ОБОБЩЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ КРАМЕРСА-КРОНИГА

Г.И.Шипов
shipov@aha.ru, website http://www.shipov.com

Введение

В наступающем 2007 году исполняется 80 лет с момента написания Р. Кронигом и Х.Крамерсом знаменитых интегральных соотношений Крамерса-Кронига. Эти соотношения связывают действительную $Re\chi(\omega)$ и мнимую $Im\chi(\omega)$ части комплексной диэлектрической восприимчивости $\chi(\omega) = Re\chi(\omega) + iIm\chi(\omega)$:

$$Re\chi(\omega) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Im\chi(z)}{z-\omega}dz, \qquad (I)$$

$$Im\chi(\omega) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Re\chi(z)}{z-\omega}dz. \qquad (II)$$

Здесь символ P означает, что интегралы берутся в смысле главного значения.

Через диэлектрическую восприимчивость $\chi(\omega)$ определяется комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ и комплексный показатель преломления $n(\omega)$ среды

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \chi(\omega). \qquad (B.1)$$

Комплексный показатель преломления

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)} = \sqrt{1+\chi(\omega)} = Re\ n(\omega) + iIm\ n(\omega) = n' + in''$$

имеет следующую физическую интерпретацию:

а) реальная часть n' комплексного показателя преломления определяет скорость распространения света в диэлектрике $v = c/n'$;

б) мнимая часть n'' комплексного показателя преломления отвечает за поглощение света в среде в соответствии с формулой $I = I_0 exp[-k_\omega(n'')l]$, где I - интенсивность света после прохождения в диэлектрике расстояния l, а $k_\omega(n'')$ - коэффициент затухания, определяемый через n'' и зависящий от частоты света.

Таким образом, мнимая часть диэлектрической восприимчивости $Im\chi(\omega)$ определяет поглощение света в среде, а действительная часть $Re\chi(\omega)$ - показатель преломления (или скорость света в среде). Зная поглощение света в среде, мы можем с помощью соотношения (I) вычислить его показатель преломления и наоборот, с помощью соотношения (II) можно вычислить поглощение света, зная показатель преломления.

Другим важным физическим свойством соотношений Крамерса-Кронига является связь этих соотношений с принципом причинности. Действительно, при воздействии на среду внешнего электрического поля $E_\alpha,\ \alpha = 1, 2, 3$ возникает вектор поляризации

$$P_\beta = \chi^+_{\beta\alpha} E^\alpha, \qquad \alpha, \beta ... = 1, 2, 3, \tag{B.2}$$

где $\chi^+_{\beta\alpha}$ - тензор диэлектрической восприимчивости, у которого знак + означает, что поляризация P_β и поле E^α связаны причинно-следственной связью так, что внешнее поле является причиной, а поляризация диэлектрика следствием (временное запаздывание поляризации). Для простоты, в соотношениях (I) и (II) тензорные индексы опущены. Кроме того, в соотношениях Крамерса-Кронига опущены также знаки + и

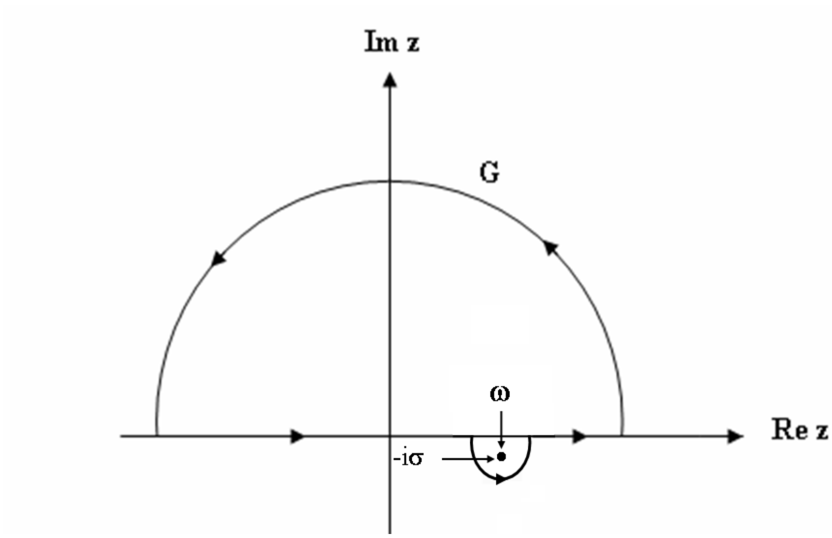

Рис. 1: Особая точка $z = \omega$ сдвинута на величину σ в нижнюю полуплоскость, поэтому функция χ^+ аналитична в верхней полуплоскости

-, причем знак минус соответствует опережающей поляризации (опережающая поляризация имеет место в микромире).

Используя математический аппарат функции одного комплексного переменного, можно выразить диэлектрическую восприимчивость, аналитичную в верхней полуплоскости через ее мнимую и реальную часть по следующей формуле:

$$\chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\chi(z)}{z - \omega} dz =$$

$$= \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(z)}{z - \omega} dz = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im\chi(z)}{z - \omega - i\sigma} dz = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re\chi(z)}{z - \omega - i\sigma} dz, \tag{B.3}$$

где особая точка $z = \omega$ сдвинута в нижнюю полуплоскость на бесконечно малую величину σ (см. рис. 1). Интегрирование ведется по контуру, который представляет собой полуокружность радиуса R в верхней полуплоскости с обходом особой точки $z = \omega$. При стремлении $R \to \infty$ интеграл по полуокружности обращается в нуль и мы вычисляем интеграл $(B.3)$ в смысле главного значения.

1 Дисперсионные соотношения для многофотонных процессов

Еще одна круглая дата исполняется в 2007 году - 40 лет с момента когда были найдены дисперсионные соотношения, для нелинейных тензоров электромагнитной восприимчивости. С бурным развитием лазерной техники в 60^x годах прошлого столетия, использующей сильное электромагнитное излучение ($E, H \approx 10^6$ ед. СГСЕ), были экспериментально обнаружены различные нелинейные процессы, например, сложение и вычитание частот лазерного излучения в нелинейных кристаллах. Для этих явлений формула $(B.2)$ обобщается, принимая вид [1]

$$P_\beta = \chi^+_{\beta\alpha} E^\alpha + \chi^+_{\beta\alpha\gamma} E^\alpha E^\gamma + \chi^+_{\beta\alpha\gamma\delta} E^\alpha E^\gamma E^\delta + ..., \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta ... = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\chi^+_{\beta\alpha\gamma}(\omega_1\omega_2)$, $\chi^+_{\beta\alpha\gamma\delta}(\omega_1\omega_2\omega_3)$ - тензора квадратичной, кубичной и т.д. нелинейной восприимчивости. Для описания наблюдаемых нелинейных процессов, за которые ответственны тензора нелинейной восприимчивости, важно было знать, каким дисперсионным соотношениям удовлетворяют эти тензора. Задача по выводу дисперсионных соотношений для тензоров нелинейной восприимчивости была поставлена передо мной в моей дипломной работе "Дисперсионные соотношения для многофотонных процессов"[2], Леонидом Веньяминовичем Келдышем, ныне академиком РАН.

До появления моей работы ряд авторов [3]-[6] уже делали попытки найти дисперсионные соотношения для нелинейной электромагнитной восприимчивости, однако полученные в этих работах дисперсионные соотношения подобны соотношения м Крамерса-Кронига I и II.

Вопрос об аналитических свойствах тензоров нелинейной восприимчивости представляет определенный интерес, так как аналитичность восприимчивости, как было отмечено ранее, связана с причинностью [7] и другими физическими характеристиками.

1.1 Дисперсионные соотношения для квадратичной нелинейной восприимчивости

Мы будем рассматривать дисперсионные соотношения для тензоров нелинейной восприимчивости в рамках классической электродинамики, считая, что эти тензора аналитичны в верхней полуплоскости своих переменных. Математическую основу обобщенных дисперсионных соотношений составляет интегральное представление Коши для функции многих комплексных переменных, которое гласит [8]: пусть $\chi(\omega)$ аналитична в области $G = G_1 \times G_2 \times ... G_n$, где G_j - область в плоскости ω_j с кусочно-гладкой границей ∂G_j и непрерывна в каждой G_j, тогда справедливо представление Коши

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial G_1 \times ... \times \partial G_n} \frac{\chi(z) dz_1 dz_2 ... dz_n}{(z_1 - \omega_1)(z_2 - \omega_2)...(z_n - \omega_n)} = \begin{cases} \chi(\omega) & \text{если} \quad z \in G \\ 0 & \text{если} \quad z \notin G \end{cases}. \tag{2}$$

Здесь точки $z_1, z_2, ... z_n$ принадлежат соответственно областям $G_1, G_2, ... G_n$.

Соотношение (2) для $n = 1$ есть ни что иное, как обычное одномерное представление Коши. Докажем его для $n = 2$ [9]. В самом деле, для $\chi(\omega_1\omega_2)$ имеем область аналитичности $G = G_1 \times G_2$. Выберем в G_1 точку z_1, а в G_2 точку z_2. Так как $z_1 \in G_1$, а $z_2 \in G_2$, имеем

$$\lim_{\omega_2 \to z_2} \chi(\omega_1\omega_2) = \chi(\omega_1 z_2), \tag{3}$$

$$\lim_{\omega_1 \to z_1} \chi(\omega_1\omega_2) = \chi(z_1\omega_2), \tag{4}$$

где $\chi(\omega_1 z_2)$ - аналитична в G_1, а $\chi(z_1\omega_2)$ - аналитична в G_2.

Если точка z_1 находится внутри области G_1, то по теореме Коши для одного комплексного переменного имеем:

$$\chi(\omega_1\omega_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_1} \frac{\chi(z_1\omega_2)}{z_1 - \omega_1} dz_1. \tag{5}$$

С другой стороны, если z_2 точка внутри G_2, то имеем опять же по теореме Коши

$$\chi(z_1\omega_2) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_2} \frac{\chi(z_1 z_2)}{z_2 - \omega_2} dz_2. \tag{6}$$

Подставив (6) в (5) и заменив повторный интеграл двойным, получим

$$\chi(\omega_1\omega_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\partial G} \frac{\chi(z_1 z_2)}{(z_1 - \omega_1)(z_2 - \omega_2)} dz_1 dz_2, \tag{7}$$

где $\partial G = \partial G_1 \times \partial G_2$.

Для нас интересен случай, когда одной из сторон каждой границы области G является действительная ось (как это показано на рис.1 для одной переменной) и контуры замыкаются (в общем случае) либо в верхней либо в нижней полуплоскостях своих переменных, в зависимости от аналитических свойств функции $\chi(\omega_1\omega_2)$. Как было показано выше, это дает возможность выразить функцию $\chi(\omega_1\omega_2)$, с учетом ее аналитических свойств, через интеграл, взятый в смысле главного значения. Не ограничивая общности, можно записать следующее соотношение

$$\chi^{\pm\pm}(\omega_1\omega_2) = \pm\frac{1}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(z_1 z_2)}{(z_1 - \omega_1)(z_2 - \omega_2)} dz_1 dz_2, \tag{8}$$

где знак + соответствует функции χ^{++} или χ^{--}, а знак - соответствует функции χ^{+-} или χ^{-+}, причем функция $\chi^{++}(\omega_1\omega_2)$ - аналитична в верхней полуплоскости обеих переменных; $\chi^{+-}(\omega_1\omega_2$ - аналитична в верхней полуплоскости ω_1 и в нижней полуплоскости ω_2; $\chi^{-+}(\omega_1\omega_2)$ - аналитична в нижней полуплоскости ω_1 и в верхней полуплоскости ω_2; χ^{--} - аналитична в нижних полуплоскостях обеих переменных.

Пусть теперь функция $\chi(\omega_1\omega_2)$ соответствует одной из компонент тензора $\chi^{+}_{\beta\alpha\gamma\delta}$ квадратичной электромагнитной восприимчивости и является аналитической в верхней полуплоскости переменной ω_1. Тогда интеграл (5) представляет собой функцию аналитическую в верхней полуплоскости переменной ω_1. Следует ожидать, что и функция (6) аналитична в верхней полуплоскости переменной ω_2, поскольку ω_1 и ω_2 входят в интегралы (5) и (6) равноправно и мы могли бы поменять их местами.

Таким образом, компонента тензора квадратичной электромагнитной восприимчивости оказывается аналитической функцией в верхних полуплоскостях обеих переменных. Физически это означает, что макроскопическое состояние среды в момент времени t может зависеть от значений взаимодействующих полей только в более ранние моменты времени. Заметим, что квантовый подход к вопросу аналитичности нелинейных восприимчивостей может быть аналитической функцией как в верхних, так и в нижних полуплоскостях [10]. Однако усреднение по ансамблю и исключение из рассмотрения отрицательных частот (переход к классической электродинамике) исключает возможность существования нелинейных восприимчивостей в нижних полуплоскостях комплексных переменных ω_1 и ω_2.

В дальнейшем мы будем рассматривать только "классические"электромагнитные нелинейные восприимчивости, считая что они являются аналитическими функциями в верхних полуплоскостях всех своих переменных. Нас прежде всего будут интересовать связи между действительными и мнимыми частями тензоров нелинейной восприимчивости. Для этого мы воспользуемся формулами $(B.3)$ и выразим функции (5) и (6) через интегралы в смысле главного значения

$$\chi(\omega_1\omega_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_1} \frac{\chi(z_1\omega_2)}{z_1-\omega_1}dz_1 = \frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi(z_1\omega_2)}{z_1-\omega_1}dz_1 = \frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Re\chi(z_1\omega_2)}{z_1-\omega_1-i\sigma}dz_1, \tag{9}$$

.

$$\chi(z_1\omega_2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_2} \frac{\chi(z_1z_2)}{z_2-\omega_2}dz_2 = \frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\chi(z_1z_2)}{z_2-\omega_2}dz_2 = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Im\chi(z_1z_2)}{z_2-\omega_2-i\sigma}dz_2. \tag{10}$$

Используя вспомогательное соотношение

$$\frac{1}{x-i\sigma} = P\frac{1}{x} + i\pi\sigma \text{ при } \sigma\to 0,$$

выделим из (10) явно мнимую и действительную части. При этом для реальной части $\chi(z_1\omega_2)$ имеем:

$$Re\chi(z_1\omega_2) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Im\chi(z_1z_2)}{z_2-\omega_2}dz_2. \tag{11}$$

Подставляя полученный результат в (9) и снова выделяя действительную и мнимую части, получим для реальной части $\chi(\omega_1\omega_2)$ дисперсионное соотношение по одной частоте

$$Re\chi(\omega_1\omega_2) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Im\chi(\omega_1z_2)}{z_2-\omega_2}dz_2. \tag{12}$$

Используя (9)и (11), получаем для мнимых частей двухчастотное дисперсионное соотношение

$$Im\chi(\omega_1\omega_2) = -\frac{1}{\pi^2}P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Im\chi(z_1z_2)}{(z_1-\omega_1)(z_2-\omega_2)}dz_1dz_2. \tag{13}$$

Аналогичным образом нетрудно получить двухчастотное дисперсионное и для реальной части

$$Re\chi(\omega_1\omega_2) = \frac{1}{\pi^2}P\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{Re\chi(z_1z_2)}{(z_1-\omega_1)(z_2-\omega_2)}dz_1dz_2. \tag{14}$$

К одночастотному соотношению (12 можно добавить еще три одночастотных дисперсионных соотношения для реальной и мнимой частей функции $\chi(\omega_1\omega_2)$. Они имеют следующий вид:

$$Im\chi(\omega_1\omega_2) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Re\chi(\omega_1z_2)}{z_2-\omega_2}dz_2, \tag{15}$$

$$Re\chi(\omega_1\omega_2) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Im\chi(z_1\omega_2)}{z_1-\omega_1}dz_1. \tag{16}$$

$$Im\chi(\omega_1\omega_2) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Re\chi(z_1\omega_2)}{z_1-\omega_1}dz_1. \tag{17}$$

Таким образом, интегралы (12)- (17) представляют собой полный набор дисперсионных соотношений для компонент тензора квадратичной восприимчивости среды.

1.2 Дисперсионные соотношения для нелинейной восприимчивости произвольного порядка

Действуя подобным образом, несложно получить набор дисперсионных соотношений для компонент тензора кубичной восприимчивости, рассматривая их как функции трех независимых частот. Выработанный алгоритм позволяет указать одно общее свойство электромагнитных восприимчивостей, которое заключается в следующем:

1) для нелинейных восприимчивостей, зависящих от нечетного числа переменных, реальная часть выражается через мнимую

$$Re\chi(\omega_1...\omega_n) = \frac{1}{\pi^n}P\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Im\chi(z_1...z_n)dz_1dz_2...dz_n}{(z_1-\omega_1)(z_2-\omega_2)...(z_n-\omega_n)}, \tag{18}$$

$$n = 2k+1, \quad k = 0, 1...$$

(интегралы берутся по n переменным);

2) для нелинейных восприимчивостей, зависящих от четного числа переменных, реальная часть выражается через реальную же

$$Re\chi(\omega_1...\omega_n) = \frac{1}{\pi^n}P\int_{-\infty}^{+\infty}...\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Re\chi(z_1...z_n)dz_1dz_2...dz_n}{(z_1-\omega_1)(z_2-\omega_2)...(z_n-\omega_n)} \tag{19}$$

$$n = 2k, \quad k = 1, 2... \, .$$

В частности, трехчастотные дисперсионные соотношения для кубичной восприимчивости подобны соотношениям Крамерса-Кронига в том смысле, что они связывают реальную и мнимую части.

Поскольку мнимая часть восприимчивости ответственна за поглощение поля в среде, то можно предполагать, что нелинейные процессы при нечетном числе взаимодействующих частот идут с поглощение поля в среде. Процессы же, в которых участвует четное число частот, идут без поглощения поля в среде. Иными словами, нелинейные процессы с участием четного числа частот могут идти в абсолютно прозрачной анизотропной среде.

Далее, в случае нечетного числа частот, зная только мнимую или действительную часть восприимчивости, можно восстановить всю восприимчивость как комплексную функцию в целом. Для восприимчивости, зависящей от четного числа частот, необходимо знать как действительную, так и мнимую части. Только в этом случае восприимчивость может быть восстановлена полностью.

Заключение

Полученные нами обобщенные соотношения Крамерса-Кронига могут быть успешно использованы не только в нелинейной оптике. Их можно применять при исследовании аналитических свойств сингулярных решений волновых уравнений классической и квантовой теории поля, например функций Грина в квантовой электродинамике [11]. При использовании разработанного формализма в квантовой теории поля, необходимо учитывать аналитичность исследуемых функций как в верхней, так и в нижней полуплоскостях для положительных и отрицательных частот. Я надеюсь, что формулы (18) и (19)позволят в будущем получить в квантовой теории поля много новых и неожиданных результатов, особенно при описании нелинейных процессов с участием многих частиц.

Я глубоко благодарен Л.В.Келдышу за выбор весьма интересной области исследования, связанной с обобщением соотношений Крамерса-Кронига. Именно эта работа стимулировала мои дальнейшие исследования в области теоретической физики и, в конечном счете, привела к созданию Теории Физического Вакуума [12].

Список литературы

[1] *Ахманов С.А., Хохлов Р.В.* Проблемы нелинейной оптики. АН СССР, Ин-т научной информ,1964.

[2] *Шипов Г.И.* Дисперсионные соотношения для многофотонных процессов. Дипломн. работа, Физифак, МГУ, 1967.

[3] *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М., Мир, 1965.

[4] *Коган Ш.М.* ЖЭТФ, т. 43, № 7, 1962.

[5] *Price P.I.* Phys.Rev., v. 130, 1963.

[6] Caspers W.I. Phys/rev., v. 133, 1964.

[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.

[8] *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных перменных. М., Физматгиз, 1946.

[9] *Фукс Б.А.* Теория аналитических фкнкций многих комплнесных переменных. М., Физматгиз, 1946.

[10] *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзяшиловский И.Е.* Методы квантовой теории поля в стастической физике. М., Физматгиз, 1962.

[11] *Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969, с75-81.

[12] *Шипов Г.И.* Теория физического вакуума, теория, эксперименты, технологии М.: Наука, 1997, с.450.