma_j^{\nu\mu} = g_{ji}G^{\nu\kappa}G^{\gamma\mu}\sigma_{\kappa\gamma}^i.$$

Из свойств 1 и 2 следует свойство 3:

$$G^{\nu\mu} = g^{ij}\sigma_i^{\nu\kappa}\sigma_j^{\gamma\mu}\xi_\kappa\xi_\gamma. \quad (20)$$

Итак, на многообразии Z^4 можно построить метрику $G_{\nu\mu}$, непосредственно связанную с метрикой g_{ij} пространства M^6 .

Лемма II. В Z^4 существуют шесть векторных ковариантных и контравариантных полей $\zeta^\alpha(z)$, $\zeta_\alpha(z)$, где $\alpha = 1, \dots, 6$, удовлетворяющих соотношению $\zeta_\alpha^\nu\zeta_\mu^\alpha = \delta_\mu^\nu$ и таких, что:

$$G_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta}\zeta_\nu^\alpha\zeta_\mu^\beta, \quad G^{\nu\mu} = \eta^{\alpha\beta}\zeta_\alpha^\nu\zeta_\beta^\mu. \quad (21)$$

Доказательство. В силу абсолютного параллелизма M^6 имеем:

$$g_{ij} = h_i^\alpha h_j^\beta \eta_{\alpha\beta}, \quad g^{ij} = \eta^{\alpha\beta} h_\alpha^i h_\beta^j.$$

Построим векторы в каждой точке многообразия Z^4 по формулам:

$$\zeta_\nu^\alpha = h_i^\alpha \sigma_{\nu\mu}^i \xi^\mu, \quad \zeta_\beta^\mu = h_\beta^i \sigma_i^{\nu\mu} \xi_\nu \in C^4.$$

Тогда, согласно соотношениям (18) и (20), имеем:

$$G_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta} \zeta_{\nu}^{\alpha} \zeta_{\mu}^{\beta}, \quad G^{\nu\mu} = \eta^{\alpha\beta} \zeta_{\alpha}^{\nu} \zeta_{\beta}^{\mu}.$$

Условие $\zeta_{\alpha}^{\nu} \zeta_{\mu}^{\alpha} = \delta_{\mu}^{\nu}$ также проверяется непосредственно. Лемма доказана. ■

Векторы h_{α} , $\alpha = 1, \dots, 6$, ортогональны относительно метрики g в пространстве M^6 . Действительно,

$$g_{ij} h_{\alpha}^i h_{\beta}^j = \eta_{\alpha\beta}.$$

В комплексном четырехмерном многообразии Z^4 в каждой его точке также существуют шесть векторов ζ_{α} , $\alpha = 1, \dots, 6$, но лишь только четыре из них можно сделать ортогональными. Произвольно фиксируя четыре значения параметра α , мы приходим к двум возможным вариантам: либо $h_{\alpha} \in R_{2,2}$, либо $h_{\alpha} \in R_{3,1}$. Оба случая представляют интерес для исследования. Однако, в рамках данной работы мы остановимся на втором варианте, положив $\alpha = 1, \dots, 4$.

Псевдоортогональным преобразованием векторов h_{α} , h^{β} , $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$, в слое $R_{3,1}$ можно добиться выполнения условия:

$$\zeta_{\alpha}^{\nu} \zeta_{\nu}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 4, \quad (22)$$

при этом метрики g и G остаются инвариантными.

Тогда комплексные векторы ζ_{α} , $\alpha = 1, \dots, 4$, взаимно ортогональны между собой относительно метрики G . Действительно, в силу (22) имеем:

$$G_{\nu\mu} \zeta_{\alpha}^{\nu} \zeta_{\beta}^{\mu} = \eta_{\alpha'\beta'} \zeta_{\nu}^{\alpha'} \zeta_{\mu}^{\beta'} \zeta_{\alpha}^{\nu} \zeta_{\beta}^{\mu} = \eta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 4.$$

Таким образом, многообразиие Z^4 можно наделить структурой комплексного псевдориманова пространства с касательным типичным слоем $C_{3,1}$ сигнатуры $(- - - +)$, при этом в многообразии M^6 автоматически выделяется четырехмерное псевдориманово подпространство с касательным типичным слоем $R_{3,1}$. Для решения достаточно широкого круга задач, имеющих физическое приложение, можно было бы забыть о существовании многообразия M^6 и ограничиться рассмотрением пары M^4 , Z^4 .

Однако, при этом рвутся некоторые связи и единый формализм распадается на ряд не связанных между собой фрагментов.

§ 5. Структура абсолютного параллелизма на Z^4

Покажем, что кроме метрики $G_{\nu\mu}$ на многообразии Z^4 можно ввести согласованную с метрикой связность Δ . Действительно, зададим компоненты связности Δ по формулам:

$$\Delta_{\mu\dot{\kappa}}^{\nu} = \zeta_{\beta}^{\nu} \zeta_{\mu,\dot{\kappa}}^{\beta}, \quad \Delta_{\dot{\mu}\kappa}^{\nu} = \zeta_{\beta}^{\nu} \zeta_{\dot{\mu},\kappa}^{\beta}, \quad (23)$$

где $\zeta_{\mu,\dot{\kappa}}^{\beta} = \frac{\partial \zeta_{\mu}^{\beta}}{\partial \xi^{\dot{\kappa}}}$.

Компоненты $\Delta_{\dot{\mu}\kappa}^{\nu}$, $\Delta_{\mu\dot{\kappa}}^{\nu}$ комплексно сопряжены компонентам $\Delta_{\mu\dot{\kappa}}^{\nu}$, $\Delta_{\dot{\mu}\kappa}^{\nu}$ соответственно. Все остальные компоненты связности Δ тождественно равны нулю в силу свойств векторов ζ^{β} , $\beta = 1, \dots, 6$.

Определение I. Будем говорить, что связность Δ согласована с метрикой G , если

$$\begin{aligned} \widehat{D}_{\dot{\kappa}}(\Delta)G_{\nu\mu} &= G_{\nu\mu,\dot{\kappa}} - \Delta_{\nu\dot{\kappa}}^{\gamma} G_{\gamma\mu} - \Delta_{\dot{\mu}\kappa}^{\gamma} G_{\nu\gamma} = 0, \\ \widehat{D}_{\dot{\kappa}}(\Delta)G_{\nu\mu} &= G_{\nu\mu,\dot{\kappa}} - \Delta_{\nu\dot{\kappa}}^{\gamma} G_{\gamma\mu} - \Delta_{\dot{\mu}\kappa}^{\gamma} G_{\nu\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Равенства (24) представляют собой обобщение понятия согласованности связности с метрикой на комплексные многообразия.

Лемма III. Связность Δ согласована с метрикой G .

Доказательство. Учитывая, что $\Delta_{\nu\dot{\kappa}}^{\gamma} = \Delta_{\dot{\mu}\kappa}^{\gamma} \equiv 0$, получаем

$$\widehat{D}_{\dot{\kappa}}(\Delta)G_{\nu\mu} = g_{ij} \sigma_{\nu\rho}^i \sigma_{\dot{\kappa}\mu}^j \xi^{\rho} - \zeta_{\beta'}^{\gamma} \zeta_{\mu,\dot{\kappa}}^{\beta'} \eta_{\alpha\beta} \zeta_{\nu}^{\alpha} \zeta_{\dot{\kappa}}^{\beta} = G_{\nu\mu,\dot{\kappa}} - \eta_{\alpha\beta} \zeta_{\mu,\dot{\kappa}}^{\beta} \zeta_{\nu}^{\alpha} = 0.$$

Аналогично показывается, что $\widehat{D}_{\dot{\kappa}}(\Delta)G_{\nu\mu} = 0$. Лемма доказана. ■

Введем обозначения

$$\Delta_{(\mu\dot{x})}^{\nu} = \frac{1}{2}(\Delta_{\mu\dot{x}}^{\nu} + \Delta_{\dot{x}\mu}^{\nu}), \quad \Delta_{[\mu\dot{x}]}^{\nu} = \frac{1}{2}(\Delta_{\mu\dot{x}}^{\nu} - \Delta_{\dot{x}\mu}^{\nu}),$$

тогда

$$\Delta_{\mu\dot{x}}^{\nu} = \Delta_{(\mu\dot{x})}^{\nu} + \Delta_{[\mu\dot{x}]}^{\nu}.$$

Определим комплексную Риманову связность Γ формулами:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\dot{x}}^{\nu} &= \Delta_{(\mu\dot{x})}^{\nu} - G^{\dot{\gamma}\nu} \left(G_{\mu\dot{\rho}} \Delta_{[\dot{x}\dot{\gamma}]}^{\dot{\rho}} + G_{\rho\dot{x}} \Delta_{[\mu\dot{\gamma}]}^{\rho} \right), \\ \Gamma_{\dot{x}\mu}^{\nu} &= \Delta_{(\dot{x}\mu)}^{\nu} - G^{\dot{\gamma}\nu} \left(G_{\dot{x}\rho} \Delta_{[\dot{\gamma}\mu]}^{\rho} + G_{\rho\mu} \Delta_{[\dot{\gamma}\dot{x}]}^{\rho} \right), \\ \Gamma_{\mu x}^{\nu} &= \Delta_{(\mu x)}^{\nu} - G^{\dot{\gamma}\nu} \left(G_{\mu\dot{\rho}} \Delta_{[x\dot{\gamma}]}^{\dot{\rho}} + G_{x\dot{\rho}} \Delta_{[\mu\dot{\gamma}]}^{\dot{\rho}} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Остальные элементы связности Γ получаются из построенных операций комплексного сопряжения.

Определим тензор конторсии K :

$$\begin{aligned} K_{\mu\dot{x}}^{\nu} &= \Delta_{[\mu\dot{x}]}^{\nu} + G^{\dot{\gamma}\nu} \left(G_{\mu\dot{\rho}} \Delta_{[\dot{x}\dot{\gamma}]}^{\dot{\rho}} + G_{\rho\dot{x}} \Delta_{[\mu\dot{\gamma}]}^{\rho} \right), \\ K_{\dot{x}\mu}^{\nu} &= \Delta_{[\dot{x}\mu]}^{\nu} + G^{\dot{\gamma}\nu} \left(G_{\dot{x}\rho} \Delta_{[\dot{\gamma}\mu]}^{\rho} + G_{\rho\mu} \Delta_{[\dot{\gamma}\dot{x}]}^{\rho} \right), \\ K_{\mu x}^{\nu} &= -\Gamma_{\mu x}^{\nu}. \end{aligned} \quad (26)$$

Все остальные элементы тензора K отличные от нуля получаются из построенных операций комплексного сопряжения.

В формулы (25) и (26) входят члены тождественно равные нулю. Причина, по которой они там находятся, состоит в том, чтобы показать единый алгоритм образования этих формул.

В результате преобразований (25) и (26) получаем:

Лемма IV. Компоненты связности Γ и тензора K представляются в виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\dot{x}}^{\nu} &= \frac{1}{2} G^{\dot{\gamma}\nu} (G_{\mu\dot{\gamma},\dot{x}} - G_{\mu\dot{x},\dot{\gamma}}); & \Gamma_{\dot{x}\mu}^{\nu} &= \Gamma_{\mu\dot{x}}^{\nu}, \\ \Gamma_{\mu x}^{\nu} &= \frac{1}{2} G^{\dot{\gamma}\nu} (G_{\mu\dot{\gamma},x} + G_{x\dot{\gamma},\mu}), \end{aligned}$$

$$K_{\mu\dot{x}}^\nu = \frac{1}{2}G^{\dot{\gamma}\nu} (G_{\mu\dot{\gamma},\dot{x}} + G_{\mu\dot{x},\dot{\gamma}}),$$

$$K_{\dot{\mu}x}^\nu = \frac{1}{2}G^{\dot{\gamma}\nu} (G_{x\dot{\gamma},\dot{\mu}} + G_{x\dot{\mu},\dot{\gamma}}).$$

Все остальные отличные от нуля компоненты получаются из построенных операцией комплексного сопряжения.

Из полученных выше результатов следует, что комплексная Риманова связность Γ согласована с метрикой G .

Лемма V. *Имеют место равенства:*

$$\widehat{D}_x(\Gamma)G_{\nu\dot{\mu}} = G_{\nu\dot{\mu},x} - \Gamma_{\nu\dot{x}}^\gamma G_{\gamma\dot{\mu}} - \Gamma_{\dot{\mu}x}^{\dot{\gamma}} G_{\nu\dot{\gamma}} = 0,$$

$$\widehat{D}_{\dot{x}}(\Gamma)G_{\nu\dot{\mu}} = G_{\nu\dot{\mu},\dot{x}} - \Gamma_{\nu\dot{x}}^\gamma G_{\gamma\dot{\mu}} - \Gamma_{\dot{\mu}\dot{x}}^{\dot{\gamma}} G_{\nu\dot{\gamma}} = 0.$$

Доказательство. Воспользовавшись результатом леммы IV, получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{D}_x(\Gamma)G_{\nu\dot{\mu}} &= G_{\nu\dot{\mu},x} - \frac{1}{2}G^{\dot{\rho}\gamma} (G_{\nu\dot{\rho},x} + G_{x\dot{\rho},\nu})G_{\gamma\dot{\mu}} - \\ &\quad - \frac{1}{2}G^{\dot{\gamma}\rho} (G_{\rho\dot{\mu},x} - G_{x\dot{\mu},\rho})G_{\nu\dot{\gamma}} = \\ &= G_{\nu\dot{\mu},x} - \frac{1}{2}G_{\nu\dot{\mu},x} - \frac{1}{2}G_{x\dot{\mu},\nu} - \frac{1}{2}G_{\nu\dot{\mu},x} + \frac{1}{2}G_{x\dot{\mu},\nu} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается справедливость второго равенства. Лемма доказана. \blacksquare

Итак, выше было показано, что на многообразии Z^4

$$\Delta = \Gamma + K.$$

Определим тензор кривизны Римана на комплексном многообразии Z^4 соотношениями:

$$\begin{aligned} R_{\mu\dot{x}\gamma}^\nu(\Delta) &= \Delta_{\mu[\dot{x},\gamma]}^\nu + \Delta_{\dot{\rho}[\gamma}^\nu \Delta_{|\mu|\dot{x}}^{\dot{\rho}}, \\ R_{\mu\dot{x}\dot{\gamma}}^\nu(\Delta) &= \Delta_{\mu[\dot{x},\dot{\gamma}}^\nu + \Delta_{\dot{\rho}[\dot{\gamma}}^\nu \Delta_{|\mu|\dot{x}}^{\dot{\rho}}, \\ R_{\dot{\mu}x\gamma}^\nu(\Delta) &= \Delta_{\dot{\mu}[x,\gamma]}^\nu + \Delta_{\dot{\rho}[\gamma}^\nu \Delta_{|\dot{\mu}|x}^{\dot{\rho}}, \\ R_{\dot{\mu}x\dot{\gamma}}^\nu(\Delta) &= \Delta_{\dot{\mu}[x,\dot{\gamma}}^\nu + \Delta_{\dot{\rho}[\dot{\gamma}}^\nu \Delta_{|\dot{\mu}|x}^{\dot{\rho}}. \end{aligned} \tag{27}$$

Все остальные компоненты тензора кривизны получаются из построенных операцией комплексного сопряжения.

Лемма VI. *Все компоненты комплексного тензора кривизны R_{\dots} , задаваемые соотношениями (27), тождественно равны нулю.*

Итак, окончательно показано, что многообразие Z^4 можно наделить структурой пространства с абсолютным параллелизмом. Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема. *Действительное шестимерное пространство с абсолютным параллелизмом M^6 , характеризуемое метрикой g_{ij} и связностью Δ^i_{ij} , индуцирует изоморфное ему фактор-пространство (по mod $U(1)$) Z^4 , представляющее собой комплексное четырехмерное пространство с абсолютным параллелизмом, характеризуемое эрмитовой метрикой $G_{\nu\mu}$ и связностью $\Delta^{\nu}_{\mu\kappa}$ такими, что:*

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = G_{\nu\mu}\xi^{\nu}\xi^{\mu}, \quad G_{\nu\mu} = \eta_{\alpha\beta}\zeta^{\alpha}_{\nu}\zeta^{\beta}_{\mu}, \quad \Delta^{\nu}_{\mu\kappa} = \zeta^{\nu}_{\alpha}\zeta^{\alpha}_{\mu\kappa}, \quad \zeta^{\alpha}_{\nu} = h^{\alpha}_j\sigma^j_{\nu\mu}\xi^{\mu}.$$

§ 6. Структурная взаимосвязь пространств M^6 и Z^4

Многообразия M^6 и Z^4 можно изучать независимо друг от друга. При этом мы будем получать физические модели, не требующие учета связей между этими пространствами, например, теорию гравитации. Однако такие модели как Дираковская теория электрона или модель электрослабых взаимодействий в искривленном пространстве-времени требуют одновременного рассмотрения пространств M^6 и Z^4 . Поэтому необходимо установить более глубокую структурную взаимосвязь между этими пространствами.

Первые шаги в этом направлении были уже проделаны выше при выводе следующих соотношений:

$$\dot{x}^j = \sigma^j_{\nu\mu}\xi^{\nu}\xi^{\mu},$$

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = G_{\nu\mu}\xi^{\nu}\xi^{\mu}.$$

Отметим, что $\dot{x}^j(s)$ и $\xi^\nu(s)$ являются функциями от $x(s) \in M^6$. Действительно, вектор $\dot{x}(s)$ лежит в касательном слое $R_{3,3}$ над точкой $x(s) \in M^6$, а вектор $\xi(s)$ принадлежит касательному слою над точкой $z(s) \in Z^4$, которая однозначно определяет точку $x(s)$.

Это обстоятельство позволяет ввести два вида ковариантной производной по параметру x^k , $k = 1, \dots, 6$, в пространстве Z^4 .

Положим по определению:

$$\widehat{D}_k(\Gamma)\xi^\nu = \xi_{,k}^\nu + C_{\chi k}^\nu(\Gamma)\xi^\chi, \quad (28)$$

$$\widehat{D}_k(\Delta)\xi^\nu = \xi_{,k}^\nu + C_{\chi k}^\nu(\Delta)\xi^\chi, \quad (29)$$

где $\widehat{D}_k(\Gamma)$, $\widehat{D}_k(\Delta)$ — ковариантные производные по параметру $x^k \in M^6$, действующие в Z^4 и определяемые связностями Γ и Δ соответственно. $C_{\chi k}^\nu(\Gamma)$, $C_{\chi k}^\nu(\Delta)$ — смешанные связности, зависящие от Γ и Δ и определяемые с точностью до слагаемого $iA_k\delta_\chi^\nu$, где A_k — вещественная вектор-функция, i — мнимая единица (генератор группы $U(1)$).

Ковариантная производная D_k в вещественном многообразии M^6 связана с ковариантной производной \widehat{D}_k в комплексном многообразии Z^4 соотношениями:

$$D_k(\Gamma)\dot{x}^j = \sigma_{\nu\mu}^j(\widehat{D}_k(\Gamma)\xi^\nu)\xi^\mu + \sigma_{\nu\mu}^j\xi^\nu\widehat{D}_k(\Gamma)\xi^\mu, \quad (30)$$

$$D_k(\Delta)\dot{x}^j = \sigma_{\nu\mu}^j(\widehat{D}_k(\Delta)\xi^\nu)\xi^\mu + \sigma_{\nu\mu}^j\xi^\nu\widehat{D}_k(\Delta)\xi^\mu. \quad (31)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только случая Римановой связности Γ .

Подставляя (28) в (30), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{,k}^j &= \sigma_{\nu\mu}^j(\xi_{,k}^\nu\xi^\mu + \xi^\nu\xi_{,k}^\mu), \\ \Gamma_{ik}^j\sigma_{\nu\mu}^i\xi^\nu\xi^\mu &= C_{\chi k}^\nu(\Gamma)\sigma_{\nu\mu}^j\xi^\chi\xi^\mu + \sigma_{\nu\mu}^jC_{\chi k}^\mu(\Gamma)\xi^\nu\xi^\chi. \end{aligned}$$

В силу произвольности ξ^ν , ξ^μ , последнее равенство эквивалентно соотношению:

$$\Gamma_{ik}^j\sigma_{\nu\mu}^i = C_{\nu k}^\chi(\Gamma)\sigma_{\chi\mu}^j + \sigma_{\nu\chi}^jC_{\mu k}^\chi(\Gamma). \quad (32)$$

Учитывая, что $\Gamma_{ij}^j = |g|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} |g|^{1/2}$, где $|g| = |\det \|g_{ij}\||$, из (32), в частности, следует:

$$C_{\nu j}^{\kappa}(\Gamma) \sigma_{\kappa \mu}^j + \sigma_{\nu \kappa}^j C_{\mu j}^{\kappa}(\Gamma) = |g|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^i} (|g|^{1/2} \sigma_{\nu \mu}^i).$$

Для ковариантной производной $\widehat{D}_k(\Gamma)$ относительно метрики G имеет место соотношение

$$\widehat{D}_k(\Gamma) G_{\nu \mu} = G_{\nu \mu, k} + C_{\nu k}^{\kappa}(\Gamma) G_{\kappa \mu} + C_{\mu k}^{\kappa}(\Gamma) G_{\nu \kappa}. \quad (33)$$

Оно получается непосредственно из равенства

$$D_k(\Gamma) (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j) = \widehat{D}_k(\Gamma) (G_{\nu \mu} \xi^\nu \xi^\mu).$$

Из (33) следует, что метрика G не согласована со смешанной связностью $C(\Gamma)$.

Для связности Δ получаются соотношения аналогичные равенствам (32), (33):

$$\begin{aligned} \Delta_{ik}^j \sigma_{\nu \mu}^i &= C_{\nu k}^{\kappa}(\Delta) \sigma_{\kappa \mu}^j + \sigma_{\nu \kappa}^j C_{\mu k}^{\kappa}(\Delta), \\ \widehat{D}_k(\Delta) G_{\nu \mu} &= G_{\nu \mu, k} + C_{\nu k}^{\kappa}(\Delta) G_{\kappa \mu} + C_{\mu k}^{\kappa}(\Delta) G_{\nu \kappa}. \end{aligned}$$

Определим смешанный тензор кривизны относительно связности Γ формулой:

$$R_{\kappa k r}^{\nu}(\Gamma) \xi^{\kappa} = \widehat{D}_{[r}(\Gamma) \widehat{D}_{k]}(\Gamma) \xi^{\nu}. \quad (34)$$

Раскрывая правую часть соотношения (34) с учетом (28), получаем:

$$-R_{\kappa k r}^{\nu}(\Gamma) = C_{\kappa[r, k]}^{\nu}(\Gamma) + C_{\gamma[k}^{\nu}(\Gamma) \check{C}_{|\kappa| r]}^{\gamma}(\Gamma). \quad (35)$$

Найдем теперь связь между тензором кривизны Римана $R_{qkr}^j(\Gamma)$ и смешанным тензором кривизны $R_{\kappa k r}^{\nu}(\Gamma)$. Для этого воспользуемся соотношением:

$$D_{[k}(\Gamma) D_{r]}(\Gamma) \dot{x}^j = \widehat{D}_{[k}(\Gamma) \widehat{D}_{r]}(\Gamma) (\sigma_{\nu \mu}^j \xi^\nu \xi^\mu). \quad (36)$$

Раскрывая правую часть соотношения (36) с учетом (35), получаем:

$$R_{qkr}^j(\Gamma) \sigma_{\nu \mu}^q \xi^\nu \xi^\mu = R_{\nu k r}^{\kappa}(\Gamma) \sigma_{\kappa \mu}^j \xi^\nu \xi^\mu + \sigma_{\nu \kappa}^j R_{\mu k r}^{\kappa}(\Gamma) \xi^\nu \xi^\mu. \quad (37)$$

Умножая обе части уравнения (37) на $g_{pj}\sigma_{\alpha\beta}^p\xi^\alpha\xi^\beta$ и суммируя по повторяющимся индексам, получаем:

$$R_{pqkr}(\Gamma)\dot{x}^p\dot{x}^q = R_{\nu kr}^*(\Gamma)G_{\alpha\beta}\xi^\nu\xi^\beta + R_{\mu kr}^*(\Gamma)G_{\alpha\lambda}\xi^\alpha\xi^\mu.$$

Учитывая, что $R_{\nu\mu kr} = G_{\nu\lambda}R_{\mu kr}^*$, правая часть последнего соотношения может быть преобразована к виду:

$$R_{pqkr}(\Gamma)\dot{x}^p\dot{x}^q = (R_{\mu\nu kr}(\Gamma) + R_{\nu\mu kr}(\Gamma))\xi^\nu\xi^\mu. \quad (38)$$

В случае смешанного тензора кривизны $R_{\nu\mu kr}(\Delta)$ теми же методами, с учетом тождества $R_{pqkr}(\Delta) \equiv 0$, получаем:

$$R_{\mu\nu kr}(\Delta) + R_{\nu\mu kr}(\Delta) = 0. \quad (39)$$

Тензоры кривизны $R_{\nu\mu kr}(\Gamma)$, $R_{\nu\mu kr}(\Delta)$ из соотношений (38) и (39) эрмитовы по первым двум индексам ν, μ и антисимметричны по индексам k, r .

§ 7. Геометрическая модель образования точечной гравитационной массы

Перейдем к рассмотрению конкретной модели, для построения которой достаточно ограничиться использованием пространства M^6 . Но прежде, чем мы приступим к строгой формулировке задачи, выскажем ряд наводящих соображений.

Как известно, существуют два понятия массы — гравитационная и инертная. Инертная масса обнаруживает себя в движении, гравитационная проявляет себя в законах тяготения. Согласно известной гипотезе, инертная и гравитационная массы эквивалентны. Если мы принимаем эту гипотезу, то механизм образования гравитационной массы должен иметь ту же природу, что и у инертной, то есть должен быть связан с какими-то движениями или, точнее, с кручениями, причем эти кручения могут осуществляться в чисто временной части физического пространства-времени. Согласно проведенному выше анализу, в шестимерном многообразии M^6 существует выделенное подмногообразие M^4 , каждая точка которого задается тремя пространственными и одной временной координатой. Это означает,

что в каждой точке многообразия M^6 выделяется временная ось и, таким образом, нарушается сферическая симметрия во временной части подпространства.

Выдвинем гипотезу, что гравитационная точечная масса, сосредоточенная в некоторой произвольной точке пространственного подмногообразия в M^6 , возникает в результате кручения выделенной временной оси, связанной с этой точкой.

Для того, чтобы подтвердить эту гипотезу необходимо найти метрику, удовлетворяющую ряду условий, решая структурные уравнения вида (4) и (5), с дополнительными условиями на тензор Риччи $R_{ij}(\Gamma)$. Решение этой задачи приводит к подтверждению гипотезы механизма образования гравитационной массы, а также к нахождению гравитационного поля, создаваемого такой массой [14].

Перейдем к точной формулировке задачи.

Пусть x^1, \dots, x^6 — псевдоевклидовы координаты в многообразии M^6 , относительно которых выполняются следующие требования:

1. Поле метрического тензора $g_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемого на всем многообразии M^6 , за исключением области $x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 = 0$, где метрика может быть разрывна.

2. Компоненты метрики g_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$, не зависят от x_4, x_5, x_6 , а компоненты g_{ij} , $i, j = 5, 6$ зависят только от x_5, x_6 .

Условие 2 отражает существование выделенного четырехмерного подпространства M^4 в пространстве M^6 , а также независимость всей метрики g от времени, то есть от параметра x_4 .

3. Имеет место равенство $g_{ij} = g_{ji} = 0$ при $i = 1, 2, 3$, $j = 4, 5, 6$.

4. Компоненты метрики g инвариантны при ортогональных преобразованиях координат x_1, x_2, x_3 и координат x_5, x_6 .

Условие 4 отражает существование сферической симметрии метрики в пространственной части многообразия M^6 и осевой симметрии во временной части многообразия, появляющейся за счет выделения направления оси времени.

5. На бесконечности все компоненты метрики g обращаются в нуль за исключением шести, имеющих следующие предельные

значения:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = g_{55} = g_{66} = 1.$$

Условие 5 означает, что на бесконечности гравитационное поле отсутствует.

Пусть $x(s)$ — некоторая дифференцируемая кривая в M^6 , тогда согласно (7)

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Наиболее общий вид квадрата дифференциала пути, с учетом условий 2–4, представляется как

$$ds^2 = F(r) dx_4^2 + M(\rho) (dx_5^2 + dx_6^2) + N(\rho) (x_5 dx_5 + x_6 dx_6)^2 - \\ - G(r) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - H(r) (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \quad (40)$$

где $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$, $\rho = (x_5^2 + x_6^2)^{1/2}$.

Условие 5 приводит к выполнению следующих равенств при $r, \rho \rightarrow \infty$.

$$M = F = G = 1, \quad N = H = 0.$$

Разобьем пространство M^6 на две непересекающиеся области O_1 и O_2 , причем область O_1 определяется как

$$O_1 = \{x_1, \dots, x_6: r \leq \varepsilon_1, \quad \rho \leq \varepsilon_2\},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ — параметры, значения которых будут уточнены ниже. Область O_2 является дополнением области O_1 в M^6 .

В области O_1 введем систему отсчета, задаваемую новой системой координат $\rho, r, t, \theta, \varphi, \psi$ формулами:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad x_4 = t, \\ x_5 = \rho \cos (\psi + \omega(\rho)t), \quad x_6 = \rho \sin (\psi + \omega(\rho)t), \quad (41)$$

где $\frac{d\omega(\rho)}{d\rho} = -\delta(\rho)\omega$.

В области O_1 , относительно введенной системы отсчета (41), координатная ось x^4 , интерпретируемая как ось времени, находится в состоянии кручения с угловой скоростью ω .

В области O_2 введем систему отсчета, задаваемую относительно новой системы координат $\rho, r, t, \theta, \varphi, \psi$, формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi, & x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi, & x_3 &= r \cos \theta, & x_4 &= t, \\ x_5 &= \rho \cos \psi, & x_6 &= \rho \sin \psi. \end{aligned} \quad (42)$$

Для того, чтобы якобиан преобразования от старых координат к новым был равен единице, удобно в формулах (41), (42) перейти к координатам:

$$y_1 = \frac{r^3}{3}, \quad y_2 = -\cos \theta, \quad y_3 = \varphi, \quad y_4 = t, \quad y_5 = \frac{\rho^2}{2}, \quad y_6 = \psi. \quad (43)$$

Тогда соотношение (40) в области O_1 относительно координат (43) принимает вид:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (F + M \rho^2 \omega^2) dy_4^2 + \left(\frac{M}{\rho^2} + N \right) dy_5^2 + M \rho^2 dy_6^2 + \\ &+ 2M \rho^2 \omega dy_4 dy_6 - \left(\frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2} \right) dy_1^2 - \frac{Gr^2}{1-y_2^2} dy_2^2 - Gr^2(1-y_2^2) dy_3^2. \end{aligned} \quad (44)$$

Вводя обозначения

$$f_1 = \frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}, \quad f_2 = f_3 = Gr^2, \quad f_4 = F, \quad f_5 = \frac{M}{\rho^2} + N, \quad f_6 = M \rho^2,$$

представим выражение (44) в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= (f_4 + \omega^2 f_6) dy_4^2 + f_5 dy_5^2 + f_6 dy_6^2 + 2\omega f_6 dy_4 dy_6 - \\ &- f_1 dy_1^2 - \frac{f_2}{1-y_2^2} dy_2^2 - f_2(1-y_2^2) dy_3^2. \end{aligned} \quad (45)$$

Соотношение (40) в области O_2 относительно координат (43) принимает вид

$$ds^2 = f_4 dy_4^2 + f_5 dy_5^2 + f_6 dy_6^2 - f_1 dy_1^2 - \frac{f_2}{1-y_2^2} dy_2^2 - f_2(1-y_2^2) dy_3^2. \quad (46)$$

Для облегчения последующих вычислений введем дополнительное ограничение на метрику g , имеющее чисто технический

характер, а именно, потребуем, чтобы

$$\det (g_{ij}) = 1. \quad (47)$$

Отметим, что переход от псевдоевклидовых координат x_1, \dots, x_6 к координатам (43) сохраняет условие (47). Функции f_1, \dots, f_6 , входящие в (45), (46), должны удовлетворять следующим условиям.

1. $f_1 f_2^2 f_4 = 1, f_5 f_6 = 1$ в областях O_1 и O_2 .

Условие 1 непосредственно следует из (47) и из того факта, что f_1, f_2, f_4 и f_5, f_6 зависят от разных аргументов, соответственно от y_1 и y_5 .

2. $f_1 \rightarrow (3y_1)^{-4/3}, f_2 = f_3 \rightarrow (3y_1)^{2/3}, f_4 \rightarrow 1$ при $y_1 \rightarrow \infty$, $f_5 \rightarrow (2y_5)^{-1}, f_6 \rightarrow 2y_5$ при $y_5 \rightarrow \infty$.

3. Функции f_1, \dots, f_6 должны обладать такими свойствами гладкости, чтобы обеспечить непрерывную дифференцируемость метрики g всюду за исключением, быть может, точек $y_1 = 0, y_5 = 0$.

4. Функции f_1, \dots, f_6 должны удовлетворять уравнениям (4), (5) как в области O_1 так и в области O_2 .

Для того, чтобы записать уравнения (4) и (5) относительно функций f_1, \dots, f_6 в явном виде, необходимо представить компоненты связностей Δ и Γ как функции от f_1, \dots, f_6 . Относительно Римановой связности Γ это можно сделать, исходя из соотношения

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lr} (g_{ir,j} + g_{jr,i} - g_{ij,r}).$$

Что касается связности Δ , то по метрике g , задаваемой соотношениями (45), (46) в областях O_1, O_2 соответственно, можно построить в каждой точке многообразия полные системы ортонормированных векторов $\{h^\alpha\}, \{h_\beta\}$, удовлетворяющих равенствам (1) и (2) и через них выразить связность Δ как функцию f_1, \dots, f_6 . Однако при таком подходе уравнения (4) и (5) автоматически переходят в тождества, так как найденные таким образом Δ, Γ и K всегда удовлетворяют этим уравнениям, и потому мы не сможем их разрешить относительно функций

f_1, \dots, f_6 . Следовательно, необходимо вести еще одно условие на какой-нибудь из тензоров.

Потребуем, чтобы в области O_1 выполнялось равенство

$$D_{[l}(\Gamma)K^l_{|j|r]} + K^l_{p[l}K^p_{|j|r]} = \frac{\kappa}{4} g_{rj}, \quad (48)$$

а в области O_2 равенство

$$D_{[l}(\Gamma)K^l_{|j|r]} + K^l_{p[l}K^p_{|j|r]} = 0. \quad (49)$$

Тогда из соотношения (4) следует

$$R_{ij}(\Gamma) = \frac{\kappa}{2} g_{ij} \quad \text{в области } O_1, \quad (50)$$

$$R_{ij}(\Gamma) = 0 \quad \text{в области } O_2, \quad (51)$$

и уравнение (6) в области O_1 принимает вид

$$R_{ij}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{ij} R(\Gamma) = -\kappa g_{ij}, \quad (52)$$

а в области O_2 — вид

$$R_{ij}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{ij} R(\Gamma) = 0. \quad (53)$$

Условия (48), (49) приводят к простой физической интерпретации тензора энергии-импульса, который оказывается пропорциональным метрике в области O_1 , а в области O_2 обращается в нуль, как это следует из уравнений (52) и (53). Так как уравнения (52), (53) эквивалентны уравнениям (50), (51), то для нахождения функций f_1, \dots, f_6 достаточно ограничиться рассмотрением последних.

Итак, по метрике g , задаваемой соотношением (45), находим компоненты Римановой связности Γ в области O_1

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2f_1} f_{1,1}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2f_1} f_{2,1} \frac{1}{1-y_2^2}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2f_1} f_{2,1} (1-y_2^2),$$

$$\Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2f_1} f_{4,1}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2f_2} f_{2,1}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{y_2}{1-y_2^2}, \quad \Gamma_{33}^2 = y_2 (1-y_2^2),$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2f_2} f_{2,1}, \quad \Gamma_{32}^3 = -\frac{y_2}{1-y_2^2}, \quad \Gamma_{14}^4 = \frac{1}{2f_4} f_{4,1}, \quad \Gamma_{44}^5 = -\frac{\omega^2}{2f_5} f_{6,5},$$

$$\Gamma_{46}^5 = -\frac{\omega}{2f_5} f_{6,5}, \quad \Gamma_{55}^5 = \frac{1}{2f_5} f_{5,5}, \quad \Gamma_{66}^5 = -\frac{1}{2f_5} f_{6,5},$$

$$\Gamma_{41}^6 = -\frac{\omega}{2f_4} f_{4,1}, \quad \Gamma_{45}^6 = \frac{\omega}{2f_6} f_{6,5}, \quad \Gamma_{56}^6 = \frac{1}{2f_6} f_{6,5}.$$

Затем по связности Γ находим компоненты тензора кривизны $R_{jkr}^l(\Gamma)$. Сворачивая последние по индексам l, k и подставляя полученный результат в уравнение (50), окончательно получаем следующую систему уравнений относительно f_1, \dots, f_6 в области O_1 :

$$-\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right) + \left(\frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right)^2 = -\kappa f_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right) - \frac{1}{f_1 f_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right)^2 - 2 = -\kappa f_2,$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} \right) + \frac{1}{f_1 f_2} \left(\frac{\partial f_4}{\partial y_1} \right)^2 = \kappa f_4,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_5} \left(\frac{1}{f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \right) + \frac{1}{2f_6^2} \left(\frac{\partial f_6}{\partial y_5} \right)^2 - \frac{1}{2f_5 f_6} \frac{\partial f_5}{\partial y_5} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} = \kappa f_5,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_5} \left(\frac{1}{f_5} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \right) + \frac{1}{2f_5^2} \frac{\partial f_5}{\partial y_5} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} - \frac{1}{2f_5 f_6} \left(\frac{\partial f_6}{\partial y_5} \right)^2 = \kappa f_6.$$
(54)

Из равенств $f_1 f_2^2 f_4 = 1$ и $f_5 f_6 = 1$ следуют уравнения

$$\frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{2}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{1}{f_5} \frac{\partial f_5}{\partial y_5} + \frac{1}{f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} = 0. \quad (55)$$

Решая систему дифференциальных уравнений (54) и (55), получаем

$$f_1 = \frac{\lambda^{-2} (3y_1 + \alpha)^{-4/3}}{\beta - \frac{b + \frac{\kappa}{2}\alpha}{\lambda^2 (3y_1 + \alpha)^{1/3}} - \frac{\kappa}{2} \frac{y_1}{\lambda^2 (3y_1 + \alpha)^{1/3}}}, \quad f_2 = \lambda (3y_1 + \alpha)^{2/3}, \quad (56)$$

$$f_4 = \beta - \left(\frac{b + \frac{\kappa}{2}\alpha}{\lambda^2} + \frac{\kappa}{2\lambda^2} y_1 \right) (3y_1 + \alpha)^{-1/3}, \quad (57)$$

$$f_5 = (\kappa y_5^2 + c y_5 + d)^{-1}, \quad f_6 = \kappa y_5^2 + c y_5 + d,$$

где $\lambda, \beta, b, \alpha, c, d$ — некоторые постоянные, $\lambda^3 \beta = 1$.

Для области O_2 получаем систему дифференциальных уравнений вида (54), (55), если в (54) всюду положить $\kappa = 0$. Решением такой системы будут функции

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(3y_1 + a^3)^{-4/3}}{1 - \frac{a}{(3y_1 + a^3)^{1/3}}}, & f_2 &= (3y_1 + a^3)^{2/3}, \\ f_4 &= 1 - \frac{a}{(3y_1 + a^3)^{1/3}}, & f_5 &= (2y_5 + \gamma^2)^{-1}, & f_6 &= 2y_5 + \gamma^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Чтобы метрика g была всюду непрерывно дифференцируемой, за исключением, может быть, точки $y_1 = 0$, $y_5 = 0$, в формулах (56), (57) следует положить $\lambda = 1$, $\alpha = a^3$; $\beta = 1$, $b = a - \frac{\kappa}{2}a^3$, $c = 2$, $d = \gamma^2$. При этом область O_1 вырождается в одномерное подпространство, совпадающее с осью времени t , находящейся в состоянии кручения с постоянной угловой скоростью ω . Тогда в области O_1 метрика g имеет следующие компоненты

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\infty, & g_{22} &= -\frac{a^2}{1 - y_2^2}, & g_{33} &= -a^2(1 - y_2^2), & g_{44} &= \gamma^2\omega^2, \\ g_{46} &= \omega\gamma^2, & g_{55} &= \gamma^{-2}, & g_{66} &= \gamma^2, \end{aligned} \quad (59)$$

а в области O_2 компоненты

$$\begin{aligned} g_{11} &= -f_1, & g_{22} &= \frac{f_2}{1 - y_2^2}, & g_{33} &= -f_2(1 - y_2^2), \\ g_{44} &= f_4, & g_{55} &= f_5, & g_{66} &= f_6, \end{aligned} \quad (60)$$

где f_1, \dots, f_6 определяются формулами (58).

Из соотношений (59), (60) следует, что g_{44} и g_{46} разрывны в точке $y_1, y_5 = 0$, а g_{11} в этой точке сингулярна. Такое поведение метрики в точке расположения источника кручения исключительно связано с сингулярной природой самого источника.

Тензор Риччи $R_{ij}(\Gamma)$, согласно соотношению (50), в области O_1 имеет следующие компоненты

$$\begin{aligned}
 R_{22}(\Gamma) = R_{33}(\Gamma) &= -\frac{\kappa}{2}a^2, & R_{44} &= \frac{\kappa}{2}\gamma^2\omega^2, & R_{55}(\Gamma) &= \frac{\kappa}{2}\gamma^{-2}, \\
 R_{66}(\Gamma) &= \frac{\kappa}{2}\gamma^2, & R_{46}(\Gamma) = R_{64}(\Gamma) &= \frac{\kappa}{2}\gamma^2\omega, & R_{11}(\Gamma) &= -\infty.
 \end{aligned}
 \tag{61}$$

Для исследования гравитационного поля представляет интерес только компонента $R_{44}(\Gamma)$, тогда уравнение (52) принимает вид

$$R_{44}(\Gamma) - \frac{1}{2}g_{44}R(\Gamma) = -\kappa\gamma^2\omega^2. \tag{62}$$

Сравнивая уравнение (62) с уравнениями Эйнштейна [15] для точечной массы m , имеющем вид

$$R_{44}(\Gamma) - \frac{1}{2}g_{44}R(\Gamma) = -\kappa mc^2,$$

где c — скорость света, приходим к заключению, что

$$m = \left(\frac{\gamma\omega}{c}\right)^2. \tag{63}$$

Геометрический смысл понятия гравитационной точечной массы, согласно соотношению (63), достаточно очевиден. Точечная масса пропорциональна квадрату угловой скорости кручения оси времени, связанной с точечным источником кручения. Постоянная γ имеет размерность длины и представляет собой новую мировую константу.

§ 8. Геодезические и экстремали в M^6 и их первые интегралы

В пространстве с абсолютным параллелизмом существуют два вида траекторий — геодезические и экстремали. Экстремали в пространстве с абсолютным параллелизмом и метрикой g совпадают с геодезическими в псевдоримановом пространстве, имеющем ту же размерность и ту же метрику. В небесной механике по экстремалим двигаются все небесные тела и распространяются световые лучи. Так как при этом обычно предполагается, что пространство имеет псевдориманову структуру, то такие тра-

ектории называются геодезическими. Мы же везде ниже будем называть их экстремалими, резервируя понятие геодезической для совершенно неизученного класса траекторий.

Информация о геодезических и экстремалих, и их первых интегралах представляет собой важнейшую задачу небесной механики.

Оказывается, что некоторые из существующих парадоксальных эффектов, ненаходящих объяснения в рамках четырехмерной концепции пространства-времени, легко разрешаются в шестимерном многообразии.

Но прежде, чем мы перейдем к обсуждению этих вопросов, займемся построением геодезических и экстремалей и нахождением их первых интегралов в случае модели центрально-симметричной метрики с точечным источником кручения, построенной в предыдущем параграфе.

Геодезические и экстремали в пространстве с абсолютным параллелизмом относительно переменных x_1, \dots, x_6 определяются соответственно следующими уравнениями:

$$\ddot{x}^l + \Delta_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j = 0, \quad (64)$$

$$\ddot{x}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{x}^i \dot{x}^j = 0. \quad (65)$$

В предыдущем параграфе были найдены все компоненты Римановой связности Γ в областях O_1 и O_2 относительно переменных y_1, \dots, y_6 , определяемых соотношениями (43), где область $O_1 = \left\{ y_1, \dots, y_6; y_1 \leq \frac{\epsilon_1^3}{3}, y_5 \leq \frac{\epsilon_2^2}{2} \right\}$. Область O_2 является дополнительной к области O_1 в M^6 . Подставляя компоненты Γ в уравнение (65), получаем следующую систему дифференциальных уравнений в области O_1 :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dot{y}_1^2 - \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \frac{\dot{y}_2^2}{1-y_2^2} - \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} (1-y_2^2) \dot{y}_3^2 + \\ + \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} \dot{y}_4^2 = 0, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\ddot{y}_2 + \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \frac{y_2}{1-y_2^2} \dot{y}_2^2 + y_2 (1-y_2^2) \dot{y}_3^2 = 0, \quad (67)$$

$$\ddot{y}_3 + \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_3 - \frac{2y_2}{1-y_2^2} \dot{y}_2 \dot{y}_3 = 0, \quad (68)$$

$$\ddot{y}_4 + \frac{1}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_4 = 0, \quad (69)$$

$$\ddot{y}_5 + \frac{1}{2f_5} \frac{\partial f_5}{\partial y_5} \dot{y}_5^2 - \frac{\omega^2}{2f_5} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_4^2 - \frac{1}{2f_5} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_6^2 - \frac{\omega}{f_5} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_4 \dot{y}_6 = 0, \quad (70)$$

$$\ddot{y}_6 + \frac{1}{f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_5 \dot{y}_6 - \frac{\omega}{f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_4 + \frac{\omega}{f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_5 \dot{y}_4 = 0. \quad (71)$$

Система уравнений (66)–(71) может быть проинтегрирована в общем виде. Действительно, интегрируя уравнения (68) и (69), получаем

$$\dot{y}_3 = C_3 \left((1 - y_2^2) f_2 \right)^{-1}, \quad \dot{y}_4 = C_4 f_4^{-1}. \quad (72)$$

Для того, чтобы проинтегрировать уравнение (70), представим его в виде

$$\ddot{y}_5 + \frac{1}{2f_5} \frac{\partial f_5}{\partial y_5} \dot{y}_5^2 - \frac{1}{2f_5} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} (\dot{y}_6 + \omega \dot{y}_4)^2 = 0. \quad (73)$$

Умножая уравнение (69) на ω и складывая его с уравнением (71), получаем:

$$\ddot{y}_6 + \omega \ddot{y}_4 + \frac{1}{f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_5 (\dot{y}_6 + \omega \dot{y}_4) = 0. \quad (74)$$

Интегрируя уравнение (74), приходим к соотношению

$$\dot{y}_6 + \omega \dot{y}_4 = C_6 f_6^{-1},$$

подставляя которое в (73) приходим к уравнению

$$\ddot{y}_5 + \frac{1}{2f_5} \frac{\partial f_5}{\partial y_5} \dot{y}_5^2 - \frac{C_6^2}{2f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} = 0. \quad (75)$$

Уравнение (75) интегрируется, в результате чего получаем

$$\dot{y}_5 = C_5 \left(1 - \frac{C_6^2}{C_5^2} f_5 \right)^{1/2} f_5^{-1/2}. \quad (76)$$

Подставляя \dot{y}_3 из (72) в (67) и интегрируя последнее получаем:

$$\dot{y}_2 = C_2 \left(1 - \frac{C_3^2}{C_2^2} \frac{1}{1 - y_2^2} \right)^{1/2} \frac{(1 - y_2^2)^{1/2}}{f_2}. \quad (77)$$

В свою очередь, подставляя \dot{y}_2 из (77), \dot{y}_3 и \dot{y}_4 из (72) в (66) приводим это уравнение к виду:

$$\ddot{y}_1 + \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dot{y}_1^2 - C_2^2 \frac{f_4}{2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + C_4^2 \frac{a}{2f_4} = 0. \quad (78)$$

Будем искать решение уравнения (78) в форме $\dot{y}_1 = C_1(y_1) f_1^{-1/2}$, тогда

$$\frac{\partial C_1}{\partial y_1} C_1 = C_2^2 f_1 f_4 f_2^{-1/2} - \frac{a}{2} C_4^2 f_1 f_4^{-1},$$

или, переходя к переменной $R = (3y_1 + a^3)^{1/3}$, получаем

$$\frac{\partial C_1^2}{\partial R} = 2C_2^2 R^{-3} - aC_4^2 (R - a)^{-2}.$$

Отсюда следует, что $C_1(R) = C_1 \left(1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{1}{R^2} + \frac{a}{R-a} \frac{C_4^2}{C_1^2} \right)^{1/2}$ и, таким образом, первый интеграл уравнения (78) найден.

Итак, окончательно выпишем первые интегралы системы уравнений (66)–(71) в области O_1

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= C_1 \left(1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} \frac{1}{R^2} + \frac{a}{R-a} \frac{C_4^2}{C_1^2} \right)^{1/2} f_1^{-1/2}, \\ \dot{y}_2 &= C_2 \left(1 - \frac{C_3^2}{C_2^2} \frac{1}{1 - y_2^2} \right)^{1/2} \frac{(1 - y_2^2)^{1/2}}{f_2}, \\ \dot{y}_3 &= C_3 ((1 - y_2^2) f_2)^{-1}, \\ \dot{y}_4 &= C_4 f_4^{-1}, \\ \dot{y}_5 &= C_5 \left(1 - \frac{C_6^2}{C_5^2} f_5 \right)^{1/2} f_5^{-1/2}, \\ \dot{y}_6 &= C_6 f_6^{-1} - \omega C_4 f_4^{-1}, \end{aligned} \quad (79)$$

где C_1, \dots, C_6 — некоторые постоянные, между которыми существует определенная зависимость. Перейдем к ее установлению.

Из уравнения (45) непосредственно следует соотношение

$$f_4 \dot{y}_4^2 + f_5 \dot{y}_5^2 + f_6 (\dot{y}_6 + \omega \dot{y}_4)^2 - f_1 \dot{y}_1^2 - f_2 (1 - y_2^2)^{-1} \dot{y}_2^2 - f_2 (1 - y_2^2) \dot{y}_3^2 = 1. \quad (80)$$

Подставляя правые части соотношений (79) в (80), получаем

$$C_4^2 + C_5^2 - C_1^2 = 1. \quad (81)$$

Несколько неожиданным представляется тот факт, что взаимосвязь существует только между коэффициентами C_4, C_5, C_1 в форме соотношения (81), в то время как C_2, C_3, C_6 совершенно произвольны.

В области O_2 уравнения для экстремалей будут совпадать с системой уравнений (66)–(71), если в последней всюду положить $\omega = 0$. Тогда первые интегралы от экстремалей в области O_2 совпадут с первыми интегралами в области O_1 , задаваемыми системой равенств (79), если в последней положить $\omega = 0$. Соотношение (81) в области O_2 не изменится.

Перейдем теперь к нахождению уравнений геодезических. Для этого необходимо найти компоненты связности Δ_{ij}^l в областях O_1 и O_2 . Построим в каждой точке многообразия M^6 полные системы ортонормированных векторов $\{h^\alpha\}, \{h_\beta\}$, удовлетворяющих равенствам (1) и (3). В области O_1 положим

$$\begin{aligned} h^1 &= (f_1^{1/2}, 0, 0, 0, 0, 0), & h^2 &= \left(0, \left(\frac{f_2}{1 - y_2^2}\right)^{1/2}, 0, 0, 0, 0\right), \\ h^3 &= \left(0, 0, (f_2(1 - y_2^2))^{1/2}, 0, 0, 0\right), & h^4 &= \left(0, 0, 0, f_4^{1/2}, 0, 0\right), \\ h^5 &= \left(0, 0, 0, 0, f_5^{1/2}, 0\right), & h^6 &= \left(0, 0, 0, \omega f_6^{1/2}, 0, f_6^{1/2}\right), \\ h_1 &= \left(f_1^{-1/2}, 0, 0, 0, 0, 0\right), & h_2 &= \left(0, \left(\frac{f_2}{1 - y_2^2}\right)^{-1/2}, 0, 0, 0, 0\right), \\ h_3 &= \left(0, 0, (f_2(1 - y_2^2))^{-1/2}, 0, 0, 0\right), \\ h_4 &= \left(0, 0, 0, f_4^{-1/2}, 0, -\omega f_4^{-1/2}\right), \\ h_5 &= \left(0, 0, 0, 0, f_5^{-1/2}, 0\right), & h_6 &= \left(0, 0, 0, 0, 0, f_6^{-1/2}\right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что для данных систем векторов соотношения (1) и (3) выполняются. Используя формулу (2), находим компоненты связности Δ пространства M^6 :

$$\begin{aligned}\Delta_{11}^1 &= \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \Delta_{21}^2 &= \frac{1}{2f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \\ \Delta_{22}^2 &= \frac{y_2}{1-y_2^2}, & \Delta_{31}^3 &= \frac{1}{2f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, \\ \Delta_{32}^3 &= -\frac{y_2}{1-y_2^2}, & \Delta_{41}^4 &= \frac{1}{2f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1}, \\ \Delta_{55}^5 &= \frac{1}{2f_5} \frac{\partial f_5}{\partial y_5}, & \Delta_{41}^6 &= -\frac{\omega}{2f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1}, \\ \Delta_{45}^6 &= \frac{\omega}{2f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5}, & \Delta_{65}^6 &= \frac{1}{2f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5}.\end{aligned}$$

Тогда уравнения для геодезических (64) в переменных y_1, \dots, y_6 , задаваемых соотношениями (43), в области O_1 принимают вид следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 + \frac{1}{2f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \dot{y}_1^2 &= 0, \\ \ddot{y}_2 + \frac{1}{2f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \frac{y_2}{1-y_2^2} \dot{y}_2^2 &= 0, \\ \ddot{y}_3 + \frac{1}{2f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_3 - \frac{y_2}{1-y_2^2} \dot{y}_2 \dot{y}_3 &= 0, \\ \ddot{y}_4 + \frac{1}{2f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_4 &= 0, \\ \ddot{y}_5 + \frac{1}{2f_5} \frac{\partial f_5}{\partial y_5} \dot{y}_5^2 &= 0, \\ \ddot{y}_6 + \frac{1}{2f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_5 \dot{y}_6 + \frac{\omega}{2f_6} \frac{\partial f_6}{\partial y_5} \dot{y}_5 \dot{y}_4 - \frac{\omega}{2f_4} \frac{\partial f_4}{\partial y_1} \dot{y}_1 \dot{y}_4 &= 0.\end{aligned}\tag{82}$$

Система уравнений (82) может быть проинтегрирована в общем виде. Первые интегралы движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= C_1 f_1^{-1/2}, \\
\dot{y}_2 &= C_2 \left(\frac{f_2}{1 - y_2^2} \right)^{-1/2}, \\
\dot{y}_3 &= C_3 \left((1 - y_2^2) f_2 \right)^{-1/2}, \\
\dot{y}_4 &= C_4 f_4^{-1/2}, \\
\dot{y}_5 &= C_5 f_5^{-1/2}, \\
\dot{y}_6 &= C_6 f_6^{-1/2} - \omega C_4 f_4^{-1/2},
\end{aligned} \tag{83}$$

где C_1, \dots, C_6 — некоторые постоянные, связанные между собой зависимостью.

Из уравнения (45) непосредственно получаем равенство

$$\begin{aligned}
&(f_4 + \omega^2 f_6) \dot{y}_4^2 + f_5 \dot{y}_5^2 + f_6 \dot{y}_6^2 + 2\omega f_6 \dot{y}_4 \dot{y}_6 - \\
&- f_1 \dot{y}_1^2 - \frac{f_2}{1 - y_2^2} \dot{y}_2^2 - f_2 (1 - y_2^2) \dot{y}_3^2 = 1.
\end{aligned} \tag{84}$$

Подставляя правые члены соотношений (83) в (84), приходим к условию

$$C_4^2 + C_5^2 + C_6^2 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 = 1. \tag{85}$$

В области O_2 уравнения для геодезических будут совпадать с системой (82), если в последней положить $\omega = 0$.

Первые интегралы от геодезических в области O_2 совпадут с первыми интегралами в области O_1 , задаваемыми системой (83), если в последней положить $\omega = 0$. Зависимость между постоянными C_1, \dots, C_6 в области O_2 вида (85) не изменится.

§ 9. О возможности движения с бесконечно большой скоростью

Выше было установлено, что пространство, содержащее единственный точечный источник гравитации, обладает структурой пространства с абсолютным параллелизмом, то есть наделено

двумя типами связностей Γ и Δ , и, следовательно, в нем существуют два вида траекторий, индуцируемых этими связностями. Траектории, строимые по связности Γ , называются экстремалиями, а по связности Δ — геодезическими.

Так как в теоретической физике обычно рассматривают псевдоримановы пространства, характеризуемые только одной Римановой связностью Γ , то и исследуются исключительно экстремали. Нашей же целью в этом параграфе будет исследование геодезических, обладающих одним удивительным свойством. Оказывается, что если движение по экстремалиям соответствует нашим устоявшимся классическим представлениям, за исключением, быть может, только окрестности точечного источника гравитации, то движение по геодезическим возможно и с бесконечно большой скоростью. Интересно отметить, что такое «неклассическое» движение возможно в шестимерном многообразии, но невозможно, как мы увидим ниже, в четырехмерном. Поэтому любой эксперимент, подтверждающий возможность мгновенного распространения взаимодействия в пространстве, свидетельствовал бы в пользу шестимерной структуры нашего пространства. Удивительно, что такие эксперименты, вне связи с рассматриваемыми нами проблемами, были поставлены сначала проф. Н. А. Козыревым [15], а затем, сравнительно недавно, подтверждены неоднократно группой академика М. М. Лаврентьева [16, 17].

Перейдем непосредственно к рассмотрению поставленной задачи.

Уравнение движения по геодезическим (64) в случае точечного источника гравитации в шестимерном пространстве в области O_1 , содержащей этот источник, принимает вид (82). Для квадрата же обобщенной скорости, нормированной на единицу, имеем выражение (84). В предыдущем параграфе были получены первые интегралы движения из системы уравнений (82), имеющие вид (83). Из (83) и (84) после несложных преобразований получили условие (85).

Вне области O_1 имеют место уравнения (82), если в них положить $\omega = 0$, тогда первые интегралы движения в области O_2

совпадут с системой первых интегралов (83), если в ней всюду положить $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= C'_1 f_1^{-1/2}, \\ \dot{y}_2 &= C'_2 \left(\frac{f_2}{1 - y_2^2} \right)^{-1/2}, \\ \dot{y}_3 &= C'_3 \left((1 - y_2^2) f_2 \right)^{-1/2}, \\ \dot{y}_4 &= C'_4 f_4^{-1/2}, \\ \dot{y}_5 &= C'_5 f_5^{-1/2}, \\ \dot{y}_6 &= C'_6 f_6^{-1/2}. \end{aligned} \quad (86)$$

Подставляя систему соотношений (86) в (84), получаем:

$$C_4'^2 + C_5'^2 + C_6'^2 - C_1'^2 - C_2'^2 - C_3'^2 = 1. \quad (87)$$

Так как $\dot{y}_1, \dots, \dot{y}_6$ должны быть непрерывными функциями аргумента s во всем пространстве, то, следовательно, на границе областей O_1 и O_2 должно выполняться равенство:

$$C'_1 = C_1, \dots, C'_5 = C_5, \quad \omega C_4 f_6^{1/2} = (C_6 - C'_6) f_4^{1/2}.$$

Так как область O_1 есть цилиндрическая окрестность оси t , исходящей из начала координат $y_1 = 0$, $y_5 = 0$, причем радиус сечения цилиндра $y_5 = \varepsilon_2$ асимптотически стремится к нулю, то

$$\lim_{y_5 \rightarrow 0} f_6(y_5) = \gamma^2 > 0, \quad \lim_{y_1 \rightarrow 0} f_4(y_1) = 0.$$

Следовательно, $\gamma \omega C_4 = 0$, отсюда $C_4 = 0$.

Итак, в области O_1 и O_2 имеем соответственно:

$$\dot{y}_6 = C_6 f_6^{-1/2}, \quad \dot{y}_6 = C'_6 f_6^{-1/2}$$

и, в силу непрерывности на границе двух областей, $C'_6 = C_6$.

Переходя в соотношениях (83) от производных по абсолютному параметру s к производным по параметру t , который физически интерпретируется как лабораторное время наблюдателя, находящегося в начале координат, а также вводя новые

переменные $R = (3y_1 + \alpha^3)^{1/3}$, $\chi = (2y_5 + \gamma^2)^{1/2}$ и учитывая, что $\dot{y}_1 = R^2 \frac{dR}{dt}$, $\dot{y}_5 = \chi \frac{d\chi}{dt}$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= B_1 \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right), & \frac{d\theta}{dt} &= B_2 \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{1/2} R^{-1}, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= B_3 \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{1/2} (R \sin \theta)^{-1}, & \frac{d\chi}{dt} &= B_5 \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right), \\ & & \frac{d\psi}{dt} &= B_6 \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right) \chi^{-1}, \end{aligned} \quad (88)$$

где $B_i = \frac{C_i}{C_4}$, $i = 1, \dots, 6$.

Интегрируя систему уравнений (88), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} R + \alpha \ln \left(\frac{R}{\alpha} - 1 \right) &= B_1 t + R(0) + \alpha \ln \left(\frac{R(0)}{\alpha} - 1 \right), \\ \theta &= \frac{B_2}{B_1} \ln (R^{1/2} + (R - \alpha)^{1/2})^2 + \theta(0), \\ \varphi &= \frac{B_3}{B_1 \sin \theta} \ln (R^{1/2} + (R - \alpha)^{1/2})^2 + \varphi(0), \\ \chi &= \frac{B_5}{B_1} R + \chi(0), \\ \psi &= \frac{B_6}{B_5} \ln \left(R + \chi(0) \frac{B_1}{B_5} \right) + \psi(0). \end{aligned} \quad (89)$$

Потребуем, чтобы параметры θ , φ , χ в соотношениях (89) не зависели от R . Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$\frac{C_2}{C_1} = 0, \quad \frac{C_3}{C_1} = 0, \quad \frac{C_5}{C_1} = 0. \quad (90)$$

Если $C_1 \neq 0$, то $C_2 = C_3 = C_5 = 0$, но тогда $B_1 = \frac{C_1}{C_4} = \infty$ и $C_6 \neq 0$, в силу условия (85), что приводит к бесконечной скорости движения в радиальном направлении.

Действительно, учитывая, что $\frac{dr}{dt} = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt}$ и что $\frac{dR}{dt} = \infty$, в силу условия $B_1 = \infty$, получаем требуемый результат. Уравне-

ния (88), согласно условиям (90), принимают следующий вид:

$$\frac{dR}{dt} = \infty, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \frac{d\chi}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = \infty, \quad (91)$$

а соотношение (85) преобразуется к виду:

$$C_6^2 - C_1^2 = 1. \quad (92)$$

Из первых трех уравнений (91) следует, что в трехмерном пространстве шестимерного многообразия может иметь место эффект мгновенного распространения сигнала строго по радиальным лучам и изотропно во всех направлениях от источника образования гравитационной массы.

Последние два уравнения системы (91) описывают движение в трехмерном временном подпространстве. Они задают движение по окружности вокруг временной оси t с бесконечно большой угловой скоростью. Единственным приемлемым решением этой системы является вырожденный случай, соответствующий $\chi \equiv \gamma$.

Эффект мгновенного распространения сигнала, впервые обнаруженный проф. Н. А. Козыревым и подтвержденный в 1990 г. группой академика М. М. Лаврентьева, до настоящего времени не имел никакого теоретического объяснения. Интересно отметить, что эффект мгновенного распространения сигнала в шестимерном пространстве-времени осуществляется внутри причинно-следственного конуса, что гарантируется выполнением соотношения (92). И, наконец, чрезвычайно важно заметить, что этот эффект в принципе не может наблюдаться в пространстве четырех измерений, так как в этом случае соотношение (85) принимает вид:

$$C_4^2 - C_1^2 - C_2^2 - C_3^2 = 1$$

и, в силу необходимого условия $C_4 = 0$, приходим к требованию

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = -1.$$

§ 10. Точное решение задачи о перигелии Меркурия в шестимерном пространстве

В этом параграфе показывается, что задача о движении перигелия Меркурия, при условии полученном Эйнштейном на нор-

мировку времени, не имеет строгого решения в четырехмерном пространстве-времени, однако разрешима в шестимерном многообразии.

Приближенное решение задачи о вековом вращении орбиты Меркурия или о движении перигелия Меркурия было дано Эйнштейном в 1915 г. в работе [18]. Им были построены уравнения для экстремалей вида (65) в первом порядке приближения по Шварцшильдовскому радиусу a . Эти уравнения описывали траекторию движения пробного тела в гравитационном поле точечной массы, при этом один из первых интегралов движения имел вид

$$\dot{x}_4 = 1 + \frac{a}{r}, \quad (93)$$

в наших обозначениях $x_4 = y_4$. При $r \rightarrow \infty$ получалось следующее условие:

$$\dot{x}_4 = \frac{dx_4}{ds} = \frac{dt}{ds} = 1.$$

Последнее условие равносильно требованию, чтобы пробное тело, находящееся в гравитационном поле точечной массы, на бесконечности приходило в состояние покоя. Именно при этих условиях Эйнштейном было получено решение задачи о движении перигелия Меркурия в первом приближении по параметру a . В 1916 г. Шварцшильдом эта задача, как считается, была решена в общем виде [19]. Им была найдена метрика пространства, содержащего точечный источник гравитации, а затем по метрике построены точные уравнения для экстремалей, совпадающие с системой (66)–(69). Далее были найдены первые интегралы движений уравнений (68), (69) при упрощающих предположениях о движении пробного тела в экваториальной плоскости, то есть при выполнении условия $y_2 \equiv 0$. При этом соотношение Эйнштейна (93), согласно работе Шварцшильда, переходило в

$$\dot{x}_4 = C_4 \left(1 - \frac{a}{(r^3 + a^3)^{1/3}} \right)^{-1}. \quad (94)$$

При $r \rightarrow \infty$ правая часть (94) в первом приближении по параметру a ведет себя как $C_4(1 + \frac{a}{r})$. Поэтому, чтобы сохранить

условие Эйнштейна, Шварцшильд полагает $C_4 = 1$. Мы утверждаем, что при таком условии точное решение задачи о движении перигелия Меркурия вообще не существует. О том, почему Шварцшильд получил уравнение Эйнштейна для перигелия Меркурия и где он допустил ошибку, мы поговорим чуть позже. А сейчас решим эту задачу в самом общем виде в шестимерном пространстве M^6 .

Выше были получены все первые интегралы движений для экстремалей в виде системы (79). Для нахождения уравнения, описывающего движение перигелия пробного тела в гравитационном поле, создаваемом точечной массой, достаточно использовать первое и третье соотношения из системы (79).

Переходя к новой переменной $x = R^{-1}$ и учитывая, что $y_1 = \frac{R^3 - a^3}{3}$, первое соотношение системы (79) относительно переменной x принимает вид:

$$\dot{x} = -\frac{C_1}{R^4} \left(1 - \frac{C_2^2}{C_1^2} x^2 + \frac{a}{R-a} \frac{C_4^2}{C_1^2} \right)^{1/2} f_1^{-1/2}. \quad (95)$$

Учитывая, что $y_3 = \varphi$ и $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}_3}$, из (95) и (79) получаем:

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 = \frac{C_2^2}{C_3^2} (1 - y_2^2)^2 \left(\frac{C_1^2}{C_2^2} + \frac{C_4^2 - C_1^2}{C_2^2} ax - x^2 + ax^3 \right), \quad (96)$$

где $C_4^2 - C_1^2 = 1 - C_5^2$, согласно соотношению (81).

Уравнение (96) представляет собой самый общий вид взаимной зависимости трех основных характеристик x , φ , θ , полностью определяющих движение пробного тела в сферически-симметричном поле. Теперь можно перейти к рассмотрению частного случая Эйнштейна—Шварцшильда, а именно, движения пробного тела в экваториальной плоскости, то есть при условии, что $y_2 \equiv 0$, а, следовательно, и $\dot{y}_2 = 0$. Тогда из второго соотношения системы (79) следует условие $C_2 = C_3$ и уравнение (96) принимает вид

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 = \frac{C_1^2}{C_3^2} + \frac{C_4^2 - C_1^2}{C_3^2} ax - x^2 + ax^3, \quad (97)$$

или, учитывая (81), уравнение (97) можно представить в форме

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C_1^2}{C_3^2} + \frac{1 - C_5^2}{C_3^2}ax - x^2 + ax^3. \quad (98)$$

Важно отметить, что в уравнение (98) входит постоянная C_5 , связанная с первыми интегралами движения из временной части многообразия M^6 . Очевидно, что если бы наше реальное пространство-время было бы четырехмерно, то $C_5 \equiv 0$.

Если в уравнении (97) положить $C_4 = 1$, что означает, как было отмечено выше, условие остановки пробного тела на бесконечности в четырехмерном пространстве, но не в шестимерном, то, согласно (81), $C_1^2 = C_5^2$ и уравнение (97) принимает вид

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C_1^2}{C_3^2} + \frac{1 - C_1^2}{C_3^2}ax - x^2 + ax^3. \quad (99)$$

Если ввести обозначения

$$B^2 = C_3^2(1 - C_1^2)^{-1}, \quad 2A = C_1^2(1 - C_1^2)^{-1},$$

то уравнение (99) есть не что иное, как уравнение Эйнштейна, полученное им в первом приближении по параметру a , то есть, вообще говоря, не строго.

Уравнение (99) получено строго математически в рамках шестимерного многообразия M^6 . Это обстоятельство чрезвычайно важно подчеркнуть, так как, если мы ограничимся рассмотрением четырехмерного многообразия, то $C_5 \equiv 0$, а, следовательно, и $C_1 = 0$, и уравнение (99) принимает вид

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{C_3^2}ax - x^2 + ax^3. \quad (100)$$

Уравнение (100) не описывает реального движения перигелия пробного тела и поэтому не представляет интереса. Однако, именно оно получается в теории Шварцшильда, если, как это делал Шварцшильд, положить $C_4 = 1$. Укажем теперь где Шварцшильд допустил ошибку в своей работе.

В четырехмерном многообразии соотношение (80) при условии $y_2 = 0$ принимает вид

$$f_4 \dot{y}_4^2 - f_1 \dot{y}_1^2 - f_2 \dot{y}_2^2 - f_3 \dot{y}_3^2 = 1. \quad (101)$$

Однако Шварцшильд полагает [19]

$$f_4 \dot{y}_4^2 - f_1 \dot{y}_1^2 - f_2 \dot{y}_2^2 - f_3 \dot{y}_3^2 = h, \quad (102)$$

где $h \neq 1$, что, естественно, недопустимо в четырехмерном случае, но верно в шестимерном, если $h = 1 - C_5^2$.

Используя соотношение (101), мы приходим к уравнению (100). Если использовать соотношение (102), то приходим к уравнению, полученному Шварцшильдом

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1-h}{C_3^2} + \frac{h}{C_3^2} ax - x^2 + ax^3,$$

которое полностью совпадает по виду с уравнением (99), если учесть, что $C_1^2 = C_5^2$, $h = 1 - C_5^2$.

Итак, можно сделать важный вывод о том, что приближенные расчеты Эйнштейна можно строго обосновать только в рамках шестимерного многообразия.

Если отказаться от условия $C_4 = 1$, то в шестимерном случае это никак не скажется на виде уравнения (98), а в четырехмерном случае уравнение (98) перейдет в

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = \frac{C_1^2}{C_3^2} + \frac{1}{C_3^2} ax - x^2 + ax^3, \quad (103)$$

то есть совпадает с уравнением Эйнштейна, полученным при взаимоисключающих предположениях, а именно, при условии $C_4 = 1$.

Таким образом, в четырехмерном многообразии задачу о движении перигелия пробного тела строго можно решить только при условии $C_4 > 1$, в то время как в шестимерном пространстве она разрешима при более общих условиях на параметр C_4 .

Какой же из возможных вариантов соответствует геометрической модели образования точечной гравитационной массы, предложенной в § 7.

Если, согласно этой модели, во временной части пространства осуществляется единственная форма движения, а именно, кручение оси времени с угловой скоростью ω , то есть пробное тело во временной части пространства находится в состоянии покоя относительно переменных y_5, y_6 , то в соотношениях для первых интегралов (79) следует положить $C_5 \equiv 0, C_6 \equiv 0$, тогда $\dot{y}_5 \equiv 0, \dot{y}_6 = -\omega C_4 f_4^{-1}$ и $\frac{d\psi}{dt} = -\omega$, и мы приходим к уравнению (103).

§ 11. О релятивистской поправке в законе тяготения Ньютона

Согласно теории Ньютона, сила F , действующая между двумя телами с массами M и m , дается формулой

$$F = -G \frac{Mm}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная. Если связать систему координат с одним из тел, например, массы M , то второе тело относительно этой системы координат будет двигаться с радиальным ускорением

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2}. \quad (104)$$

Если тела имеют шарообразную форму достаточно малых размеров и $M \gg m$, то этой задаче, с выделенной таким образом системой координат, можно дать следующую физическую интерпретацию.

В центрально-симметричном гравитационном поле, создаваемом массой M , движется пробное тело массы m . Ускорение пробного тела, обусловленное только гравитационным полем, согласно теории Ньютона, находится по формуле (104).

Если тело, создающее гравитационное поле, будет бесконечно малых размеров, в пределе точечным, то ускорение и скорость пробного тела при приближении к источнику гравитации должны стремиться к бесконечности. Однако в реальности, как известно, ничего подобного не происходит. К тому же принципы общей

теории относительности, ограничивающие скорости движения материальных объектов скоростью света, приходят в противоречие с таким движением пробного тела.

Чтобы разрешить эту проблему, обратимся к системе уравнений (66)–(71). Эта система вместе с ее первыми интегралами (79) содержит всю информацию о движении пробного тела в гравитационном поле точечного источника в шестимерном многообразии M^6 . Если ограничиться рассмотрением системы уравнений (66)–(69), то мы получим исчерпывающую информацию о движении пробного тела в задаче Шварцшильда в четырехмерном пространстве-времени. Сразу же оговоримся, что истинная размерность пространства при разрешении этого парадокса не играет никакой роли, поэтому достаточно ограничиться рассмотрением четырехмерного случая.

Радиальная скорость пробного тела $\frac{dr}{dt}$ относительно лабораторной системы отсчета, связанной с гравитирующей массой, согласно определению переменных y_1, \dots, y_6 , находится по формуле

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_4 r^2}. \quad (105)$$

Подставляя правые части первого и четвертого уравнений системы (79) в соотношение (105), получаем

$$\frac{dr}{dt} = \left(\frac{C_1^2}{C_4^2} - \frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{1}{R^2} + \frac{a}{R-a} \right)^{1/2} \frac{(R-a)^{3/2} R^{1/2}}{r^2}. \quad (106)$$

При $r \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ получаем следующее асимптотическое поведение скорости пробного тела

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{dr}{dt} = \frac{C_1}{C_4}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{dr}{dt} = 0,$$

причем при $r \rightarrow 0$, $\frac{dr}{dt} \sim \frac{(R-a)(Ra)^{1/2}}{r^2}$.

Таким образом, при приближении к точечному источнику гравитации радиальная скорость пробного тела не увеличивается до бесконечности, как это следует из теории Ньютона, а стремится к нулю, причем асимптотическое поведение скорости не зависит от постоянных C_1, C_2, C_4 , а определяется только радиусом

Шварцшильда. Найдем теперь ускорение пробного тела в лабораторной системе отсчета, связанной с гравитирующей массой. Дифференцируя соотношение (106), получаем после несложных преобразований

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} = & \left(\frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{1}{R^3} - \frac{1}{2} \frac{a}{(R-a)^2} \right) \frac{(R-a)^3}{Rr^2} + \\ & + \left(\frac{C_1^2}{C_4^2} - \frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{1}{R^2} + \frac{a}{R-a} \right) \left(\frac{1}{2R} + \frac{3}{2} \frac{1}{R-a} - 2 \frac{R^2}{r^3} \right) \frac{(R-a)^3}{Rr^2}. \quad (107) \end{aligned}$$

При $r^3 \gg a^3$ из (107) следует $\frac{d^2 r}{dt^2} \sim -\frac{1}{2} \frac{a}{r^2}$, учитывая, что $a = 2GM$ (где скорость света $c = 1$), получаем формулу (104).

При $r \rightarrow 0$ имеем $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^2 r}{dt^2} = 0$, причем асимптотическое поведение ускорения при $r \rightarrow 0$ зависит только от r и радиуса Шварцшильда a .

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \sim -\frac{1}{2} \frac{a}{R} \frac{(R-a)}{r^2} - 2aR \frac{(R-a)^2}{r^5}.$$

В частности, из соотношения (107) непосредственно следует обобщенная формула для ньютоновской силы тяготения

$$\begin{aligned} F = & -G \frac{Mm}{r^2} + G \frac{Mm a}{r^2 R} + \frac{C_2^2}{C_4^2} \left(\frac{R-a}{R} \right)^3 \frac{m}{r^2 R} + \\ & + \left(\frac{C_1^2}{C_4^2} - \frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{1}{R^2} + \frac{a}{R-a} \right) \left(\frac{1}{2R} + \frac{3}{2} \frac{1}{R-a} - 2 \frac{R^2}{r^3} \right) \frac{(R-a)^3 m}{Rr^2}. \end{aligned}$$

Если ограничиться только первым приближением по параметру a в релятивистской поправке для гравитационной силы, то получаем следующую простую формулу, не зависящую от параметров C_1 , C_2 , C_4 и достаточно правильно отображающую асимптотическое поведение силы в окрестности нуля

$$F = -G \frac{Mm}{r^2} + G \frac{Mm a}{r^2 R}.$$

Наблюдатель, находящийся в точке расположения гравитационного источника, будет свидетелем чрезвычайно странной

картины с точки зрения современных представлений теоретической физики. Пробное тело, достигая точки, в которой расположен источник гравитации, получает полную асимптотическую свободу, то есть на него не действуют никакие гравитационные силы. Образно говоря, пробное тело не обнаруживает присутствия в этой точке чего бы то ни было инородного. Это важное обстоятельство лишний раз указывает на правильность идеи формирования гравитационной массы вне нашего видимого трехмерного пространства.

Асимптотическая свобода пробного тела в центре расположения источника гравитации напоминает асимптотическую свободу кварков внутри барионов.

Замечательно, что этот очень интересный результат получен в конечном счете всего лишь из общих свойств симметрии пространственно-временного многообразия. Его значение трудно переоценить.

Во-первых, он дает релятивистскую поправку в фундаментальном законе притяжения Ньютона на малых расстояниях сравнимых с радиусом Шварцшильда. Эта поправка устраняет сингулярность, представлявшую собой довольно неприятную проблему не для одного поколения исследователей.

Во-вторых, полученные результаты ставят под сомнение возможность существования невращающихся и незаряженных черных дыр, чья геометрия описывается метрикой Шварцшильда. Однако об этой теме в силу ее важности поговорим более подробно в следующем параграфе.

§ 12. К проблеме существования черных дыр

Полученные в предыдущем пункте результаты дают возможность по новому взглянуть на проблему существования черных дыр. Ниже мы будем рассматривать только случай незаряженных и невращающихся сферически-симметричных черных дыр, геометрия которых описывается метрикой Шварцшильда.

Согласно общепринятому определению, черная дыра — это область пространства, обладающая некоторой границей, называемой горизонтом событий, с настолько сильным гравитационным

полем, что никакой объект, включая свет, не может ее покинуть, то есть выйти за горизонт событий.

Первое качественное предсказание возможности существования черных дыр на основе теории Ньютона было дано Дж. Митчеллом в 1783 г., а в 1799 г. Лапласом была построена количественная теория, основанная исключительно на неограниченном возрастании скорости пробного тела при приближении к источнику гравитации.

Лаплас исходил из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2(r)}{2} - \frac{GmM}{r} = \frac{mv^2(\infty)}{2}.$$

Отсюда следовало неравенство

$$v(r) \geq \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (108)$$

При $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ из (108) следует, что скорость пробного тела превосходит скорость света. Таким образом, никакая частица, включая фотон, двигающаяся со скоростью не превышающей скорости света, не может покинуть область радиуса $r_g = \frac{2GM}{c^2}$. Отметим, что r_g в теории Лапласа совпадает с радиусом Шварцшильда a в релятивистской теории.

Выводы Лапласа безупречны в рамках теории Ньютона, однако в рамках релятивистской модели Шварцшильда они теряют всякий смысл, согласно результатам, полученным в предыдущем пункте. Тем не менее считается, что наиболее последовательное объяснение механизма образования сферически-симметричных неврацающихся черных дыр было дано именно в рамках общей теории относительности на основе модели Шварцшильда.

Обратимся к истории. В 1939 г. существование черных дыр было предсказано Р. Оппенгеймером и Г. Снайдером в работе [20]. В этой работе геометрия сферически-симметричного, неврацающегося и незаряженного коллапсирующего тела, вне этого тела, описывалась сферически-симметричной метрикой, имеющей разрыв второго рода на сфере Шварцшильда,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (109)$$

где r — радиус вектор. Тогда ясно, что любая траектория, пересекающая сферу Шварцшильда, должна иметь сингулярное поведение на сфере. Например, уравнение для светового луча, движущегося в экваториальной плоскости вдоль радиус-вектора r будет иметь вид

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} = 0,$$

или, что эквивалентно,

$$\frac{dr}{1 - \frac{a}{r}} = c dt. \quad (110)$$

Интегрируя уравнение (110), получаем следующее известное соотношение

$$c(t_2 - t_1) = r_2 - r_1 + a \ln \frac{r_2 - a}{r_1 - a}. \quad (111)$$

Из уравнения (111) следует, что если наблюдатель, находящийся в центре коллапсирующего объекта, фиксирует по своим часам распространение светового сигнала, излученного в момент t_1 с поверхности коллапсирующего тела в точке r_1 и достигшего точки r_2 в момент t_2 , то время распространения сигнала $t_2 - t_1$ стремится к бесконечности при $r_1 \rightarrow a$. Таким образом, сферически симметричное тело с радиусом меньше радиуса Шварцшильда представляет собой черную дыру относительно геометрии, задаваемой метрикой (109), с линией горизонта в виде сферы Шварцшильда.

Однако результаты предыдущего параграфа показывают, что произвольное пробное тело, начавшее движение с поверхности коллапсирующего тела из под сферы Шварцшильда, без всяких затруднений преодолевает линию горизонта со скоростью и ускорением, задаваемыми формулами (106), (107).

В дальнейшем без ущерба для общности будем предполагать, что тело, претендующее на звание черной дыры, имеет линейные размеры много меньшие радиуса Шварцшильда, в частности, точечные. Тогда это предположение без всяких оговорок позволяет использовать для описания геометрии гравитационного поля такого тела метрику Шварцшильда.

В чем же причина такого противоречия в приведенных результатах?

Дело в том, что Ю. Оппенгеймером и Г. Снайдером была необоснованно использована сингулярная метрика (109), которая, не являясь метрикой Шварцшильда, приводила к эффекту существования черной дыры. Однако, если использовать точную метрику Шварцшильда, не имеющую разрывов нигде, кроме точки в которой сосредоточена гравитационная масса, и задаваемую соотношением

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{a}{R}} - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (112)$$

где $R = (r^3 + a^3)^{1/3}$, то поведение луча света приходит в полное согласие с полученными в предыдущем параграфе результатами, так как там использовалась именно метрика (112). Действительно, точное уравнение для светового луча, двигающегося в экваториальной плоскости вдоль радиуса-вектора r , будет иметь вид

$$\left(1 - \frac{a}{R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{a}{R}} = 0, \quad (113)$$

где $R \in [a, \infty]$, причем если $R = a$, то $r = 0$.

Из уравнения (113) получаем следующее соотношение

$$c(t_2 - t_1) = R_2 - R_1 + a \ln \frac{R_2 - a}{R_1 - a}. \quad (114)$$

По форме уравнение (114) полностью совпадает с уравнением (111) с той лишь существенной разницей, что вместо радиус-вектора r всюду стоит новая переменная $R = (r^3 + a^3)^{1/3}$.

Перепишем уравнение (114) в форме

$$c(t_2 - t_1) = (r_2^3 + a^3)^{1/3} - (r_1^3 + a^3)^{1/3} + a \ln \frac{(r_2^3 + a^3)^{1/3} - a}{(r_1^3 + a^3)^{1/3} - a}. \quad (115)$$

Из соотношения (115) следует, что если наблюдатель, находящийся в начале координат, фиксирует по своим часам распространение светового сигнала, излученного в момент t_1 в точке r_1

и достигшего точки r_2 в момент t_2 , то время распространения сигнала $t_2 - t_1$ стремится к бесконечности только при $r_1 \rightarrow 0$. Таким образом, сферически-симметричное тело с произвольным, отличным от нуля радиусом, не может представлять из себя черную дыру в метрике Шварцшильда, так как для него не существует никакого горизонта событий.

Исключение составляет лишь вырожденный случай точечного объекта, который, согласно уравнению (115), не может излучать свет. Интересно, что если луч света будет излучаться в направлении точечного источника гравитации, то уравнение (114) заменяется на уравнение

$$c(t_2 - t_1) = R_1 - R_2 + a \ln \frac{R_1 - a}{R_2 - a}$$

и наблюдатель, находящийся в точке расположения источника гравитации, отметит, что время распространения сигнала стремится к бесконечности при $r_2 \rightarrow 0$, то есть при приближении к источнику гравитации, что находится в прекрасном согласии с результатами предыдущего параграфа.

Таким образом, эффект существования сферически-симметричной невращающейся черной дыры связан исключительно с использованием сингулярной сферически-симметричной метрики. Заметим, что сферически-симметричных однопараметрических метрик существует бесконечно много и все они имеют следующий вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{R}\right) c^2 dt^2 - \frac{dR^2}{1 - \frac{a}{R}} - R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где

$$R = (r^3 + b^3)^{1/3}, \quad a^3 - b^3 \geq 0,$$

причем только единственная метрика Шварцшильда среди этих метрик, которой соответствует значение параметра $b = a$, является всюду непрерывной кроме точки $r = 0$, остальные имеют области сингулярности в виде сфер радиусов $r = (a^3 - b^3)^{1/3}$. Можно, конечно, считать, что приведенный вид метрик определяет общую сферически-симметричную, двухпараметрическую

метрику Шварцшильда. Единственность именно этой метрики устанавливается теоремой Биркгофа. Тогда, например, однопараметрической метрике (109) соответствует значение параметра b , равное нулю, а однопараметрической метрике Шварцшильда соответствует $b = a$. Поэтому совершенно непонятно с физической точки зрения почему для сферически-симметричного тела, радиус которого меньше шварцшильдовского и, в частности, равен нулю, мы должны выбирать сингулярную метрику со сферой сингулярностей, содержащей это тело, а не какую либо другую, например, со сферой сингулярностей, лежащей внутри тела, или на его поверхности. И вообще, сингулярную в некоторой области метрику правомерно использовать лишь при условии бесконечной плотности материи в этой области, как это имеет место в случае гипотетического точечного источника гравитации.

К сожалению, в настоящее время общепринятым считается тот факт, что метрика вида (109) и есть истинная метрика Шварцшильда и она единственна в семействе сферически-симметричных метрик. Именно это обстоятельство придает теории черных дыр некоторую фундаментальность и глубину, что конечно же абсолютно неверно.

§ 13. Геометрическая модель образования спектра масс барионов

Построенная выше модель образования точечной гравитационной массы в результате вращения временной оси в трехмерном временном пространстве носит скорее качественный, чем количественный характер. Полученная на основе классической дифференциальной геометрии, эта модель не может быть непосредственно использована для объяснения дискретного характера спектра масс элементарных частиц. Для решения этой проблемы можно использовать квадратичную дифференциальную ковариантную форму вида (9), которую физически можно интерпретировать как самосопряженный оператор спектра масс, по крайней мере, какой-то группы элементарных частиц.

Если наша геометрическая модель образования точечной массы достаточно реалистична и, в целом, правильно отображает истинную структуру пространства-времени и механизм возникновения очень маленьких «сгустков» материи, то мы вправе ожидать, что значения масс элементарных частиц, которые можно рассматривать в первом приближении как точечные, окажутся собственными значениями дискретного спектра некоторого самосопряженного дифференциального оператора вида (9), однозначно индуцируемого метрикой шестимерного пространственно-временного многообразия. Причем существенную роль в формировании спектра масс, согласно геометрической модели, должна играть компонента оператора, действующая в трехмерном временном подпространстве.

Итак, задача состоит в том, чтобы на многообразии M^6 с заданной метрикой g найти наиболее общий вид самосопряженного дифференциального оператора второго порядка $\Delta_{3,3}$, обладающего следующими свойствами:

1. Оператор $\Delta_{3,3}$ инвариантен относительно группы преобразований $O(3) \times O(2)$.

2. Оператор $\Delta_{3,3}$ на бесконечности принимает вид

$$\Delta_{3,3} = \eta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где η_{ij} - псевдоевклидова метрика в пространстве $R_{3,3}$.

Другой задачей является исследование спектра этого оператора и установление прямой связи со спектром масс, например, некоторой группы кварков, из которых строятся барионы.

Перейдем теперь непосредственно к построению оператора $\Delta_{3,3}$. Согласно результатам § 7, метрика, входящая в квадрат линейного элемента, задается следующим образом:

$$ds^2 = F(r) dx_4^2 + M(\rho) (dx_5^2 + dx_6^2) + N(\rho) (x_5 dx_5 + x_6 dx_6)^2 - G(r) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - H(r) (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \quad (116)$$

где

$$\begin{aligned}
r &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, & \rho &= (x_5^2 + x_6^2)^{1/2}, \\
F(r) &= 1 - \frac{a}{(r^3 + a^3)^{1/3}}, & G(r) &= \frac{(r^3 + a^3)^{2/3}}{r^2}, \\
H(r) &= \frac{(r^3 + a^3)^{-4/3} r^2}{1 - \frac{a}{(r^3 + a^3)^{1/3}}} - \frac{(r^3 + a^3)^{2/3}}{r^4}, \\
M(\rho) &= \frac{\rho^2 + \gamma^2}{\rho^2}, & N(\rho) &= \frac{1}{\rho^2 + \gamma^2} - \frac{\rho^2 + \gamma^2}{\rho^4},
\end{aligned} \tag{117}$$

a — радиус Шварцшильда, γ — новая фундаментальная постоянная, геометрически интерпретируемая как радиус круга во временном подпространстве.

Наиболее общий вид эрмитового дифференциального оператора второго порядка, удовлетворяющего свойствам 1 и 2, задается формулой:

$$\begin{aligned}
\Delta_{3,3} &= F(r) \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \sum_{k=5,6} \frac{\partial}{i\partial x_k} M(\rho) \frac{\partial}{i\partial x_k} - \\
&- \left(\sum_{k=5,6} \frac{\partial}{i\partial x_k} x_k \right) N(\rho) \left(\sum_{k=5,6} x_k \frac{\partial}{i\partial x_k} \right) + \\
&+ \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial}{i\partial x_k} G(r) \frac{\partial}{i\partial x_k} + \\
&+ \left(\sum_{k=1,2,3} \frac{\partial}{i\partial x_k} x_k \right) H(r) \left(\sum_{k=1,2,3} x_k \frac{\partial}{i\partial x_k} \right).
\end{aligned} \tag{118}$$

Формально дифференциальный оператор (118) получается из квадрата линейного элемента (116) заменой дифференциалов dx_k , $k = 1, \dots, 6$ на эрмитовы операторы $\frac{\partial}{i\partial x_k}$ и соответствующей перегруппировкой операторных сомножителей для придания оператору $\Delta_{3,3}$ эрмитовой формы. Оператор (118) принимает более удобный для исследования вид, если перейти в новую систему координат $r, \theta, \varphi, \rho, \psi, t$, задаваемую относительно псевдо-

евклидовой системы x_1, \dots, x_6 соотношениями (41). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{3,3} = & F(r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (M(\rho) + \rho^2 N(\rho)) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \\ & + \frac{\partial(M(\rho) + \rho^2 N(\rho))}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{M(\rho)}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \\ & - (G(r) + r^2 H(r)) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{\partial(G(r) + r^2 H(r))}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{G(r)}{r^2} \Lambda(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (119)$$

где $\Lambda(\theta, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$.

Оператор (119) представляет собой сумму двух коммутирующих эрмитовых операторов

$$\Delta_{3,3} = \Delta_{3,3}^{(1)} + \Delta_{3,3}^{(2)}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{3,3}^{(1)} = & (M(\rho) + \rho^2 N(\rho)) \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \\ & + \frac{\partial(M(\rho) + \rho^2 N(\rho))}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{M(\rho)}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}, \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{3,3}^{(2)} = & F(r) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (G(r) + r^2 H(r)) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{\partial(G(r) + r^2 H(r))}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{G(r)}{r^2} \Lambda(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (121)$$

Область определения $D(\Delta_{3,3}^{(1)})$ оператора (120) состоит из дважды дифференцируемых по параметрам ρ, ψ квадратично интегрируемых функций относительно меры $d\mu_1 = \rho d\rho d\psi$ на множестве $\{\rho \in (0, \infty); \psi \in [0, 2\pi]\}$, удовлетворяющих следующему условию в окрестности нуля

$$\int |g|^2 \rho^{-2} d\rho < \infty. \quad (122)$$

Условие (122) необходимо для того, чтобы $\Delta_{3,3}^{(1)}g \in L^2(R_2, \mu_1)$ для любого $g \in D(\Delta_{3,3}^{(1)})$. В дальнейшем ограничимся рассмотрением оператора $\Delta_{3,3}^{(1)}$ на множестве $\{\rho \in (\varepsilon_2, \infty); \psi \in [0, 2\pi]\}$, где ε_2 достаточно малая величина, для которой выполняется однако неравенство $\gamma < \varepsilon_2$. Для наших целей важно будет несколько расширить область определения оператора $\Delta_{3,3}^{(1)}$ за счет выбора новой меры интегрирования μ'_1 , учитывающей условие (122):

Положим $d\mu'_1 = \rho^{-7} d\rho d\psi$ и потребуем квадратичной интегрируемости функций g из области определения оператора $\Delta_{3,3}^{(1)}$ по мере μ'_1 .

Область определения $D(\Delta_{3,3}^{(2)})$ оператора (121) состоит из дважды дифференцируемых по параметрам r, θ, φ, t и квадратично интегрируемых функций относительно меры $d\mu_2 = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi dt$ на множестве $\{t \in [0, T]; r \in (0, \infty); \theta \in [0, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi]\}$, удовлетворяющих следующему условию в окрестности нуля

$$\int |g|^2 r^{-6} dr < \infty. \quad (123)$$

Условие (123) необходимо для того, чтобы $\Delta_{3,3}^{(2)}g \in L^2(R_{3,1}, \mu_2)$ для любого $g \in D(\Delta_{3,3}^{(2)})$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением оператора $\Delta_{3,3}^{(2)}$ на множестве $\{t \in [0, T]; r \in (\varepsilon_1, \infty); \theta \in [0, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi]\}$, где ε_1 — достаточно малая величина, удовлетворяющая неравенству $\alpha < \varepsilon_1$. В связи с сужением области интегрирования можно как и выше расширить область определения оператора $\Delta_{3,3}^{(2)}$ с распространением условия (123) на всю область интегрирования за счет выбора новой меры интегрирования $d\mu'_2 = r^{-6} dr \sin \theta d\theta d\varphi dt$. Потребуем квадратичной интегрируемости функции $g \in D(\Delta_{3,3}^{(2)})$ по мере μ'_2 .

Мы не будем заниматься рассмотрением очень важного, но для наших целей чисто технического вопроса о том, является ли эрмитов оператор $\Delta_{3,3}$ с такой областью определения

самосопряженным или существенно самосопряженным, то есть имеющем единственное продолжение до самосопряженного оператора, а сразу перейдем к нахождению частных собственных значений оператора $\Delta_{3,3}$, предполагая его формальную самосопряженность.

Начнем с нахождения частных собственных значений оператора $\Delta_{3,3}^{(1)}$. Принимая во внимание соотношения (117), оператор (120) можно представить в виде

$$\Delta_{3,3}^{(1)} = \frac{\rho^2}{\rho^2 + \gamma^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left(1 + 2 \frac{\gamma^2}{\rho^2} \frac{\rho^2}{\rho^2 + \gamma^2} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\rho^2 + \gamma^2}{\rho^4} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}. \quad (124)$$

Нас будут интересовать только неотрицательные собственные значения оператора $\Delta_{3,3}^{(1)}$. Следует отметить, что существенный спектр формально самосопряженного оператора (124) представляет собой всю отрицательную полуось [21], следовательно, все неотрицательные собственные значения оператора принадлежат дискретному спектру. Задача нахождения собственных значений оператора (124) сводится к решению дифференциального уравнения

$$\Delta_{3,3}^{(1)} g = \lambda^2 g, \quad \text{где } g \in D(\Delta_{3,3}^{(1)}). \quad (125)$$

Будем искать функцию g в виде

$$g(\rho, \psi) = e^{im\psi} g(\rho), \quad m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \dots \quad (126)$$

Подставляя (126) в (125) и пренебрегая слагаемыми, содержащими первую производную $\frac{\partial}{\partial \rho}$ с коэффициентами $\frac{\gamma}{\rho}$ в степени 2 и выше, получаем

$$\left[\frac{\rho^2}{\rho^2 + \gamma^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{\rho^2 + \gamma^2}{\rho^4} m^2 \right] g(\rho) = \lambda^2 g(\rho). \quad (127)$$

Введем новую переменную $x = \frac{\gamma^2}{\rho^2}$, $x \in (0, \frac{\gamma^2}{\varepsilon_2^2})$, тогда уравнение (127) принимает вид

$$\left[\frac{4x^3}{\gamma^2(x+1)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{x(x+1)}{\gamma^2} m^2 \right] g(x) = \lambda^2 g(x), \quad (128)$$

где функция $g(x)$ квадратично интегрируемая в области $(0, \frac{\gamma^2}{\epsilon_2^2})$ по мере $d\mu = \frac{x^2}{2\gamma^6} dx$. Учитывая, что $x > 0$, можно представить уравнение (128) в форме

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2x} - \frac{m^2 + \gamma^2 \lambda^2}{4x^2} - \frac{\lambda^2 \gamma^2}{4x^3} \right) g(x) = 0. \quad (129)$$

Будем искать $g(x)$ в виде $g = x^{-1/2} v(x)$, тогда для v получаем из (129) следующее уравнение

$$v'' - \frac{m^2}{4} v - \frac{m^2}{2} \frac{v}{x} - \frac{m^2 + \gamma^2 \lambda^2 - 1}{4x^2} v - \frac{\gamma^2 \lambda^2}{4x^3} v = 0.$$

Покажем, что $\lambda = 0$ является собственным значением оператора (128). Рассмотрим следующее уравнение

$$v'' - \frac{m^2}{4} v - \frac{m^2}{2} \frac{v}{x} + \frac{1 - m^2}{4x^2} v = 0. \quad (130)$$

Будем искать его решение в виде

$$v = e^{-\frac{mx}{2}} \sum_{k=-1}^{\infty} C_k x^{r+1+k}, \quad (131)$$

Нижний предел в сумме, входящий в выражение (131), выбран из соображений квадратичной интегрируемости функции $x^{-1/2} v(x)$ по мере $d\mu = \frac{x^2}{2\gamma^6} dx$. Подставляя (131) в (130) и полагая $y = \sum_{k=-1}^{\infty} C_k x^{r+1+k}$, приходим к следующему соотношению

$$y'' - my' - \frac{m^2}{2x} y + \frac{1 - m^2}{4x^2} y = 0. \quad (132)$$

Из (132) получаем бесконечный ряд рекуррентных соотношений

$$\left((r+k)(r+k+1) + \frac{1-m^2}{4} \right) C_k - m \left(r+k + \frac{m}{2} \right) C_{k-1} = 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots,$$

с условием на параметр r в форме

$$r = -\frac{B}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{3}, \quad \text{где } B = \frac{1}{3}.$$

Итак,

$$C_k = \frac{m \left(m + k - \frac{B}{2} - \frac{1}{3} \right)}{k(m+k)} C_{k-1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (133)$$

Из (133) следует, что ряд $\sum_{k=-1}^{\infty} C_k x^{r+1+k}$ должен иметь конечное число членов для того, чтобы функция $x^{-1/2}v(x)$ была квадратично интегрируема. Если $m \neq 0$, то при некоторых значениях параметров B, m, k должно выполняться следующее равенство

$$m + k - \frac{1}{3} - \frac{B}{2} = 0. \quad (134)$$

Параметрам $\lambda\gamma, m, k - \frac{1}{3}, B$ можно придать следующую физическую интерпретацию. Пусть S — странность, B — барионный заряд, Q — электрический заряд кварка, I — изотопический спин, I_3 — проекция изотопического спина на ось t , тогда

$$S = -2\lambda\gamma, \quad Q = k - \frac{1}{3}, \quad I = |m|, \quad I_3 = -|m|, \dots, |m|.$$

Из (134) получаем следующее соотношение

$$S = -2I_3 - B + 2Q \quad (135)$$

при условии, что $S = 0$. Равенство (135) есть ничто иное как формула Нишиджимы для супермультиплетта барионов. Если $S = 0$ и $I = \frac{1}{2}$, то $I_3 = \pm \frac{1}{2}, Q = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, что соответствует кварковому дублету (u, d).

Теперь рассмотрим уравнение (129) при условии, что $m = 0$. Тогда мы получим следующее соотношение

$$v'' + \frac{1 - \gamma^2 \lambda^2}{4x^2} v - \frac{\gamma^2 \lambda^2}{4x^3} v = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$v = e^{-\frac{\lambda\gamma}{\sqrt{x}}} y.$$

В результате получаем систему двух уравнений для y

$$y'' + \frac{1 - \gamma^2 \lambda^2}{4x^2} y = 0,$$

$$y' - \frac{3}{4} \frac{y}{x} = 0.$$

Эта система имеет решение $y = cx^{\frac{3}{4}}$ только при условии, что $\lambda\gamma = \frac{1}{2}$. Это означает, что формула Нишиджимы верна в случае $\lambda\gamma = \frac{1}{2}$, $I_3 = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $Q = -\frac{1}{3}$. Такой набор квантовых характеристик соответствует кварку (s).

Таким образом, мы получили два собственных значения 0 и $\frac{1}{2\gamma}$ оператора $\Delta_{3,3}^{(1)}$, который соответствует кварковому триплету (u, d, s). Уже на этом этапе исследования можно отметить, что масса кварка s должна отличаться от масс кварков u и d .

Перейдем теперь к нахождению частных собственных значений оператора $\Delta_{3,3}^{(2)}$.

Учитывая соотношения (117), оператор (121) можно представить в виде

$$\Delta_{3,3}^{(2)} = f_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - f_1 r^4 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{f_2}{r^4} \Lambda(\theta, \varphi) - (6f_1 r^3 + f_1' r^4) \frac{\partial}{\partial r}, \quad (136)$$

где $f_1 = \frac{G}{r^4} + \frac{H}{r^2}$, $f_2 = r^2 G$, $f_4 = F$.

Так как задача нахождения собственных значений оператора сводится к решению дифференциального уравнения

$$\Delta_{3,3}^{(2)} g = \Delta^2 g, \quad (137)$$

где $g \in D(\Delta_{3,3}^{(2)})$, то будем искать функцию g из (137) в виде

$$g(t, r, \theta, \varphi) = G(t) R_{l,n}(r) Y_l(\theta, \varphi), \quad (138)$$

где Y_l — собственные сферические функции оператора $\Lambda(\theta, \varphi)$, соответствующие собственным значениям $-l(l+1)$, то есть

$$\Lambda(\theta, \varphi) Y_l(\theta, \varphi) = -l(l+1) Y_l(\theta, \varphi), \quad (139)$$

$G(t)$ — собственные функции формально самосопряженного оператора $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, который имеет существенный спектр только

в области $(0, \infty)$. Эти собственные функции соответствуют собственным значениям τ^2 уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t) = \tau^2 G(t). \quad (140)$$

Принимая во внимание соотношения (136), (138), (139), (140), представим уравнение (137) в следующей форме

$$\left[f_4 \tau^2 - f_1 r^4 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{f_2}{r^4} l(l+1) - (6f_1 r^3 + f_1' r^4) \frac{\partial}{\partial r} \right] R_{l,n} = \Delta^2 R_{l,n}. \quad (141)$$

Существенный спектр формально самосопряженного оператора в левой части уравнения (141) представляется областью (τ^2, ∞) [21], поэтому все неотрицательные собственные значения оператора $\Delta_{3,3}^{(2)}$, ограниченные сверху величиной τ^2 , дискретны. Из условия $f_1 r^4 \neq 0$ для $r \in (\epsilon_1, \infty)$ следует уравнение

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{6}{r} + \frac{f_1'}{f_1} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{f_2}{f_1 r^8} l(l+1) - \frac{f_4}{f_1 r^4} \tau^2 + \frac{\Delta^2}{f_1 r^4} \right] R_{l,n} = 0. \quad (142)$$

Будем искать $R_{l,n}$ из уравнения (142) в форме

$$R_{l,n} = \exp \left(-\frac{1}{2} \int \left(\frac{6}{r} + \frac{f_1'}{f_1} \right) dr \right) v_{l,n}. \quad (143)$$

Подставляя (143) в (142), получаем относительно $v_{l,n}$ следующее уравнение

$$v_{l,n}'' - \left(\frac{1}{2} P' + \frac{1}{4} P^2 + Q \right) v_{l,n} = 0, \quad (144)$$

где [22],

$$P = \frac{6}{r} + \frac{f_1'}{f_1}, \quad Q = \frac{f_4}{f_1 r^4} \tau^2 + \frac{f_2}{f_1 r^8} l(l+1) - \frac{\Delta^2}{f_1 r^4}.$$

Принимая во внимание, что $\epsilon_1 > a$ и

$$\frac{1}{f_1 r^4} \sim 1 - \frac{a}{r} + o\left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad \frac{f_4}{f_1 r^4} \sim 1 - \frac{2a}{r} + \frac{a^2}{r^2} + o\left(\frac{a^2}{r^2}\right),$$

$$\frac{f_2}{f_1 r^6} \sim 1 - \frac{a}{r} + o\left(\frac{a^2}{r^2}\right), \quad \frac{1}{2} P' + \frac{1}{4} P^2 \sim o\left(\frac{a^2}{r^2}\right)$$

и пренебрегая членами, содержащими $\frac{a}{r}$ в степени 3 и выше, из (144) получаем

$$v_{l,n}'' - (\tau^2 - \Delta^2)v_{l,n} + \frac{a}{r}(2\tau^2 - \Delta^2)v_{l,n} - \frac{a^2\tau^2 + l(l+1)}{r^2}v_{l,n} = 0. \quad (145)$$

Будем искать решение уравнения (145) в виде

$$v_{l,n} = \exp\left(-(\tau^2 - \Delta^2)^{1/2}r\right) y_{l,n}, \quad (146)$$

где $y_{l,n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{v+k}$. Подставляя (146) в (145), приходим к следующему выражению для $y_{l,n}$

$$y_{l,n}'' - 2(\tau^2 - \Delta^2)^{1/2}y_{l,n}' + 2(\tau^2 - \Delta^2)\frac{a}{r}y_{l,n} - \frac{a^2\tau^2 + l(l+1)}{r^2}y_{l,n} = 0. \quad (147)$$

Уравнение (147) эквивалентно бесконечному ряду рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} & \left[(v+k+1)(v+k) - l(l+1) - a^2\tau^2 \right] C_{k+1} - \\ & - \left[2(\tau^2 - \Delta^2)^{1/2}(v+k) - (2\tau^2 - \Delta^2)a \right] C_k = 0, \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, \dots$, где

$$v = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4l(l+1) + 4a^2\tau^2}. \quad (148)$$

Следовательно,

$$C_{k+1} = \frac{2(\tau^2 - \Delta^2)^{1/2}(v+k) - (2\tau^2 - \Delta^2)a}{(v+k+1)(v+k) - l(l+1) - a^2\tau^2} C_k. \quad (149)$$

Из (149) следует, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k r^{v+k}$ должен содержать конечное число членов для того, чтобы функция $v_{l,n}$ была квадратично интегрируема в области (ε_1, ∞) .

Таким образом, при некотором $k = n$ должно выполняться следующее равенство

$$2(\tau^2 - \Delta^2)^{1/2}(v+n) - 2\left(\tau^2 - \frac{\Delta^2}{2}\right)a = 0. \quad (150)$$

При этом для всех $k < n$ должно выполняться неравенство

$$(v + k + 1)(v + k) - l(l + 1) - a^2 \tau^2 \neq 0.$$

Решая уравнение (150) относительно Δ^2 получаем

$$\Delta_{1,2}^2 = 2 \left(\tau^2 - \left(\frac{v+n}{a} \right)^2 \right) \pm 2 \left(\tau^2 - \left(\frac{v+n}{a} \right)^2 \right) \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau^2 - \left(\frac{v+n}{a} \right)^2} \right)^{1/2}. \quad (151)$$

Из (151) следует условие

$$\left(\frac{v+n}{a} \right)^2 > \tau^2, \quad (152)$$

потому что

$$1 - \frac{\tau^2}{\tau^2 - \left(\frac{v+n}{a} \right)^2} \geq 0.$$

Таким образом, из (148), (151) и (152) мы получаем для τ^2 , Δ^2 следующие соотношения

$$\tau^2 = \frac{v(v+1) - l(l+1)}{a^2}, \quad \Delta^2 = \frac{2}{a^2} A \left[\frac{|v+n|}{A^{1/2}} - 1 \right],$$

где $A = (v+n)^2 + l(l+1) - v(v+1)$, l — спиновый момент частицы, физический смысл квантовых параметров v и n остается пока неопределенным.

Таким образом, найденные частные собственные значения операторов $\Delta_{3,3}^{(1)}$ и $\Delta_{3,3}^{(2)}$ приводят к частным собственным значениям оператора $\Delta_{3,3}$

$$\Delta_{3,3} g = (\lambda^2 + \Delta^2) g,$$

или в развернутом виде

$$\Delta_{3,3} g = \left[\left(\frac{2Q - B - 2I_3}{\gamma} \right)^2 + \frac{2}{a^2} A \left(\frac{|v+n|}{A^{1/2}} - 1 \right) \right] g. \quad (153)$$

Если $Q = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$; $B = \frac{1}{3}$; $I_3 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$; $l = \frac{1}{2}$, то тогда такой набор квантовых характеристик соответствует кварковому

триплету (u, d, s) . Из (153) для дублета кварков (u, d) и кварка s мы получаем соответственно следующие соотношения

$$m_{d,u}^2 = \frac{2}{a^2} A \left(\frac{|v+n|}{A^{1/2}} - 1 \right), \quad (154)$$

где $A = (v+n)^2 - v(v-1) + \frac{3}{4}$.

$$m_s = \left(\frac{1}{\gamma^2} + m_{d,u}^2 \right)^{1/2}. \quad (155)$$

Заметим, что соотношения (154) и (155) даны в системе единиц измерений $\hbar = 1$, $c = 1$, $e = 1$. Зная спектр масс кваркового триплета, мы можем найти спектр масс, например, барионного декуплета, если пренебречь спин-спиновым и спин-орбитальным взаимодействиями [23]. Этот спектр удовлетворительно описывает природу спектра супермультиплета.

Таким образом, попытка установления связи между геометрическими свойствами пространственно-временного континуума и квантовыми характеристиками элементарных частиц, в частности, со спектром масс кварков оказалась весьма многообещающей. Основным достижением на этом пути, согласно полученным результатам, явилось успешное построение неограниченного самосопряженного оператора, обладающего дискретным спектром, который адекватно описывает спектр масс кваркового триплета.

§ 14. Геометрия единой теории поля

Одним из самых глубочайших достижений теоретической физики XX столетия было осознание фундаментальной роли локальных калибровочных симметрий в построении единой теории физических полей. Наиболее обще этот факт можно выразить на математическом языке теории расслоений. Оставляя в стороне вопросы, связанные с квантованием полей материи и сосредоточив все внимание на классических геометрических аспектах теории, излагаемая в работе концепция может быть сведена к следующим положениям:

1) единая теория физических полей материи с геометрической точки зрения представляет собой теорию расслоений, использующую в качестве базы расслоения пространственно-временное многообразие M^6 ;

2) геометрическая структура базы расслоения с учетом физических требований выбирается таким образом, чтобы структурные группы расслоений, индуцирующие калибровочные поля, были бы группами симметрий базы расслоения;

3) калибровочные поля представляют собой связности структурных групп, функционально связанных с реальными физическими полями.

Используя геометрические свойства шестимерного многообразия M^6 , наделенного структурой пространства Римана—Картана, показывается, что связности подгрупп общей структурной группы комплексного векторного расслоения могут быть интерпретированы как электромагнитные и Янг—Миллсовские калибровочные поля, а сама структурная группа комплексного векторного расслоения оказывается группой внутренней симметрии касательного расслоения.

Устанавливается, что каждое из этих полей вносит свой вклад в тензорное поле кручения базы расслоения и находится явный вид этих вкладов.

§ 15. Многообразия и расслоения

Пусть M — множество, наделенное структурой Хаусдорфова пространства. Тройка (U, φ, V) , где U — открытое множество в M , V — Банахово пространство, φ — гомеоморфизм U на открытое подмножество в V , называется картой на M . Всякой точке $x \in M$ сопоставляется набор координат $x^1(x), \dots, x^n(x)$ точки $\varphi(x) \in V$. Локальными координатами точки $x \in V$ называются компоненты функции $\varphi(x) = (x^1(x), \dots, x^n(x))$. Число n называется размерностью карты, а U — координатной областью карты.

Будем говорить, что две карты одинаковой размерности $(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)$ и $(U_\beta, \varphi_\beta, V_\beta)$ на M C^r -согласованы, если:

1) $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ открыты в V_α и соответственно в V_β ;

2) отображения $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$; $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ принадлежат классу C^r , то есть непрерывно дифференцируемы до r -го порядка включительно.

Атласом класса C^r на M называется конечное или счетное множество Ψ попарно согласованных карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha, V_\alpha)$ на M , таких, что $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Два атласа эквивалентны, если их объединение — атлас, то есть если карты, принадлежащие этим атласам, попарно согласованы.

Многообразием класса C^r называется множество M с атласом класса C^r , определяемым с точностью до эквивалентности. Многообразие класса C^r определяется с точностью до изоморфизмов того же класса гладкости.

Размерностью многообразия M называется размерность его согласованных карт.

Расслоения

Расслоением будем называть тройку $\lambda = (E, f, M)$, где E и M — топологические пространства, а f — непрерывная проекция $E \rightarrow M$. Пространство E называется расслоенным пространством, а M — его базой [11, 24].

Назовем подпространство $V_x = f^{-1}(x)$ расслоенного пространства E слоем расслоения над точкой $x \in M$. Морфизм расслоения $\lambda = (E, f, M)$ в расслоение $\tilde{\lambda} = (\tilde{E}, \tilde{f}, \tilde{M})$ задается парой непрерывных отображений $\pi_1: E \rightarrow \tilde{E}$, $\pi_2: M \rightarrow \tilde{M}$, таких, что $\pi_1: V_x \rightarrow V_{\pi_2(x)}$, то есть π_1 является послойным отображением. Отображение (π_1, π_2) называется изоморфизмом расслоений, если π_1 и π_2 гомеоморфизмы и эквивалентностью, если $\pi_2 = Id M$, где Id — тождественное отображение.

Сечением S расслоения $\lambda = (E, f, M)$ над открытым множеством $U \subset M$ называется непрерывное вложение U в E , такое, что $f \cdot S = Id U$ — тождественное преобразование U , то есть всякая точка $x \in U$ отображается в некоторую точку $S(x) \in V_x$. Сечения — это функции на M , принимающие в точке x значе-

ния в слое V_x . Сечение, заданное над всей базой M , называется глобальным.

Расслоение называется тривиальным, если существует топологическое пространство V такое, что E гомеоморфно прямому произведению $M \times V$.

Расслоение $\lambda = (E, f, M)$ называется локально тривиальным, если существуют такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы M и такое топологическое пространство V , что для всякого U_α найдется гомеоморфизм $\Psi_\alpha: f^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times V$, и $\rho_{\alpha\nu} = \Psi_\alpha \Psi_\nu^{-1}$ представляет собой гомеоморфизм V на себя для всех $x \in U_\alpha \cap U_\nu$. Таким образом, локально тривиальное расслоение λ представляет собой склейку из тривиальных расслоений λ_α посредством функций перехода $\rho_{\alpha\nu}$.

Всякий слой V_x локально тривиального расслоения гомеоморфен пространству V , называемому типичным слоем расслоения λ .

Пара (U_α, Ψ_α) области U_α и морфизма Ψ_α в локально тривиальном расслоении называется картой расслоения, а совокупность карт $\Psi = (U_\alpha, \Psi_\alpha)$ — атласом расслоения λ с функциями перехода $\rho_{\alpha\nu}$, которые удовлетворяют условиям $\rho_{\alpha\alpha} = Id, V$, $\rho_{\alpha\nu} \rho_{\nu\mu} = \rho_{\alpha\mu}$. Локально тривиальное расслоение однозначно определяется набором (V, M, Ψ) , при этом (V, M, Ψ) и $(V, M, \tilde{\Psi})$ определяют эквивалентные расслоения, если атласы Ψ и $\tilde{\Psi}$ эквивалентны, то есть их объединение тоже является атласом.

Локально тривиальное расслоение всегда обладает сечением. Всякое сечение S локально тривиального расслоения λ может быть представлено семейством V -значных функций $\{S_\alpha(x) = \Psi_\alpha(x)S(x), x \in U_\alpha\}$ в атласе расслоения $\Psi = (U_\alpha, \Psi_\alpha)$ и $S_\alpha(x) = \rho_{\alpha\nu}(x)S_\nu(x), x \in U_\alpha \cap U_\nu$.

Пусть λ — локально тривиальное расслоение и G — топологическая группа, действующая эффективно слева в пространстве типичного слоя V расслоения λ . Группу G будем называть структурной группой расслоения, если существует атлас Ψ расслоения λ , функции перехода которого $\rho_{\alpha\nu}(x)$, $x \in U_\alpha \cap U_\nu$ являются элементами группы $G(U_\alpha \cap U_\nu)$ непрерывных отображений $U_\alpha \cap U_\nu$ в G .

Говорят, что структурная группа G расслоения λ редуцируема к замкнутой подгруппе H , если существует атлас Ψ расслоения λ , функции перехода которого принимают значения в подгруппе H .

Структурная группа Ли всегда редуцирована к своей максимально компактной подгруппе.

Ассоциированные расслоения

Расслоения λ и $\tilde{\lambda}$ с одними и теми же структурной группой G и базой M называются ассоциированными, если существуют атлас Ψ расслоения λ и атлас $\tilde{\Psi}$ расслоения $\tilde{\lambda}$ с одним и тем же набором функций перехода $\rho_{\alpha\nu} \in G(U_\alpha \cap U_\nu)$. Ассоциированные расслоения с одинаковыми типичными слоями эквивалентны.

Структурная группа Ли G расслоения (V, G, M, Ψ) редуцируема к замкнутой подгруппе H тогда и только тогда, когда ассоциированное с λ расслоение на фактор-пространство G/H допускает глобальное сечение.

Среди нетривиальных расслоений особый интерес представляют главные и векторные расслоения.

Главные расслоения

Расслоение называется главным, если типичный слой совпадает со структурной группой G , действующей на слое левыми сдвигами $R_g: G \rightarrow G$, $R_g(x) = gx$. Главное расслоение реализуется как свободное правое гладкое действие группы G на пространстве расслоения E , причем орбиты группы G находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с точками базы M , то есть база главного расслоения представляет собой фактор-пространство E/G орбит группы G в E , а проекция f — каноническое отображение $E \rightarrow E/G$.

Глобальное сечение главного расслоения существует тогда и только тогда, когда расслоение тривиально, то есть когда группа G единична.

Структура расслоения определяется лишь функциями перехода $\rho_{\alpha\nu}$, поэтому любое расслоение определяется как ассоциированное с некоторым главным расслоением. Таким образом,

задача классификации расслоений сводится к классификации главных расслоений.

Векторные расслоения

Расслоение, типичным слоем которого является топологическое векторное пространство V , а структурной группой является подгруппа группы $GL(V)$, общих линейных преобразований пространства V , называется векторным расслоением. Векторное расслоение всегда имеет глобальное сечение.

Пусть $\Psi = (U_\alpha, \Psi_\alpha)$ — атлас векторного расслоения, и $\{e\}$ — базис его типичного слоя. Определим базис $\{e(x)\} = \{\Psi_\alpha(x)e\}$ в слое V_x , $x \in M$, отвечающий карте (U_α, Ψ_α) атласа Ψ . Тогда всякое преобразование g типичного слоя V и индуцируемое им преобразование $g_x = \Psi_\alpha^{-1}g\Psi_\alpha$ слоя V_x над точкой $x \in M$ будут иметь один и тот же матричный вид относительно базисов $\{e\}$ и $\{\Psi_\alpha^{-1}e\}$.

Пусть λ_1 и λ_2 — векторные расслоения над базой M со слоями V_1 и V_2 , тогда над базой M можно построить:

1. Дуальное расслоение λ^* , ассоциированное с λ , со слоем V^* , представляющим собой пространство, дуальное к V ;
2. Сумму Уитни $\lambda_1 \oplus \lambda_2$ с типичным слоем $V_1 \oplus V_2$ и структурной группой $GL(V_1) \otimes GL(V_2) = GL(V_1 \oplus V_2)$;
3. Тензорное произведение $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ с типичным слоем $V_1 \otimes V_2$ и структурной группой $GL(V_1) \otimes GL(V_2) \subset GL(V_1 \otimes V_2)$;
4. Нормальное расслоение λ_k над базой M такое, что сумма Уитни $\lambda \oplus \lambda_k$ будет тривиальным расслоением со слоем R^k , $k > \dim V$, над M .

Векторное расслоение называется дифференцируемым, если его база — дифференцируемое многообразие.

Важным частным случаем дифференцируемых расслоений являются касательные и кокасательные расслоения.

Касательные расслоения

Касательным расслоением $T(M)$ над дифференцируемым многообразием M называется расслоение, слоями которого являются касательные пространства T_x , $x \in M$, к многообразию M

в точке x . Структурной группой касательного расслоения $T(M)$ является группа $GL(\dim M, R)$.

Атласы касательного расслоения эквивалентны голономному атласу $\Psi = (U_\alpha, \Psi_\alpha = T(\chi_\alpha))$, где (U_α, χ_α) — некоторый атлас многообразия M .

Кокасательные расслоения

Кокасательным расслоением $T^*(M)$ над многообразием M называется дуальное расслоение к касательному расслоению.

§ 16. Связности на расслоениях

Структура связности на расслоении $\lambda = (E, f, M)$ вводится для описания параллельного переноса слоев вдоль некоторого пути в базе M . Связность можно представить как сопоставление всякой кривой $\gamma(s)$ в базе M семейства отображений $\pi_{\gamma(s_1, s_2)}$, $s_1, s_2 \in [a, b]$ слоев $V_{\gamma(s_1)} \rightarrow V_{\gamma(s_2)}$ над точками этой кривой. Семейство отображений обладает следующими свойствами:

$\pi_{\gamma(s_1, s_2)}$ непрерывно зависит от кривой γ и не зависит от способа параметризации

$$\pi_{\gamma(s_1, s_2)} \pi_{\gamma(s_2, s_3)} = \pi_{\gamma(s_1, s_3)}; \quad \pi_{\gamma(s_1, s_2)} = \pi_{\gamma(s_2, s_1)}^{-1}; \quad \pi_{\gamma(s, s)} = IdV_{\gamma(s)}.$$

Отображения $\pi_{\gamma(a, s)}$, $s \in [a, b]$, называются параллельным переносом слоя V_a вдоль кривой γ .

Связность называется *плоской*, если для любых точек $x_1, x_2 \in M$ отображение π_γ не зависит от кривой γ , соединяющей эти точки.

Если $\xi(a)$ — некоторая точка слоя $V_{\gamma(a)}$, то множество образов $\xi(s)$ точки $\xi(a)$ при параллельном переносе вдоль кривой γ образует некоторый путь $\gamma_\pi = \{\pi_{\gamma(a, s)}(\xi)\}$ в пространстве расслоения E и $f(\gamma_\pi) = \gamma$. Кривая γ_π называется *накрывающей кривую γ в базе M* .

На дифференцируемом расслоении связность общего вида может быть определена заданием в каждой точке $q \in E$ n -мерного пространства направлений (трансверсальных к проходящему через q слою), в которых эта точка переносится в E ,

когда $f(q)$ переносится в тех или иных направлениях в M . Эти направления называются *горизонтальными направлениями связности*. Гладкая кривая $\gamma(s)$ в E называется горизонтальной, если ее касательный вектор, при всех $s \in [a, b]$, принадлежит пространству горизонтальных направлений.

Пусть на расслоении $\lambda = (V, G, M)$ задана связность. Рассмотрим множество всех замкнутых кривых $\{\gamma(x)\}$ в базе M , проходящих через точку x . Тогда множество отображений π_{γ_x} слоя V_x , порождаемых параллельными переносами вдоль кривых $\gamma(x)$, образуют некоторую группу изоморфизмов слоя V_x , которая называется *группой голономии данной связности в точке $x \in M$* .

Подгруппа π_x° группы π_x , соответствующая кривым, стягиваемым в точку x , называется *ограниченной группой голономии*.

Если база M связна, то группы голономии π_x и π_x° в различных точках базы изоморфны между собой и можно говорить об абстрактных группах голономии π и π° данной связности на расслоении, которым изоморфны все группы голономий π_x и π_x° соответственно. Если база M односвязна, то группы π и π° совпадают.

Имеют место следующие результаты:

Ограниченная группа голономий π° есть связная подгруппа Ли структурной группы G и инвариантная подгруппа в π .

Группа голономии π плоской связности расслоения тривиальна.

Если на расслоении задана связность с группой голономии π , то структурная группа G расслоения редуцирована к подгруппе π .

G -связности в главных расслоениях

Пусть $\lambda = (E, f, M, G)$ — главное расслоение со структурной группой Ли G . Выделим в касательном пространстве T_p к пространству расслоения E в точке p вертикальное подпространство T_p^\perp , касательное к слою, проходящему через p . Связности на расслоении задаются выделением в каждом T_p такого подпространства T_p'' , что:

1. $T_p = T_p^\perp \oplus T_p''$;
2. $T_{pq}'' = T_p(R_q)T_p''$;
3. T_p'' дифференцируемо зависит от p .

T_p'' называется горизонтальным подпространством T_p и является пространством горизонтальных направлений, по которым осуществляется перенос точки p .

Горизонтальное подпространство T_p'' может быть задано уравнением $\omega = 0$, где ω — 1-форма на E со значениями в алгебре Ли G такая, что фундаментальное векторное поле, определяемое как

$$\tau_I(x) = \frac{d}{ds} \exp(sI)(x)|_{s=0},$$

где I — генератор группы G удовлетворяет уравнению $\tau_{\omega(t)} = t^\perp$, где $t = t^\perp + t''$, $t^\perp \in T_p^\perp$, $t'' \in T_p''$.

Форма ω называется I -формой связности и удовлетворяет следующим условиям

$$\tau_{\omega(I)} = I, \quad T(R_g)\omega = Ad(g^{-1})\omega = g^{-1}\omega g.$$

На областях тривиализации расслоения форму связности ω можно выразить через форму связности на базе M . Пусть $\Psi = (U_\alpha, \Psi_\alpha)$ — атлас расслоения и $T_p(\Psi_\alpha)$ — касательное к Ψ_α отображение $T_p(E) \rightarrow T_{\Psi_\alpha(p)}(M \times G)$.

Определим форму $\omega_\alpha = \omega T(\Psi_\alpha^{-1})$ на $M \times G$. Представим $\omega_\alpha = \theta - A_\alpha$, где $\theta = \omega_\alpha(T(G))$ — каноническая форма $\theta(\tau_I) = I$ на группе G , а $A_\alpha = -\omega T(\Psi_\alpha^{-1}(I_G))$ — локальная I -форма связности на базе M . При переходе с карты на карту $A_\alpha = Ad(\rho_{\alpha\beta}^{-1})A_\beta - T(\rho_{\alpha\beta})\theta$. Поскольку θ — каноническая форма, то именно форма A_α определяет специфику данной связности, а соответствующие ей горизонтальные подпространства состоят из векторов $t \in T(M \times G)$ с проекцией t_x на $T(M)$ и $\tau_{A_\alpha(t_x)}$ на $T(G)$.

Если связность задана на главном расслоении (E, f, M, G) , то она может быть определена на ассоциированном расслоении (E', f', M, V, G) с типичным слоем V . Вертикальное подпро-

пространство T_q^\perp в $T_q(E')$, $q \in E'$, есть, по определению, касательное пространство к слою из E' в точке q , а горизонтальное подпространство T_q'' задается как образ горизонтального подпространства $T_q'' \subset T_p(E)$ при отображении $E \times V \rightarrow E'$. Связность на ассоциированном расслоении описывается той же локальной 1-формой связности A_α , что и на главном расслоении, которая в базисе $\{dx^\mu\}$ расслоения $T^*(M)$ и базисе $\{I_m\}$ алгебры Ли группы G имеет вид $A_\alpha = (A_\mu)^m I_m dx^\mu$. Если расслоение векторное, то алгебра Ли структурной группы G является подалгеброй алгебры $gl(V)$ и закон преобразования A_α при переходе с карты на карту принимает вид $A_\alpha = \rho_{\alpha\beta} A_\beta \rho_{\alpha\beta}^{-1} - \rho_{\alpha\beta} d\rho_{\alpha\beta}^{-1}$.

Если связность на расслоении задается формой связности, то можно ввести генератор параллельного переноса, представляющего собой ковариантную производную D вдоль поля τ на базе M . Ковариантная производная D определяется как производная Ли ∂_{τ_π} вдоль поля τ_π — горизонтального поднятия поля τ . Можно определить внешний ковариантный дифференциал D , действующий в пространстве внешних дифференциальных форм Ω_λ , со значениями в ассоциированном векторном расслоении λ_V . Внешние дифференциальные формы представляются как V -значные формы на пространстве расслоения E и удовлетворяют условию $\varphi(qg) = g^{-1}\varphi(q)$. Тогда, по определению,

$$D\varphi = (d\varphi)h,$$

где h — проектор на горизонтальное подпространство и

$$D(\varphi + \varphi') = D(\varphi) + D(\varphi'),$$

$$D(\varphi \wedge \varphi') = D(\varphi) \wedge \varphi' + (-1)^p \varphi \wedge D(\varphi'),$$

$\varphi \in \Omega_\lambda^p$, где Ω_λ^p — векторное пространство p -раз ковариантных кососимметричных тензоров.

В локальной записи $D_\alpha = d - A_\alpha$, где d — внешний дифференциал на базе M ; A -локальная 1-форма связности на M ,

$$D_\alpha \rho_{\alpha\nu} = \rho_{\alpha\nu} D_\nu.$$

Форма кривизны F связности определяется как 2-форма $F = DD$, где D — внешний ковариантный дифференциал или

в локальной записи

$$F_\alpha = (d - A_\alpha)(d - A_\alpha) = -dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha,$$

$$F_\alpha = \rho_{\alpha\nu} F_\nu.$$

Последние уравнения могут быть записаны через коэффициенты формы связности в виде

$$F_{\alpha\nu}^k = \partial_\nu A_\alpha^k - \partial_\alpha A_\nu^k + C_{mn}^k A_\alpha^m A_\nu^n,$$

$$F_\alpha = F_{\mu\nu}^k I_k dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

где I_k — базис, а C_{mn}^k — структурные константы алгебры Ли группы G .

§ 17. Калибровочные теории в формализме расслоений

Применение формализма расслоений в теории калибровочных полей основывается на интерпретации калибровочных полей как объектов связностей структурных групп расслоений над пространственно-временным многообразием, выбираемым в качестве базы расслоения [25]. Непосредственно физические поля появляются в теории как глобальные сечения расслоений.

В качестве базы расслоения выбирается пространственно-временное многообразие M^6 , наделяемое структурой пространства с абсолютным параллелизмом размерности $n = 6$ и типичным слоем $R_{3,3}$ касательного расслоения.

Такая структура многообразия в формализме теории расслоений позволяет построить тензорное произведение векторных расслоений, непосредственно связанных с геометрическими свойствами многообразия M^6 ,

$$\lambda = \bigotimes_{j=1}^3 \lambda_j, \quad (156)$$

где λ_1 — касательное расслоение со структурной группой $GL(6, R)$ и типичным слоем $R_{3,3}$;

λ_2 — главное расслоение со структурной группой $SO(3, 3)$, индуцируемое неоднозначностью определения глобального сечения h главного расслоения на фактор-пространстве $GL(6, R)/SO(3, 3)$, изоморфного глобальному сечению g касательного расслоения $T(M^6)$, причем в голономном атласе g и h связаны соотношением

$$g_{ij}(x) = h_i^k(x)h_j^s(x)\eta_{ks};$$

λ_3 — комплексное векторное расслоение со структурной группой $GL(4, C)$ и типичным слоем C^4 , возникающее в результате возможности представления произвольного вектора $\tau \in R_{3,3}$ из типичного слоя касательного расслоения в виде

$$\tau^j = \langle \xi, \sigma^j \xi \rangle,$$

где $\xi \in C^4$, σ^j — эрмитовы матрицы, задаваемые формулой (12).

Особый интерес представляют подрасслоения λ_4 , λ_5 и λ_6 расслоения λ_3 .

Расслоение λ_4 определяется как комплексное векторное расслоение со структурной группой дилатаций, являющейся абелевой подгруппой группы $GL(4, C)$, и типичным слоем C^4 .

λ_5 определяется как комплексное векторное расслоение со структурной группой $SU(2) \otimes SU(2)$, являющейся неабелевой подгруппой группы $GL(4, C)$ и типичным слоем C^4 .

λ_6 определяется как комплексное векторное расслоение со структурной группой $SU(3)$, являющейся неабелевой подгруппой группы $GL(4, C)$ и типичным слоем C^4 .

Каждое физическое поле в формализме расслоений представляется как глобальное сечение одного из расслоений или подрасслоений

$$\lambda_j = (V_j, M, G_j, \Psi_{\lambda_j}),$$

входящего в тензорное произведение (156), где V_j — типичный слой расслоения, G_j — структурная группа, Ψ_{λ_j} — атлас расслоения λ_j . Атлас расслоения Ψ_{λ_j} и атлас многообразия Ψ_m фиксируют соответственно систему отсчета и систему координат. По отношению к ним физическое поле представляется, в силу своего определения, как V_j — значная функция на областях

тривиализации расслоения λ_j , а преобразования атласов Ψ_{λ_j} , Ψ_m индуцируют соответственно калибровочные и координатные преобразования полевых функций, при этом преобразование атласа Ψ_{λ_j} представляет собой преобразование эквивалентности расслоения λ_j .

Калибровочные поля, как отмечалось выше, возникают как объекты связности структурных групп на расслоении λ .

В свою очередь, объекты связности появляются в результате определения ковариантных производных, индуцируемых структурными группами расслоения.

На многообразии M^6 всегда можно ввести функционал $S(\gamma)$, представляющий собой длину геодезической γ между двумя произвольно выбранными точками многообразия.

В качестве функционала действия теории выберем функционал $S(\gamma)$, тогда

$$S(\gamma) = \int_a^b L(x, \dot{x}) ds,$$

где $\gamma = \{x(s), a < s < b\}$, s — натуральный параметр,

$$L = (g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j)^{1/2}. \quad (157)$$

Лагранжиан L имеет физический смысл длины касательного вектора скорости, определенного в каждой точке траектории $x(s)$. Требуется, чтобы лагранжиан (157) был инвариантен относительно локальных преобразований симметрий, параметры которых зависят от точек многообразия M^6 . Эти преобразования образуют группу, которая называется локальной или калибровочной группой.

Следует различать два вида калибровочных преобразований: преобразования системы отсчета, то есть преобразования базиса в каждой точке многообразия (преобразования второго рода), и преобразования полей (тензорных, спинорных) при фиксированной системе отсчета (преобразования первого рода).

Инвариантность лагранжиана относительно калибровочных преобразований первого рода влечет за собой инвариантность относительно преобразований второго рода. Обратное заключение

неверно. Ниже под калибровочными преобразованиями будем понимать преобразования второго рода.

Группа $GL(6, R)(M^6)$ является наиболее общей локальной линейной группой симметрий лагранжиана (157). Группа $GL(6, R)$ является структурной группой касательного расслоения над пространственно-временным многообразием M^6 , и калибровочные преобразования группы $GL(6, R)$ имеют смысл преобразования атласа Ψ_{λ_1} касательного расслоения. Не следует путать калибровочные преобразования с координатными преобразованиями, меняющими координатный атлас Ψ_m многообразия M^6 . Координатные и калибровочные преобразования в общем случае не коррелируют между собой. Однако, если ограничиться только голономными системами отсчета, то координатный атлас Ψ_m и атлас расслоения Ψ_{λ} преобразуются одновременно таким образом, что координатные преобразования сопровождаются калибровочными преобразованиями касательного расслоения.

Чтобы найти другие калибровочные группы, представим лагранжиан (157) в виде

$$L = (G_{\nu\mu} \xi^{\nu} \xi^{\mu})^{1/2}, \quad (158)$$

где $G_{\nu\mu} = g_{ij} \sigma_{\nu\kappa}^i \sigma_{\gamma\mu}^j \xi^{\gamma} \xi^{\kappa}$, согласно формуле (18).

Группа $GL(4, C)(M^6)$ является наиболее общей локальной линейной группой симметрий лагранжиана (158). Тогда $GL(4, C)$ представляет собой структурную группу комплексного векторного расслоения над пространственно-временным многообразием M^6 с типичным слоем C^4 .

Наконец, рассмотрим еще одно представление лагранжиана (157), имеющего смешанный вид

$$L = [g_{ij} (\langle \widehat{D}_k z, \sigma^i z \rangle + \langle z, \sigma^i \widehat{D}_k z \rangle) (\langle \widehat{D}_l z, \sigma^j z \rangle + \langle z, \sigma^j \widehat{D}_l z \rangle) \dot{x}^k \dot{x}^l]^{1/2}, \quad (159)$$

где $x^j = \langle z, \sigma^j z \rangle = \sigma_{\gamma\mu}^j z^{\gamma} z^{\mu}$, $z \in Z^4$, \widehat{D}_l — смешанная ковариантная производная, индуцируемая некоторой подгруппой

структурной группы расслоения $GL(4, C)$, и имеющая вид

$$\widehat{D}_l = \frac{\partial}{\partial x^l} + A_l,$$

где A_l — связность подгруппы структурной группы, представляющая собой набор матричнозначных функций на пространстве M^6 со значениями в алгебре Ли группы $GL(4, C)$.

Представление (159) эквивалентно представлению (157) только при выполнении условия

$$\operatorname{Re} A_k \dot{x}^k \equiv 0.$$

Группа $GL(6, R) \otimes GL(4, C)$ является наиболее общей локальной линейной группой симметрий лагранжиана (159).

§ 18. Геометрия единой теории гравитационных и электромагнитных полей

Такая теория может быть построена на базе шестимерного многообразия со структурой пространства Римана—Картана.

На многообразии M^6 вводится векторное расслоение, представляющее собой тензорное произведение расслоений со структурной группой $GL(6, R)$, ассоциированного с касательным расслоением и комплексного векторного расслоения со структурной группой конформных преобразований и типичным слоем C^4 .

Гравитационное калибровочное поле совпадает с объектом связности структурной группы $GL(6, R)$ касательного расслоения при условии, что связность согласована с метрикой. Электромагнитное калибровочное поле определяется как объект связности структурной подгруппы конформных отображений комплексного векторного расслоения.

В качестве структурной подгруппы комплексного векторного расслоения выберем подгруппу дилатаций G в группе локальных конформных координатных преобразований в Z^4 , задаваемую следующим образом. Если $g(\varphi) \in G$, то $g(\varphi)z = e^{\frac{\varphi}{2}}z$, где φ — действительная функция на M^6 , удовлетворяющая условию

$$\varphi_{,k} \dot{x}^k = 0. \quad (160)$$

Группа G индуцирует подгруппу \tilde{G} в группе локальных конформных координатных преобразований в M^6

$$G \xrightarrow{f} \tilde{G}, \quad f(g) = g^2,$$

которая совпадает с подгруппой дилатаций из структурной группы $GL(6, R)$ касательного расслоения.

Действительно, для любого $g(\varphi) \in G$ имеет место

$$\langle g(\varphi)z, \sigma^j g(\varphi)z \rangle = e^\varphi x^j = g^2(\varphi)x^j = \tilde{g}(\varphi)x^j.$$

При этом скорости также подвергаются конформным преобразованиям

$$\frac{d}{ds}(\tilde{g}(\varphi)x^j) = \varphi_{,k} \dot{x}^k \tilde{g}(\varphi)x^j + \tilde{g}(\varphi)\dot{x}^j = \tilde{g}(\varphi)\dot{x}^j,$$

в силу условия (160).

Очень важно подчеркнуть, что изначально мы не вводим никаких геометрических структур на многообразии M^6 , кроме требования метризуемости и дифференцируемости многообразия. Это позволяет ввести расслоение псевдоевклидовых билинейных форм в касательном расслоении. Среди возможных билинейных форм в качестве лагранжиана теории выбирается форма, сохраняющая свой ковариантный вид относительно преобразований из группы $GL(6, R) \otimes G$. Затем, решая вариационную задачу относительно выбранного лагранжиана, находятся уравнения геодезических, по которым восстанавливается связность пространства. В свою очередь, по найденной связности пространства находится уравнение Гильберта—Эйнштейна единой теории гравитационных и электромагнитных взаимодействий.

Построение лагранжиана единой теории

В качестве лагранжиана выберем смешанную форму (159). В каждой точке x многообразия M^6 эту квадратичную форму можно привести к диагональному виду

$$L = [\eta_{ij} (\langle \hat{D}_k z, \sigma^i z \rangle + \langle z, \sigma^i \hat{D}_k z \rangle) (\langle \hat{D}_l z, \sigma^j z \rangle + \langle z, \sigma^j \hat{D}_l z \rangle) \dot{x}^k \dot{x}^l]^{1/2}, \quad (161)$$

такому, что $\dot{x}^l = c^l$, $l = 1, \dots, 6$, удовлетворяющие условию

$$\eta_{ij} c^i c^j = 1,$$

$\eta_{ij} = \eta_{ij}(x)$ — метрика, совпадающая с псевдоевклидовой в точке x .

Введем новый логарифмический параметр $\tau = \lg s$, $\tau \in (-\infty, \infty)$. Тогда (161) преобразуется к виду

$$L(\tau) = [\eta_{ij}(x) (\langle \widehat{D}_k z, \sigma^i z \rangle + \langle z, \sigma^i \widehat{D}_k z \rangle) (\langle \widehat{D}_l z, \sigma^j z \rangle + \langle z, \sigma^j \widehat{D}_l z \rangle) \dot{x}^k(\tau) \dot{x}^l(\tau)]^{1/2}, \quad (162)$$

где $L(\tau) = e^\tau$, $\dot{x}^k(\tau) = \dot{x}^k(s) e^\tau = c^k e^\tau$, причем $x^k(\tau) = \dot{x}^k(\tau)$ в окрестности рассматриваемой точки x .

При конформном преобразовании из группы G лагранжиан (162) сохраняет свой ковариантный вид. Действительно, если

$$z \rightarrow e^{\frac{\varphi}{2}} z = z', \quad \text{то} \quad x^j \rightarrow e^\varphi x^j = x^{j'}, \quad \dot{x}^j(\varepsilon) \rightarrow e^\varphi \dot{x}^j(\varepsilon) = \dot{x}^{j'}(\tau)$$

$$L = e^\tau \rightarrow e^{(\tau+\varphi)} = e^{\tau'} = L', \quad \text{где} \quad \tau' = \tau + \varphi.$$

В этом заключается одна из причин перехода к логарифмическому параметру τ .

Уравнения геодезических единой теории

Для нахождения геодезических воспользуемся уравнением Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x^r} - \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^r} = 0, \quad (163)$$

в котором в качестве лагранжиана для удобства выбирается квадрат лагранжиана вида (162). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^r} &= \eta_{ij,r} \dot{x}^i \dot{x}^j + 2\eta_{ij} (\langle D_r D_k z, \sigma^i z \rangle + \langle D_k z, \sigma^i D_r z \rangle + \\ &\quad + \langle D_r z, \sigma^i D_k z \rangle + \langle z, \sigma^i D_r D_k z \rangle) \dot{x}^k \dot{x}^j; \\ \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^r} &= 2\eta_{ir,k} \dot{x}^k \dot{x}^i + 2\eta_{ir} \ddot{x}^i + 2\eta_{ij} (\langle D_k D_r z, \sigma^i z \rangle + \langle D_k z, \sigma^i D_r z \rangle + \\ &\quad + \langle D_r z, \sigma^i D_k z \rangle + \langle z, \sigma^i D_k D_r z \rangle) \dot{x}^k \dot{x}^j. \end{aligned} \quad (164)$$

При выводе формул (164) учтено то обстоятельство, что

$$(\langle \widehat{D}_k z, \sigma^i z \rangle + \langle z, \sigma^i \widehat{D}_k z \rangle) \dot{x}^k = \dot{x}^i.$$

Подставляя соотношение (164) в уравнение (163), получаем

$$\begin{aligned} \eta_{ir} \ddot{x}^i + \frac{1}{2} (\eta_{ir,i} + \eta_{jr,i} - \eta_{ij,r}) \dot{x}^i \dot{x}^j + \\ + 2\eta_{ij} (\langle D_{[k} D_{r]} z, \sigma^i z \rangle + \langle z, \sigma^i D_{[k} D_{r]} z \rangle) \dot{x}^k \dot{x}^j = 0, \end{aligned} \quad (165)$$

где $D_k D_r z = z_{,r,k} + A_r z_{,k} + A_k z_{,r} + A_{r,k} z + A_k A_r z$, $A = (A_1, \dots, A_6)$ — векторнозначная действительная функция, представляющая собой элемент алгебры Ли группы дилатации.

Отсюда следует, что

$$\langle D_{[k} D_{r]} z, \sigma^i z \rangle + \langle z, \sigma^i D_{[k} D_{r]} z \rangle = F_{kr} \dot{x}^i, \quad (166)$$

где $F_{kr} = (A_{r,k} - A_{k,r})$.

В соотношении (166) учтено то обстоятельство, что в рассматриваемой системе координат $\dot{x}^j = \langle z, \sigma^j z \rangle$, причем это соотношение сохраняется при ортогональных преобразованиях и преобразованиях дилатаций. Подставляя соотношение (166) в (165), получаем следующее уравнение для геодезических

$$\eta_{ir} \ddot{x}^i + \Gamma_{ijr} \dot{x}^i \dot{x}^j + 2\eta F_{rk} \dot{x}^i \dot{x}^p \dot{x}^k = 0. \quad (167)$$

Умножая левую часть (167) на тензор η^{qr} и по повторяющимся индексам производя суммирование, приходим к уравнению

$$\ddot{x}^q + \Gamma_{ij}^q \dot{x}^i \dot{x}^j + 2\eta^{qr} \eta_{ip} F_{rk} \dot{x}^i \dot{x}^p \dot{x}^k = 0 \quad (168)$$

или эквивалентному уравнению

$$\ddot{x}^q + \Gamma_{ij}^q \dot{x}^i \dot{x}^j + 2\eta^{qr} \eta_{ij} F_{rk} \dot{x}^i \dot{x}^k \dot{x}^j = 0. \quad (169)$$

Уравнения (168) и (169) задают одну и ту же геодезическую, однако геометрические структуры пространств, соответствующих этим уравнениям, существенно различаются. Действительно, связность пространства Римана—Картана в общем случае может быть представлена в виде

$$\Delta_{ij}^q = \Gamma_{ij}^q + 2\eta^{qr} \eta_{p(i} \Omega_{|r|j)}^p - \Omega_{ij}^q.$$

Преобразуя уравнение (168) к виду

$$\ddot{x}^q + (\Gamma_{ij}^q + 2\eta^{qr} \eta_{p(i} F_{|r|j)}) \dot{x}^p - F_{ij} \dot{x}^q) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0 \quad (170)$$

и полагая $\Omega_{ij}^q = F_{ij} \dot{x}^q$, приходим к заключению о том, что многообразие, наделенное связностью

$$\Delta_{ij}^q = \Gamma_{ij}^q + 2\eta^{qr} \eta_{p(i} F_{|r|j)}) \dot{x}^p - F_{ij} \dot{x}^q, \quad (171)$$

обладает структурой пространства Римана—Картана.

Уравнению (169) соответствует связность

$$\Delta_{ij}^q = \Gamma_{ij}^q + 2\eta_{ij} \eta^{qr} F_{rk} \dot{x}^k,$$

симметричная по индексам i, j , то есть связность без кручения. Многообразие, наделенное такой связностью, обладает структурой локально-аффинного пространства. Оба вида этих пространств допускают структуру абсолютного параллелизма. Однако, следуя духу работы, ограничимся рассмотрением пространств Римана—Картана. Напомним, что связность (171) была получена в специальной системе координат, относительно которой выполнялось условие

$$x^k(\tau) = \dot{x}^k(\tau). \quad (172)$$

Связность (171) сохраняет свой ковариантный вид в любой другой системе координат, для которой выполняется условие (172) относительно логарифмического параметра τ . Тогда связность в общем виде может быть представлена в форме

$$\Delta_{ij}^q = \Gamma_{ij}^q + 2g^{qr} g_{p(i} F_{|r|j)}) \dot{x}^p - F_{ij} \dot{x}^q. \quad (173)$$

Итак мы показали, что единой теории гравитационных и электромагнитных полей соответствует пространство Римана—Картана со связностью вида (173), тензором кручения $\Omega_{ij}^q = F_{ij} \dot{x}^q$ и тензором конторсии

$$K_{ij}^q = 2g^{qr} g_{p(i} F_{|r|j)}) \dot{x}^p - F_{ij} \dot{x}^q. \quad (174)$$

Подставляя полученное соотношение (174) в структурное уравнение (6)

$$R_{ij}(\Gamma) - \frac{1}{2} g_{ij} R(\Gamma) = 2D_{[j}(\Gamma) K_{|i|l]}^l + 2K_{p[j}^l K_{|i|l]}^p - \\ - g_{ij} g^{rm} (D_{[r}(\Gamma) K_{|m|l]}^l + K_{p[r}^l K_{|m|l]}^p),$$

получаем общее уравнение единой теории электромагнитных и гравитационных полей.

По такой же схеме можно строить единые теории сильных, слабых, гравитационных и электромагнитных взаимодействий:

Литература

1. *Лобачевский Н. И.* О началах геометрии // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сборник статей. М.: Мир, 1979. С. 11–16.
2. *Riemann B., Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen. Bd. 13. 1868. S. 133–152.* (Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 18–33.)
3. *Clifford W. K. On the Space-Theory of Matter // Clifford W. K. Mathematical Papers. New York—London: MacMillan, 1968. P. 21.*
4. *Poincaré A. Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti der Circolo Matematico di Palermo, 1906, V. XXI, P. 129.* (Перевод в сб.: Принцип относительности. М.: Атом-издат, 1973. С. 118–161.)
5. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. I. С. 227–266.
6. *Hilbert D. Die Grundlagen der Physic, Nachrichten K. Gesellschaft Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1915, H. 3, S. 395.* (Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 133–145.)
7. *Weil H. Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1918. S. 465.* (Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 513–527.)
8. *Kaluza Th. Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1921, S. 966.* (Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 529–534.)
9. *Misner C., Wheeler J. Ann. of Phys., 1957. V. 2. 6. S. 525.* (Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 542–554.)
10. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967.
11. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
12. *Попов Н. Н.* Об одном подходе в теории калибровочных полей. М.: ВЦ РАН, 1997.
13. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. I.
14. *Rorov N. Gravitation and Cosmology. 1998. V. 4. 2 (14). P. 151–157.*
15. *Козырев Н. А.* О возможности экспериментального исследования свойств времени; Астрономические наблюдения посредством физических свойств времени; О воздействии времени на вещество // Н. А. Козырев. Избранные труды. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1991. С. 335–394.
16. *Лаврентьев М. М., Гусев В. А., Еганова И. А., Луцет М. К., Фоминых С. Ф.* Доклады Академии Наук. 1990. Т. 315. № 2, С. 368–370.

17. *Лаврентьев М. М., Еганова И. А., Луцет М. К., Фоминых С. Ф.* Доклады Академии Наук. 1990. Т. 314. № 2. С. 352–355.
18. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. М.: Наука, 1965. Т. I. С. 452–504.
19. *Schwarzschild K.* Sitzungsber. d. Berl. Akad., 1916. S. 189. (Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 199–207.)
20. *Oppenheimer J. R., Snyder H.* Phys. Rev., 1939, V. 56, P. 455. (Перевод в сб.: Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 353–361.)
21. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. М.: Мир, 1966.
22. *Степанов В. В.* Дифференциальные уравнения. М.: Физ.-мат. литер., 1958.
23. *Клоуз Ф.* Кварки и партоны. Введение в теорию. М.: Мир, 1982.
24. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1987.
25. *Иваненко Д. Д., Пронин П. Н., Сарданашвили Г. А.* Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля. М.: изд-во МГУ, 1983.

Оглавление

Введение	3
§ 1. Основные принципы	4
§ 2. Свойства пространства M^6	6
§ 3. Представление многообразия M^6 с помощью комплексного четырехмерного многообразия Z^4	10
§ 4. Метризуемость многообразия Z^4	12
§ 5. Структура абсолютного параллелизма на Z^4	16
§ 6. Структурная взаимосвязь пространств M^6 и Z^4	19
§ 7. Геометрическая модель образования точечной гравитационной массы	22
§ 8. Геодезические и экстремали в M^6 и их первые интегралы	30
§ 9. О возможности движения с бесконечно большой скоростью	36
§ 10. Точное решение задачи о перигелии Меркурия в шестимерном пространстве	40
§ 11. О релятивистской поправке в законе тяготения Ньютона	45
§ 12. К проблеме существования черных дыр	48
§ 13. Геометрическая модель образования спектра масс барионов	53
§ 14. Геометрия единой теории поля	65
§ 15. Многообразия и расслоения	66
§ 16. Связности на расслоениях	71
§ 17. Калибровочные теории в формализме расслоений	75
§ 18. Геометрия единой теории гравитационных и электромагнитных полей	79
Литература	85

Издательство УРСС

специализируется на выпуске учебной и научной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской Академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений.



Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Основываясь на широком и плодотворном сотрудничестве с Российским фондом фундаментальных исследований и Российским гуманитарным научным фондом, мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.

Среди недавно вышедших книг мы предлагаем Вам следующие.

Арнольд В. И. Математические методы классической механики.

Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики.

Волобуев И. П., Кубышин Ю. А. Дифференциальная геометрия и алгебры Ли и их приложения в теории поля.

Вильф Ф. Ж. Логическая структура частной теории относительности.

Пенроуз Р. Новое мышление императора.

Гейзенберг В. Избранные труды. Серия «Классики науки».

Ермаков Б. Е. Метод постоянных скоростей в задачах механики.

Зверев Г. Я. Физика без механики Ньютона и без теории Эйнштейна.

Ипатов С. И. Миграция небесных тел в Солнечной системе.

Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии.

Капитонов И. М. Введение в физику ядра и частиц.

Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля.

Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент.

Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.

Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса.

Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант.

Пригожин И. От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках.

Розенблат Г. М. Вращение масс и сопутствующие эффекты.

Сарданашвили Г. А. Современные методы теории поля. Т. 1–4.

Сморodinский Я. А. Избранные труды. Серия «Классики науки».

Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике.

Эбелинг В., Энгель А., Файстель Р. Физика процессов эволюции.

К. Э. Циолковский. Космическая философия. Ред. *Авдеевский В. С.*

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:
тел./факс (095) 135-44-23, тел. 135-42-46
или электронной почтой urss@urss.ru.
Полный каталог изданий представлен
в Интернет-магазине: <http://urss.ru>

Издательство УРСС
Научная и учебная
литература

В монографии рассматривается ряд математических моделей физических явлений, указывающих на возможно бóльшую размерность реального физического пространства-времени.

Предлагается новая схема построения объединительных теорий физических взаимодействий в формализме расслоений на базе шестимерного пространственно-временного многообразия с абсолютным параллелизмом.

Решается конкретная задача восстановления геометрической структуры пространства по заданной совокупности структурных групп симметрий в случае единой теории гравитационного и электромагнитного взаимодействий.



ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

 E-mail: urss@urss.ru
Каталог изданий
в *Internet*: <http://urss.ru>
Тел./факс: 7 (095) 135-44-23
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46