В.Г. Чичерин, В.А.Меньшиков

Инерциоиды – движители постоянной тяги с наложенными гармоническими колебаниями

Аннотация

На основе механики реальных тел с конечной скоростью передачи взаимодействия между различными частями их рассчитаны тяги инерциоида и движителя без выброса массы космического аппарата «Юбилейный». Тяга движителя без выброса массы существенно зависит от свойств материалов ротора, опор и условий отражения возмущений от акустических неоднородностей.

В настоящее время стало очевидным, что использование движителей с выбросом массы существенно тормозит развитие космонавтики. Движение инерциоидов и движителей без выброса массы должно рассматриваться не в традиционных рамках механики точки с бесконечно большой скоростью передачи возмущений, а механики реальных тел с конечной скоростью передачи взаимодействия между различными частями их.

В связи с этим проанализируем принцип действия инерциоида Толчина, движущегося под действием внутренних сил[1]. Он содержит два эксцентрика, вращающихся синхронно в противоположных направлениях. Главной особенностью механизма является заданные переменные угловые скорости эксцентриков. К сожалению, в публикациях отсутствуют подробные описания движения инерциоида под действием внутренних сил.

Рассмотрим возникновение некомпенсированных сил в инерциоиде вследствие запаздывания в угловом направлении сил инерции, возникающих в эксцентриках. Вначале проанализируем модель инерциоида Толчина в известных рамках теоретической механики [2], полагающей скорость передачи любого взаимодействия бесконечной и тем самым приводящим любые тела к точечным массам.

Для исследования поведения инерциоида Толчина представим вращение эксцентрика с постоянным радиусом R и массой m, находящегося на платформе с массой M, в которую входит и масса самого эксцентрика.

Уравнение, описывающее возникающую при неравномерном вращении силу инерции F, имеет вид

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{m}\cdot\vec{\boldsymbol{\varpi}}\times\left(\vec{\boldsymbol{\varpi}}\times\vec{\mathbf{R}}\right) - \mathbf{m}\cdot\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\times\vec{\mathbf{R}}, \qquad (1)$$

где $\vec{\boldsymbol{\varpi}}$ - вектор угловой скорости,

$\vec{\mathbf{R}}$ - радиус вектор, на конце которого находится эксцентрик в момент времени t,

$\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ -вектор углового ускорения.

Здесь уместно привести ещё одно определение силы F, учитывающей вклад третьей производной, направленной аналогично центробежной силе инерции вдоль радиуса R:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathbf{m}\cdot\vec{\boldsymbol{\varpi}}\times\left(\vec{\boldsymbol{\varpi}}\times\vec{\mathbf{R}}\right) - \mathbf{m}\cdot\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\times\vec{\mathbf{R}} - \mathbf{m}\cdot\int\vec{\boldsymbol{\varpi}}\times\left(\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}\times\vec{\mathbf{R}}\right)\mathbf{dt} \qquad (2)$$

Для дальнейшего анализа используем декартову систему координат XOY, совмещенную с полярной системой координат R,ϕ (в качестве оси Y используется ось симметрии вращающихся синхронно эксцентриков).

Тогда проекции вектора $\vec{\mathbf{F}}$, а именно F_x на ось X и F_y на ось Y определяются следующим образом, исходя из уравнения (1):

$$.\mathbf{F_x} = \mathbf{m}\varpi^2 \cdot \mathbf{R}\cos\varphi + \mathbf{m}\frac{\mathbf{d}\varpi}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\sin\varphi \quad\text{..}(3)$$

$$\mathbf{F_y} = \mathbf{m}\varpi^2 \cdot \mathbf{R}\sin\varphi - \mathbf{m}\frac{\mathbf{d}\varpi}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\cos\varphi \quad\text{..}(4)$$

Соответственно, исходя из уравнения(2):

$$\mathbf{F_x} = \mathbf{m}\varpi^2 \cdot \mathbf{R}\cos\varphi + \mathbf{m}\frac{\mathbf{d}\varpi}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\sin\varphi + \int \mathbf{m}\varpi\frac{\mathbf{d}\varpi}{\mathbf{dt}}\mathbf{r}\cos\varphi\mathbf{dt} \quad\text{.......... ....}(5)$$

$$\mathbf{F_y} = \mathbf{m}\varpi^2 \cdot \mathbf{R}\sin\varphi - \mathbf{m}\frac{\mathbf{d}\varpi}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\cos\varphi + \int \mathbf{m}\varpi\frac{\mathbf{d}\varpi}{\mathbf{dt}}\mathbf{r}\sin\varphi\mathbf{dt} \quad\text{.......... ....}(6)$$

Исходя из определений $\mathbf{F_x} = \mathbf{M}\cdot\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{x}}{\mathbf{dt}^2}, \mathbf{F_y} = \mathbf{M}\cdot\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{y}}{\mathbf{dt}^2}$, дважды интегрируем по t обе части уравнений (3), (4), (5) и (6), применяя при этом интегрирование по частям и используя замену переменных $dt=\omega d\phi$. Получим в итоге зависимости для ΔX (колебания вала вдоль оси X) и ΔY(колебания вала вдоль оси Y).

$$\Delta\mathbf{X} = -\rho\cos\varphi \quad\text{...}(7)$$

$$\Delta\mathbf{Y} = -\rho\sin\varphi \quad\text{...}(8)$$

где $\rho = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{M}}\mathbf{R}$.

Отсюда следует, что амплитуда колебаний равна ρ.

Таким образом, традиционными методами теоретической механики строго показано отсутствие постоянной тяги у инерциоида Толчина. При этом оказалось допустимым описание вращательного движения в форме уравнения (2) и его проекций на оси X и Y в форме уравнений(5) и (6). Очевидно, что здесь необходима экспериментальная проверка.

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести описание угловой скорости в виде разложения в ряд Фурье:

$$\varpi = \varpi_0\left[1 + \sum_{\mathbf{k}=1}^{\infty}(\alpha_\mathbf{k}\sin\mathbf{k}\varphi + \beta_\mathbf{k}\cos\mathbf{k}\varphi)\right] \quad\text{..}(9)$$

При подстановке (9) в уравнения(3),(4),(5),(6) можно убедиться, что не возникают некомпенсированные константы.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда порожденные силами инерции поперечные и продольные упругие волны распространяются от эксцентрика до опорных подшипников на оси вращения и там создают реакцию от этих сил. При этом за счет конечной скорости распространения упругих волн проекция сил инерции на оси вращения определяется не углом ϕ , а величиной $\phi+\Psi_{lo}$ или $\phi+\Psi_{cr}$,где

$$\psi_{\mathbf{lo}} = \frac{(\mathbf{R}-\mathbf{R_n})\varpi_\mathbf{m}}{\mathbf{C_{lo}}}$$

$$\psi_{\mathbf{cr}} = \frac{(\mathbf{R}-\mathbf{R_n})\varpi_\mathbf{m}}{\mathbf{C_{cr}}}$$

R_n – радиус опорного подшипника с осью, совпадающей с осью вращения эксцентрика,

$\mathbf{C_{lo}}$ **и** $\mathbf{C_{cr}}$ – скорости продольной (для стали 5300м/с) и поперечной (для стали 3500м/с) волн [3, стр. 133-166].

ω_m – средняя угловая скорость. Как правило, в пределах углов Ψ_{lo} и Ψ_{cr} величина её практически постоянна и равна ω_0

Необходимо отметить, что за время прохождения волны радиус-вектор успел повернуться на угол Ψ_{lo} или Ψ_{cr}.

Также нужно принять во внимание, что продольные волны порождаются центробежными силами инерции и производной угловой скорости, умноженной на угловую скорость, а поперечные волны порождаются силами инерции, обусловленные угловым ускорением. Поэтому силы инерции, приходящие от эксцентрика на опорный подшипник, можно описать, исходя из уравнений (3),(4),(5),(6) с учетом дополнительных фаз Ψ_{lo} и Ψ_{cr} :

$$\mathbf{F_{xa}} = \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\cos(\varphi+\psi_{lo}) + \mathbf{m}\frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\sin(\varphi+\psi_{cr}) \qquad (12)$$

$$\mathbf{F_{ya}} = \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\sin(\varphi+\psi_{lo}) - \mathbf{m}\frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\cos(\varphi+\psi_{cr}) \qquad (13)$$

или соответственно

$$\mathbf{F_{xa}} = \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\cos(\varphi+\psi_{lo}) + \mathbf{m}\frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\sin(\varphi+\psi_{cr}) + \mathbf{R}\int \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}\cos.(\varphi+\psi_{lo})\mathbf{dt} \qquad (14)$$

$$\mathbf{F_{ya}} = \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\sin(\varphi+\psi_{lo}) - \mathbf{m}\frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}\mathbf{R}\cos(\varphi+\psi_{cr}) + \mathbf{R}\int \mathbf{m}\boldsymbol{\omega}\frac{\mathbf{d\omega}}{\mathbf{dt}}\sin.(\varphi+\psi_{lo})\mathbf{dt} \qquad (15)$$

где F_{xa} и F_{ya} - реакции опорного подшипника в направлении осей X и Y.

В дальнейшем с учетом малости Ψ_{lo} и Ψ_{cr} используем следующие формулы:

$$\cos(\varphi+\psi_{lo}) \approx \cos\varphi - \psi_{lo}\sin\varphi \qquad (16)$$

$$\sin(\varphi+\psi_{lo}) \approx \sin\varphi + \psi_{lo}\cos\varphi \qquad (17)$$

$$\sin(\varphi+\psi_{cr}) \approx \sin\varphi + \psi_{cr}\cos\varphi \qquad (18)$$

$$\cos(\varphi+\psi_{cr}) \approx \cos\varphi - \psi_{cr}\sin\varphi \qquad (19)$$

Введем

$$\Delta\psi = \psi_{cr} - \psi_{lo} \qquad (20)$$

$$\psi_{lo} = \psi_{cr} - \Delta\psi \qquad (21)$$

Используя (16) – (21) для преобразования (12) – (15), получаем :

$$\mathbf{F}_{xa} = \mathbf{F}_x - \psi_{cr}\mathbf{F}_y + \Delta\psi\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\sin\varphi \qquad (22)$$

$$\mathbf{F}_{ya} = \mathbf{F}_y - \psi_{cr}\mathbf{F}_x - \Delta\psi\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\cos\varphi \qquad (23)$$

Таким образом, из уравнений (12) и (13), (14) и (15) получены одинаковые дополнительные реакции на оси вращения.

Из уравнений (22) и (23) следует, что ненулевая тяга инерциоида определяется членами $\Delta\psi\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\sin\varphi, \Delta\psi\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\cos\varphi$.

Физически это понятно, так как если бы $\Delta\Psi=0$, то инерционные силы от продольных и поперечных волн пришли бы к оси вращения синхронно и тем самым, это укладывалось бы в рамки традиционной теоретической механики (то есть реакция от сил инерции, созданная в точке эксцентрика, была бы такой же на оси).

Необходимо отметить, что дополнительная реакция ортогональна исходному направлению силы инерции и определяется уравнениями (22) и (23).

Определим возможную реакцию, создающую постоянную составляющую силы тяги инерциоида. Для этого подставим выражение для ω в виде ряда Фурье в форме (9) в члены $\Delta\boldsymbol{\psi}\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\sin\boldsymbol{\varphi}, \Delta\boldsymbol{\psi}\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{R}\cos\boldsymbol{\varphi}$. В результате получим:

$$\mathbf{F}_{xa} \approx \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\psi}\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0^2\mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}_1(1-\cos 2\boldsymbol{\varphi}) \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_{ya} \approx -\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\psi}\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0^2\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}_1(1+\cos 2\boldsymbol{\varphi}) \quad (25)$$

Вектор тяги F_{0a} в полярной системе координат направлен под углом равным $\mathrm{arctg}(-\beta_1/\alpha_1)$ и по абсолютной величине равен $\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\psi}\mathbf{m}\boldsymbol{\omega}_0^2\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_1^2+\boldsymbol{\beta}_1^2}$

В более общем виде соотношение (20) может быть записано в виде:

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{K}_{\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}}\mathbf{K}_{\mathbf{cr}}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{cr}} - \mathbf{K}_{\boldsymbol{\omega}\mathbf{l}}\mathbf{K}_{\mathbf{l}0}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{l}0}, \quad (26)$$

где коэффициенты $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}}, \mathbf{K}_{\boldsymbol{\omega}\mathbf{l}}$ являются функциями, зависящими от $\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{a}\_\mathbf{K}_{\mathbf{cr}}, \mathbf{K}_{\mathbf{l}0}$ - от геометрических параметров и конструкционных материалов. При этом существенным фактором, влияющим на величины $\mathbf{K}_{\mathbf{cr}}, \mathbf{K}_{\mathbf{l}0}$, может оказаться учет многократного отражения волн от акустических неоднородностей, что может привести к значительному увеличению этих коэффициентов и, следовательно, величины ΔΨ. Например, это получается при анализе простейшего варианта, когда акустическая неоднородность находится в приосевой зоне. Если волна проходит без отражения от акустической неоднородности (она отсутствует), то $\mathbf{K}_{\mathbf{cr}} = \mathbf{K}_{\mathbf{l}0} = 1$. Влияние акустической неоднородности можно учесть коэффициентами отражения $\mathbf{q}_{\mathbf{cr}}, \mathbf{q}_{\mathbf{l}0}$, относящимися соответственно к поперечным и продольным волнам. Последними параметрами определяются коэффициенты $\mathbf{K}_{\mathbf{cr}}, \mathbf{K}_{\mathbf{l}0}$.

В результате процесса первого отражения к эксцентрику вернутся первоначальные величины исходных импульсов (продольной и поперечной волн). Затем в приосевую зону повторно вернутся волны. За это время $\Delta\boldsymbol{\psi}$ возрастет в *l* раз, поскольку волнам придется пройти путь между эксцентриком и приосевой зоной дважды – сначала от оси к эксцентрику, а затем обратно. При этом из-за повторного отражения в приосевой зоне подействовал импульс q, а отразился q^2. Все последующие прохождения отраженных волн будут завершаться уменьшением действующего импульса: при n-ом отражении он имеет величину q^n. Соответственно величина некомпенсированного импульса определяется через сумму:

$$\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty}(2\mathbf{n}+1)\mathbf{q}^{\mathbf{n}+1}, \quad (27)$$

которая является сходящейся, так как q<1.

Определим s, используя преобразование

$$\mathbf{S} = \sum_0^{\infty}\mathbf{x}\mathbf{q}^{\mathbf{x}} - \mathbf{q}\sum_0^{\infty}\mathbf{q}^{\mathbf{n}} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2. \quad (28)$$

Сумма S_2 является геометрической прогрессией, её предел $\mathbf{S}_2 = \dfrac{\mathbf{q}}{\mathbf{q}-1}$, а сумма S_1 оценивается через интеграл

$$\mathbf{S}_2 = 2\int_0^\infty \mathbf{x}\mathbf{q}^\mathbf{x}\mathbf{dx} = \frac{2}{(\ln\mathbf{q})^2}\int_0^\infty \mathbf{y}\mathbf{e}^\mathbf{y}\mathbf{dy} = \frac{2}{(\ln\mathbf{q})^2} \ .$$

Окончательно имеем

$$\mathbf{S} = \frac{2}{(\ln\mathbf{q})^2} - \frac{\mathbf{q}}{1-\mathbf{q}} \ . \qquad (29)$$

Если q~1, то

$$\mathbf{S} = 2\mathbf{q}\sum_0^\infty(\mathbf{m}+1)\mathbf{q}^\mathbf{m} = 2\mathbf{q}\sum_0^\infty \mathbf{m}\mathbf{q}^\mathbf{m} + 2\mathbf{q}\sum_0^\infty \mathbf{q}^\mathbf{m} \ . \qquad (30)$$

В итоге с учетом того, что при первом прохождении волны некомпенсированная часть импульса определяется как $\Delta\Psi$, и при многократном отражении коэффициент, учитывающий полную величину некомпенсированного импульса, определяется суммой сходящегося ряда, получим в преобразованном виде

$$\mathbf{S} = 1 + \frac{2\mathbf{q}}{1-\mathbf{q}} + \mathbf{S}_1 \ , \qquad (31)$$

где

$$\mathbf{S}_1 = 2\mathbf{q}\int_0^\infty \mathbf{x}\mathbf{q}^\mathbf{x}\mathbf{dx} = \frac{2\mathbf{q}}{(\ln\mathbf{q})^2} \ . \qquad (32)$$

В результате

$$\mathbf{S} = \begin{cases} 1 \to \mathbf{q} = 0 \\ 1 + \dfrac{2\mathbf{q}}{1-\mathbf{q}} + \dfrac{2\mathbf{q}}{(1-\mathbf{q})^2} \to \mathbf{q} \approx 1 \end{cases} \qquad (33)$$

Поэтому $\begin{matrix}\mathbf{K_{cr}} = \mathbf{SK_{cr0}} \\ \mathbf{K_{l0}} = \mathbf{SK_{l00}}\end{matrix}$ и $\mathbf{K_{cr0}}, \mathbf{K_{l00}}$ зависят только от конструкции, её геометрических параметров, и в общем случае различны для продольной и поперечной волн. Целесообразно оценить влияние коэффициента q на S. Например, при q=0,9 значение S~200. Из этого следует, что коэффициент отражения q может существенно влиять на увеличение не компенсированной составляющей импульса. С другой стороны возможны изменения знака$\Delta\Psi$.

В реальных ситуациях, когда инерциоид и взаимодействующие с ним части включают различные акустические неоднородности, могут наблюдаться переходные процессы, в результате которых устанавливается некоторое эффективное q.

Как видно из этой теоретической модели инерциоида, в экспериментах очень важно получить амплитудно-частотные характеристики. К сожалению, по этой причине такой анализ экспериментов, приведенных в работе [1], не удалось провести. Частично необходимые характеристики приведены в работе [4, часть 2]. Но в ней была использована система измерений (коромысло) с низкой собственной частотой ~0,5гц, что не позволило получить амплитудно-частотные характеристики в области более высоких частот, чем собственные. Приведенные в этой работе теоретические обоснования получения тяги инерциоида некорректны, так как использовался обычный подход в рамках теоретической механики точки (см. также вывод формул(6) и (7)). Численно интегрируя данные из рис.4.22 этой работы, можно получить, равенство нулю интеграла по времени, то есть за один цикл не происходит изменения количества движения центра масс инерциоида, что свидетельствует об отсутствии тяги. Для получения более качественной информации при закрепленном на струне коромысле необходимо использовать тензодатчики и амплитудно-частотные анализаторы импульсов. Тогда возможно определить q при возбуждении частей инерциоида одиночными импульсами. Оценки по результатам этой работы дают значение q=0,9 в условиях стендовых испытаний.

Таким образом, контакты с внешней средой, определяющие волновые процессы, могут влиять на наблюдаемые результаты. Поэтому решающие эксперименты необходимо проводить в космосе, на борту спутника.

В Приложении определено влияние на параметры геостационарной орбиты работы движителя (инерциоида) малой тяги без выброса рабочего тела, ориентированного противоположно силе тяготения, расположенного на спутнике в составе космического аппарата « Юбилейный».

Оценки величины тяги одного и того же движителя при различных испытаниях близки и равны ~20мг, что подтверждает достоверность результатов.

Результаты свидетельствуют, что прохождение волн от движителя в корпус спутника было фактически почти без отражении вследствие перехода волн из области с большим акустическим сопротивлением (стальные детали движителя в дюралевом корпусе космического аппараты с малым акустическим сопротивлением). Продольные волны практически без отражения проходят в корпус космического аппарата, а поперечные ведут себя иначе: в частности они чувствительны к коэффициенту трения в осевой области подшипника. При отсутствии трения поперечные колебания не проходят в корпус и полностью отражаются. В рассматриваемом случае по тяге 20мг может быть определен коэффициент отражения поперечных волн ~0,5. Полученные результаты по оценке тяги движителя позволяют сделать вывод о необходимости дальнейших исследований различных модификаций инерциоида как в условиях космоса, так и наземных условий для повышения тяги его.

Выводы.

1. Движение инерциоида и тягу движителя без выброса массы необходимо рассматривать не в рамках традиционной механики точки с бесконечно большой скоростью передачи возмущений, а механики реальных тел с конечной скоростью передачи взаимодействия между различными частями их.

2. При оценке сил во вращающихся телах целесообразно учитывать также радиальную составляющую углового ускорения.

3.Тяга движителя без выброса массы существенно зависит от свойств материалов ротора, опор и условий отражения возмущений от акустических неоднородностей.

Литература

[1] Толчин В.Н. Инерциоид. Силы инерции как источник поступательного движения. Пермь, Пермиздат,1977с.

[2] Геронимус Я.Л. Теоретическая механика. Очерки об основных положениях. М.,Наука,1973.

[3] Физические величины. Справочник под ред. Григорьева И.С., Мелихова Е.З. М.,Энергоиздат,1991с.

[4] Меньшиков В.А., Дедков В.К. Тайны тяготения. М., НИИКС, 2007с.

<u>Приложение</u>

Оценка тяги движителя без выброса массы космического аппарата «Юбилейный»

Для усиления эффекта от малой тяги, создаваемой движителем без выброса массы космического аппарата «Юбилейный» (май 2008г.) была проведена раскачка резонансных гравитационных колебаний. Для этого движитель многократно включался и выключался через определенные промежутки времени. После включения движителя малой тяги, сориентированного по радиусу орбиты, возникает движение спутника в радиальном направлении со скоростью V. При этом орбитальная скорость изменяется вследствие действия кориолисовых сил инерции.

Этот процесс описывается следующей системой уравнений :

$$\frac{\mathbf{d}(\mathbf{W}_0+\mathbf{W})}{\mathbf{dt}} = -2(\mathbf{V}_0+\mathbf{V})\frac{\mathbf{W}_0+\mathbf{W}}{\mathbf{R}_з+\mathbf{H}+\mathbf{R}}$$

$$\frac{\mathbf{d}(\mathbf{V}_0+\mathbf{V})}{\mathbf{dt}} = \frac{(\mathbf{W}_0+\mathbf{W})^2}{\mathbf{R}_з+\mathbf{H}+\mathbf{R}} - \mathbf{g}\left(\frac{\mathbf{R}_з}{\mathbf{R}_з+\mathbf{H}+\mathbf{R}}\right)^2 + \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{m}}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \delta,$$

где

$\mathbf{H}_0$ -высота орбиты (=1500км, ниже в скобках исходные и итоговые не приведенные к единому виду величины и их размерности);

δ -поправка к высоте орбиты, учитывающая аномалии гравитационного поля Земли до 16 полных гармоник (включительно), гравитационного притяжения Луны и Солнца, давления солнечного света с фиксированной величиной коэффициента светового давления;

$\mathbf{V}_0$, $\mathbf{W}_0$ - радиальная и орбитальная скорости, связанные с поправкой δ и зависящие от периода обращения спутника;

$\mathbf{R}_з$ -радиус Земли (=6378км);

R –малое отклонение от орбиты под действием силы тяги двигателя;

V,W- малые добавки к радиальной и орбитальной скоростям под действием силы тяги движителя;

g - ускорение свободного падения на поверхности Земли;

m- масса космического аппарата «Юбилейный»(=50кг);

f-тяга движителя,

t - время.

После операций масштабирования и линеаризации уравнений по малым параметрам система уравнений приводится к следующей:

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{d\tau}} = -2\mathbf{y},$$

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{d\tau}} = 2\mathbf{x} + \mathbf{r} + \alpha,$$

где

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{W}}{\mathbf{W}_0},$$

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{W}_0},$$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_з+\mathbf{H}_0},$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{mg}}\left(\frac{\mathbf{R}_з+\mathbf{H}_0}{\mathbf{R}_з}\right)^2,$$

$$\tau = \frac{\mathbf{tW}_0}{\mathbf{R}_з+\mathbf{H}_0}.$$

Общее решение имеет вид:

по радиальной составляющей:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{A}\sin(\sqrt{3}\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{B}\cos(\sqrt{3}\boldsymbol{\tau}),$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\alpha}{3} - \textbf{включенный\_движитель},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = 0 - \textbf{выключенный\_движитель},$$

$L = -2\gamma\tau - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\gamma(\mathbf{A}\sin(\sqrt{3}\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{B}\cos(\sqrt{3}\boldsymbol{\tau}))$ - смещение по трансверсальному направлению (по орбите).

В режиме непрерывной работы движителя без периодических выключений и включений справедливо следующее решение

$$\mathbf{L} = -2\boldsymbol{\gamma\tau} - \frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\gamma}\sin(\sqrt{3}\boldsymbol{\tau})$$

Если периодически выключать движитель в апогее и вновь включать в перигее, возникает гравитационная резонансная раскачка. В этом случае после каждого включения возникают симметричные относительно орбиты гравитационные колебания. Таким образом, малая тяга может вызвать гравитационные колебания с большим размахом, значительно превышающим погрешность оценки отклонений. В трансверсальном направлении смещение определяется как L=-2$\gamma\tau$ с амплитудой колебаний $2\boldsymbol{\gamma}\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2\mathbf{n} - 1)$.

С использованием этих зависимостей и результатов измерений трансверсального смещения космического аппарата « Юбилейный» при многократных периодических и длительном запусках двигателя была рассчитана величина его тяги 20,5 и 22мг.