Г.Я.Мартыненко

Очерки по истории математико-гармонических представлений: от Пифагора до наших дней

Содержание

Санкт-Петербург
2011

«Не вали все в один мешок.
Не поднимешь»

«В истории учитываются и
несвершившиеся факты»

«Многие, доискиваясь до истоков,
выкопали себе могилу»

Ежи Лец, «Непричесанные мысли»

Предисловие

Непосредственным поводом для написания этой книги послужил разговор с моим дачным соседом Васильевым Александром Ивановичем – профессиональным инженером-проектировщиком, который многие годы преподавал архитектурно-строительное дело в Военно-инженерной академии, а сейчас возглавляет строительно-проектировочную фирму. В ходе нашей беседы, посвященной вполне земным и насущным делам, он поинтересовался, чем в настоящее время я занимаюсь. Я ему рассказал о своем увлечении золотым сечением и числами Фибоначчи, об ассоциации «Золотое сечение» и прочих золотосеченских делах. Он ничуть не удивился, а со знанием дела включился в разговор, обнаруживая великолепное знакомство с «техническими деталями». Он мне рассказал, что у них, архитекторов-проектировщиков, гармонический антураж, в частности пропорционирование – некоторая традиция и некоторый объем знаний, прочно вошедший в учебный процесс и даже приобретший некоторый рутинный характер. Затем он на несколько секунд прервал наш разговор и принес свои настольные книги: «Принцип пропорции» И. Ш. Шевелева и «Методы архитектурной гармонии» Я. Д. Гликина. После этого он заговорил о Фидии и Витрувии, что меня озадачило и порадовало.

До этого разговора я был знаком с математическими аспектами гармонии по материалам двух конференций: конференции в Виннице в 2002 г. и онлайн конференции на страницах сайта «Академия тринитаризма» в 2009 г. Из этих материалов я узнал о компьютерах Фибоначчи, о фибоначчиевых матрицах генетического кода, о неевклидовых представлениях в архитектурной гармонии, о золотом сечении музыкального и вербального текстов и других приложениях, включая экзотические. К этому времени у меня за плечами был некоторый личный опыт, накопленный за небольшой временной интервал моих занятий золотосеченской проблематикой. Я понимал, что этого мало и необходимо повысить уровень своей компетенции в этой области. И решил это сделать путем написания очерков, посвященных различным этапам эволюции математико-гармонических представлений. Эта затея могла быть осуществлена только путем вживания в материал и изучения огромного объема литературы. В случае реализации этого плана я достигал трех целей: 1. Знакомил коллег с систематической историей математико-гармонических идей , 2. Расширял свою компетенцию в этой области. 3. Прослеживал становление междисциплинарной области, которую лидер Славянской группы международного клуба «Золотое сечение» А. П. Стахов предложил назвать «Математикой гармонии». А. П. Стахов эту идею поддержал.

В течение 2010 г. была написана серия очерков, которые были опубликованы на сайте «Академии тринитаризма». Эти очерки я решил собрать единый текст. При этом были осуществлены согласовательные подгоночные действия, позволившие говорить о данной теме с единых позиций и в единых терминах. Свою задачу я видел в том, чтобы соединить на самом общем уровне математические формализмы в единое целое и проследить закономерности их развития и последующего слияния в единую теорию. Эти формализмы рождались на протяжении нескольких тысячелетий в рамках различных философских, эстетических, религиозных и математических представлений. Несмотря на это, единая линия может быть найдена. Если выразиться точнее, то может быть найден единый магистральный ствол, к которому ведут относительно самостоятельные ветви-линии.

Есть надежда, что книга привлечет внимание читателя, знакомого, пусть даже поверхностно, с золотым сечением, числами Фибоначчи и другими родственными математическими структурами и способствовать их осмыслению в рамках единой концепции.

В книге историческому анализу подверглись сведения, имеющие прямое отношение к тому, что сейчас может быть отнесено к семантическому пространству, стоящему за термином «Математика гармонии». Люди, творившие в течение тысячелетий фрагменты этой теории, едва ли могли предполагать, что они творили в этом пространстве. Это пространство – продукт современного ума, созидающего в системе современного знания и проецирующую систему этих знаний в прошлое. При этом разрозненная система представлений, рассеянных во времени и пространстве, насильственно втискивается в некоторую конструкцию, сложившуюся в голове исследователя или в коллективе исследователей-единомышленников. И все-таки надо признать, что такая конструкция по мере вживания в историю математико-гармонических идей претерпевала заметные изменения. Она и по сей день окончательно не сформировалась. Впрочем, это особого значения не имеет. Главное, что такая конструкция существует и что по мере исследования были замечены узлы и детали, играющие в ней важную роль, а некоторые сомнительные узлы и детали были временно отложены в сторону и переведены в режим ожидания своей дальнейшей участи.

В книге учитывались, конечно же, и различные концепции гармонии, которые порой к математике отношения не имеют, и надо быть очень изворотливым, чтобы это отношение увидеть. Эти концепции складывались в разное время в философии, религии, социальных науках, психологии в различных видах искусства и эстетике.

Свою умную и увлекательную книгу «Что такое математика?» американские ученые Х. О. Пойген и П. Х. Рихтер (Пойген, Рихтер, 2000) начинают так: «Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству. Ее основные и взаимно противоположные элементы — логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность. Как бы ни были различны точки зрения, питаемые теми или иными традициями, только совместное действие этих полярных начал и борьба за их синтез обеспечивают жизненность, полезность и высокую ценность математической науки». Именно с точки зрения этих трех противопоставлений я буду строить свое изложение.

Книга состоит из 7 очерков, отражающих состояние идей, которые могут быть проинтерпретированы как математико-гармонические. Каждый из очерков предваряется сонетом, посвященным выдающемуся мыслителю конкретной исторической эпохи. Это не просто украшение. Я попытался вместить в рамки этой твердой формы концентрированное представление о гармонии, характерное для данного периода, но преломленное в моем сознании через жанр, насыщенный мощным эстетическим потенциалом.

За основу предлагаемой истории я взял материал, содержащийся в двух капитальных изданиях: «История математики с древнейших времен до начала XIX века под ред. А. С. Юшкевича и «Истории эстетики» английских ученых Катарин Гилберт и Гельмута Куна. Остальные издания (их довольно много) привлекались в зависимости от специфики рассматриваемого периода.

Данная книга может рассматриваться как разведочная история математико-гармонических представлений. Поставленная задача не проста и амбициозна. В этой истории много спорного, противоречивого, запутанного. Я не мог быть одинаково компетентным в бесконечном списке научных направлений, но в процессе написания я многому научился и, надеюсь, еще узнаю много нового. А главное – научусь это критически осмысливать, оценивать и взвешивать на весах истории.

Книга написана благодаря идейной и моральной поддержке Алексея Петровича Стахова, который не давал мне расслабляться после написания очередного очерка. Стимулирующую роль сыграла также творческая атмосфера, царившая на международном конгрессе по математике гармонии, который состоялся в Одессе в октябре минувшего года. На конгрессе я познакомился с контактными и обаятельными людьми, которым предстояло стать героями этой или следующей книги. Я благодарен также философу и математику Эдуарду Максимовичу Сороко, который дал высокую оценку моим очеркам в мимолетном обмене мнениями на конгрессе.

Древняя Греция и Рим

Лира Пифагора
Под солнцем жарким Средиземноморья
В веселом Самосе великий Пифагор,
Удовлетворял свой ненасытный взор
Небесных сфер пленительным раздольем.

Он услаждал свой слух их звоном стройным,
Слагавшимся в созвучный перебой
Волны волной, их шумною игрой
И искристым блистаньем беспокойным.

И лиру в руки взяв, он натяженье струн
Велел согласным быть с ритмичным ходом волн,
Расчислив гармонично каждый тон.

Так подчиняется мятущийся табун
Веленью пастыря. И молвила озвученная лира:
Все есть число, число – властитель мира.

Вступление

Математика возникла в Древнем Египте и древнем Вавилоне. Жителям этих стран были вооружены многими математическими сведениями. Они, по-видимому, знали арифметическую и геометрическую прогрессию, кубические и квадратные уравнения, даже формулу, связанную с именем Пифагора и его теоремой. Но математики в современном понимании еще не было, хотя египтяне и вавилоняне успешно пользовались набором арифметических и геометрических средств на практике.

А теперь перенесёмся мысленно в Древнюю Грецию, где математика превратилась в науку.

То, что это произошло в те далекие времена в Греции, часто называют «греческим чудом». По до конца не понятным причинам произошел какой -то внезапный интеллектуальным взрыв, подобным духовному подъему, который был в Советском Союзе в 60-е гг. Причины такого подъема как в Греции, так и в Советском Союзе до сих пор никто толком не объяснил.

Что касается математического подъема в Древней Греции, то здесь можно найти кое-какие причины (Аносов, 2003).

В Греции впервые в истории, благодаря, может быть, досугу, которым были обеспечены все свободные граждане, получили поддержку все виды творчества без оглядки на практическую пользу. Приоритет отдавался общественному благу и эстетическому совершенству.

Греческому обществу был присущ дух соревновательности (и не только в спорте), стремление к победе, превосходству, причем победители не жаждали награды в виде материальных благ. Победитель довольствовался уважением сограждан.

Все это способствовало расцвету искусства, философии, науки.

В математике успеха можно было достичь, только лишь применяя строго логические рассуждения без всяких утилитарных поползновений. Только такие люди имели доступ к изысканнейшему из наслаждений – наслаждению разума и духа.

В Греции дедуктивное построение математики приобрело статус респектабельного занятия, плодом которого явилось систематическое дедуктивное изложение геометрии, к которой греки питали особую слабость.

Но это произошло не сразу. И все, конечно же, началось с Пифагора и его школы.

Для Пифагора и пифагорейцев было характерно стремление к раскрытию гармонии мира. Это стремление реализовывалось ими на фундаменте *геометрии* (учении о формах), *арифметике* (учении о числах) *и гармонии* (учении о музыке). Поскольку все сущее они хотели свести к системе числовых отношений («все есть число») центральное место в пифагорействе занимала арифметика. Сам Пифагор излагал свою математику с заметным налетом мистики (Яглом, 1980). Это проявилось, в частности, в чрезвычайном внимании пифагорейцев к мировым константам и разного рода «магическим» числам. Но в пифагорействе очень сильным было и рациональное начало, реализованное в серьезных математических достижениях. Принято считать, что с именами Пифагора и его современника Фалеса Милетского связано вообще конституирование математики как науки. Именно в трудах этих ученых родился *аксиоматический,* доказательный метод, который доминирует в математике вплоть до наших дней.

В школе Пифагора были заложены основы теории пропорциональности величин и учения о пропорциях. Пифагорейцы использовали три пропорции, которые они называли аналогиями (Депман, 2007): арифметической: $a-b=c-d$, геометрической $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и гармонической $\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$. Из этих пропорций пифагорейцы получали непрерывные пропорции $a-b=b-c$, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ и $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, а из последних соответствующие средние: арифметическую среднюю $b=\frac{a+c}{2}$, геометрическую среднюю $b=\sqrt{ac}$ и гармоническую среднюю $d=\frac{2ac}{a+c}$.

По свидетельству Ван дер Вардена (Ван дер Варден, 1959), к которому присоединяется И. М. Яглом (Яглом, 1980), в греческой теории музыки большую роль играла

гармоническая прогрессия вида $\frac{1}{x}-\frac{1}{H}=\frac{1}{H}-\frac{1}{y}$, т. е. $\frac{1}{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ или $\frac{1}{H}=A\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$, где $H=H(x,y)=\frac{2xy}{x+y}$ - среднее гармоническое чисел x и y, а $A(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)$ - среднее арифметическое чисел x и y,

а также *золотая прогрессия* вида $\frac{x}{H}=\frac{A}{y}$ или $xy=HA$, т.е. средняя геометрическая чисел x и y равна среднему геометрическому средней арифметической и средней гармонической этих чисел.

В трудах других древнегреческих ученых (Платона, Аристотеля, Евклида) и др. аксиоматический метод обрел контуры законченной теории. Абстрактная математика была создана греческими мыслителями, исходя из их философских, религиозных и этических принципов с решительным, высокомерным и даже агрессивно- пренебрежительным отношением к каким-либо приложениям. И все же одно приложение греческая аксиоматика имела, но оно было, с одной стороны, очень абстрактным, *распространяясь на гармонию Вселенной* в целом, *а с другой, было ориентировано в сторону музыки, которая для греков была воплощением гармонии, а сама Вселенная рассматривалась ими как музыка сфер*.

Но греки пифагорейских времен были увлечены не только учением о музыке. Важное значение они придавали и конструированию музыкальных инструментов и «низменным» математико-акустическим изысканиям. Более того, они занимались конструированием, а такое времяпровождение - не только не наука, а скорее ремесло, хотя, конечно, и с возвышенными целями. И все это делалось на основе чисел, теория которых также имеет истоки в учении пифагорейцев. Речь идет о целых числах, но иррациональные числа тоже были открыты греками, хотя они их вывели за пределы арифметики, отдав на откуп геометрии.

Пифагора можно считать и основоположником теории колеблющейся струны – одним из самых древних разделов прикладной математики. Пифагор е его ученики хорошо знали, что звук создается колебаниями струны и что существует математическая связь между высотой звука и длиной, плотностью и натяжением струны. Эту связь они формулировали с точки зрения теории пропорций. В дальнейшем пифагорейская теория привела к гармоническому анализу, связанному прежде всего с именем Фурье - выдающимся математиком XYIII столетия, членом Французской академии наук (Винер, 1967, с. 70-73).

Аксиоматика пифагорейцев получила дальнейшее развитие в разработанных *Платоном* общих принципов дедуктивных рассуждений и в его попытках создать полную систему устройства мира.

Блестящую характеристику эллинскому мировоззрению и платонизму, как квинтэссенции этого мировоззрения дает русский философ Владимир Соловьев (Соловьев, 1994, с. 94-98). Согласно Соловьеву «…древний грек познавал божественное начало только как гармонию и красоту». Соловьев далее уточняет, что божество, понимаемое только как идеальный космос, как все или как гармония всего – такое божество является для человека только как чистый объект, только в идеальном созерцании, и религия, которая этим ограничивается, имеет характер умозрительный и художественный, исключительно созерцательный, а не деятельный». Для Платона идеалом человека был философ. А характерная особенность философа состоит в том, что он постоянно для практической жизни, то есть находится в состоянии чистого созерцания вечных идей, исключающем всякое деятельное стремление … Поэтому и идеальное государство, по Платону, должно быть царством философов, т. е. высшая цель и для общества состоит в развитии теоретической сферы и ее безусловном господстве над практической жизнью»

Платон придавал большое значение и идее пропорциональности. Многие из исследователей полагают, что «прекраснейшая из связей», о которой говорит Платон в диалоге «Тимей», является золотым сечением. Это не так. Платон имел в виду пропорцию, составленную из трех чисел, расположенных на числовой оси в порядке возрастания. В этой пропорции средний член относится к меньшему так, как больший член относится к среднему. Иначе говоря, у Платона речь в сущности идет о средней пропорциональной или средней геометрической. Чтобы пропорция стала золотой, необходимо еще суммативное правило, т. е. сумма меньшего и среднего в тройке чисел, расположенных в порядке возрастания, должна быть равно большему числу. Так что « прекраснейшая из связей», воспеваемая Платоном ничего нового в данном случае в сравнении с Пифагором не открывает. Только, в отличие от своих предшественников, он рассматривает среднюю геометрическую не только как математический феномен, но нагружает ее и космическим смыслом, полагая, что при сотворении мира две стихии (огонь и земля) образовали единство благодаря «прекраснейшей из связей».

Космологические идеи подобного рода были распространены Платоном и на правильные многогранники. Вслед за пифагорейцами стал рассматривать пять правильных тел в качестве строительных кирпичей мироздания, поставив тетраэдр в соответствие огню, куб — земле, октаэдр — воздуху, икосаэдр — воде, а форму додекаэдра он интерпретировал как Вселенную в целом. Эта космология, понимаемая как система платоновых тел, в течение многих веков рассматривалась как основа мироздания.

Несомненным достижением Платона следует считать также и то, что он находил много общего между математикой и искусством. Так, в одном из диалогов Платона (Платон, с. 317-320, 1972) о математиках, ваятелях и живописцах говорится так: «Выводы они свои делают только для четырехугольника самого по себе и его диагонали, а не для той диагонали, которую они начертили. Так и во всем остальном. То же самое относится и к произведениям ваяния и живописи; от них может падать тень и возможны их отражения в воде, но сами они служат лишь образным выражением того, что можно видеть не иначе как мысленным взором».

Аристотель (384-332 г. до н. э.) продолжил строительство абстрактной математики, разделив науки на дедуктивные и индуктивные, все свои симпатии, однако, отдавая последним. Он ввел в научный оборот также понятие «предложения», совокупность которых образует костяк выводной науки, в которой основными элементами были аксиомы и теоремы. В целом, как считает И.М.Яглом (Яглом, 1980), Аристотель завершает становление греческой математики как чисто логической дисциплины. Что касается теории гармонии, то Аристотель считал, что между чувством и объектом чувства существует пропорция, т. е. он пытался объяснить отношение между красотой и порождаемой ею удовольствием (Гилберт, Кун, с. 211)

После Аристотеля греческая математика как дедуктивная дисциплина (или как метаматематика) ничем новым принципиально не обогатилась, хотя конкретные достижения были очень значительными. Из следующих за Аристотелем ученых следует назвать прежде всего *Евклида* Александрийского (365 – около 300 гг. до н. э.), который в своих «Началах» составил свод математических знаний, включавший основные достижения предшествующих ему древнегреческих математиков, как тех, которые делали крен в сторону аксиоматики, так и тех, которые тяготели к гармоническим изысканиям.

Значительно позднее, уже на закате греческой цивилизации *Прокл* высказал гипотезу, что Евклид создавал «Начала» для того, чтобы *дать полную теорию идеальных фигур, в частности платоновых тел*. Основной смысл гипотезы Прокла может заключаться в том, что она рассматривает *«Начала» Евклида как фундамент Математики гармонии* (Стахов, 2009), поскольку в них впервые систематически рассматривается проблематика золотого сечения и правильных многогранников. К этому можно добавить, что на основе известного *алгоритма Евклида* любое число может быть представлено в виде непрерывной дроби. Эти структуры уже в XX в. стали активным рабочим инструментом в золотосеченских штудиях (Ойстин, 2003, с. 51).

Крайне важно также и то, что Евклид, по-видимому, первым дал математическую формулировку правило деления отрезка в среднем и крайнем отношении, которое позднее в эпоху Возрождения стала именоваться божественной пропорцией, а уже в XIX веке – золотым сечением.

Огромен вклад Евклида в теорию пропорций. В «Началах» он говорит об основных типах пропорций и их производных, описывает их основные свойства. Кроме того, Евклид геометрически доказывает несколько теорем: теорему о равенстве квадрата среднего геометрического двух чисел и их произведения, теорему о том, что геометрическая средняя двух неравных величин всегда меньше их средней арифметической, теорему о равенстве произведений средних и крайних членов пропорции и многие другие (Депман, 2007, с. 308-309).

Итак, черту под этапом становления и развития греческой математики от Пифагора до Аристотеля подвел Евклид. Эта математика достигла высочайшего уровня абстракции и безукоризненности дедукции, вновь достигнутые, как отмечает И. М. Яглом (Яглом, 1980) , в послегреческую эпоху лишь математиками XIX века, т.е. только через 20 столетий. Столь же высокого мнения об аксиоматике Евклида и ученик Колмогорова Владимир Андреевич Успенский: «… достойно удивления и восхищения то обстоятельство, что более двух тысяч лет назад мыслящие люди ставили перед собой задачу заложить логический фундамент математики (и блестяще решили эту задачу!). Этот факт служит опровержением известного тезиса, что движущей силой науки являются исключительно практические потребности, ведь и строгость, и само содержание трактата Евклида превосходили практические потребности того времени» (Успенский, 2009, с. 308). Но каким бы ни был собственно научный вклад Евклида, эти достижения затмил его вклад в систематизацию и распространение математических знаний. В течение 20 столетий «Начала» были не только ядром математического образования, но и находились в центре западной культуры. Такая констатация очевидно, но все же трудно удержаться, чтобы не привести высказывания о «Началах» двух выдающихся людей, сыгравших огромную роль в истории западной цивилизации. Вот слова из Автобиографии Авраама Линкольна: « Он изучил и овладел шестью книгами Евклида, поскольку он был членом конгресса». Так ли надо понимать Линкольна, что и остальным членам конгресса были не чужды евклидовы аксиомы. А вот, что пишет в своей «Автобиографии» Бертран Рассел: « В возрасте одиннадцати лет я начал изучать Евклида … Это было одно из самых великих событий моей жизни. Такое же ослепительное, как и первая любовь. Я не представлял, что в мире существовало нечто столь восхитительное» (Стилвел, 2004).

Комментируя эти высказывания, Стилвел далее пишет: «Возможно, низкий культурный статус математики сегодня, не говоря уже о незнании математики политиками и философами, отражает отсутствие Начал, соответствующих современному миру».

Следует обратить внимание на еще одно крайне важное обстоятельство. Выше мы говорили о становлении греческой математики как преимущественно абстрактно-доказательной дисциплины. Но в греческой математике получило развитие и другое направление – *математико-гармоническое*. Причем второе направление, с одной стороны, имело поддержку в абстрактной математике, для которой гармония была реализацией (или приложением) абстрактных математических представлений. Такая гармония также имела достаточно абстрактный характер – как способ познания мироздания и само мироздание. Обратим внимание еще на один крайне важный момент. «Математическая Вселенная», которую строили греческие математики, если и была абстрактной, то не совсем. Эта Вселенная находилась в полной гармонии с жизнью эллинов того времени, например, духовной, общественной, политической. Кроме того, некоторая метафизичность того же Аристотеля или Евклида была связана с медленным, величественным течением времени. Статичность греческой жизни с ее «вечными», застывшими неподвижными храмами, амфитеатрами, статуями и колоннадами под вечным южным солнцем, на берегах вечного бесконечного моря и бездонного синего неба – все это великолепие чудесным образом гармонировало с красивыми, правильными геометрическими фигурами: треугольниками, многоугольниками, многогранниками, которые занимали умы и чувства греческих мыслителей.

Но эти храмы, колоннады, скульптуры возводились и ваялись не только по наитию. Трудно представить, чтобы великий Фидий не обладал обширнейшими знаниями в геометрии, пусть и прикладной. И он воплощал эти знания в камень и металл. А если вспомнить о конструировании музыкальных инструментов, которое под знаменем гармонии входило в пифагорейское учение, то прикладная сфера математики гармонии еще более расширяется. Другими словами, *математическая гармония находила реализацию не только в умопостигаемых объектах, но и в повседневной реальности*

Особенно четко это проявилось в научной деятельности знаменитого *Архимеда* Сиракузского (287–212 гг. до н. э.), который метаматематикой в стиле Аристотеля почти не интересовался, зато достиг триумфальных, ослепляющих результатов в прикладной математике, ориентированной в сторону естествознании (физика, гидростатика, механика, оптика). Причем интересно то, что Архимед открывал свои законы материального пространства исходя с совершенной геометрической формы (каковой является, например, архимедова спираль), к которой реальные объекты только более или менее приближаются. Именно в соответствии с этими совершенными, гармоничными формами он конструировал свои устройства и машины. И еще один важный момент: *Архимед вывел совершенные формы из статики, придал им жизнь, они стали работать* – так, как работает его спираль в облике винта в подъемном механизме в облике болта и гайки в крепеже и – позднее в облике вертолетного винта у Леонардо да Винчи и в облике корабельного винта. В результатах деятельности Архимеда задышала первая промышленная революция, которая произошла чуть ли не через два тысячелетия.

Еще одним прорывом в прикладную математическую гармонию стала деятельность *Витрувия* (вторая половина I века нашей эры) – римский архитектор и инженер, создатель осадных орудий и баллистики, архитектор, который обобщил достижения античной мысли и заложил основы пропорционирования в изобразительном искусстве, архитектуре и градостроительстве опираясь на пропорции человеческого тела. Девиз Витрувия: Прочность, Польза, Красота. Разве не отвечает, например, этому девизу построенный Витрувием римский акведук. Этот девиз звучит очень современно, не правда ли? Иначе говоря, теория пропорций, которая до Витрувия была чем-то умозрительным и даже порой схоластическим, в трудах Витрувия обрела жизнь, она стала рабочим инструментом, вошла в кровь и плоть инженерного дела. Витрувийский человек в исполнении Леонардо да Винчи, воплотивший в себе идею гармонической пропорциональности и движения, стал символом, знаменем гармонических изысканий.

Витрувий своим творчеством поставил жирную точку в развитии античной науки и искусства.

Принято считать, что после Витрувия на европейском континенте в математике, в том числе и той, которая была ориентирована в сторону гармонии, вплоть до эпохи Возрождения образовалось огромное зияние длиной более чем в полтора тысячелетия. Это не совсем так. Ведь в этой огромной временной пустыне возвышается гений Герона Александрийского – греческого математика и механика, точные годы жизни которого неизвестны. С полной уверенностью можно сказать, что это огромный промежуток между 200 г. до н. э. и 300 г. н. э. Герон считается величайшим инженером за всю историю человечества. Он изобрел автоматические двери, автоматический театр кукол, автомат для продаж, автоматический самозаряжающийся арбалет, паровую турбину, автоматические декорации, прибор для измерения пройденного пути (таксометр). Он первым создал механические программируемые устройства. Но Герон был также большим математиком, но не теоретиком, как большинство греческих математиков. Ему, например, принадлежит знаменитая формула определения площади треугольника по трем сторонам. Менее известен вклад Герон в теорию самоподобия. Так, Мидхат Газале (Газале, 2002, с. 17) свой основной рабочий термин «гномон» заимствовал у Герона. Оригинальное определение Герона звучит так: «Гномон есть фигура, которая, будучи добавлена к иной фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной». Давая такое определение, Герон, по-видимому, основывался на усилиях греческих математиков соединить идеи геометрического и числового подобия, затратив немало времени и сил на изучение фигурных чисел: треугольных, квадратных, пятиугольных и т д. (Газале, там же, с.23).

Принято считать, что несмотря на то, что греки были серьезно увлечены теорией чисел, она не получила должного развития, учитывая потенциал греческих математиков. И виновато здесь их великое достижение – быть может, чересчур раннее открытие «несоизмеримых величин», которые отпугнули греческих математиков от числовых изысканий. Вместо этого они утонули в дебрях чистой аксиоматической геометрии.

Но греческая геометрия привела их к геометризации самих чисел. Основываясь на геометрическом подобии, пифагорейца создали теорию числового подобия, изучая треугольные, квадратные и пятиугольные числа. Это, в конечном итоге, привело к идее самоподобия, выдвинутой Героном, к идее гномона. Спустя 2000 лет она была реализована в теории фракталов. Так что в любой ветви развития математики можно найти зиждительное начало. Но возможны и отрицательные последствия. Надо признать, что авторитет греческой математики на два тысячелетия затормозил эволюцию численных методов (не теорию чисел), которые позднее образовали фундамент точных наук (Курант, Роббинс, 2001, с. 21).

А теперь подведем итоги.

1. Греческая математика со времен Пифагора до Аристотеля и Евклида развивалась преимущественно как абстрактная, выводная, доказательная дисциплина.

2. Для греческих математиков было характерно пренебрежительное отношение к применению математических идей на практике.

3. Прикладной аспект такой абстрактной математики был также крайне абстрактным – это гармония Вселенной.

4. Высочайшим среди искусств считалась музыка, которую греки относили, как и математику, к упопостигающим дисциплинам. Именно поэтому греки говорили о музыке сфер.

5. В большинстве случаев идеи абстрактных математиков реализовывались на практике без их участия. Для абстрактных математиков, живших в мире идей, это было занятие второго сорта, занятием, не достойным высокого звания математика и геометра. Прикладными делами занимались люди, привязанные к материалу, в основном ваятели и зодчии или конструкторы музыкальных инструментов. Интересно, что многие абстрактные идеи эллинов были реализованы спустя столетия, если не тысячелетия.

6. Идеи греческой математики простирались преимущественно на статические, неподвижные *безвременные структуры*, которые соответствовали замедленному течению жизни эллинов.

7. В греческой математике были заложены основы теории пропорций, выявлены основные типы пропорций и изучены их свойства. Евклидом было сформулировано правило деления отрезка в среднем и крайнем отношении, которое в последующие времена стало считаться важнейшим законом формообразования в природе и искусстве.

8. Платон построил свою гармоничную космогонию на основе системы пяти правильных многогранников, которая в последующие столетии рассматривалась как основа мироздания.

9. Ценным завоеванием греческих математиков является идея самоподобия (гномонности), которая предвосхитила теорию фракталов, тесно связанную с математико-гармоническими представлениями.

10. На закате греко-римской цивилизации (Архимед, Витрувий, Герон) среди исследователей наметилось а) смещение интереса от абстрактных структур к реальности, b) переход к изучению динамическим структур, с) формирование новой профессии – профессии инженера, архитектора, дизайнера, занятого конструированием *прочных, полезных и гармоничных объектов.*

И в заключение обратим внимание читателя на панегирик высочайшего эмоционального накала в адрес великого открытия Пифагора и его последователей, касающееся музыкальной гармонии: «Это великое открытие – первый шаг к тому, что физический мир может иметь в своей основе математическую структуру, вдохновило их на поиск числового закона, управляющего движением планет, «гармонией сфер». Такой закон не мог быть выражен на основе того, что пифагорейцы обычно признавали; тем не менее, представляется обоснованным рассмотреть понятие числа, чтобы удовлетворить потребности геометрии (а, следовательно, механики), как естественное расширение программы пифагорейцев. *В этом смысле закон гравитации Ньютона выражает гармонию, которую искали пифагорейцы. Даже в самом строгом смысле Пифагор сегодня жив. Имея цифровые компьютеры, цифровые часы, цифровые аудио и видео…. мы находимся ближе чем когда-либо к миру, где все есть число*» (Стилвен, 2001, с. 26-27).

Средние века (V-XIII в.)

Негоциант неутомимый Леонардо
Исколесил арабский мир.
И там, торгуя, он вкусил
Восточных мудростей изрядно.

Вернулся в Пизу. Все – не ладно.
Средь цифр – сплошной водоворот.
Доход никак не превзойдет расход,
Чтоб было на душе отрадно.

Он вышел в сад. А там крольчиха
Своих малюток теребит,
Папаша рядышком сидит,

Внучата в травке дремлют тихо.
И сменой поколений озадачен,
Купец прозрел в них числа Фибоначчи.

Чем же проявило себя Средневековье в развитии теории гармонии и в ее соединении с математикой? Вопрос не очень простой, так как идея гармонии в эту эпоху сохранила связи с античностью, хотя и весьма ослабленные, в виде христианских версий пифагореизма и платонизма. При этом математические аспекты гармонических изысканий практически погрузились в летаргический сон, если не считать некоторых общих и несложных экзерсисов, касающихся симметрии, пропорциональности и упорядоченности. Лишь на закате Средневековья появляется яркая фигура Фибоначчи, который о гармонии, как таковой не упоминает, но зато строит математическую структуру, которая через несколько столетий в математике гармонии займет центральное место как основа для прикладных и теоретических изысканий. Это лишний раз подтверждает тезис, что нет ничего практичней хорошей теории.

При написании данной статьи были использованы следующие основополагающие работы, относящиеся к философии (Мещеряков, 1981; Деев, 1999), эстетике (Гилберт, Кун, 1960; Махов, 2005) и истории математики (Юшкевич, 1970).

1. Христианизация пифагореизма и платонизма

Во II и III веках н. э. христианство активно боролось с язычеством. Языческое искусство и наука греков и римлян в представлении христиан ассоциировались с языческой ересью. Катарин Гилберт и Гельмут Кун в своей фундаментальной книге «История эстетики» (Гилберт, Кун, 1960, с. 139) о воззрениях христиан того периода пишут так: «Скульптура, по их мнению, напоминала об идолопоклонстве и безнравственном культе императоров; театр воспитывал в людях чувственность и жестокость. Тертуллиан во II веке говорил, что театральное искусство находится под покровительством «двух дьяволов» страсти и вожделения – Бахуса и Венеры. Св. Иероним сообщал, что ангелы бичевали его до синяков за то, что он слишком любил Цицерона; св. Мария Египетская чувствовала угрызения совести оттого, что ей вспоминались песни ее детства; св. Василий пишет о предосудительности смеха, заявляя, что это, пожалуй, единственная телесная слабость, которой не испытывал Христос». Веком-двумя позднее св. Августин (354–430) – типичный представитель Средневековья, старея, становился все более нетерпимым к человеческим слабостям и утехам. Он считал драматические произведения «пустым миражем», удовольствие, получаемое от музыки, – «грубой утехой», представление на сцене – «сладострастным безумием», а увлечение зрелищами – «болезненным зудом» (Гилберт, Кун, 1960, с. 139–140).

Такое отношение к искусству в сущности можно рассматривать как неоплатонизм, ибо подобно тому, как Платон в книге X «Государства» ставил искусство живописи и поэзии несравненно ниже искусства правителя и философа, так и средневековые мыслители считали, что подражательное искусство – это творение дьявола, профессионального обманщика и искусителя. Вслед за Платоном христианские мыслители говорили о том, что искусство ослабляет подлинные страсти и ценили прежде всего истинные добродетели, к каковым они относили кротость, любовь, мир, скромность, умеренность, доброту, долготерпение. И наоборот, такие пороки, как лицемерие, чувственность, жестокость, связанные в сознании человека Средневековья с искусством, казались ему, как и в более ранние времена Платону, опасными в силу присущего им соблазнительного очарования.

Таким образом, мы видим, что в Средние века получает широкое распространение христианская версия платонизма.

Заслугой мыслителей раннего средневековья можно считать распространение смысла слова «музыка» на все, что часто имеет с ней весьма отдаленное сходство. Впрочем, такой перенос смысла был характерен и для последующих эпох. Но средневековые мыслители в такой метафоризации были первыми. Об этом вслед за немецким искусствоведом Вальтером Виорой (Wiora, 1972) говорит российский литературовед Александр Евгеньевич Махов (Махов, 2005), называя круг представлений, связанный с расширенным значением слова «музыка», *трансмузыкальностью*. А. Е. Махов выделяет две основные идеи, связанные с трансмузыкальностью: 1) *музыка в своей космической ипостаси* («музыка сфер») *определяет структурную организацию любого художественного произведения, независимо от его принадлежности к конкретному виду искусства,* т. е. музыка может рассматриваться как *принцип, лежащий в основе всех искусств*; 2) но музыка есть также и *отражение внутреннего космоса человека*, его души (Махов, 2005, с. 23).

Разделение трансмузыкального на «музыку мира» и «музыку человека» (musica mundana и musica humana) впервые четко осуществлено в трактате *Боэция* (начало VI в.) «О музыкальном установлении» (Махов, 2005, с. 24). Оба типа музыки он относил к разряду неслышимой, внезвуковой музыки, противопоставленной музыке реальной, обычной (musica instrumentalis). При этом в основе обеих внезвуковых музык лежит единый принцип – *гармония*, которая способна соединять различное, как это происходит и в звучащей инструментальной музыке. Но инструментальная музыка по Боэцию обладает не только надчеловеческой космической силой, но и свойствами, определяемыми «нравом» человека, его иррациональной сущностью. Таким образом, неслышимая музыка Боэция перекликается с неслышимой гармонией сфер, корреспондирующей с бесплотной абстрактной математикой античности.

Позднее, уже в начале второго тысячелетия космический характер музыки постепенно уходит на задний план: музыка космоса и музыка души все более расходятся, поскольку у музыки души появляется свой, особый источник – *христианская добродетель*. На первый план выходит musica humana, небесная музыка перемещается внутрь человека, т. е. космология Пифагора подвергается все большей христианизации.

В трудах св. Августина провозглашается, что сущность красоты и самого бытия – в числе. При этом эстетическое определение красоты как формальной гармонии становятся принципом космологии, религиозной практики и человеческого мышления. Существование человека на земле по св. Августину основано на числе-гармонии и на подражании звездам и ангелам.

Св. Августин обогащает идею гармонии идеями *порядка, симметрии и пропорциональности*, которые провозглашаются основой гармонии. По св. Августину Бог сотворил мир из некоего предвечного единства на основе трех формальных принципов: *равенства, сходства, порядка* (Гилберт Кун, 1960, с. 149–158)[1]. Таким образом, в мировосприятии св. Августина мы наблюдаем смесь пифагореизма с платонизмом.

Важно, однако, иметь в виду, что искусства и эстетики, с которыми обычно связывается категория гармонии, в Средние века не было. Общая концепция искусства того времени выражено в определении, данном Квинтилианом: «Искусство – это методическое мастерство». Или более точно:

[1] Поражает полное совпадение формальных принципов Св. Августина с перечнем основных структурных характеристик, вынесенных современным русским математиком и философом Ю. А. Шрейдером в заголовок одной из своих книг: Равенство, сходство, порядок (Шрейдер, 1971). Возникает предположение: не был ли Ю. А. Шрейдер католиком, знакомым с трудами св. Августина. Если да, то здесь наблюдается пререкличка между гармоническими представлениями христианских мыслителей раннего средневековья и взглядами современного математика. Если учесть, что Ю. А. Шрейдер считал гармонию и ритм системными параметрами (Шрейдер, 1974), то наше предположение не кажется столь уж беспочвенным.

«Искусство - это умение работать по какому-либо способу, то есть в определенном порядке» (Гилберт, Кун, с. 175). Такие искусства назывались механическими (шерстопрядение, строительство, мореплавание, сельское хозяйство, охота, медицина, театр), тогда как приверженцы свободных искусств (риторика, музыка, архитектура, живопись) именуются свободными – либо потому, что им нужен ум для свободных размышлений, либо потому, что лица, обычно им занятые, – благородные люди (там же, с. 176).

Вклад св. Августина, отвлекаясь от его симметрийно-числовых представлений в области гармонии, заключался преимущественно в том, что для него искусство художника – это частица сверхразумного начала и благороднее, чем создаваемое им произведение. Искусство – это божий дар, делающий художников богоподобными в отношении того, что они видят и создают.

2. Математико-гармонические представления

Не следует, однако, забывать о том, что в раннее средневековье греческая математика продолжала некоторое время существовать, пока совсем не угасла к середине первого тысячелетия.

В европейской математике вплоть до начала XIII было огромное зияние, хотя совсем рядом наблюдался блестящий расцвет арабской культуры.

Математика Востока, в отличие от древнегреческой математики, всегда носила более практичный характер. Для стран ислама наибольшее значение имели вычислительные и измерительные аспекты. Основными областями применения математики были торговля, ремесло, строительство, география, астрономия, механика, оптика. Но благодаря распространению идей греческой, а также китайской и индийской математики мусульманский мир начал проявлять интерес и к теоретическим проблемам.

В целом, эпоха исламской цивилизации в математических науках может быть охарактеризована не как эпоха поиска новых знаний, а скорее как эпоха передачи и улучшения знаний, полученных от греческих математиков. Типичные сочинения авторов этой эпохи, дошедшие до нас в большом количестве, — это комментарии к трудам предшественников и учебные курсы по арифметике, алгебре, сферической тригонометрии и астрономии. Некоторые математики стран ислама виртуозно владели классическими методами Архимеда и Аполлония, но ими были получены и новые результаты.

Благодаря торговым связям христианский мир начал мало-помалу знакомиться с культурным наследием «античного Востока». Открывшийся мир не мог не ослепить своими красками и научными достижениями. В Европе все больше повышается спрос на арабские географические карты, учебники алгебры и астрономии, арабское зодчество. Через мусульманский мир опосредованно проникали математические идеи мыслителей Китая и Индии.

Именно в таких условиях сформировался выдающийся математик позднего Средневековья *Леонардо Фибоначчи* (1170–1250).

Отец Фибоначчи был купцом и государственным чиновником, представителем нового класса бизнесменов, порожденных «коммерческой революцией».

В то время Пиза, где родился Фибоначчи, была одним из крупнейших коммерческих центров, активно сотрудничавших с исламским Востоком. Отец Фибоначчи успешно торговал в одной из факторий, основанных итальянцами на северном побережье Африки. Благодаря этому ему удалось «пристроить» своего сына, будущего математика Фибоначчи, в одно из арабских учебных заведений, где он смог получить неплохое для того времени математическое образование.

Став купцом, Леонардо (иногда его называют Пизанским, поскольку он был из города Пизы) неоднократно путешествовал по странам Востока и в своей книге использовал труды арабских математиков (ал-Хорезми, Абу Камила, Омара Хаяма и других).

Фибоначчи был одним из наиболее ярких математических умов в истории западноевропейской математики и внес огромный вклад в ее развитие, а один из известных историков математики Морис Кантор назвал Фибоначчи «блестящим метеором, промелькнувшим на темном фоне западноевропейского средневековья».

Основной труд Леонардо – «Книга абака» написан в 2002 г. Под словом «абака» Фибоначчи понимал не счетную доску у римлян, а арифметику вообще. Эта великая книга явилась важнейшим средством распространения и пропаганды математических знаний в Европе. Фибоначчи сконцентрировал в ней огромное количество сведений, почерпнутых им из трудов исламских и античных математиков. Он творчески переработал эти сведения и присоединил к ним собственные достижения. По словам советского историка математики Адольфа Павловича Юшкевича (Юшкевич, 1970) Фибоначчи «арифметику и алгебру линейных и квадратных уравнений изложил с непревзойденной ни ранее, ни долгое время спустя полнотой и глубиной».

В главе XII «Книги абака» приводятся задачи на суммирование последовательностей – арифметической и геометрической прогрессий, последовательности квадратов, и, впервые в истории математики, рекуррентной последовательности. Последняя, играющая исключительную роль в математике гармонии, связана с задачей о размножении кроликов. Задача заключается в следующем: сколько пар кроликов родится в год от одной пары, если каждая пара приносит ежемесячно по паре, способной в свою очередь через месяц к размножению, и если ни одна пара не погибнет? Ответ дается в виде суммы последовательности: 1+1+2+3+5+… +144=376. Каждый член этой последовательности, кроме первых двух, равен сумме двух предыдущих.

В книге Фибоначчи приводится еще одна задача, которая в последующие времена привела к интригующим последствиям. Речь идет так называемой «задаче о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах» или проще «задачу о гирях». Эту задачу ждала интересная и долгая жизнь в течение многих столетий. Из книги Фибоначчи она перекочевала в сочинения еще одного знаменитого итальянского математика Луки Пачиоли.

Пачоли поместил ее в своей книге “Summa de Arithmetica, Geomeytria, Proprtioni et Proportionalita” (1494).Затем «задача о гирях» появилась в «Сборнике приятных и занимательных задач» (1612), написанном французским математиком Баше де Мизириаком. В русской историко-математической литературе «задача о гирях» известна также под названием задачи Баше-Менделеева. Дмитрий Иванович принял на вооружение эту задачу в ту пору его жизни, когда он был назначен ученым хранителем Депо образцовых гирь и весов, которое в 1893 г. было преобразовано в Главную палату мер и весов России (Депман, 2007, с. 21-26).

«Книга абака» резко возвышается над арифметической и алгебраической литературой XII-XIV вв. богатством и мощностью методов, изобретательностью и логической последовательностью изложения.

В дальнейшим эта книга была неиссякаемым источником знаний и активизатором усилий для многих поколений исследователей. Задачи из этой книги и приемы их решений распространились в рукописной и печатной форме не только в Италии, но и во Франции, Германии, Англии, Польше и других странах. Задачи Леонардо вели «неустанную кочевую жизнь» в течение многих веков. Их можно встретить даже в знаменитой «Алгебре» (1768 г.) Леонарда Эйлера.

Фундаментальная роль Фибоначчи в математике гармонии заключается в следующем:

1. Задача о кроликах легла в основу *теории рекуррентных последовательностей*, которая стала разрабатываться значительно позднее.

2. Фибоначчи, строя свои последовательности, ввел европейскую математику в мир *комбинаторики*.

3. Последовательность Фибоначчи имеет *динамический характер;* в последующие столетия она была объединена с теорией золотого сечения и благодаря этому теория пропорций была выведена из состояния статики и стала динамической теорией. *Гармония обрела динамику*.

4. Последовательность Фибоначчи может рассматриваться как предтеча *ветвящихся процессов,* исследуемых в теории игр, теории случайных процессов, исследовании операций и др.

5. Последовательность Фибоначчи является моделью реальных процессов (например в явлениях *филотаксиса*), и может, по-видимому, использоваться как генератор искусственных феноменов, например, в теории фракталов.

6. Последовательность Фибоначчи рассматривалась Леонардо Пизанским не изолированно, а в кругу других последовательностей. При этом он не ограничился только правилом порождения последовательностей, но и акцентировал внимание и на сумме всех их членов.

7. Задача Фибоначчи о взвешивании посредством гирь в последующие столетия способствовала развитию математической теории измерения и систем счисления, в том числе с иррациональным основанием. Но это произошло уже в во второй половине XX века.

8. Алгебраические исследования Леонардо обеспечили дальнейшее продвижение в решении квадратных уравнений и подготовили почву для

решения кубических уравнений, явившихся в дальнейшем основой для построения сечений, связанных с золотым.

Итак, для Средних Веков характерны следующие основные тенденции, релевантные с точки зрения математики гармонии:

1. Распространение христианства в Европе привело к упадку математических знаний в Европе и *перемещению центра математической мысли в исламский мир*, где концентрировались знания не только античных математиков, но и математиков Индии и Китая.

2. В средневековой религиозной практике представления греческих мыслителей (Пифагора и Платона) были трансформированы в *христианские версии пифагореизма и платонизма*.

3. Чрезвычайно плодотворной идеей средневековья является *идея трансмузыкального*, распространявшая идею музыкальности не только на космос и духовный мир человека, но и на все виды искусств. Эта идея в том или ином виде воплощалась в те или иные представления последующих столетий вплоть до настоящего времени.

4. Серьезным достижением средневековья следует считать идеи, касающиеся «системных параметров искусства», таких как *равенство, сходство, порядок, симметрия.*

5. На фоне системного упадка европейской математики мрак Средневековья озаряется могучим интеллектом Леонардо Фибоначчи, который, с одной стороны, вернул Европе с помощью арабов и персов наследие античных математиков, обогащенное достижениями исламских, китайских и индийских ученых, а также достижениями самого Леонардо, а с другой – заложил основы *теории рекуррентных последовательностей* и ввел в научный оборот последовательность, которой впоследствии было присвоено его имя.

Возрождение (XIV–XVI вв.)

Божественная пропорция
Профессор Фра Лука Бартоломео де Пачоли
Великий фантазер скитальческого склада,
Постранствовав и натерев мозоли,
Добрался до Флоренции. Навстречу Леонардо

Да Винчи. Боже правый! Вот так встреча.
Друзья, обнявшись, едва не удавили
Друг друга, но не до увечья.
Затем не медля приступили к делу.

За чашею вина, когда слегка остыли,
Пачоли, захмелев, ваятелю поведал,
Что в многомудрии «Начал» Евклида

Одна пропорция ему придала силы.
Да Винчи просиял улыбкой необычной:
«Взгляни, мой друг, она же гармонична».

Возрождение в истории культуры Европы — это эпоха перехода от Средних веков к новому времени, эпоха поворота к живой человеческой мысли, подавленной аскетизмом Средних веков. Этот период характеризуется глубокими и судьбоносными для Европы процессами: аграрным переворотом и переходом от ремесла к мануфактуре; великими географическими открытиями и началом мировой торговли. В это время феодальная раздробленность уступает централизованной власти и образуются современные национальные государства. Эта эпоха связана с началом книгопечатания, «открытием» античности, расцветом свободомыслия, возникновением протестантства и утратой церковью монополии в духовной жизни. В это время первые шаги делает естествознание, расцветают искусства и литература, стремительно развивается математика.

Наиболее общая отличительная черта Возрождения — утверждение идеала гармоничности человека и цельности мироздания. Причем в отличие от средневековья, эти категории пусть не сразу, пусть уклончиво — стали рассматриваться как самодовлеющие сущности, а не через призму божественного абсолюта. С этим связано присущее культуре возрождения светский и гуманистический характер и склонность к космологическому и натурфилософскому видению мира. Важную роль в таком видении мира играла и математика, освобождавшая науку и искусство от оков средневековой схоластики и сурового аскетизма.

В отличие от античности, учёные Возрождения не чурались сугубо практических задач. Чистых математиков-теоретиков фактически не было. Но даже тех, кого можно считать теоретиками, занимались астрономией, военным делом, анатомией, механикой, медициной, картографией, оптикой и другими практическими делами.

1. Представления о гармонии в искусстве Возрождения

В эпоху Возрождения резко возрастает общественный авторитет искусства, но это не вело к его противопоставлению науке и ремеслу, а осознавалась как равноправность различных форм человеческой деятельности в их единстве. В сравнении со Средневековьем в искусстве происходит резкое смещение акцентов. Для средневекового человека окружающий мир — это зеркало, рисунки и статуи в храмах и рукописях — это тоже зеркала; и даже энциклопедия знаний называлась тогда «Speculum» (зеркало). Так что же отражалось в этих зеркалах? По средневековым представлениям, в них отражалось совершенство, некий абсолют, некая беспредельная божественная сущность.

1.1. Искусство как зеркало

В эпоху Возрождения Священное писание уже не рассматривается как сокровищница божественных тайн, это уже отражение действительной, реальной жизни и бытия природы. Леонардо да Винчи пишет: «Если ты хочешь видеть, соответствует ли твоя картина в целом предмету, срисованному с натуры, то возьми зеркало… На его поверхности вещи подобны картине…» (Леонардо да Винчи, 1935, с. 114–115). Иными словами, живописец должен быть подобен зеркалу, чтобы отражать окружающий мир, т. е., как говорит Леонардо да Винчи «ты не можешь быть хорошим живописцем, если ты не являешься универсальным мастером в подражании своим искусством всем качествам форм, производимых природой» (там же, с. 88). Подобных взглядов придерживался и Альбрехт Дюрер: «Наше зрение подобно зеркалу» (Дюрер, 1957, с. 26). Но речь здесь идет о зримых искусствах. Как же быть другим видам искусства? Что в них есть зеркало. И здесь уже начинаются метафоры. Так, Джорж Путтенхэм в своей книге «Искусство английской поэзии» (1859) пишет: «Ум, обладающий воображением, подобен зеркалу» (Гилберт, Кун, с. 182).

Однако мистицизм и непререкаемый авторитет церкви не сразу были вытеснены природой и разумом. Церковь еще долгое время сохраняла свою власть над духовной жизнью мыслящих людей. При этом многие «возрожденцы» видели компромисс в том, что теология это тоже поэзия. Так Петрарка писал своему брату Герардо: «Поэзия отнюдь не противоречит теологии… Можно с известным правом сказать, что теология та же поэзия, но относящаяся к богу» (Гилберт, Кун, с. 186). По мнению Альберти и Леонардо да Винчи, художник должен быть неким подобием священника, ибо благочестие и добродетель считались тогда неотъемлемыми атрибутами художника. Само искусство считалось божественным, и роль его заключалась прежде всего в том, чтоб внушать людям любовь и поклонение богу.

1.2. Перемены в классификации искусств

Но в одной области произошли радикальные перемены. Речь идет о теологии, в которую стали все больше проникать представления и идеи, характерные для искусства. Происходила постепенная эрозия теологии на фоне возрастания роли и престижа искусства. Это нашло отражение в том, что поэзия, скульптура и живопись стали относиться к категории свободных искусств. Однако светское направление в искусстве пробивало себе дорогу крайне деликатно, осторожно, без «кавалерийских атак». Оно завоевывало позиции благодаря постепенному вторжению в сферу религиозного духа интереса к науке и античному наследию. Поэты и художники понимали, что им надо неустанно доказывать свое место под солнцем в стане свободных профессий. И делали они это через трудолюбие, упорство, интеллект и «методическое мастерство», характерное для традиционного искусства, пришедшего из Средних веков. Чтобы поднять свой авторитет, художники и поэты неустанно трудились, ибо в сознании человека середины второго тысячелетия прочно была укоренена убежденность, что чем больше труда вложено в создание произведения, тем оно совершеннее, тем самобытней и прекрасней. Причем в спорах о том, какое искусство — живопись или скульптура, живопись или поэзия важнее другого, аргумент в пользу искусства, требующего большей затраты труда, причем труда зримого, осязаемого, играл весьма важную роль.

1.3. Роль науки и ремесел

По мере того как возрастало их художественное мастерство, некоторые деятели искусства Возрождения начали отходить от строгого копирования природы и старались совместить свой художественный замысел со стремлением к идеальной форме и гармонии своего произведения. Природа перестала быть просто «натурщицей», моделью для копирования, а превратилась в источник скрытой божественной сущности, которую надо разгадать.

Но некоторые художники и ваятели шли другим путем. Они не только разгадывали, но и отбирали. Основой красоты становится не столько дар бога, сколько выбор человека, который выбирает в природе ярчайшие варианты из самых лучших и прекрасных форм. «Надо брать лучшие черты от многих прекрасных лиц — таков был распространенный лозунг» эпохи (Гилберт, Кун, с. 205).

Популярен был и другой путь. Основываясь на совокупности специальных знаний в области перспективы, анатомии, математики, психологии, усиливающих органы чувств, художники Возрождения создавали вторую «рукотворную» природу, но такую, которая соответствовала плану божественного творения. При этом решающую роль играла математика. О ее значении в эпоху Возрождения мы подробнее остановимся ниже.

1.4. Отношение к гармонии

Если для человека Средневековья гармония означала максимальную степень следования божественному единству, то для человека Возрождения гармония означала полное соответствие отдельных элементов художественного произведения друг другу и всему целому. Для того, чтобы выразить смысл этого соответствия, применялись различные слова и словосочетания: соотношение, координация, пропорциональность, согласие, сочетание, согласованность, соразмерность, композиция, скомпанованность и др.

Понятие гармонии в конечном итоге для художника эпохи Возрождения находит воплощение в *искусстве проекта*. Это искусство основано на изучении множества реальных предметов с целью создания совершенного образца. Вот как определяет возрожденческий проект английский искусствовед Дж. Вазари: «Проект — это как бы форма или идея всех вещей в природе; это самое замечательное по своей широте понятие, ибо не только на телах людей и животных, но и на растениях, зданиях, скульптуре и живописи проект показывает отношение целого к отдельным частям и каждой части к другой и к целому… Из этих отношений возникает определенная концепция и суждение» (Vasari, 1907, с. 205; цит. по: Гилберт, Кун, с. 207). И только после этого первоначальный набросок или проект воплощается в художественную реальность.

Идея и практика проектирования восходит к идеям Витрувия, который в своих проектах основывался на пропорциях человеческого тела. Возрожденцы смотрят на проблему шире. Они учитывают не только пропорции человеческого тела, но и любые пропорции, встречающиеся в природе. Но великая сила искусства часто уводила художников от гармонических канонов. Об этом пишет, например, американский исследователь Дж. Саймон, обсуждая творчество Микеланджело, который часто отклонялся в своем творчестве от пропорций человеческого тела. Так же думает и Дюрер. В третьей из своих «Четырех книг о пропорциях человеческого тела» он говорит, что художник властен отклоняться от золотой середины в сторону большого и маленького, толстого и тонкого, молодого и старого, жирного и худого, красивого и безобразного, твердого и мягкого, но все это должно быть подчинено сознательно выбранному методу и искусству, которое прочно опирается на природу и никогда не повторяет себя. Для Дюрера канон, образец, модель, проект — это не догма, а руководство к действию свободного человека, обладающего «естественной склонностью» к творчеству.

Итак, в искусстве Возрождения наметилась четкая тенденция к поиску формальных регуляторов процесса творчества. Критерием истины с одной стороны становится божественный источник, а с другой, огромную роль начинает играть математика. Причем эта «комбинация» распространялась не только на искусство, но и на другие области деятельности, прежде всего на ремесла и торговлю. Так, моряк, владеющий математическими навыками, получал преимущество перед своими конкурентами благодаря умению вычислять координаты судна на море, а купец, владеющий техникой бухгалтерского учета, имел значительно больше шансов на успех в торговле, чем его беспомощные в математике соперники. При этом традиционные представления утверждали, что вселенная построена богом по единому плану, в котором математика играла важную роль.

Примечательно также и то, что в эпоху Возрождения гармонические представления распространяются не только на природу и продукты творческой деятельности, но и на всю гамму взаимодействий человека и природы и человеческих отношений. Ярким примером такого расширительного понимания гармонии является творчество *Леона Баттиста Альберти* (1404 – 1472) — ученого, гуманиста, писателя, одного из зачинателей новой европейской архитектуры и ведущего теоретика искусства эпохи Возрождения.

Разносторонне одарённый и образованный, он внёс крупный вклад в теорию искусства и зодчества, в литературу и архитектуру, увлекался проблемами этики и педагогики, занимался теорией перспективы, картографией и криптографией.

Гармония по Альберти — важнейшая закономерность природы, основа миропорядка. Человек, включённый в мировой порядок, оказывается во власти ее законов — гармонии и совершенства. Гармонию человека и природы определяет его способность к познаванию мира, к разумному, устремлённому к добру существованию.

Альберти создал оригинальную гуманистическую, восходящую к Платону и Аристотелю концепцию человека, основанную на идее гармонии. Этика Альберти — светская по характеру — отличалась вниманием к проблеме земного бытия человека, его нравственного совершенствования.

Идеальный человек, по Альберти, гармонически сочетает силы разума и воли, творческую активность и душевный покой. Он мудр, руководствуется в своих действиях принципами меры, обладает сознанием своего достоинства. Всё это придаёт образу, созданному Альберти, черты величия.

Ответственность за моральное совершенствование, имеющее как личное, так и общественное значение, Альберти возлагает на самих людей. Выбор между добром и злом зависит от свободной воли человека. Основное предназначение личности гуманист видел в творчестве, которое понимал широко — от труда скромного ремесленника до высот научной и художественной деятельности.

Общество Альберти мыслит как гармоническое единство всех его слоёв, которому должна способствовать деятельность правителей. Обдумывая условия достижения социальной гармонии, Альберти в трактате «О зодчестве» рисует идеальный город, прекрасный по рациональной планировке и внешнему облику зданий, улиц, площадей. Вся жизненная среда человека устроена здесь так, чтобы она отвечала потребностям личности, семьи, общества в целом.

Воплощение представлений об идеальном городе в слове или изображении было одной из типичных особенностей ренессансной культуры Италии. Проектам таких городов отдали дань многие яркие личности этой эпохи. Это и архитектор Филарет, учёный и художник Леонардо да Винчи, авторы социальных утопий XVI в. В последних отразилась мечта гуманистов о гармонии человеческого общества, о внешних условиях, способствующих его стабильности и счастью каждого человека.

2. Математические штудии

2.1. «Божественная пропорция» Луки Пачоли

В 1509 г., т. е. 500 лет назад, по совету Леонардо да Винчи Лука Пачоли опубликовал книгу «О божественной пропорции» («La Divina Proportione») с подзаголовком «Сочинение, весьма полезное всякому проницательному и любознательному уму, из коего каждый изучающий философию, перспективу, живопись, скульптуру, архитектуру, музыку или другие математические предметы, извлечёт приятнейшее, остроумное и удивительное учение и развлечёт себя различными вопросами сокровеннейшей науки». В книге в явном виде был сформулирован *закон золотого сечения*. Книга была изысканно и со знанием дела иллюстрирована изображениями многогранников, выполненных великим Леонардо. В 2007 году появился русский перевод «Божественной пропорции» (Пачоли, 2007).

Монах-францисканец Лука Пачоли был учеником художника Пьеро делла Франчески, написавшего две книги, одна из которых называлась «О перспективе в живописи». Эту книгу считают предтечей начертательной геометрии. От художника Пачоли получил глубокие знания в области искусства и математики.

«La Divina Proportione» была восторженным гимном золотой пропорции. Среди многих достоинств золотой пропорции монах Лука Пачоли не преминул назвать и ее «божественную суть» как выражение божественного триединства бога сына, бога отца и бога духа святого. Подразумевалось, что малый отрезок при делении отрезка в крайнем и среднем отношении есть олицетворение бога сына, больший отрезок — бога отца, а весь отрезок — бога духа святого.

Первая часть «Божественной пропорции» посвящена золотому сечению, вторая — правильным многогранникам, третья — архитектуре. Золотое сечение и правильные многогранники Пачоли рассматривает в соответствии с XIV книгой «Начал» Евклида. Незадолго до опубликования «Божественной пропорции» Пачоли издал отредактированный латинский перевод «Начал» со своими многочисленными комментариями.

Изображения многогранников на 59 таблицах сделал для своего друга Леонардо да Винчи, для которого Пачоли, со своей стороны, подсчитал количество металла, необходимого для конной статуи (Юшкевич, 1972 с. 288–289). В книге присутствуют не только пять правильных многогранников (в полном соответствии с платоновыми телами), но и многогранники, получаемые из них путем «отсечения» и «насадки» друг на друга. Что касается раздела, посвященного зодчеству, то здесь рассматриваются пропорции человеческого тела на основе целых чисел в полном соответствии с измерениями Витрувия.

«Божественная пропорция» для математики гармонии имеет основополагающее значение. Интересно, однако, что Пачоли рассматривает божественную пропорцию» с космологических позиций в пифагорейско-платоновском духе, не привязывая ее к архитектуре, живописи или к какому-либо другому искусству. Об этом говорит тот факт, что Пачоли в «Трактате об архитектуре», образующем последнюю часть книги, о золотой пропорции не упоминает. Иначе говоря, для Пачоли золотая пропорция — это прежде всего христианизированный математико-космический феномен.

Пачоли славен не только математико-гармоническими изысканиями. Его математические достижения в целом также имеют непреходящее значение.

В 1494 г. Пачоли публикует на итальянском языке математический труд под названием «Сумма арифметики, геометрии, дробей, пропорций и пропорциональности» (Summa di arithmetica, geometrica, proportione et proportionalita). В этом сочинении излагаются правила и приемы арифметических действий над целыми и дробными числами, задачи на сложные проценты, решение линейных, квадратных и отдельных видов биквадратных уравнений. Пожалуй, самое существенное нововведение Пачоли состоит в систематическом использовании синкопированной алгебраической записи — своеобразной предшественницы последующего символического исчисления. Из задач, привлёкших внимание математиков последующих поколений, следует отметить задачу о разделе ставки при незавершённой игре. Эту задачу Лука решил неправильно, но позднее она стала оселком, на котором оттачивалось математическое искусство. В конечном итоге эта задача способствовала возникновению и становлению теории вероятностей.

2.2. Теория симметрии и Леонардо да Винчи

Существует тиражируемое мнение, что термин золотая пропорция (*aurea sectio*) впервые употребил Леонардо да Винчи. Так ли это на самом деле, нам установить не удалось. Возможно, Леонардо, исследуя структуру многоугольников и многогранников, сталкивался с золотой пропорцией, известной ему по книге Пачоли. Но для Леонардо, скорее всего, золотая пропорция была лишь проявлением одного из видов симметрии. А последней он уделял очень много внимание, проектируя свои знаменитые ансамбли. Так, Герман Вейль (Вейль, 2007, с. 91–92, 100–101), отмечает, что простейшими фигурами, обладающими возможными вариантами поворотной симметрии, являются правильные многоугольники, которые строятся в двухмерном пространстве. Это хорошо понимал Леонардо да Винчи (Вейль, 2007, с. 91, 100). Число таких многоугольников определяется числом граней, стремящегося к бесконечности. При повышении размерности пространство до 3 число многогранников не бесконечно. Их только пять. Обычно их называют платоновыми телами. Это правильный тетраэдр, куб, октаэдр, а также додекаэдр, гранями которого являются двенадцать правильных пятиугольников, и икосаэдр, ограниченный двадцатью правильными треугольниками. Вейль отмечает, что «существование первых трех многогранников является весьма тривиальным геометрическим фактом. Но открытие факта существования последних двух, несомненно, было одним из наиболее выдающихся и прекрасных открытий, сделанных на протяжении всей истории математики» (Вейль, 2007, с. 100). Различие двух групп многогранников заключается в том, что куб и октаэдр имеют одну и ту же группу симметрии, потому что, если взять центры граней куба и «натянуть» на них многогранник, получится октаэдр, и, наоборот, центры граней октаэдра являются вершинами куба. По той же причине додекаэдр и икосаэдр имеют одинаковые группы симметрии (Винберг, 2001, с. 19–20).

Вейль также отмечает, что Леонардо да Винчи всегда волновала проблема выбора формы центрального здания в архитектурных ансамблях, а также, каким образом нужно производить пристройку к ним часовен и ниш, не разрушая симметрии ядра ансамбля.

2.3. Решение уравнений четвертой и третьей степеней

Лука Пачоли закончил раздел об алгебраических уравнениях книги «Суммы» замечанием о том, что для решения кубических уравнений $x^3 + b = ax$ и $x^3 + ax = b$ искусство алгебры еще не дало способа, как не дан еще способ разрешения квадратуры круга. Эти слова Пачоли послужили отправным пунктом для итальянских алгебраистов в решении кубических уравнений. Открытие этого решения было крупным математическим достижением эпохи Возрождения, сохранившим свое значение до настоящего времени. Если же говорить о математике гармонии, то решение такого уравнения имеет отношение к теории уравнений, обобщающих идею золотого сечения. Речь идет прежде всего о кубических уравнениях Падована-Газале и Алексея Стахова (Газале, 2002, с. 147; Стахов, 2003, с. 10).

Первым удалось решить один из видов кубического уравнения $x^3 + ax = b$ ($a,b>0$) профессору Болонского университета Сципионе дель Ферро (1456–1526), а вслед за ним и независимо от него уроженцем Брешии Никола Тарталье (1500–1557), который решил и другие виды кубических уравнений. Формулу Тарталья опубликовал Джираломо Кардано (1501–1576) в своем знаменитом трактате «Великое искусство» (1545 г.). И хотя она фигурирует в истории математики под именем Кардано, но подлинным автором является Тарталья. Кстати, с именем Кардано связаны и другие достижения изобретательного ума – карданный вал и решетка Кардано: может быть, потому, что кто-то изобретал, а он публиковал?

Любопытно, что формулу Кардано использовал М. Газале (Газале, 2002, с. 158) при вычислении серебряного сечения, предложенного архитектором Падованом. Для уравнения $x^3 + ax = b$ формула Кардано имеет вид:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}.$$

Подставив в это выражение $a = -1$ и $b = 1$, можно найти решение уравнения $p^3 - p - 1 = 0$:

$$p = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{23}{108}} + \frac{1}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{23}{108}} - \frac{1}{2}} \approx$$

$$\approx \sqrt[3]{0{,}461479103 + 0{,}5} - \sqrt[3]{0{,}461479103 - 0{,}5} \approx$$

$$\approx 0{,}986991206 + 0{,}3377226751 \approx 1{,}324717957,$$

что с точностью до десяти значащих цифр, совпадает со значениями, вычисленными путем последовательных итераций выражения

$$\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \ldots}}}} \to p$$

Как отмечает Карл Б. Байер (Boyer,1989, p. 282), а вслед за ним и Мидхад Газале (Газале, 2002, с. 160), год опубликования Кардано (1545) способа решения кубического уравнения ознаменовал начало современной эпохи в математике. От себя добавим, что эта дата является также предвестником становления теории уравнений высоких порядков, связанных с золотым сечением и числами Фибоначчи.

Кардано включил в свою книгу ещё одно открытие, сделанное его учеником Лодовико (Луиджи) Феррари: общее решение уравнения четвёртой степени.

Итальянские математики дель Ферро, Тарталья и Феррари решили проблему, с которой несколько веков не могли справиться лучшие математики мира. При этом они обнаружили, что в решении иногда появлялись «странные» корни из отрицательных чисел. После анализа ситуации европейские математики назвали эти корни «мнимыми числами» и выработали правила обращения с ними, приводящие к правильному результату. Так в математику впервые вошли комплексные числа.

Важнейший шаг к новой математике сделал француз Франсуа Виет (1540–1603). Он окончательно сформулировал символический метаязык арифметики — буквенную алгебру.

Еще одно великое великое открытие XVI века — изобретение Джоном Непером логарифмов, которое во много раз упростили сложные расчёты

И наконец, уже в самом конце XVI столетия фламандец Симон Стевин (1548–1620) издаёт книгу «Десятая» о правилах действий с десятичными дробями, после чего десятичная система одерживает окончательную победу и в области дробных чисел. Стевин также провозгласил полное равноправие рациональных и иррациональных чисел, решив тем самым одну из самых острых проблем, которая в глубокой древности озадачила мудрых греческих математиков и повернула вектор их исследований в сторону геометрии.

2.4. Теория перспективы

Евклид в разделе «Оптика» своих «Начал» сформулировал впервые правила наблюдательной перспективы, а также вывел законы отражения лучей от плоских, вогнутых и выпуклых зеркал. Учение о перспективе позднее были изложены в трактате «Десять книг об архитектуре» древнегреческого ученого и архитектора Витрувия, который изложил правила построения перспективы, а также составления архитектурно-строительных чертежей, содержащих план и фасад зданий.

В эпоху Возрождения начинается новый этап в развитии теории перспективы. Леон Баттиста Альберти в трактатах «О живописи» и «О зодчестве» изложил математическую теорию пропорций, основываясь на пропорциях человеческого тела. В перспективных построениях Альберти применил метод построения изображения расположенных друг за другом равных и параллельных отрезков, заключенных между двумя линиями, пересекающимися на линии горизонта.

Большой вклад в теорию перспективы внес и Леонардо да Винчи. В «Трактате о живописи» он писал, что перспектива относится к «механическим наукам», которыми не должен пренебрегать ни один живописец.

Леонардо да Винчи делит перспективу на три основные части:

1. Линейную перспективу, которая учитывает закон уменьшения фигур по мере их удаления от наблюдателя.
2. Воздушную и цветовую перспективу, которая проявляется в цветности предметов, зависящей от их расстояния до наблюдателя.
3. Перспектива четкости очертания предметов в зависимости от структуры пространства и степени освещенности его частей.

Первый раздел теории перспективы впоследствии развился в точную науку — линейную перспективу, которая позднее вошла как составная часть в начертательную геометрию.

Выдающийся немецкий ученый, математик, гравер и художник Альбрехт Дюрер (1471–1528) в своем сочинении «Руководство для измерений циркулем и правилом», изданном в 1523 г., описал графический способ построения перспективы предметов с использованием ортогональных проекций, получивший в учебной литературе название «способ Дюрера». Юшкевич отмечает, что в этом сочинении приводится огромный статистический материал, содержащий измерения различных частей тела мужчин и женщин разных комплекций (Юшкевич, 1977, с. 324). Представляется, что эти результаты явились первым серьезным шагом на пути становления антропометрии и рационалистической эстетики. Заметим также, что достижения Дюрера в этой области еще ждут достойной оценки.

3. Значение математико-гармонических изысканий в эпоху Возрождения

В этот период математика впервые вышла за пределы наследства, оставленного греками и математиками Востока.

1. Мощное развитие получила алгебра и арифметика, вырвавшиеся наконец за пределы геометрии. Впервые практически сложилось понятие действительного числа. Все «плохие» числа стали естественными или, как писал Стивен, «нет никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих чисел» (Юшкевич, 1977, с. 325).

2. Существенно расширился круг представлений, связанных с гармонией. Концепция гармонии приобретала все более светский характер, становилась все более гуманистической, распространяясь не только на природу, но и на отдельного человека и человеческое общество в целом.

3. Понятие гармонии для творческого человека эпохи Возрождения находит воплощение в *искусстве проекта,* основанном на изучении множества реальных предметов с целью создания совершенного образца.

3. Впервые со времен Евклида был возобновлен разговор о золотом сечении, платоновых телах и правильных многогранниках.

4. В трудах Леонардо да Винчи, по-видимому, впервые ставится вопрос о различных видах симметрии архитектурных сооружений.

5. Серьезным математическим достижением эпохи было открытие методов решения уравнений третьей и четвертой степеней. С одной стороны это стало движущей силой для развития алгебры, а с другой, заложило основы алгебраической теории гармонии, в которой важное место занимает решения уравнения высоких степеней.

Эпоха рационализма — XVII в.

Венские бочки Иоганна
В теснинах Альп, в пещерах бесконечных,
Вдали от шума чащ, небесной бирюзы,
Неспешно вызревает сок лозы,
Во чреве венских бочек вековечных.

В тех бочках тайна есть и числовой секрет,
Изгибом явленный конических сечений,
Изяществом пропорций, измерений,
В которых Кеплер разгадал движение планет.

Но шел за годом год, сменялись поколенья,
А что осталось? — средство для храненья
Пьянящей влаги. За давностию лет

Забыт тех бочек числовой секрет,
Что мыслью Кеплера мудрейшего добыт —
Тот план загадочный в альпийском чреве скрыт.

В Европе с началом XVII в. феодальные устои постепенно разрушались под натиском молодого энергичного капитализма. Составной частью этого процесса была промышленная революция – переход от мануфактурного производства к фабричному и серия изобретений, среди которых пальма первенства принадлежит паровой машине.

Новое время было вместе с тем эпохой революции в науке. Но научная революция заявила о себе не сразу. Ее потенциал накапливался постепенно в недрах предыдущих столетий, и косное, консервативное мировоззрение с нарастающей скоростью отступало под натиском религиозных ересей, гуманистических идей Возрождения, изобретений, научных открытий, в том числе математических. В этой борьбе крепла вера в силу разума, рациональности, здравого смысла.

Великие рационалисты XVIII в. и, прежде всего, *Рене Декарт* (1696–1650), искали в природе объективную логику и находили ее в универсальных причинных связях. Но они также были убеждены в том, что в человеческом *обществе* должны господствовать логика, разум, порядок, а следовательно, право и справедливость. Все иррациональное (слепую веру, нетерпимость, невежество, логику костра и плахи) они подвергали жесточайшей критике.

Рационализм Декарта положил начало новой эпохе в науке, культуре, в характере мышления. Разум устранил из мироустройства божественное начало, объяснив всю совокупность известных фактов законами движения и взаимодействия тел. При этом, по мнению Декарта, картина мира, логически сконструированная на основе небольшого числа исходных постулатов, является однозначным, абсолютно точным и в этом смысле окончательным отображением реального мира.

Новые веяния затронули все стороны жизни: философию, науку, искусство.

1. Представление о гармонии в эстетике классицизма

Эстетика французского классицизма в первой трети XVII в. складывается параллельно с рационалистической философией Декарта (1596–1650). Основной ее принцип – «подражать природе», следуя разуму (но не чувству), рациональному (но не эмоциональному), общему (но не частному). Новая философия была направлена против вычурного и манерного искусства светских салонов, примитивного искусства народных низов, фольклора, бытового реализма, против стихийного своеволия и стихийной разнузданности бурлеска.

Картезианские идеи нашли благодатную почву в творчестве Корнеля – первой «жертвы» строгих правил в искусстве, который «добровольно нес свой крест» и тем самым подал всем драматургам пример героизма» (Гилберт, Кун, 1960, с. 219). В трех критических работах – «О функциях и частях драматической поэмы», «О трагедии», «О трех единствах» он стремился показать, что надлежащая форма, изящество и порядок могут быть введены в театре только строгим соблюдением правил (там же, с. 220). Французские деятели искусства, сохраняя в целом верность идеалам Возрождения, в холодной ясности мысли, четкости анализа, жесткой регламентации своего труда продвинулись гораздо дальше, чем итальянцы. При этом, если в эпоху Возрождения в центре внимания философов была живопись, скульптура и архитектура, то в XVII веке роль лидера берет на себя литература и прежде всего драматургия и поэзия.

Наиболее яркое воплощение идеи классицизма нашли в «Поэтическом искусстве» (1674) *Никола Буало* (1636–1711). На основе духа и буквы французского классицизма были сформулированы требования его поэтики: гармония и соразмерность частей художественного произведения, логическая стройность композиции, простота сюжета, ясность, четкость и лаконичность языка (Буало, 1957).

Такой рационализм в художественном творчестве вносил определенные коррективы в понимание гармонии. Гармоничным считалось то, что отвечало определенным наперед установленным правилам, отсеивающим все лишнее, вычурное, случайное. Буало призывает поэтов стремиться к простоте сюжета, стройности композиции, неукоснительно следовать законам языка, избегать многословия и украшательства, соблюдать меру и порядок при построении поэтических образов. Для Буало главное – смысл произведения. Но форма, как считал Буало, важна лишь в той мере, в какой она обеспечивает передачу содержания. В сущности, *согласно поэтике Буало, произведение можно считать гармоничным только тогда, когда форма эффективно обеспечивает передачу смысла.* Приведем несколько фрагментов из «Поэтического искусства», в которых фигурирует слово «гармония»:

«…Велел гармонии к ногам рассудка пасть
И разместив слова, удвоил тем их власть».

«Гармония стиха меня не привлечет,
Когда для уха чужд и странен оборот».

«Пусть гармоничное, изящное творенье
Богатством образов дарует наслажденье».

«Поэму стройную, чей гармоничен ход,
Не прихоть легкая, не случай создает».

Но нужно сразу же оговориться, что отношения между неоклассическим искусством и наукой были не столь безоблачными. Если в искусстве в качестве эталона строгости и порядка выступал Аристотель, то в науке образцом для подражания был Демокрит. Декарт, Спиноза, Лейбниц, Локк, Паскаль, Кеплер, Паскаль и др. были людьми, обладавшими здравым смыслом, практической сметкой, научной интуицией, но их строгий и дисциплинированный ум далеко не всегда был склонен поддаться воздействию легкомысленных фантазий и поэтических образов, которые казались им не слишком серьезными. «Я согласен, – писал Локк (1632–1704) о произведениях, блещущих остроумием и фантазией, – что в беседах, от которых мы ждем удовольствия и услады, а не научных знаний и моральных поучений…. словесные украшения … вряд ли можно осуждать. И все же, если говорить откровенно, то следует признать, что все искусство риторики, кроме вопросов порядка и ясности, вся деланность и вычурность речи, придуманная во имя красноречия, направлены лишь к тому, чтобы внушить людям ложные понятия, разжигать страсти и тем самым создавать неправильное мнение, и поэтому они действительно ведут к обману» (Локк, 1898: цит. по: Гилберт, Кун, 1960). Лейбниц был весьма одаренным и разносторонним ученым, но и он позволял себе весьма недвусмысленные высказывания о «долевой» значимости науки и искусства. Вот две его весьма откровенные фразы. Первая: «Я в самом деле рад, что Драйден получил тысячу фунтов за своего Вергилия, но хотел бы, чтобы Галлей мог иметь в четыре раза больше, а Ньютон – в десять раз»; «Я очень сожалею о погибших во время пожара в Уайтхолле картинах Гольбейна. И все же я склонен согласиться с русским царем*, сказавшим мне, что он больше восхищается некоторыми хорошими машинами, чем собранием прекрасных картин, которые ему показывали в королевском дворце» (цит. по: Гилберт, Кун, с. 222).

* Имеется в виду Петр I.

Главный идеолог рационализма Декарт, отдавая явное предпочтение математическим и логическим стандартам, настроен менее решительно в пренебрежительном отношении к искусству. Более того, он возрождает теорию Аристотеля, касающуюся того, что между *чувством и объектом восприятия существует пропорция*, которая регулирует отношения между красотой и удовольствием, т. е. и красота и удовольствие по Декарту означает только отношение нашего суждения к предмету. Таким образом, гармония связанная с красотой, определяется не только внутренней организацией объекта реального мира или произведения искусства, а прежде всего *пропорцией стимула и отклика*. *Пропорциональность такого рода Декарт связывал с идеалом золотой середины* (Гилберт, Кун, 1960, с. 225). В более позднее время сходные идеи высказывались представителями экспериментальной психологии, измерявшими приращение реакции в зависимости от приращения стимула. Плодом этих усилий явился закон Вебера-Фехнера, согласно которому при возрастании силы раздражителя в геометрической прогрессии интенсивность ощущения возрастает в арифметической прогрессии (Штерн, 2003, с. 49–50).

Декарт считал, что «то ощущение, или состояние, интервал, или ритм, доставляет удовольствие, которое не надоедает и не утомляет. В эстетической практике следует избегать крайностей: с одной стороны запутанных, сложных фигур, а с другой монотонности и незавершенности» (Гилберт, Кун, 1960, с. 225). Такая интерпретация пропорциональности и гармонии и эстетики напрямую соотносится с представлениями перцептивной эстетики XX века. Так, согласно теории Айзенка, количество энергии, необходимой для восприятия эстетического объекта обратно пропорционально эстетическому удовольствию (Eysenck, 1942). С идеями Айзенка тесно соприкасается и информационная эстетика Макса Бензе, устанавливающая зависимость эстетического удовлетворения от оптимального соотношения между упорядоченностью и сложностью воспринимаемого объекта (Bense, 1969). Обратим внимание на то, что такой вариант гармонии в математико-гармонических изысканиях еще ждет своей интерпретации и исследования.

2. Механистические представления и математика

Физический мир начинают мыслить как своего рода гигантский механизм, части которого работают по неизменным законам. Нередко Вселенную сравнивают с часами.

Этот образ в применении к греческой системе небесных сфер впервые использовал Николай Орем, сравнивший Бога с мастером, который, изготовив часы, предоставляет им затем ходить самим в соответствии с установленным порядком. С часами, которые движутся под действием тяжести, сравнивал «небесную машину» и Кеплер. Декарт пошел еще дальше. Оставляя сознание только человеку, он уподобил ходу часов, состоящих только из колес и пружин, даже жизнедеятельность животных и их органов.

Но если мир, по крайней мере, физический, представляет собой машину, то средством познания его должна быть механика. А поскольку механика развивалась теперь как наука математическая, то математика приобретала значение универсального метода физического познания.

Одной из непосредственных причин научного прогресса в эпоху рационализма явилось радикальное изменение в отношениях между наукой и техникой. Меняется социальная функция науки и ученого. Многие крупные математики были одновременно и инженерами, и конструкторами. Еще чаще, чем инженером, математик нового времени бывал одновременно астрономом, механиком, физиком и даже философом и поэтом. В целом наука этого периода отличалась удивительной гармонией науки и искусства эксперимента и теории, науки и практики.

В XV в. математические исследования гигантски расширяются. Возникает несколько новых наук: аналитическая геометрия, проективная геометрия, теория вероятностей, а главное, исчисление бесконечно малых. За один этот век математика обогатилась большим числом методов и понятий, чем за предыдущие 15 столетий.

Великие мыслители семнадцатого века и прежде других Декарт, искали общий метод мышления, который бы позволял быстрее делать изобретения и выявлять истину в науке. Так как единственной наукой о природе, обладавшей в известной мере систематическим строением, была тогда механика, а ключ к пониманию механики давала математика, то математика стала наиболее важным средством для понимания Вселенной. Более того, математика со своими убедительными утверждениями сама была блестящим примером того, что в науке можно найти истину. Исключительная роль математики нашла отражение в книге Декарта «Рассуждение о методе» (Декарт, 1953) . Свою «Геометрию» он изложил в сущности на языке алгебры, включавшей в себя всю классическую геометрию. Тем самым был завершен процесс алгебраизации геометрии.

Математика этой революционной эпохи огромна. Она получила не только новое дыхание, она по существу пережила второе рождение. И в сонме идей, концепций методов трудно разыскать те, которые имеют самое непосредственное и явное отношение к математико-гармоническим изысканиям. Придется общаться с тем материалом, о котором просто невозможно не упомянуть.

3. Теория симметрии

В предыдущем очерке (Мартыненко, 2010) мы говорили о некоторых симметрийных представлениях в эпоху Возрождения, принадлежащие Леонардо да Винчи. Достижения великого Леонардо в этой области были существенно обогащены Иоганном Кеплером. Симметрийные идеи изложены Кеплером в его шутливой миниатюре «О шестиугольных снежинках» (Кеплер, 1983), которая представляет собой собрание небольших изящных «новелл», отличающихся изысканным и непринужденным стилем, в котором Кеплер проявил себя не только как выдающийся ученый, но и талантливый, ироничный писатель.

После шутливого вступления, первую «новеллу» «Снежные звездочки» Кеплер начинает так: «Но шутки в сторону – займемся делом. Поскольку всякий раз, когда начинает идти снег, первые снежинки имеют форму шестиугольной звезды, то на это должна быть определенная причина». И далее астроном виртуознейшим образом раскрывает эти причины при помощи ироничной логики, которую так впоследствии обожал Альберт Эйнштейн. Надо признать, однако, что в технике иронии, Эйнштейн, безусловно, великому Иоганну уступал. Удивителен также набор примеров, выстроенный Кеплером: пчелиные соты, цветы, зерна граната, правильные ромбические тела, горошины, лепестки, тела животных, морозные узоры. И уже в самом конце автор дает ответ на вопрос, от чего зависит шестиугольная форма снежинок и шестиугольная форма чего бы то ни было в природе. Кеплер завершает свое исследование практическими советами ботаникам, минерологам и химикам, призывая их обратить внимание на геометрические фигуры, которые встречаются в их повседневной работе.

В книге Кеплера нет детальных математических выкладок. Но в отличие от многих исследователей (предшественников, современников и последователей, включая и тех которые живут в XXI в.), Кеплер, концентрирует внимание на физических причинах формообразования. Такой подход в XVII был новаторским. Следует признать, что толкование траектории формообразования по Кеплеру находит сторонников даже среди современных кристаллографов в их воззрениях на природу кристаллографических структур (Шафрановский, 1971, 1978). Высокие научные достоинства кеплеровского трактата о шестиугольных снежинках отмечает и академик В. И. Вернадский: «Первой научной работой в кристаллографии явился небольшой труд Кеплера «О снеге». В нем впервые точно и ясно выражен закон о сохранении постоянства гранных углов, правда, для одного вещества – снега. Эта работа явилась следствием увлечения Кеплера гармонией мира, его исканий разнообразных численных и геометрических соотношений в природных явлениях. Значение работы заключается в том, что он впервые доказал, что кристаллы подчиняются законам геометрии» (Вернадский, 1904, с. 15, цит. по: Кеплер, 1983, Комментарии, с. 188).

Интересны также некоторые частные задачи Кеплера, например, задачи об оптимальной упаковке шестиугольников, треугольников и шаров. Так, наибольшая плотность упаковки достигается при пирамидальном упорядочивании шаров друг над другом (Schneer, 1960). Математически доказать этот факт не удавалось на протяжении 400 лет — первое сообщение о доказательстве «задачи Кеплера» появилось лишь в 1998 году в работе математика Томаса Хейлса.

К рассмотренной книге Кеплера примыкает еще одна его интересная работа «Новая стереометрия винных бочек» (1615) (Кеплер, 1935), в которой рассматривается способ определения объёмов разнообразных тел вращения (не только бочек). С помощью вращения дуг, образованных коническими сечениями (параболой, гиперболой и эллипсам, а также их частями) он строил стереометрические тела с центральной симметрией в форме «яблока», «лимона», «груши», «айвы», «сливы» и др. (всего 92 формы).

4. Золотое сечение и числа Фибоначчи

В работе о снежинках Кеплера есть очень интересный раздел под названием «Правильные тела, основанные на числе пять, и их возникновение из божественных пропорций». Здесь Кеплер говорит о том, что два правильных многоугольника – додекаэдр и икосаэдр – обладают одним замечательным свойством. Первый ограничен правильными пятиугольниками, а второй – равносторонними треугольниками, которые тесно прилегают друг к другу так, что образуются *пятигранные* пространственные углы. Причем построение таких углов невозможно без пропорции, которая со времен Луки Пачоли именуется божественной. Кеплер пишет, что «устроена она так, что два младших члена этой нескончаемой пропорции в сумме дают третий член, а любые два последних члена, если их сложить, дают следующий член, причем та же пропорция сохраняется до бесконечности» (Кеплер, 1983, с. 17), т. е. Кеплер определяет золотую пропорцию через суммативное правило последовательности Фибоначчи. Таким образом, *впервые идея золотого сечения трактуется с позиций рекуррентной последовательности*. После этого Кеплер приводит пример классической последовательности с двумя начальными затравочными единицами. Наращивая числовой ряд, Кеплер говорит (хотя и не совсем строго) о том, что отношение последующего члена к предыдущему устремляется к постоянной величине.

По образцу такой, как говорит Кеплер, «саму себя продолжающей пропорции», строятся различные природные тела пятиугольной формы. Примером такой фигуры является пятилепестковый цветок, характерный для большинства деревьев и кустарников.

Кеплеру принадлежит еще одно серьезное достижение, связанное с золотым сечением. Речь идет о так называемом треугольнике Кеплера, который рассматривается в книге Марио Ливио (Livio, 2002, с.149). Прямоугольный треугольник Кеплера сочетает в себе два математических свойства: теорему Пифагора, которая формирует суммативное правило золотого сечения и мультипликативное правило, связанное со средним геометрическим (больший катет равен среднему геометрическому из меньшего катета и гипотенузы). По словам Марио Ливио, именно это сочетание дало основание Кеплеру произнести крылатую фразу: «Геометрия таит в себе два великих сокровища. Одно из них – теорема Пифагора, другое – разделение отрезка на две части в крайнем и среднем отношении. Первое подобно слитку золото, второе же – драгоценному камню».

Числами Фибоначчи и золотым сечением увлекался и знаменитый французский астроном Джованни Доменико Кассини (1625–1712). Он предложил изящную формулу, вошедшую в историю как правило Кассини, устанавливающему связь между квадратом любого числа в последовательности Фибоначчи и произведением контактных с ним обрамляющих чисел (Гиндикин, 2001; Стахов, 2005).

5. Математическая гармония космоса

Кеплер в книге «Космографическая тайна», опубликованной в 1595 г. (Kepler, 1595), обратился к идеям Платона и платоновым телам, чтобы построить теорию планетарных расстояний с помощью правильных многогранников, попеременно вписанных в сферы и описанных около сфер. Кеплер решил, что он разгадал замысел создателя и смог расчислить гармонию сфер. По Кеплеру шесть сфер, соответствующих шести планетам – Сатурну, Юпитеру, Марсу, Земле, Венере и Меркурию, разделяются кубом, тетраэдром, додекаэдром, октаэдром и икосаэдром. Он пытался найти причины того, почему создатель выбрал существующий порядок планет, опираясь на математические свойства многогранников. Его книга завершается могучим апофеозом, в котором заключен символ его веры: «Верую, что божественность в мире обширна» (Credo spatioso numen in orbe). Приводя эти слова, Герман Вейль пишет: «Мы и поныне разделяем его убеждение в математической гармонии вселенной. Это убеждение подтверждено критерием беспрерывно расширяющегося опыта. Но ныне мы ищем эту гармонию не в статических формах, подобных правильным многогранникам, а в законах динамики» (Вейль, 2007, с. 101–102). Но правильные многогранники, вопреки мнению Вейля, также не исчерпали свой потенциал, совершив уже в XIX столетии выход на математическую авансцену в теории конечных групп Галуа (Стилвел, 2004, с. 39).

Что же касается Кеплера, то на момент создания своей первой космогонической теории он, конечно, ничего не знал о трех внешних планетах Солнечной системы – Уране, Нептуне и Плутоне, открытых, соответственно, в 1781, 1846 и 1930 гг. Одним словом, теория Кеплера рухнула, когда был открыт Уран.

В последующие годы Кеплер совершенствовал свою систему на основе теории конических сечений греческих математиков, обнаружив после тщательного анализа накопленных астрономических измерений, что орбиты планет имеют форму эллипса, в одном из фокусов которого находится солнце. Эта констатация известно как первый закон Кеплера.

Затем был сформулирован второй закон: радиус-вектор, соединяющий планету и Солнце, в равное время описывает равные площади. Это означало, что чем дальше планета от Солнца, тем медленнее она движется.

Оба закона были сформулированы Кеплером в 1609 году в книге «Новая астрономия», причём, осторожности ради, он относил их только к Марсу.

Новая модель движения вызвала огромный интерес среди учёных-коперниканцев, хотя не все её приняли. Галилей кеплеровы эллипсы решительно отверг, а Кассини вместо эллипсов предложил свои овалы (кривые четвертого порядка).

Тем временем Кеплер продолжает астрономические исследования и в 1618 г. открывает третий закон: отношение куба среднего удаления планеты от Солнца к квадрату периода обращения её вокруг Солнца есть величина постоянная для всех планет. Этот результат Кеплер публикует в завершающей книге «Гармония мира», причём применяет его уже не только к Марсу, но и ко всем прочим планетам.

Отметим, что в книге, наряду с ценнейшими научными открытиями, изложены также фантастические рассуждения автора о «музыке сфер» и платоновых телах, которые составляют, по мнению Кеплера, эстетическую суть высшего проекта мироздания. Во всем, что касалось гармонии, Кеплер всегда был верен себе, он верил в нее до конца жизни и в 1621 году переиздал «Тайну мира», внеся в нее многочисленные изменения и дополнения.

Законы планетной кинематики, открытые Кеплером, послужили позже Ньютону основой для создания теории тяготения. Ньютон математически доказал, что все законы Кеплера являются следствиями закона тяготения.

Система мира Кеплера претендовала не только на выявление законов движения планет, но и на гораздо большее. Аналогично пифагорейцам, Кеплер считал мир реализацией некоторой числовой гармонии, одновременно геометрической и музыкальной. «Я выяснил, – писал он, – что все небесные движения, как в их целом, так и во всех отдельных случаях, проникнуты общей гармонией — правда, не той, которую я предполагал, но ещё более совершенной». В «Гармонии мира» он утверждает, что человеческая душа способна «резонировать» с лучами света, исходящими от небесных тел, она запечатлевает в памяти конфигурацию этих лучей в момент своего рождения. В последнее время много говорится о влиянии космоса на человека и человеческую историю. Может быть, во многом Кеплер был не слишком далек от истины.

6. Комбинаторика

Термин «комбинаторика» родился именно в данную эпоху. Впервые он появился в «Рассуждении о комбинаторном искусстве» Лейбница. Эту работу можно считать заявкой на открытие нового отдела математики под названием «комбинаторика».

Крупный вклад в становление и развитие комбинаторики внес Блез Паскаль (1623–1662), переоткрывший арифметический треугольник, который был известен в Индии еще в X в. Этот треугольник выглядит так:

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

Числа этого треугольника являются коэффициентами в формуле бинома $(a+b)^n$. Придавая различные значения *n*, получаем:

при $n=0$ $(a+b)^0=1$,
при $n=1$ $(a+b)^1=a+b$,
при $n=2$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,
при $n=3$ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+b^3$ и т. д.

Арифметическому треугольнику было присвоено имя Паскаля не случайно и вполне заслуженно. В своем треугольнике он объединил алгебру и комбинаторику, так как элементы арифметического треугольника можно интерпретировать двумя способами: как коэффициенты в разложении бинома и как число сочетаний из *n* элементов по *k*. Треугольник нашел применение в теории вероятностей в задаче о разделе ставок. В треугольнике Паскаля на вершине и по бокам расположены единицы, а каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Продолжать треугольник можно бесконечно.

Несмотря на то, что треугольник Паскаля удивительно прост, он, как отметил выдающийся американский математик и писатель Мартин Гарднер, «*таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике*» (Гарднер, 2000).

Отметим некоторые свойства арифметического треугольника:

1. Каждое число равно сумме двух вышестоящих.
2. Третье число каждой строки является треугольным.
3. Четвертое число каждой строки является тетраэдрическим.
4. Сумма чисел *n*-й восходящей диагонали, проведенной через строку треугольника с номером $n-1$, есть *n*-е число Фибоначчи: 1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 1+3+1=5, 1+4+3=8, 1+5+6+1=13, 1+6+10+4=21 и т. д.

5. Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n.

Первое свойство представляет собой рекуррентное суммативное правило.

Второе и третье свойство относятся к теории чисел, конкретнее – к фигурным числам, которые изучались еще в пифагорейские времена.

Четвертое свойство треугольника напрямую связано с числами Фибоначчи. Интересно, однако, что в треугольнике можно обнаружить и другие версии фибоначчиевых чисел. Для этого обычно пользуются сдвигом строк треугольника или наклонными линиями («диагоналями») (см., например, Пойя, 1976, с. 113–114; Газале, 2002, с. 34–36; Стахов, 2003).

Не все свойства треугольника были известны Паскалю. Ведь и по сей день исследователи находят все новые и новые свойства в этой замечательной структуре, связанные с теорией фракталов, теорией симметрии, теорией чисел, теории систем и др. (Абачиев, 2010, Кузмин, 2000, Успенский, 1979 и др.).

Что касается обсуждаемой эпохи, то идею арифметического треугольника Лейбниц распространил на гармонический ряд чисел, т. е. на числа, обратные числам натурального ряда. В историю он вошел как *гармонический треугольник* или *гармонический треугольник Лейбница* (Darling, 2004).

7. Системы счисления

К началу XVIII века относится работа Лейбница «Изложение двоичной арифметики, для которой достаточно только двух цифр 0 и 1, с замечаниями о ее пользе и о том, что она дает древним китайским фигурам Фохи» в 1759 г., были опубликованы письма Лейбница Якобу Бернулли и другим математикам по этому вопросу. Двоичная система состоит в том, что каждое целое число представляется в виде:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots + a_k \cdot 2^k + \ldots \ ,$$

где $a_k = 0$ или 1. Такое представление чисел лежало в основе древнеегипетского правила умножения чисел, и его же применяли Леонардо Пизанский в «Книге абака» и Лука Пачоли в «Сумме арифметики» при решении задачи о минимальном числе гирь, необходимом при взвешивании всех грузов, не превосходящих некоторого предела. Двоичная система рассматривалась также Дж. Непером (1617), а английский философ Фрэнсис Бэкон на основе двоичной системы составил специальный шифр.

Все это не поколебало десятичной системы, но двоичная система благодаря исключительной простоте, которую подчеркивал Лейбниц, получила позже применение в теоретико-информационных, кибернетике и вычислительной математике. В современных компьютерах используются обычно используются двоичные системы счисления. Но в последние годы стали конструироваться компьютеры, построенные на системах счисления, связанных с числами Фибоначчи (Стахов, 1977).

8. Непрерывные дроби, бесконечные произведения, бесконечные ряды

Числа натурального ряда являются одним из краеугольных камней математики. Краеугольными камнями математики являются, великие математические константы, например, числа *e, π и φ*. Можно поставить вопрос, связаны ли эти константы с целыми числами и друг с другом? Можно сформулировать вопрос еще шире: можно ли вычислить значения различного рода иррациональных чисел с любой степенью точности, пользуясь только целыми числами?

Оказалось, что такие способы существуют, и они достаточно просты.

Все началось с поиски наиболее простых способов приближенного выражения квадратных корней. Они привели профессора в Болонье Пьетро Антонио Катальди (1548–1626) к открытию *непрерывных (цепных) дробей*, позволяющих построить рациональное приближение любых квадратичных иррациональностей. Заслугой Катальди является выделение самого понятия непрерывной дроби. Он заметил также, что значения непрерывной дроби заключено между последовательными подходящими дробями.

В дальнейшем идеи Катальди были реализованы в «Арифметике бесконечных» Валлиса и работе Броукера, которым принадлежит изящное представление числа π в виде бесконечной непрерывной дроби:

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}$$

Валлис был первым математиком, который смело обращался к бесконечным процессам, вводя в анализ бесконечные ряды, бесконечные произведения, бесконечные дроби.

Позднее для того же выражения $\frac{\pi}{4}$ Лейбниц нашел еще более изящное выражение в виде знакопеременной суммы на основании свойств своего гармонического треугольника:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}....$$

Эта формула, как и многие ей подобные, очень просты и грациозны, если под грацией понимать динамическую гармонию (Краткий словарь по эстетике, 1983, с. 34). Вот, например, как характеризует бесконечный ряд Лейбница, русский математик Жуков: «Разве не содержит формула Лейбница…. изящный мотив: от такта к такту (от одного элемента к другому) повторяющуюся сумму (аналог орнамента с переносной симметрией)? В этом математическом «звукоряде» тесно переплетаются две противоборствующие мелодии – одна соответствует знаку «+», другая – знаку «–». … Изящная закономерность, которой подчиняются знаменатели бесконечной вереницы дробей – еще одна прекрасная форма, подчеркивающая красоту основного орнаментального мотива» (Жуков, 2004, с. 131).

Этот список эстетически значимых структур может быть продолжен. Так, Эйлер предложил такую радующую глаз правильностью и гармоничностью непрерывную дробь для числа *e:*

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}}}$$

Но наиболее простой и изящной структурой является бесконечный радикал для золотого числа φ, открытый американским исследователем Натаном К. Альтшиллером. Но это произошло только в XX веке – в 1917 г.

Радикал выглядит так:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1....}}}}$$

Несколько позднее для числа φ была отрыта и непрерывная дробь:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

Перечисленные варианты предельных значений основаны на математическом осознании идеи бесконечности, столь популярную в математике этого времени (вспомним хотя бы о теории бесконечно малых и теории предела и различных вариантах приближенных вычислений). Наверное, Паскаль был прав, сказав, что в «математике мы имеем дело с бесконечной бесконечностью соотношений» (Паскаль, с. 38).

9. Теория уравнений

Декарт в своих «Правилах для руководства ума» стремился дать универсальный метод решения задач. Воспользуемся наброском схемы, которую, как полагает Д. Пойя (Пойя, 1976), построил Декарт и которая может оказаться пригодной ко всем видам решаемых задач:

Первое: задача любого вида сводится к решению математической задачи.

Второе: математическая задача любого вида сводится к алгебраической задаче.

Третье: любая алгебраическая задача сводится к решению одного-единственного уравнения.

Проект Декарта был очень смелым и даже в чем-то важным правильным, но осуществить его на практике было крайне трудно и в конце концов он потерпел неудачу. Однако, несмотря на это, как отмечает Пойя (там же, с. 45), «это был великий проект, и, даже оставшись нереализованным, он оказал большее влияние на науку, чем тысяча малых проектов, в том числе тех, которые удалось реализовать».

Решение кубических уравнений в начале XVI в. было первым очевидным успехом в европейской математике со времен греков. Оно выявило мощь алгебры, которую греки не могли покорить. Еще одним человеком в XVI в., внесшим серьезный вклад в алгебру, был Франсуа Виет (1540–1603), освободивший алгебру от геометрических доказательств, подобных тем, которым пользовался Евклид при обосновании золотой пропорции.

Впечатляющие успехи, достигнутые при решении кубического уравнения, увеличило надежды ученых, что и уравнения более высокой степени также могут быть решены с помощью так называемых радикалов. Это стало одной из самых центральных задач алгебры следующих столетий. Такие попытки предпринимались и в рассматриваемую эпоху.

Первым, кто смело и непринужденно обращался с алгебраическими уравнениями, был Ньютон в своем исследовании кривых третьего порядка (1703 г.). Ньютон построил систематику кривых третьего порядка и способы приближенного решения уравнений более высоких порядков. Огромное внимание этой проблеме уделяли и другие ученые, включая Эйлера.

Однако все попытки решить уравнение пятой степени в радикалах заканчивались неудачей. Самое большее, что удавалось сделать, – это привести его к виду $x^5 - x - 5 = 0$ только с одним параметром. Это было сделано Брингом (1786 г.) (Стилвел, с. 107). Результат Бринга появился в безвестном издании и оставался незамеченным в течение 50 лет, но заронил надежду на решение уравнений пятой степени с помощью радикалов. Однако Руффи (1799) предложил первое доказательство того, что это невозможно. Доказательство Руффи было не вполне убедительным, но он был реабилитирован, когда Абель (1826) дал убедительное доказательство того, что решение уравнений пятой и более степеней с помощью радикалов невозможно. Позднее он сделал это еще раз с помощью новой теории Галуа (1836).

10. Теория вероятностей и статистика

Задачи, которые оказали существенное воздействие на становление и развитие теории вероятностей, возникали в статистике: в практике деятельности страховых обществ, в государственной статистике, при обработке результатов астрономических наблюдений, в азартных играх, которые также были частью жизненной практики. Разработка вероятностных вопросов было тесно связано и с комбинаторикой, о которой мы говорили выше. Определенное влияние на развитие вероятностной теории оказывала проблема необходимости и случайности, которая ставилась в философии.

Большинство первых вероятностных задач связано с азартными играми, которые предоставляли исследователям наглядные модели и схемы и даже вероятностную терминологию.

Как мы уже отмечали, подсчетом очков при игре в кости занимались и крупнейшие математики XVI в.: Дж. Кардано, Н. Тарталья и др. Они же решали и задачу о справедливом разделе ставки, поставленную еще в 1494 г. Лукой Пачоли. При решении других задач вероятностного характера в работе «Об азартной игре», увидевшей свет только в 1663 г., Кардано фактически уже пользовался теоремами сложения и умножения вероятностей, а также близко подошел к классическому определению вероятности (Юшкевич, с. 82). Четверть века спустя Я. Бернулли установил закон больших чисел, носящий его имя.

В 1664 г. между Паскалем и Ферма завязалась переписка по поводу ряда задач, в том числе и задачи о разделе ставки. В ходе переписки они приходят к верному решению этой задачи, используя вероятностный подход путем разделения ставки пропорционально выигрышу всей ставки, если игра будет продолжаться неопределенно долго.

Первым руководством по теории вероятностей была книга великого голландского ученого Христиана Гюйгенса (1629–1695). В своей книге «О расчетах в азартной игре» (1657) Гюйгенс писал: «Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы глубокой и интересной теории » (цит. по: Юшкевич, с. 89). Гюйгенс вводит понятие математического ожидания и способы его вычисления в различных вероятностных схемах. На практике математическое ожидание впервые применил Кеплер, назвав его средним арифметическим. Этот тип средней использовался и в античные времена в рамках теории пропорций. Кеплер же, обрабатывая обширные данные Тихо Браге, использовал понятие средней арифметической уже в статистическом смысле как результат вычисления на основе неопределенного числа измерений.

В конце XVII в. широкое распространение получили работы по политической арифметике, посвященные главным образам демографическим проблемам. В этих исследованиях положено начало исследование статистических масс. Кроме того, были обнаружены первые статистические закономерности, в частности Джон Граунт (1620–1674) показал, что число родившихся мальчиков относится к числу родившихся девочек как 14 к 13, что смертность человека больше в начале жизни, а относительная смертность от ряда болезней статистически устойчива.

11. Значение математико-гармонических изысканий в эпоху рационализма

1. Рационалисты XVIII в. были убеждены в том, что в человеческом *обществе* должны господствовать логика, разум, порядок, а, следовательно, право и справедливость. Все иррациональное (слепую веру, нетерпимость, невежество) они подвергали жесточайшей критике.

2. В пределах духа и буквы рационализма были сформулированы требования поэтики французского классицизма: гармония и соразмерность частей художественного произведения, логическая стройность композиции, простота сюжета, ясность, четкость и лаконичность языка.

3. Кеплер впервые поставил вопрос о формообразовании в природе, рассматривая тела шестиугольной и пятиконечной формы. Многие ученые, например, Вернадский, считают его основоположником кристаллографии.

4. Кеплер является автором космогонической теории, согласно которой шесть сфер, соответствующие орбитам шести планет – Сатурна, Юпитера, Марса, Земли, Венеры и Меркурия, разделяются многогранниками: кубом, тетраэдром, додекаэдром, октаэдром и икосаэдром. И хотя его гипотеза оказалась ошибочной, она, с одной стороны, способствовала развитию теории многогранников, а с другой, привела к построению тем же Кеплером новой более естественной теории, а затем – теории всемирного тяготения Ньютона.

5. Кеплер впервые связал структуру додекаэдра и икосаэдра с божественной пропорцией Луки Пачоли, а последнее – с последовательностями Фибоначчи.

6. Как научная дисциплина конституировалась комбинаторика. Блезом Паскалем был переоткрыт знаменитый треугольник, в котором Паскаль объединил алгебру и комбинаторику. Треугольник впоследствии был использован для интерпретации последовательности Фибоначчи и дочерних структур.

7. Лейбницем была открыта двоичная система счисления, которая через два века выступила в качестве математической основы вычислительных машин.

8. Катальди открыл непрерывные дроби, которые вначале использовались для приближенного вычисления квадратных корней, а затем для представления чисел e и π. Впоследствии такие дроби использовались для представления золотого числа φ и других замечательных чисел.

8. Вышел первый учебник по теории вероятностей, написанный Гюйгенсом. В этом учебнике введены основные понятия этой теории, в частности понятие математического ожидания. Кеплер перевел это понятие в понятийную область статистики, назвав его средним арифметическим. Кроме того, обрабатывая большие массивы астрономических данных, накопленным Браге, Кеплер создал прецедент массового исследования, являющегося основой статистики.

Эпоха Просвещения — XVIII в.

Де Муавр и Ньютон

На бреге крутом океана
Стоял молодой гугенот,
Его волновал непрестанный
Бушующих гребней полет.

Вдали, за туманом пролива
Ждал Ньютон-мудрец паренька.
Он знал, как легко и игриво
Тот в алгебре всех обскакал.

И вскоре, на шхуне из Гавра,
Талантом и славой звеня,
Тот прибыл в седой Альбион,

И Ньютон сказал: «Вот и он.
Джентльмены, идите к Муавру,
Он в алгебре крепче меня»

XVIII век в Европе был эпохой дальнейшего укрепления капиталистических отношений, еще более бурного, чем в предшествующую эпохи, развития науки и техники, расцвета искусства.

«Просвещение» – идейное движение в Европе XXIII в., отразившее борьбу буржуазной демократии против феодализма, абсолютистской монархии, церкви, религии. Апелляция к разуму, как и веком раньше, не утратила силы и энергии, но гимн разуму стал менее категоричным, менее настырным, фанатичным, более просветленным, вариативным и демократичным.

В целом XVIII столетие продолжало без существенных перемен линию развития эпохи Декарта, Ферма, Ньютона и Лейбница. Но в это же столетие, особенно к концу его, наметились тенденции, которые привели к новым коренным изменениям в предмете и методах математических исследований. На европейском континенте буржуазия, экономическая мощь которой также непрерывно возрастала, еще не получила политической власти. В отличие от Англии, где власть практически принадлежала парламенту, страны континентальной Европы представляли собой абсолютные дворянские монархии. Наиболее крупными из них были Франция, Австро-Венгрия и Россия. Сильнее всего была буржуазия во Франции, где в течение многих лет вызревала, а в 1989 г. произошла Великая Французская Революция.

Идеологической подготовкой революции была деятельность французских просветителей Вольтера, Руссо, Дидро и др. Крупнейшим событием духовной жизни страны было издание «Энциклопедии или Толкового словаря наук, искусств и ремесел» (1751–1772) в 28 томах.

Влияние французских идеологов эпохи Просвещения в той или иной мере сказывалось на всех странах континента. Абсолютизм во многих странах принимал форму «просвещенной монархии», а такие монархи, как прусский король Фридрих II и русская императрица Екатерина II, поддерживали образование, науку и искусство.

1. Эстетика Просвещения

В эстетике Просвещения по мере приближения к концу столетия наблюдается постепенный отход от жестких норм классицизма и концентрация внимания на разнообразии, богатстве и разноликости жизни.

Примечательно, что именно в этот период эстетика приобрела статус самостоятельной науки благодаря Готлибу Баумгартену (1714–1762). Именно он *дал определение эстетики как науки и стал основателем школы немецкой эстетики*. Это явилось выдающимся событием в истории человеческого духа. Подтверждая это, Баумгартен говорит: Нашу науку могут упрекнуть в том, что она недостойна внимания философа, что изображение человеческих свойств, грез, преданий и страстей принижает философский кругозор. Мой ответ таков: «Философ – тоже человек». И он просто не смеет отгораживаться от столь обширной области человеческого познания» (Baumgarten, 1750; цит. по: Гилберт, Кун, с. 308). Тщательно продуманная система Баумгартена предвосхитила появление «Критики способности суждения» Канта, увенчавшей XVIII в.

В основе эстетики Баумгартена лежит понятие «всесторонней ясности», под которым он понимает *количественное богатство образов*, разнообразие и богатство деталей. По Баумгартену искусство не руководствуется логической ясностью, рациональностью логических схем, в искусстве царствует другая ясность – ясность, достигаемая и богатством деталей, свойственных реальной жизни и богатством ассоциаций, возникающих в поэтическом мировосприятии, и широтой воображения поэта, изощренностью его вымысла. Но такое богатство элементов целого и их смешение должно быть гармоничным, пропорциональным и именно это определяет совершенство художественного произведения. А под совершенством он понимал *единство в многообразии*, которое не доказывается аналитически, оно схватывается и кристаллизуется художником в виде метафоры, в виде изящной словесной формулы.

Иногда в интерпретации разнообразия авторы достигали казуистической изощренности, распространяя это качество на все явления природы и духа. Так, английский теоретик искусства Фрэнсис Хетчесон утверждает (1725), что: «Подлинная красота – это восприятие, вызванное у нас приятным сочетанием форм и в первую очередь наличием единообразия на фоне разнообразия. Эта прекрасная пропорция присуща всем видам геометрических фигур и животным, а также теоремам, метафизическим аксиомам и общим истинам» (Hutcheson, 1725; цит. по: Гилберт, Кун, 1960, с. 259). Хетчесон без тени сомнения утверждает, что он нашел математический закон красоты, гласящий: «Там где тела единообразны, красота проявляется в виде разнообразия» (Там же). И далее Хетчесон приводит наглядный пример. В многоугольниках, где единообразие достигается равенством сторон, красота возрастает по мере увеличения числа сторон, т. е. благодаря разнообразию. Таким образом, по Хетчесону, например, шестиугольник красивей треугольника. И наоборот, Хетчесон считает грубыми те фигуры, которые, в которых нет единства или сходства между частями. Единообразие характерно для цилиндра, призмы, пирамиды. Любопытно, что ярким примером прекрасной теоремы, основанном на упомянутом соотношении, он считает 47-ю теорему из первой книги геометрии Евклида, а образцовой философской истиной – закон всемирного тяготения Ньютона.

Приведем еще одно радикальное толкование красоты через разнообразие, принадлежащее автору «Анализа красоты» Уильяму Хогарту (1697–1764).

Хогарт утверждает, что он раскрыл секрет, с помощью которого грекам удалось превзойти в искусствах другие народы. Этот секрет, переданный им Пифагором, назывался «аналогией» и имел определенный математический смысл. В наше время этот термин с древнегреческого переводит как «симметрия». Хогарт ставит перед собой задачу раскрыть секрет греков с точки зрения формы и движения. Этот секрет заключается в следовании разнообразию *змеевидной линии*, т. е. красота и изящество во многом зависят от того, насколько последовательно она подчиняется траектории волнообразной, змееподобной или спиралевидной линии. Линия красоты, говорит Хогарт, состоит из двух изгибов, направленных в разные стороны в форме буквы «S». Хогарт дает классификацию таких линий, но самой прекрасной считает линию, которая вьется по поверхности конуса, имея вид конусообразного движения пламени. Но Хогарту и этого было мало. Он идет дальше и истолковывает свою линию через осуществление принципа максимального линейного разнообразия. Те линии, которые отвечают максимальному разнообразию, создаю условия для проявления красоты. Перечисляя такие отвлеченные признаки красоты как соответствие, разнообразие, сложность, симметрия, четкость, величие и др., он отдает предпочтение разнообразию.

Завершая этот парад разнообразия разнообразий, обратим внимание на то, что И. И. Винкельман в своей «Истории искусства древности» (Винкельман, 1935) наивысшее проявление красоты, как и многие его предшественники, видел в теле человека. По Винкельману «эта красота заключается в гармонии частей тела человека, а также во взаимосвязи между ними, выраженной в виде функциональной эллиптической линии» (Юшкевич, 1960, с. 319). Итак, и у Винкельмана мы также попадаем во владения геометрии и разнообразия. Но Винкельман, в отличие от Хогарта, спиралевидной форме предпочитает эллиптическую. Уж нет ли здесь переклички со спиралью Архимеда и коническими сечениями Аполлония? И не будут ли цепочки «конических» спиралевидных сечений еще более совершенной линией? (Винкельман, 1935, с. 209). И не прав ли Мидхад Газале, говоря: «Мы не только живем в спиралевидной раковине», подобно самым заурядным брюхоногим, спирали нас окружают повсюду на земле, и, по всей видимости, практически не одна форма жизни без них не обходится»? (Газале, 2002, с. 14).

А теперь остановимся на эстетических представлениях эпохи на рубеже XIX в. – на эстетике великих мыслителей Германии: *Эммануила Канта* (1724–1804), *Йоганна Вольфганга Гете* (1749–1832) и *Фридриха Шиллера* (1759–1805).

Кант не сомневался в том, что эстетику можно превратить в столь же основательную и стройную систему, подобную теории познания. Эстетика Канта входит в его философию не как наука об особой области предметов или об особых свойствах предметов, которые принадлежали бы им объективно, – она вводится как исследование специфической особенности нашего суждения, обусловленные чувством удовольствия и неудовольствия. Чувство удовольствия основывается не на понятии (или, как говорит Кант, детерминантном суждении), а связано с представлением о предмете (рефлективном суждении). В этом случае основанием удовольствия является форма предмета, рассматриваемого безотносительно к понятию, а суждение о нем – суждением вкуса. Область эстетики – это сфера, принадлежащая суждению рефлективного типа (Кант, 1898).

Учение Канта о вкусе имело целью отграничить эстетическое от познавательного и нравственного и оградить искусство от утилитарного подхода. Кант характеризует суждение вкуса следующими чертами (Марцина, 1966, с. 367):

По качеству: суждение вкуса свободно от практического интереса к предмету, оно абсолютно бескорыстно.

По количеству: прекрасно то, что нравится *всем* независимо от понятия. Эстетическое суждение обладает субъективной всеобщностью. Оставаясь достоянием чувства одного индивида, оно притязает на общезначимость. Однако эта всеобщность основана не на понятии (познании): ее основа – душевное состояние *свободной игры* познавательных сил (воображения и рассудка). При этом свободная игра мыслится Кантом как *гармония* познавательных сил в процессе эстетического суждения.

По отношению: «прекрасное есть форма целесообразности предмета, воспринимаемая в нем без представления о цели». Такую красоту Кант называет чистой. Кантовское определение на первый взгляд кажется парадоксальным. С одной стороны, красота должна быть бесцельной. Но с другой, все, что мы считаем красивым, представляется нам таким, будто некто, достигший красоты, преследовал какую-то цель, т. е. форма, возникающая в результате таких действий представляется нам целесообразной. Предмет вне зависимости от какой-либо объективной (в нем самом) или субъективной (для нас) цели доставляет нам удовольствие, приводит познавательные силы в *свободную гармоническую игру*. Положение Канта «о целесообразности без цели» резко отграничивает эстетическое от чувственного и сохраняет за ним интеллектуальный характер. Но в отличие от рационалистической эстетики Кант исключает из условий суждения вкуса рационалистическое представление цели. Эстетическое чувство Канта свободно, непосредственно. Положение о «целесообразности без цели» было направлено против утилитарных и рационалистических взглядов на искусство, требующих от него морализации и тенденциозности.

Удовольствие, связанное с чувственностью, является животным и поэтому корыстным.

Удовольствие, связанное с созерцанием ритмики и пластики прекрасного тела, будет свободным, чистым, бескорыстным.

Кант говорит, что бескорыстное удовольствие безразлично к действительному существованию предмета, в то время как корыстное желание жаждет обладания и удовлетворения. Наслаждение, доставляемое нам, например, формой греческой вазы, должно вызываться не желанием приобрести эту вазу, а умственным процессом, игрой чувств, возбуждающих и радующих нас при виде вазы. Ощущая красоту, мы не испытываем давления извне или со стороны побуждений нашей собственной натуры, т. е. мы свободны как от воздействия внешних, так и от воздействия внутренних факторов. Мы стараемся продлить эстетическое удовлетворение, чтобы продлить гармоническое воздействие на нас.

Бескорыстность эстетического удовольствия позволяет считать, что удовольствие относится в равной степени к любому из нас. Кант утверждает, что понятие, не относящееся ни к кому в отдельности, относится ко всем вообще. Кант считает себя вправе рассматривать эстетическое суждение как всеобщее и необходимое. Если мы восхищаемся каким-либо прекрасным предметом, мы требуем, чтобы всякий разделял наше восхищение.

Если рассматривать категорию прекрасного по Канту с точки зрения гармонии, то можно констатировать, что рефлекторное суждение, связанное с этой категорией в той же степени, как и детерминантное суждение, предполагает наличие гармонии. Впечатление гармонии возникает и в умозрительных схемах, и в рефлекторных суждениях. В суждениях второго типа гармония видимого и слышимого объясняется благодатным ощущением счастливого сочетания всех элементов созерцаемого объекта.

Кант считал, что гармония является универсальным феноменом, хотя у представителей науки и религии могут возникать различные опасения в ее толковании. Кант пишет: «Защитник религии опасается, что гармония, которую можно объяснить естественными свойствами материи, может доказать независимость природы от божественного провидения. Он открыто признает, что если можно найти естественные причины всего порядка мироздания, то нет надобности ссылаться на верховное миропонимание. У натуралиста свои соображения, по которым он не хочет оспаривать это предположение… Он осмысливает примеры, доказывающие плодотворность всеобщих законов природы по их совершенно гармоническим результатам» (Кант, 1898 с. 119).

Что касается положительных черт, характеризующих гармонию, то Кант считал, что «чем больше связей, тем больше гармонии и согласованности в мире» (Кант, 1898 с. 72).

А теперь рассмотрим эстетические взгляды Гете. В творчестве Гете собственно эстетическая проблематика занимает не такое уж большое место в сравнении с его художественным творчеством и естественнонаучными изысканиями. Причем, в эстетическом наследии Гете проблема гармонии как токовая почти не рассматривается, а основное внимание Гете уделил проблеме стиля. Более того, Гете является основоположником теории стиля, но эта сторона его творчества заслуживает особого обсуждения.

Но личность Гете столь значительна и уникальна, что сам он рассматривался многими современниками и почитателями как некий образец и источник эстетических концепций.

Приведем пример.

Крупный вклад в теорию эстетики был сделан Карлом Филиппом Морицем (1757–1793), другом Гете, который сопровождал великого мыслителя во время его путешествия по Италии. Впечатления от этой поездки явились поводом для написания книги под названием «О художественном подражании прекрасному» (цит. по: Гилберт, Кун, 1960, с. 338-339). В сущности его книга представляет собой портрет Гете, не только художественной, но и в известной мере метафизический, сконструированный на основе абстрактной терминологии. Книга представляет собой синтез художественного воображения, физиологические представления и пифагорейской космологии. Человек, согласно Морицу, – это микрокосмос, целая вселенная, но малых размеров. Сходство человека со вселенной поддерживается двумя движущими силами; силой воссоздания (Bildungskraft) и силой ощущения (Empfindungskraft), причем первое относится ко второму, как активное, мужское начало относится к пассивному женскому (Гилберт, Кун, 1960, с. 338). Оба этих начала восходят к *гармоническому* устройству вселенной. В воображении художника эти силы уравновешены. «Благодаря гармоничности своей натуры художник, подражающий отдельным прекрасным предметам, запечатлевает в своем творении образ вселенной (Там же, с. 339). Это означает, что, по Морицу, каждое произведение искусства указывает на то, что человек является гражданином вселенной. Таким образом, в упомянутом выше произведении Морица не только был поставлен вопрос о *гармонической личности*, но и акцентировано внимание на том, что эта личность образует микрокосмос, вписывающийся и во многом повторяющий гармонию макрокосмоса. Казалось, сама природа соединила в Гете эстетическое и чувственное начала, создав образцовую гармоническую личность.

А вот характеристика, данная Гете столетие спустя еще одним великим немецким мыслителем Фридрихом Вильгельмом Ницше (1844–1900): «Гете – явление не немецкое, а европейское. Он окружил себя исключительно замкнутыми горизонтами; он не отделялся от жизни, он входил в нее; он не был робок и брал столько, сколько возможно, на себя, сверх себя и в себя. Чего он хотел, так это *цельности*: он боролся с разрозненностью разума, чувственности, чувства, воли, он дисциплинировал себя в нечто цельное, он *создал* себя. Гете был среди нереалистично настроенного века убежденным реалистом: он говорил «да» всему, что было ему родственно в нем. Гете создал сильного, высокообразованного, во всех отношениях физически ловкого, держащего себя на узде, самого себя уважающего человека, который может отважиться разрешить себе всю полноту власти и все богатства естественности, который достаточно силен для этой свободы; человека, для которого нет более ничего запрещенного, разве что слабость, все равно, называется она пороком или добродетелью» (цит. по: Вересаев, 1991, с. 260).

Из приведенных высказываний видно, что значение Гете состоит в том, что в истории эстетики он сыграл двоякую роль, выступая одновременно и субъектом и фактором развития этой науки. Следует также иметь в виду, что Гете весьма сдержанно относился к формалистическим представлениям в искусстве, например к классицизму. «Того, кто должен брать у античности пропорции (измеримое), не следовало бы нам ненавидеть, оттого что мы желаем брать у античности неизмеримое» (Гете, 1936, с. 347).

Как отмечал Вильгельм Дильтей, основной инструмент, которым пользовался Гете – «созерцательное мышление, постоянно питаемое ощущением целостности вселенной» (Дильтей, 1919: цит. по: Гилберт, Кун, 1960, с. 365). При этом Гете полагал, что чистого созерцания не существует, оно всегда пропитано повседневной жизнью, в которой проявляется бытие как таковое.

Природа для Гете была источником и выражением вечного и видимого порядка, и познание ее тайн может осуществляться не только путем ученых занятий, но и с помощью художественного творчества. При этом Гете считал, что художник (например, Гете) в не меньшей степени, чем метеоролог или ботаник (а Гете был и тем, и другим) может быть исследователем природы. Он также стремится открыть истину, недоступную разумению поверхностного наблюдателя. Более того, Гете высказывался порой в том смысле, что поэзия порой опережает рациональное знание и предвосхищает его.

Фридриху Шиллеру (1759–1805) удалось соединить интуицию Гете с философской эстетикой Канта.

Большое место в эстетике Шиллера занимает идея «прекрасной души». Человеку, достойному так называться, свойственна *гармония разума и воображения, гармония слова и дела*. Именно такое совершенство нашло воплощение в искусстве и гармоничном человеке древней Греции. Например, такое видение присуще Платону, который в своем диалоге «Лахет», представляя добродетельного мужа, говорит, что он является «совершенным мастером музыки, создавшим прекрасную гармонию не лиры и не другого какого-то инструмента, годного для забавы, а истинную гармонию жизни, ибо он сам настроил свою жизнь как гармоническое созвучие слов и дел» (цт. по: Махов, с. 49). Такая гармония была укоренена в личности и творчестве Гете. На эту гармонию ориентировался и Шиллер.

Истинные поэты, говорит Шиллер, либо сами представляют собой природу, либо стремятся к ней. Их поэзия наивна, чиста, бесхитростна. Они непосредственны, черпая свое вдохновение в самой природе. В их творчестве нет искусственности, нарочитости. Именно такое отношение к миру было присуще древним. Однако по мере развития цивилизации такая гармония подвергается постепенной эрозии. Шиллер, говоря о наивности поэзии, прежде всего имел в виду греков. Он пишет: «Они суть то, чем мы были; они суть то, чем мы вновь должны стать…Мы вечно в них видим то, что уходит от нас, но за что мы призваны бороться, к чему в бесконечном прогрессе надеемся приблизиться, хотя и никогда не сможем его достичь» (цит. по: Гилберт, Кун: с.382). Идею наивности Шиллер распространяет и на гениальность. Истинный гений, говорит Шиллер, руководствуется только природой и собственным инстинктом. Поэт обязательно наивен, иначе он не гений .

Идея красоты как посредницы между формой и материей, разумом и чувством была высказана ранее Кантом в его «Критике способности суждения». При этом у Канта форма доминирует над содержанием. Такое верховенство формы противоречило интуиции Шиллера, который придерживался идеи равновесия формы и содержания.

Принципиальным арбитром, создающим это равновесие, Шиллер считал идею игры.

В «Письмах об эстетическом воспитании человека» Шиллер пишет о том, что в человеке сплетены два побуждения: чувственное побуждение (Stofftrieb) и побуждение к форме (Formbetrieb). Оба побуждения связаны между собой таким образом, что каждое из них обнаруживает себя потому, что действует другое.

Первое побуждение направляет поведение человека как смертного существа, действующего в определенных рамках времени и пространства. Второе побуждение стремится привести в стройный порядок те разнообразные ощущения, который нам приносит чувственный инстинкт. Задача художника в данной ситуации заключается в том, чтобы примирить, согласовать, гармонизировать оба начала. Примиряющим началом по Шиллеру является еще одно побуждение – *побуждение к игре*. Игра, полагает Шиллер, раскрывает двойственную природу человека. Жизнь делает человека серьезным, а с красотой он играет. Поэтому, считает Шиллер, человек играет, когда является человеком и является человеком только тогда, когда он играет. Оба побуждения, соединенные в игре, делают одновременно случайным как формальную, так и материальную стороны нашего существования. Поэтому человека можно считать игрой случая. Это позволяет сделать один сопутствующий вывод: для Шиллера искусство – это не только согласование побуждения чувства и побуждения к форме (порядку), но и согласование необходимого (постоянного) со случайным (преходящим), свободы воли и закона, ибо в каждой игре существуют более или менее жесткие правила и вечно меняющееся течение жизни.

2. Математико-гармонические изыскания

2.1. Рекуррентные последовательности и исчисление конечных разностей

В «Замечаниях о рекуррентных последовательностях» Д. Бернулли впервые (1728) дает название классу последовательностей, которые следуют определению: последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ называется рекуррентной, если ее общий член выражается рекуррентной формулой

$$a_n = m_1 \cdot a_{n-1} + m_2 \cdot a_{n-2} + ... + m_k \cdot a_{n-k}$$

Рекуррентные последовательности несколько ранее рассматривал и де Муавр (1722).

В качестве рекуррентных последовательностей де Муавр рассматривал арифметическую и геометрическую прогрессии, а также последовательность Фибоначчи. В последней общий член вычисляется с помощью равенства

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Выше мы говорили о том, что еще Кеплер обратил внимание на то, что отношение a_n/a_{n-1} в этой последовательности стремится к корню $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Эту последовательность использовал и Николай I Бернулли при решении квадратных уравнений (Юшкевич, 1971, с. 79). Позднее де Муавр, а за ним и Эйлер связали последовательность Фибоначчи с характеристическим уравнением. Алгоритм образования последовательности Фибоначчи очень простой. Однако, несмотря на это, долгое время не было явной формулы для n-го члена. Такая формула была открыта лишь спустя 500 лет (1730) де Муавром. Для этого де Муавр использовал метод производящих функций, который играет большую роль в комбинаторике, теории вероятностей и теории чисел.

Формула де Муавра имеет вид:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

из которой при различных целочисленных значениях n мы получаем целочисленные значения последовательности Фибоначчи, несмотря на то, что $\sqrt{5}$ - число иррациональное, т.е эта формула связывает целочисленные значения последовательности Фибоначчи с иррациональным числом φ, являющегося одним из корней квадратного уравнения.

Формула де Муавра определяет последовательность Фибоначчи на основании последовательности в целом и ее поведения в бесконечности. В этой формуле определение F_n *становится явным (не рекурсивным)*, будучи выраженным через $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (Стилвел, с. 183–184). Иными словами, в данном случае мы имеем пример того, как алгебраические иррациональные числа помогают пролить свет на поведение целых чисел.

Исследование функций при прерывном изменении аргумента велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей, в котором специально изучаются функции с дискретно меняющимся аргументом, выделилось только в XVIII в. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, а роль дифференциалов играют конечные разности функции $f(x)$, как-либо заданной в точках $x_k\,(k=1,2,3,...,n)$: разности первого порядка $\Delta f(x)=f_{k+1}-f_k$, разности второго порядка $\Delta^2 f(x)=\Delta^2(f_{k+1}-f_k)$ и т. д. Алгоритм вычисления конечных разностей аналогичен алгоритму дифференцирования, интегрированию соответствует суммирование разностей.

Суммирование рекуррентных последовательностей, подобных последовательностям Фибоначчи, является одной из простых задач исчисления конечных разностей. Однако это исчисление приобрело статус самостоятельно математической дисциплины только в начале XVIII в. в трудах Ньютона («Метод разностей», 1811) и особенно его последователей и младших современников: Тэйлора, де Муавра и Стирлинга.

Сказанное означает, что *теория рекуррентных последовательностей, в частности, последовательности Фибоначчи, является частью исчисления конечных разностей, которая в свою очередь является разделом математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений и дифференциальных уравнений) для целочисленных аргументов*. Таким образом, математика гармонии с ее сочетанием целых и иррациональных чисел, органически влилась в новейшие математические теории эпохи.

2.2. На пути к топологии

Хотя в античной геометрии изучение многогранников занимало одно из центральных мест, а после греков эта проблема перекочевала в исследования Луки Пачоли, а затем и Кеплера, только Декарту и Эйлеру было суждено открыть универсальное фундаментальное соотношение, касающееся многогранников. Пусть V – число вершин простого многогранника, E – число ребер, F – число граней, тогда:

$$V-E+F=2\,.$$

Под многогранником при этом понимается тело, поверхность которого состоит из конечного числа граней, имеющих форму многоугольников. В случае *правильных* многоугольников все они конгруэнтны, и все плоские углы при вершинах равны между собой. Многоугольник называется простым, если в нем нет «дыр», так что посредством непрерывной деформации его поверхность может быть преобразована в поверхность сферы.

В книге (Курант, 2001, с. 267) утверждается, что формула Эйлера имеет смысл и в других более общих случаях: вместо многогранников с прямыми ребрами и плоскими гранями можно взять простые «многогранники», у которых «гранями» будут кривые поверхности, а «ребрами» – кривые линии.

Можно поступить наоборот, нарисовав на поверхности шара «ребра» и «грани». Более того вообразим, что поверхность многогранника или шара сделана из тонкого слоя резины. Тогда формула сохранится, как бы ни была деформирована рассматриваемая поверхность – путем изгибаний, сжатий, растяжений и т. д. – лишь бы резиновый слой не был порван. Действительно, формула Эйлера относится только к *числу* ребер, вершин и граней. Длины же, площади, кривизна и др. характеристики, относящиеся к элементарной и проективной геометрии, в данном случае никакой роли не играют.

Этот и многие аналогичные многие аналогичные случаи – варианты более общих *топологических* преобразований (Курант, там же, с. 267 и далее).

Таким образом, благодаря Эйлеру «линия жизни» платоновых тел была существенно продлена. Более того, она получила ответвление в сторону теории симметрии (благодаря Кеплеру), в теорию уравнений (а затем теорию групп Галуа) и топологии. Математику гармонии в этих фундаментальных областях в ближайшее время ждут серьезные открытия. Возможно, они уже есть, но автору данного текста они неизвестны.

2.3. Теория вероятностей

Новый этап в теории вероятностей начался с Якова Бернулли (1654–1705).

В своем «Искусстве предположений» (1711 г.) он формулирует свою знаменитую теорему, лежащую в основе всех последующих теоретико-вероятностных и статистических исследований. На основании открытого им нормального закона, Бернулли говорит о стремлении частоты события к вероятности в длинной серии испытаний. Теорема Бернулли явилась первой и простейшей в цепи предложений, образующих закон больших чисел. Этот термин предложил в 1835 г. французский математик Пуассон.

В 1733 г., основываясь на суммах разложения членов бинома $(a+b)^n$, де Муавр доказал теоремы, которые сейчас называются локальной и интегральной теоремами Муавра-Лапласа. *Эти теоремы явились замечательным продлением неисчерпаемых свойств бинома Ньютона и треугольника Паскаля, дальнейшим развитием закона больших чисел Я. Бернулли.*

Доказывая свои теоремы, де Муавр, а вслед за ним и Лаплас, преследовали не только математические цели. Они хотели с помощью вероятностных критериев отделить необходимое (предначертанного провидением) от случайного (преходящего, нерегулярного).

2.4. Теория гармонических колебаний

В конце XYII в. начала развивалась теория гармонических колебаний благодаря, главным образом, усилиям французского математика и физика Жана Фурье (1768-1830). Была разработана теория рядов Фурье и интегралов Фурье, а также некоторые приложения этой теории в физике. Учение о гармонических колебаниях продолжает исследования, связанные с именем Пифагора. Для Пифагора музыка была не только гармонией, но и колебанием струны лиры. Учение Пифагора было основано на теории пропорций. Известно, что струна может совершать самые различные колебания. Самые простые из них называют гармоническими колебаниями. Как отмечает Норберт Винер, движение струны музыкального инструмента не являются в строгом смысле гармоническим колебанием. Оно представляет собой комбинацию колебаний, которая с некоторым приближением может рассматриваться как гармоническое колебание (Винер, 1967, с.101).

2.5. Математико-гармонические итоги эпохи Просвещения

1. В эстетике Просвещения по мере приближения к концу столетия наблюдается постепенный отход от жестких норм классицизма и концентрация внимания на разнообразии, богатстве и разноликости жизни.

Именно в эпоху Просвещения эстетика приобрела статус самостоятельной науки благодаря Готлибу Баумгартену (1714–1762). Именно он *дал определение эстетики как науки и стал основателем школы немецкой эстетики*. Под эстетическим совершенством он понимал *единство в многообразии,* которое не доказывается аналитически, оно схватывается и кристаллизуется художником в виде метафоры, в виде изящной словесной формулы.

2. В эстетике этого периода были популярны геометрические идеи, поиски «линий красоты». В качестве такой идеальной гармонической формы Хогарт предлагает кривую, состоящую из двух изгибов, направленных в разные стороны в форме буквы «S», а Винкельман спиралевидной форме предпочитает эллиптическую.

3. Учение Канта о вкусе имело целью отграничить эстетическое от познавательного и нравственного и оградить искусство от утилитарного подхода. По Канту «прекрасное есть форма целесообразности предмета, воспринимаемая в нем без представления о цели». Такую красоту Кант называет чистой.

4. Значение Гете состоит в том, что в истории эстетики он сыграл двоякую роль, выступая одновременно и субъектом и фактором развития этой науки.

Природа для Гете была источником и выражением вечного и видимого порядка, и познание ее тайн может осуществляться не только путем ученых занятий, но и с помощью художественного творчества. При этом Гете считал, что художник в не меньшей степени, чем метеоролог или ботаник может быть исследователем природы. Гете считал, что поэзия порой опережает рациональное знание и предвосхищает его.

5. В эстетике Шиллера Человеку, достойному так называться, свойственна *гармония разума и воображения*, *гармония слова и дела*. Именно такое совершенство нашло воплощение в искусстве и гармоничном человеке

древней Греции. Такая гармония была укоренена в личности и творчестве Гете. На эту гармонию ориентировался и Шиллер.

6. В трудах Д. Бернулли и де Муавра впервые появляется термин «рекуррентная последовательность» и дается его толкование.

В качестве рекуррентных последовательностей Муавр рассматривал арифметическую и геометрическую прогрессии, а также последовательность Фибоначчи. Де Муавр предложил формулу для вычисления любого члена последовательности Фибоначчи, основанную на методе производящих функций, который играет большую роль в комбинаторике, теории вероятностей и теории чисел.

Формула де Муавра определяет последовательность Фибоначчи на основании последовательности в целом и ее поведения в бесконечности, т. е. здесь мы имеем пример того, как алгебраические иррациональные числа помогают пролить свет на поведение целых чисел.

7. В данный период было установлено, что теория рекуррентных последовательностей, в частности, последовательности Фибоначчи, является частью исчисления конечных разностей, которая в свою очередь есть раздел математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений и дифференциальных уравнений) для целочисленных аргументов. Таким образом, математика гармонии с ее сочетанием целых и иррациональных чисел, органически влилась в новейшие математические теории эпохи.

8. Эйлеру было суждено открыть универсальную формулу для многогранников, которая сохраняет силу и для деформированных многогранников при условии сохранения числа вершин, ребер и граней.

Благодаря Эйлеру «линия жизни» платоновых тел была существенно продлена. Более того, она получила ответвление в сторону теории симметрии (благодаря Кеплеру), в теорию уравнений (а затем теорию групп Галуа) и топологии. Математику гармонии в этих фундаментальных областях в ближайшее время ждут серьезные открытия.

9. Основываясь на суммах разложения членов бинома $(a+b)^n$ де Муавр доказал теоремы, которые сейчас называются локальной и интегральной теоремами Муавра-Лапласа. Эти теоремы явились замечательным продлением неисчерпаемых свойств бинома Ньютона и треугольника Паскаля, дальнейшим развитием закона больших чисел Я. Бернулли.

10. В обсуждаемый период благодаря усилиям Фурье серьезный импульс получила теория гармонических колебаний, основы которой были заложены в школе Пифагора.

Новое время – XIX век:

Загадки Люка

Бегут минуты, месяцы, века,
И в каждый миг рождаются загадки,
Которые подобно красной тряпке
Рождают драйв не только у быка.

Не в правилах моих играть с друзьями в прятки.
Я назову кудесника, чья слава велика.
Да, это, несомненно, Эдуард Люка,
Его головоломки для умов так сладки.

Средь умников немало тех, что на игрушки падки,
Для них в его трудах прописана строка,
Которая полезна для юнца и старика.

Не просто вникнуть в хитроумные порядки
Колец китайских, строй ханойской башни,
В них шарм умнейших ошарашить.

1. Наука и математика XIX столетия

Темп общественного прогресса и научного развития в XIX в. заметно ускоряется. Под влиянием промышленного производства, запросов государства роль науки непрерывно возрастала. Если раньше математизации подвергалась прежде всего механика, то теперь математические методы охватывают практически всю физику и даже общественные науки: экономику, демографию, социологию, эстетику и даже лингвистику. Это была своего рода небольшая революция. Математика становится воистину междисциплинарной.

В методологическом отношении математика перешла на новую, более высокую ступень абстракции, предмет ее стал гораздо более общим и поэтому вширь и вглубь выросли возможности ее приложений. Вплоть до конца XVIII в. практически безраздельно господствовало мнение, что теоретическая математика есть учение о величинах, их порядке и мере. При этом два основных понятия – геометрической величины и отвлеченного количество – считали строго определенными однозначно в том смысле, что первая может принадлежать только евклидову пространству, содержащему не более трех измерений, а второе должно обладать свойствами элементов поля действительных чисел.

Революционный переворот в математике XIX века заключался прежде всего в том, что этим метафизическим представлениям был нанесен сокрушительный удар.

В области геометрии такой удар был нанесен открытием первой неевклидовой гиперболической геометрии, связанной с именами Н. И. Лобачевского (1229) и Я. Бояи (1831). К такой геометрии еще раньше пришел Гаусс. Но собственные мысли показались ему слишком смелыми, и он оставил их при себе. Это великое открытие опровергло догму о единственности геометрии и указало пути построения других геометрических систем. Методологическое значение открытия Лобачевского и Бояи, в частности, состояло в том, что априорное убеждение в евклидовости реального мира уступило место чисто научной проблеме геометрических свойств Вселенной – проблеме, решение которой принадлежит физике и астрономии, опирающихся как на опыт, так и на математику.

В области геометрии и алгебры первый удар по традиционным представлениям о количестве был нанесен открытием кватернионов Гамильтона и чисел со многими единицами Гроссмана. Работы в этом направлении сыграли огромную роль в создании векторного и тензорного исчислений. Последнее вместе с теорией матриц и теорией групп широко применяется в различных разделах современной физики.

Другим событием величайшей значимости в алгебре явилась разработка теории групп Галуа (1830–1832), подготовленная работами Лагранжа, Гаусса и Абеля по проблеме решения в радикалах уравнений выше четвертой степени. С помощью своей теории Галуа сумел установить условие, которому удовлетворяют уравнения данной степени, разрешимые в радикалах. Но важность этой теории определялась не только решением труднейшей задачи, для которого она была первоначально создана. Галуа выделил и общее понятие поля. Теория целых алгебраических чисел, с одной стороны, и многочленов – с другой, образующих частные случаи общего понятия кольца, привели Р. Дедекинда к выделению и этого важнейшего понятия новейшей математики. Алгебры, о которых мы только что говорили, развивались на первых порах независимо от общей теории колец, примерами которых они являются. Начиная с 70-х гг. XIX в. влияние теоретико-групповых идей со все большей силой сказывается на развитие математики в целом, включая геометрию и анализ (Ф. Клейн, С. Ли и др.), а затем оно распространилось и на теоретическую физику.

Несколько раньше, чем в геометрии и алгебре, важные сдвиги произошли и в области математического анализа. Реформа оснований исчисления бесконечно малых, начатая с Больцано и Коши, привела к разработке теории функций действительного переменного, а в 70–80-е гг. – к теории множеств Г. Кантора. Как и теория групп, теория множеств позволила рассмотреть и развить с новой точки зрения новые разделы математики, в том числе (уже в XX в) теорию вероятностей.

2. Эстетика Нового времени

В начале XIX в. произошло важное переключение эстетических акцентов. На передний край выдвинулось поколение 70-х предыдущего столетия – поколение, воспитанное на эстетических принципах Гете и его современников. Но младоэстетам было тесно в рамках гетевской размеренности и величия. Ценности были переоценены. Возникла романтическая эстетика, – поэтика, которой была свойственна юношеская порывистость, утонченная чувствительность, искренность, непосредственность. Поэты-романтики были очень далеки от практической жизни, их мир – это мир искусства, мир поэтических грез, замещающий мораль и философию.

Вот, например, кредо главного идеолога романтизма – Новалиса (псевдоним Фридриха фон Гарденберга, 1772–1801): «Поэзия на деле есть абсолютное реальное. Это средоточие моей философии. Чем больше поэзии, тем ближе к действительности» (Литературная теория немецкого романтизма, 1935, с. 121). Поэзия Новалиса идентична с его философией. Они воссоздают внутренний космос человека. «Разобщение поэта и мыслителя – только видимость, и оно в ущерб обоим», – говорит Новалис (там же, с. 121). Романтики в своем экстатическом вдохновении стерли грань между чувством и интеллектом. В представлении романтика не только интеллект есть поэзия, поэзией является и мораль, и практическая деятельность. Так, по Новалису, даже хозяйственная жизнь должна осуществляться поэтически. «Естественным результатом таких взглядов явилось утверждение поэзии как космической силы. Мир действительный и мир воображаемый, слившись, создали царство грез» (Гилберт, Кун, 1960, с. 393).

В эстетике романтизма сложилось весьма своеобразное отношение к музыке и интерпретации гармонии.

С точки зрения типичного музыканта эпох Рационализма и Просвещения поэзии трудно достичь порядка и симметричности, которые царят в музыке и архитектуре. В эстетике романтизма ориентация сменяется на противоположную. Музыка для поэзии становится образцом беспорядка. Ее сущность все чаще связывается не с понятием симметрии, соразмерности, а с представлением о деструктурированном потоке. Именно в таком понимании музыка становится образцом для поэзии. Еще один идеолог романтизма Ж. Жубер утверждал, что речь не нуждается в какой-либо упорядоченности: «меняйте в ней расположение мыслей; ставьте следствия перед причинами, конец перед началом; разрушайте, ломайте сколь угодно: в этом беспорядке всегда найдется нечто, способное увлечь и пленить слушателя» (Эстетика французского романтизма, 1982, с. 310).

Таким образом, «анархические» тенденции романтизма, его стихийность, стремление к неограниченной свободе вступили в резкое противоречие с традиционными эстетическими представлениями о гармонии, восходящими к греческому искусству как вечному образцу.

Друг Новалиса Фридрих Шлегель (1772–1828) рассматривал греческое искусство как результат благоприятных природных условий, которые, по мнению Шлегеля, были весьма естественными. Разум и чувства греков находились в полной гармонии. «Греки породили красоту потому, что в процессе эволюции жизни человечества являли собой возраст, которому свойственна красота юности. Но если искусство должно соответствовать конкретной эпохе, то будет несправедливо по отношению к современному искусству применять мерило, заимствованное у древних. «Прежняя гармония исчезает, уступая место долгим, мучительным исканиям, которые будут продолжаться до тех пор, пока не будет достигнут греческий идеал совершенства, но на новом, рациональном уровне» – так излагают взгляды Шлегеля Герберт и Кун (Герберт, Кун, 1960, с. 399–400).

Система, предложенная Георгом Фридрихом Вильгельмом Гегелем (1770–1831), представляет собой великий акт единения двух противоположных начал. Эти начала представляют собой части всеобъемлющего целого, которые не исключают друг друга, а взаимодействуют в рамках единого гармонического процесса. Гегель твердо стоял на классических позициях, но и не отвергал некоторые не слишком радикальные установки романтизма. Идея противопоставления греческого и современного искусства в трудах Гегеля заменяется диалектикой – вечно живой, непрерывно развивающейся мыслью.

Гегель определяет искусство как проявление идеала. Идеал – это абсолют, каким он воплощается в искусстве – начало, одушевляющее предметы, воспринимаемыми нашими чувствами. При этом идеал нужно искать в искусстве, а не в природе. Ведь искусство, как считает Гегель, – это дважды природа, природа, возрожденная в творениях гения. Преломляясь в разуме поэта, обыденность действительности и жестокость грубого естества приобретают пластичность и гармонию духа.

Таким образом, природа представляет собой начало, устремляющееся к красоте, но красоты не достигающее. Аналогичным способом Гегель показывает, что *формальные атрибуты красоты – симметрия и равновесие – только определяют, а не составляют красоту* (Гегель, 1938, с. 119–156). Гегель считает, что *все формальные принципы красоты представляют собой варианты единства в разнообразии*. Но это свойство имеет разные степени сложности. Первая степень связана с *обыкновенным повторением*, воспроизведением одного и того же. Воспроизведение, связанное с *симметрией* частей целого представляет больший интерес. *Воспроизведение по определенным правилам*, которое подразумевает соединение воедино разнородных частей – следующая ступень разнообразия. Над правилами возвышается *гармония*, связующая неоднородные понятия, такие, как цвет и форма, звук и движение, запах и прикосновение. Гегель считает, что это единство – самое прочное, потому что в нем больше оснований для возникновения противоречий.

Еще одним мыслителем, в творчестве которого активно затрагивается проблема гармонии, был Фридрих Вильгельм Ницше (1844–1900), который с одной стороны, пытался примирить романтизм Новалиса с идеализмом Гегеля, а с другой, построил свою собственную эстетическую систему.

Прежде всего, Ницше упорно отрицал всякое проявление потусторонности. Он считал, что Вселенная «естественна», самодостаточна, не нуждается ни в каком трансцендентальном вмешательстве и сама по себе совершенна и вечна. В эту вечную и бесконечную Вселенную Ницше встраивает человека, наделенного «волей к власти», жаждущего вечного в своем движении без какой-либо разумной цели.

Ницше впервые в эстетике со всей остротой ставит вопрос о соотношении прекрасного и безобразного. В контексте нашего изложения это крайне важно, так как понятие гармонии обычно соотносится с категорией прекрасного, а иногда и просто отождествляется с ней.

«Красота сама по себе, – пишет Ницше, – это пустые слова, это даже не понятие. В красоте человек делает себя мерилом совершенства; в исключительных случаях он даже признает себя единственным творцом ее. Только в своем изображении человеческий род может подтвердить и возвысить себя» (Ницше, 2008, с. 85). И далее: «Человек думает, что весь мир усеян красотами, он забывает, что он сам их причина. Он сам наделяет природу красотой… В сущности, человек любуется лишь собою в окружающем мире, он считает прекрасным все то, в чем отражается его образ: в приговоре над «красотой» звучит его тщеславие рода» (там же).

Но Ницше идет дальше. Он говорит, что на идее, согласно которой нет ничего прекраснее человека, стоит, вся эстетика. Но есть и вторая истина: «нет ничего безобразнее вырождающегося человека» (там же, с. 86). И это тоже является важным для искусства. Ницше говорит о том, что предметы, изображаемые Золя, братьями Гонкур безобразны «и все-таки они изображают их, потому что наслаждаются безобразным» (цит. по: Гильберт, Кун, 1960, с. 542).

«Всякий предвестник истощения, тяжести, ветхости, усталости, всякого рода стеснения, как спазмы, поражение параличом, но более всего запах краски, формы разложения и растления… – все это вызывает … приговор: «безобразное» (Ницше, там же).

Ницше проповедует активную позицию искусства. Красота по Ницше достигается только благодаря акту самоутверждения, который видоизменяет, формирует действительность. Суждение о красоте или безобразном наделяет объект качествами, чуждыми его природе, т. е. человек воспринимает объект ложно. Деятельная позиция художника, преобразующая действительность в красоту, предполагает жесткую самодисциплину и отвлечения от собственных пристрастий. Ницше мечтает о классическом, величественном стиле, который характеризуется «холодностью, ясностью и четкостью». «Этот стиль, говорит Ницше, – сродни великой страсти, потому что он презирает удовольствие и пренебрегает убеждением. … Овладеть хаосом, которым является мир, заставить этот хаос принять определенные формы, стать началом логическим, простым, конкретным, математически точным, превратиться в закон – таково дерзкое устремление этого стиля» (там же, с. 544).

Поскольку по Ницше суждение о красоте не имеет прямого отношения к сущности объекта, для того, чтобы подняться выше разумной рациональной, деловой оценки, необходимо состояние экзальтации, некое опьянение, священное охмеление. Это такое состояние духа, которое заставляет реальную жизнь возвышаться над самой собой, оставаясь одновременно в своих пределах. Исторически эстетическая экзальтация может рассматриваться как теория катарсиса, развиваемая в трудах античных авторов Платона, Плотина, Аристотеля и др.

Эстетическое возвышение духа у Ницше основано на противопоставлении дионисийского и аполлоновского начал (Ницше, 2007).

Дионисийское начало – первая стадия творческого процесса. Художник, движимый мощным толчком творческой энергии, впадает в дионисийское безумие, его охватывает «страсть к становлению». Сознание, «охваченное одновременно ужасом и восторгом, погружается в вечный поток явлений, струи которого несут с собой и созидание и разрушение» (Гилберт, Кун, 1960, с. 545). Затем наступает вторая стадия творческого процесса, содержание которого заключается в том, что возникает аполлоновское видение жизни, которое освобождается от пут дионисийского сладострастного возбуждения, утихает боль дионисийского экстаза, и явления переводятся в стройный порядок согласно вечным законам.

Эстетика Ницше оказала огромное влияние на искусство конца XIX – начала XX вв., в частности на Ф. М. Достоевского. У него мы находим своеобразное толкование гармонии, которые, как нам кажется, соотносится с выдвижением на передний план идеи экстаза, которая станет позднее невероятно популярной у символистов.

Вот как описывает состояние героя, типичного для романов Достоевского, В.В. Вересаев (Вересаев, 1991, с. 45):

«В душе человека – угрюмый, непроглядный хаос. Бессильно крутятся во мраке разъединенные обрывки чувств и настроений. В темных вихрях вспыхивают слабые огоньки жизни, от которых мрак еще ужаснее.

Но бывают миги, когда разделенные огоньки эти сбиваются вихрем в одно место. Тогда темнота вдруг прорезывается ослепительно ярким светом. Разрозненные элементы жизни, сжатые в одно, дают впечатление неслыханного напряжения, близкого к взрыву. И как раньше невозможно было жить от угрюмого мрака, от скудости жизненных сил, так теперь жизнь становится невозможною вследствие чудовищного избытка сил и света». И далее происходит то, о чем говорит Кириллов Шатову в романе Достоевского «Бесы»: «… Постойте, бывают с вами, Шатов, минуты *вечной гармонии*? Есть секунды, их всего зараз приходит пять или шесть, и вы вдруг чувствуете присутствие вечной гармонии, совершенно достигнутой. Это не земное, я не про то, что оно небесное, а про то, что человек в земном виде не может перенести. Надо перемениться физически или умереть. Это чувство ясное и неоспоримое. Как будто вдруг ощущаете всю природу и вдруг говорите: да, это правда! Это … это не умиление, а только так, радость. Вы не прощаете ничего, потому что прощать уже нечего. Вы не то, что любите – тут выше любви. Всего страшнее, что так ужасно ясно и такая радость. Если более пяти секунд, то душа не выдержит и должна исчезнуть. Чтобы выдержать десять секунд, надо перемениться физически». Те же ощущения переживает и князь Мышкин. Вот такая *болезненная гармония*. За силу жизни принимается судорожно обострившиеся, глубоко болезненные процессы души, *за вечную гармонию – высочайшая дисгармония*

Но «высочайшая минута» проходит. Возвращается ненавистное время. Вечность превращается в пять секунд, высшая гармония жизни исчезает, мир снова темнеет и разваливается на разъединенные частички. Наступает другая вечность – холодная, унылая вечность на пятачке пространства.

3. Математико-гармонические изыскания

На фоне этих будоражащих воображение математических и эстетических достижений XIX в. математико-гармонические изыскания выглядят довольно скромно.

Их можно разделить на две группы.

К первой можно отнести собственно математические исследования.

Здесь нужно в первую очередь упомянуть два имени: Эдуарда Люка (1842–1891) и Жака Бине (1786–1856).

Эдуард Люка – плодовитый автор многочисленных математических развлечений и серьезных математических исследований.

Отметим некоторые из них.

1. В 1878 г. он дал критерий для определения того, простым или составным являются числа Мерсена $M_p = 2^p - 1$, ныне известный как тест Люка-Лемера. Применяя свой метод, Люка установил, что $M_{127} = 2^{127} - 1$ – простое число. В течение 75 лет это число оставалось наибольшим числом, известным науке.

2. Описал свойства рекуррентных последовательностей, удовлетворяющих уравнениям второго порядка. Частным случаем этих последовательностей являются числа Фибоначчи, а также вновь открытая последовательность, вошедшую в историю как последовательность Люка.

3. Люка показал, что в счетных устройствах удобнее пользоваться двоичной, чем десятичной системой счисления.

Бине мы обязаны тем, что он открыл бета-функцию и дал ей дал имя. Он показал также, что бета-функцию можно выразить через другие специальные функции, например, через гамма-функцию Лежандра:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$

Подобно тому, как гамма-функция для целых чисел является обобщением факториала, бета-функция является обобщением биномиальных коэффициентов, напрямую через треугольник Паскаля связанных с числами Фибоначчи. Значительно позднее один из вариантов бета-функция, связанный с числами Фибоначчи, был использован для описания социальных систем (Мартыненко, 2010).

Французскому ученому математика гармонии обязана знаменитой формулой, связывающей числа Фибоначчи и числа Люка. Формула такова:

$$\varphi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2},$$

где F_n и L_n – числа Люка и Фибоначчи порядка n, а φ – золотое число.

Большинство исследователей считают, что термин «золотое сечение» появился только в середине XIX. Терминологическое авторство (goldener Schnitt) приписывают Мартину Ому (1835 г.). Но сам он отрицал свое авторство. Как бы то ни было, этот термин скорее всего появился в первой трети XIX в. До этого использовался термин «божественная пропорция», предложенный Лукой Пачоли.

4. Прикладная математика в гуманитарных науках

Отличительной чертой XIX в. является расцвет экспериментальных исследований с использованием математических методов. Причем эти методы перекочевывали из естественнонаучной сферы в гуманитарную. Освоение гуманитарного пространства осуществлялось по нескольким направлениям:

1. Неоренессансный подход в измерении эстетических достоинств произведений искусства и гармонии мира на основе золотого сечения;
2. Активное вовлечение в научный оборот идей и методов математической статистики и перенос ее основных понятий на общественные отношения;
3. Развитие классификационных представлений, в частности методов идентификации и опознания объектов с учетом переменных разной природы;
4. Разработка методов количественной оценки эстетичности произведений искусства на основании субъективных оценок информантов;
5. Формирование предпосылок для изучения сообществ (общей теории ценозов);
6. Освоение методологии достижений наук о живом: теории эволюции, теории наследственности, проблем таксономии.

Именно в XIX в. в гуманитарной сфере началось формирование измеряющих дисциплин: антропометрии, биометрии, психометрии, социометрии, искусствометрии, стилеметрии, эконометрики и др.

Рассмотрим, придерживаясь хронологического порядка, особенности возникновения и становления этих дисциплин, а также мыслителей, участвующих в этих процессах.

Все началось с работ выдающегося бельгийского математика, астронома, социолога, искусствоведа и родоначальника научной статистики Адольфа Кетле (1796–1874).

Предшественники Кетле рассматривали статистические закономерности как проявление божественного порядка. В отличие от них, Кетле считал, что такие закономерности, как и физические законы, подчинены закону причинности. Эти законы, как полагал Кетле, должны изучаться новой научной дисциплиной, которую он назвал социальной физикой (Кетле, 1835).

Основное место в социальной физике Кетле занимает теория среднего человека. В его представлении каждый человек от природы наделен постоянными качествами, которые формируют в данных условиях тип человека, о сохранении которого заботится природа. «Относительно нравственных качеств, а равно и физических, – писал Кетле, человек подчинен большим или меньшим уклонениям от среднего состояния, и колебания его около этой средней величины совершаются по общему закону, управляющими всеми колебаниями, которым подлежит ряд явлений, находящимися под влиянием случайных причин» (Кетле, 1911, с. 311). Средний человек по Кетле – это человек среднего роста, веса, силы, средней емкости легких, средней остроты зрения. Но среднего человека формируют не только антропометрические характеристики. Кетле распространял идею среднего человека на моральную, интеллектуальную и психическую сферы. Более того, эта идею он сделал столь всеобъемлющей, что распространил ее на эстетическую составляющую бытия человека. Так, Кетле принадлежит гипотеза, согласно которой идеальный эстетический тип – это средний человек, в котором находятся в равновесии антропологические, социально-психологические, моральные и прочие характеристики эпохи.

Как бы то ни было, работы Кетле дали мощный толчок для развития гуманитарных наук через внедрение в них естественнонаучной методологии.

В 1854 г. была опубликована книга немецкого поэта, философа, психолога и искусствоведа Адольфа Цейзинга (1810–1876) «Новое учение о пропорциях человеческого тела» (Zeizing, 1854). В этой работе Цейзинг возвращает в эстетику золотое сечение, которое со времен Кеплера было основательно забыто. Его основная мысль заключается в том, что золотое сечение есть «вообще основной принцип всякого созидания, стремящегося к красоте и цельности, как в царстве природы, так и в области искусства. Оно изначально представлялось высшей целью и идеалом всякого образования форм и отношений, как космических, так и индивидуальных, как органических, так и неорганических, как звуковых, так и световых, но лишь в человеческом теле нашло свое полнейшее осуществление» (Цейзинг,1854; цит. по: Тимердинг, 2005, с. 57). Появление книги Цейзинга можно объяснить, с одной стороны, и лавинообразным увеличением количества обмерных чертежей (Петров, Прянишников, 1979). Следует учитывать и то обстоятельство, что в XIX в. чрезвычайно популярной была идея целостности, и желание восстановить утраченные фрагменты античных статуй на основе того, что уцелело. Возникла задача реконструкции, а вместе с ней и необходимость разработки инструментария, обеспечивающего ее решение. Именно в это время из запасников научного и художественного знания на свет божий были извлечены воспоминания о пропорционировании и разнообразных пропорциях, в том числе и золотом сечении. Что касается собственно исследований Цейзинга, то всеобщность закона золотого сечения не была строго доказана ни самим Цейзингом, ни позднее его многочисленными последователями, например, Францем К. Пфейфером. Г. Тимердинг (Тимердинг, 2005 с. 56–57) высказывает сомнения в корректности, достоверности и единообразия проведения измерений, хотя и не отрицает, что в определенных обстоятельствах такое сечение возникает. Позиция Тимердинга естественна, поскольку во времена Цейзинга еще не было строгих методик статистического наблюдения и обработки данных.

Экспериментально–эстетические исследования через некоторое время продолжены Густавом Теодором Фехнером (1801–1887) – один из основателей экспериментальной психологии (психофизики, психометрии).

Одна из задач, которые решал Фехнер, непосредственно связана с золотым сечением (Fechner, 1876). Она заключалась в том, что информантам предъявлялись прямоугольные предметы с разным соотношением сторон. Испытуемые должны были высказать степень своего предпочтения конкретной фигуре в определенной шкале. После этого результаты подвергались статистической обработке. Фехнером было установлено, что наибольшей «симпатией» у испытуемых пользовался прямоугольник с соотношением сторон 21:34, равным золотому сечению, т. е. 0,618. Любопытно, что делимое и делитель являются «соседями» в классической последовательности Фибоначчи. Исследования Фехнера имели множество продолжений и остаются популярными вплоть до настоящего времени в перцептивной эстетике, математике гармонии и искусствометрии. Но и у такого подхода очень много оппонентов и нескончаемой критики. Но сама идея редко подвергается сомнению. Благодаря работам Фехнера математика гармонии внедрилась в пространство психологии.

Фехнеру принадлежит еще одно достижение, связанное, как нам кажется, с гармонией. Речь идет о законе Вебера-Фехнера, согласно которому интенсивность ощущения пропорциональна логарифму интенсивности стимула. Этому закону можно поставить в параллель концепцию гармонии, идущую из античности и популярную в последующее эпохи (Аристотель, Декарт). Это гармония между произведением искусства и впечатлении (например, удовольствием), испытываемым реципиентом. Представляется, что математическая интерпретация гармонии такого рода еще ждет своего исследователя.

Эксперименты Фехнера вызвали интерес во всем мире. Два американца – Лайтнер Уитмер (Witmer, 1893, с. 209) и Эдгар Пирс (Pears, 1893) – усовершенствовали его методику и использовали ее на более представительном материале. Аналогичные исследования в области цветовых впечатлений были произведены Д. Р. Мейджером (Meyger, 1895), Ионасом Коном (Cohn, 1895) и др.

Были предприняты и качественной интерпретации результатов Фехнера через категории более высокого порядка.

Так, Вильгельм Вундт (1832–920) считал, что, испытывая удовлетворение при виде образца золотого сечения, мы при этом фактически сознаем выражаемую им золотую пропорцию. Соотношение, в котором целое относится к большей части, как большая часть к меньшей, воспринимается нами как средство унификации максимального разнообразия с помощью минимальных усилий. Таким образом, эстетическое удовлетворение выступает у Вундта как результат экономии мышления (Гильберт, Кун, 1960, с. 558).

Освальд Кюльпе (1862–1915) в 1893 г. пытался подкрепить эту точку зрения ссылкой на закон Вебера (цит. по: Гилберт, Кун, 1960, с. 558).

Уитмер утверждал, что в зеркальной симметрии преобладает единство (эстетическое равновесие), тогда как в золотом сечении ведущую роль играет многообразие (эстетический контраст). Поэтому золотое сечение является истинной средней величиной между избытком и недостатком разнообразия (Witmer, там же, с. 261 и далее).

К этому же времени относится и зарождение антропометрии, основоположником которой является французский исследователь Альфонс Бертильон (1853–1914).

Бертильон работал писарем в одной из полицейских префектур Парижа. Его задачей было заполнение карточек описания личности преступников. В них то и дело повторялись признаки: «высокого», «низкого», «среднего» роста, «лицо обычное», «никаких особых примет». Все эти описания подходили к тысячам людей. Бертильон, видя бессмысленность и бесполезность своей работы, он обратился к трудам Кетле, в которых излагалась идея среднего человека, основанная на многопараметрических измерениях. Эти измерения вели к синтезу типа личности. Измеряя рост, длину и объём головы, длину рук, пальцев, стоп, Бертильон убедился, что размеры отдельных частей разных лиц могут совпадать, но размеры четырёх, пяти частей тела одновременно не бывают одинаковыми (Торвальд, 1974).

Метод Бертильона стал работать, его взяли на вооружение во многих странах. И только с появлением дактилоскопии, метод Бартильона ушел в тень, сохранив свое теоретическое значение, как предвестник многомерного статистического анализа. Прикладное значение этого позднее стало очевидным: сначала в биометрии, а затем – практически во всех описательных дисциплинах, прежде всего в задачах диагностики: от диагностики неисправностей в технических объектах, до идентификации говорящих по данным речи.

Несколькими годами позднее после первого успешного эксперимента Бертильона вышла книга австрийского специалиста в области классической филологии В. Диттенбергера (Dittenberger, 1988) который решал задачу определения авторства фрагментов диалогов Платона по стилистическим признакам, с использованием статистических методов. Диттенбергер основывался на гипотезе о том, что частоты служебных слов (предлогов, союзов, частиц) в текстах одного и того же автора относительно постоянны, не завися от тематики текста, но частоты тех же слов в текстах разных авторов имеют существенные различия. Такой подход позволил фрагменты текста диалогов приписать Платону и не-Платону, а затем уже осуществить более дробную идентификацию. Сам Диттенбергер назвал свой метод стилеметрией, распространив его также и на датировку текстов. Диттенбергер имел много последователей, в том числе и в России. Среди них следует прежде всего упомянуть Н. А. Морозова, который для отличения плагиата от подлинного произведения использовал частотные распределения служебных слов (Морозов, 1915). Познавательные принципы стилеметрии и ее задачи были отрефлексированы уже в конце XX в. (Мартыненко, 1989).

К перечисленным выше измеряющим дисциплинам примыкает биометрия, которая сложилась в XIX веке, главным образом, благодаря трудам Фрэнсиса Гальтона (1822–1911), а затем Карла Пирсона (1857–1936). В книге Гальтона, посвященной наследственности, изданной в 1889 г. им впервые было введено в употребление слово «biometry». В этой книге им были изложены также основы корреляционного анализа. Содержание биометрии составляют статистические методы, применяемые в биологии, медицине, сельском хозяйстве, экологии. В стройную научную дисциплину превратил её математик Карл Пирсон (1857–1936). Но это уже случилось в начале XX в.

Отметим также, что существенной чертой творчества Гальтона является то, что при исследовании корреляции он имел в виду не только установившиеся пропорции между явлениями, а процесс совместных изменений явлений, т. е. пропорционирование рассматривалось в динамике (Дружинин, 1979, с. 177).

Завершает череду метрических дисциплин XX в. эконометрика, у истоков которой стоял итальянский инженер, экономист и социолог Вильфредо Парето (1848–1923) – один из основоположников теории элит. По мысли Парето, общество имеет пирамидальную структуру, на вершине которой находится элита – социальный слой, руководящий и направляющий жизнь всего общества. При построении этой теории Парето использовал, по-видимому, идеи своей диссертации «Принципы равновесия в твердых телах».

Он является автором Закона Парето (Принципа Парето, Принципа 20/80) – эмпирического правила, введённое социологом Вильфредо Парето (Pareto, 1987–1988). Этот принцип часто соблюдается в самых разных областях. Например, в том, что 20 % людей обладают 80 % капитала, или 80 % пользователей посещают 20 % сайтов, 20 % покупателей или клиентов (постоянных) приносят 80 % прибыли. Этот принцип находит широкое применение в экономике и в других научных дисциплинах. Весьма популярно также статистическое распределение, носящее его имя.

К идеям Парето органично примыкают исследования выдающегося русского мыслителя Владимира Ильича Ульянова-Ленина, который построил теорию классового расслоения общества, опираясь на массовое наблюдение.

Эта теория строилась на многопараметрическом анализе хозяйств (городских и сельских) и построении их группировок по системе признаков, отражающих степень их экономической значимости. Ленин осознал чрезмерную растянутость вариации значений такого рода признаков и отказывается от общих (огульных) средних, переходя к групповым средним, которые вычисляются для относительно однородных в классовом отношении групп. Первые серьезные шаги в этом научном направлении Ленин сделал в 1897 г. в книге «Развитие капитализма в России», а в последующих работах на материале хозяйств европейских стран и США развил эту теорию. Серьезным достижением Ленина является и применение метода пропорционирования в массовом анализе экономических систем. Так, по материалам переписи населения Петербурга 1890 г. Ленин определил, что все торгово-промышленное население разбивается по социальному положению так: крупная буржуазия – около7%, зажиточная мелкая – 10%, беднейшие мелкие хозяева – 22%, *пролетариат – 61%* (не золотое ли здесь сечение?). Аналогичные пропорции Ленин получил и для крестьянских хозяйств (Ленин, с. 61–180; Рябушкин, 1978, с. 161–162).

5. Математико-гармонические итоги Нового времени

1. Если раньше математизации подвергалась прежде всего механика, то теперь математические методы охватили практически всю физику и проникли даже в общественные науки: экономику, демографию, социологию, эстетику и даже лингвистику. Это была своего рода небольшая революция. Математика становится воистину междисциплинарной.

В методологическом отношении математика перешла на новую, более высокую ступень абстракции, предмет ее стал гораздо более общим и поэтому вширь и вглубь выросли возможности ее приложений.

2. Сложная эстетическая жизнь столетия породила ряд интересных эстетико-гармонических концепций, среди которых были рассмотрены взгляды Новалиса, Гегеля и Ницше.

3. На фоне этих будоражащих воображение математических и эстетических собственно достижений XIX в. теоретические математико-гармонические изыскания выглядят довольно скромно.

Однако, два достижения – последовательность Люка и формула Бине заняли прочное место в истории математико-гармонических изысканий.

4. Недостаток теоретических изысканий с лихвой компенсируется обилием экспериментальных исследований, которые стали откровенно математико-гармоническими уже в данную эпоху, а некоторые стали таковыми уже в XX в.

Особую важность имеют измерения Цейзинга, который придал всеобщую значимость (не без преувеличения) закону золотого сечения, а также работы Фехнера, который также поддержал значимость золотого сечения, но уже в рамках экспериментально–психологической теории. Существенные предпосылки для развития математико-гармонических представлений в будущем были заложены Бертильоном и Кетле (антропометрия), Гальтоном (биометрия), Кетле (искусствометрия), Парето, Ульяновым-Лениным (эконометрия) и Диттенбергером (стилеметрия).

Новейшее время – XX век: 1900–1985 гг.

Вундеркинд

Посвящается юному Джорджу Бергману,
построившему в 1957 г. систему счисления на основе
золотого сечения

Мы любим Скалу, Метрополитен и прочие театры,
Изяществом письма пленяет нас поэт,
В балете восхищает ловкий пируэт,
А в ресторане – вина и салаты.

Вгоняют в транс рулетка, кости, карты,
Головоломки, фокусы, загадки,
Секреты, сплетни, колдовство, колядки. -
У каждого свои пристрастья и азарты.

Но более всего гурманы ценят чудеса,
Где странные рождаются догадки, -
Там числа и игра согласно правят миром.

В таких потехах вундеркиндов голоса
Громят все догмы и порядки, -
Сметая славу изваяний и кумиров.

Данный очерк охватывает XX столетие за исключением последних 15 лет. Мне кажется, что этот финишный отрезок и примыкающее к нему первое десятилетие XXI века – еще не история. Это скорее текущая, живая жизнь, не успевшая превратиться в сухие факты. Живая жизнь многолика, пестра, противоречива, неустойчива. Представляется, что дискуссионная пыль, порожденная муками стремительного становления, должна осесть. После этого можно будет бесстрастно оценить ситуацию. Сделаю это я или кто-то другой, покажет время. Возможно, этот краткий период «бури и натиска» нуждаются в критическом обзоре, но я пока не ощущаю в себе ни готовности, ни способности к профессионально безупречной и объективной оценке положения дел и приведения невероятно разнообразных противоречивых и трудносопрягаемых тенденций к общему знаменателю. Пока же я переведу дух в преддверии этого интереснейшего периода в развитии математико-гармонических представлений.

Я не могу себе позволить торопиться и вмешиваться в процесс, развивающийся по своим законам и стремящийся к самоосознанию. О молодой математике гармонии можно сказать словами Вергилия: *Naviget, haek summa est* – Пусть она плывет, т. е. идет вперед, а не стоит на месте. Именно эти слова произнес Валерий Брюсов в 1921 г., говоря о многовекторности развития молодой советской поэзии в 20-е гг. XX века (Брюсов, 1973, с. 185). Многовекторность, молодость и революционность математики гармонии несомненны.

1. Общая характеристика

В течение XX в. интенсивность математико-гармонических изысканий постепенно нарастает. Это обусловлено стремительным ростом науки в целом, ее превращением из малой науки в большую науку – науку, ставшую непосредственной производительной силой подобно современной промышленности (Михайлов, Черный, Гиляревский, 1977). Но важную роль играли и внутренние процессы в развитии золотосеченских проблем, прошедших стадию «первичного накопления знаний». Эти знания постепенно превращались в фактор, ориентирующий в сторону систематической работы. К концу века поток информации, связанный с золотым сечением и числами Фибоначчи, стал лавинообразным. Качественный перелом начался примерно в начале 70-х в процессе экспансии математико-гармонических представлений в сферу информационных технологий. С этого момента математико-гармоническое движение стало набирать энергию как в области математических идей, так и в области многочисленных приложений, затрагивающих основы развития современной цивилизации.

XX век характеризуется беспрецедентно радикальными сдвигами в области научного и художественного творчества. Речь идет об отходе от классических схем, переоценке ценностей, декадансе, обновлении художественного и научного языка, становлении новых и даже экстравагантных научных парадигм, возникновении различных форм модернизма и авангардизма.

Вот как, например, описывает А. Н. Толстой в своем романе «Хождение по мукам» противоречивую и сложную ситуацию начала века в Петербурге, эпоху кануна первой мировой войны: «Петербург жил бурливо-холодной, пресыщенной, полуночной жизнью. Фосфорические летние ночи, сумасшедшие и сладострастные, и бессонные ночи зимой, зеленые столы и шорох золота, музыка, крутящиеся пары за окнами, бешеные тройки, дуэли на рассвете, в свисте ледяного ветра и пронзительном завывании флейт… С невероятной быстротой создавались грандиозные предприятия, возникали, как из воздуха, миллионные состояния. Из хрусталя и цемента строились банки, мюзик-холлы…великолепные кабаки, где люди оглушались музыкой, отражением зеркал, полуобнаженными женщинами, светом, шампанским… В городе была эпидемия самоубийств. Залы суда наполнялись толпами истерических женщин, жадно внимающих кровавым и возбуждающим процессам. Все было доступно – роскошь и женщины. Разврат проник всюду, им, как заразой, был поражен дворец… То было время, когда любовь, чувства добрые и здоровые считались пошлостью и пережитком… разрушение считалось хорошим вкусом – признаком утонченности… Люди выдумывали себе пороки и извращения, чтобы не прослыть пресными. Таков был Петербург в 1914 году. Замученный бессонными ночами, оглушающий тоску свою вином, золотом, безлюбой любовью, надрывающими и бессильно-чувственными звуками танго – предсмертного гимна, – он жил словно в ожидании рокового и страшного дня» (Толстой, 1973, с. 5–7).

В это время ценности, которые ранее казались прочными и незыблемыми, перестали существовать. Уходило в прошлое и традиционное представление о гармонии природы и человеческого существования, идея единения с природой и сопричастности к вечным ценностям. Разброд, качания, бунт, ниспровержение всего и вся, неприятие всего затхлого и омертвевшего.

Первая четверть XX века – это сложный и бурный период в истории европейской культуры с колоссальным приливом творческой энергии и поиском новых путей во всех областях искусства. Всеми цветами радуги переливался нескончаемый поток сталкивающихся противоречивых идей. В этих условиях формировалась какая-то новая гармония, уникальный и парадоксальный сплав течений, школ, манер, не вмещавшиеся в традиционные рамки реализма, импрессионизма, романтизма и прочих течений.

Но одновременно постепенно набирает силу тенденция преодоления чересполосицы мнений, поиска выхода из эстетического хаоса через переход к формализации, математизации и даже индустриализация искусства. Эта тенденция начала прорисовываться уже в конце XIX века. Все началось с Поля Сезанна, который призывал к геометрической структурализации реальности (Панкин, 2004). «Трактуйте природу посредством цилиндра, шара, конуса…», – призывал он. Логическим продолжением идей Сезанна явился кубизм, который призывал отказаться от евклидовой геометрии и войти в царство слияния времени и пространства. В дальнейшем идеи кубизма привели к супрематизму Казимира Малевича. В этом течении была реализована зримая проекция неземного, беспредметного мира. Позднее идеи супрематизма были развиты Василием Кандинским, который не конструировал формы, а корректировал то, что являлось его воображению. В поздний период Кандинский становится все более рациональным, геометрическим, сциентистским. Это было характерно и для «научной поэзии», которую проповедовал Рене Гиль (Брюсов, 1973). Основная идея Р. Гиля и его многочисленных последователей состоит в том, что «поэзия есть верховный акт мысли». Поэтический образ по Гилю есть результат синтезирующей способности интеллекта. Поэтому поэзия, как и наука, есть проявление мысли, выраженной не в отвлеченной форме, а в живом образе.

Но это только одна из черт данной эпохи. Много и других.

Экспансия идей и методов естественных наук и математики в гуманитарные науки и искусство в это время была тотальной. Это тенденция зародилась уже в XIX веке, воплотившись в новых измеряющих гуманитарных дисциплинах. В XX веке эта тенденция приобрела характер пандемии.

Вдогонку за антропометрией, биометрией, стилеметрией, эконометрией, которые зародились в XIX веке, устремились психометрика, социометрия, наукометрия, библиометрия, искусствометрия, информметрия, технометрия и др. дисциплины.

Но на фоне первой тенденции довольно активна и вторая: экспансия гуманитарных наук и искусства в естественные науки, т. е. набирает силу тенденция гуманизации естественных наук. Особенно это характерно для математики, познавательные принципы которой переосмысляется в гуманитарном аспекте.

Возникают обширные сферы междисциплинарной деятельности. Это теория систем и системный анализ, математическое моделирование, синергетика, социодинамика и теория ценозов.

XX век – это время расцвета великой русской формальной школы в литературоведении, связанной с именами Андрея Белого, Юрия Тынянова, Виктора Шкловского. Это время русского авангардизма в лице Василия Кандинского, Марка Шагала, Давида Бурлюка и др. Это время рождения структурализма Фердинанда де Соссюра, расцветшего в пражской, американской и копенгагенской школах структурной лингвистики, а также в различных школах общей поэтики. Это математическое стиховедение, увлекшее не только филологов, но и великих математиков, например, Н. А. Колмогорова. Именно в XX веке наблюдается расцвет техники психологических и социологических измерений: семантический дифференциал, ассоциативный эксперимент, контент-анализ, методики экспертных оценок и т. п. В XX веке обостряется интерес к информации во всех ее ипостасях. Рождается математическая теория информации, теория избыточности, теория кодирования, математическая лингвистика. А в конце столетия стала складываться междисциплинарная область, которая уже в начале следующего тысячелетия получила название «Математика гармонии».

Примечательной чертой столетия является тотальный интерес к динамике формообразования в природе, общественной жизни и искусстве. В эстетике стали говорить об общности принципов формообразования для разных типов искусств. Было установлено, что в большинстве случаев в искусстве укоренены сюжеты, в которых действует принцип восхождения, достижения вершинной точки с последующим спадом и развязкой. Такой способ конструирования формы типичен для всех временных искусств. Он был провозглашен на материале фольклора В. Я. Проппом (Пропп, 1969) и на материале музыки – Гансом –Генрихом Унгером (Махов, с. 122). При этом динамический пик является некоторой равновесной точкой, регулирующей распределение «энергии» в тексте.

2. Первая половина XX в.

Следуя логике и интенсивности развития математико-гармонических идей, обозреваемое столетие было разбито на два полстолетия, а второе полстолетие – на две неравные части: 1950 – 1985 и 1985 – 2000 гг. Эта неравномерность обусловлена стремительным ростом информационного потока по мере приближения к концу столетия.

В былые времена математико-гармонические изыскания были уделом одиночек. Такое положение вещей сохранялось и в первой половине XX в. Причем, в это время преимущественно осваивались, интерпретировались и совершенствовались результаты, достигнутые в школах Цейзинга и Фехнера, т. е. в рамках экспериментальной эстетики и в конкретных искусствах: архитектуре, музыке, живописи, отчасти в словесном искусстве. Важным достоянием этого этапа является то, что числа Фибоначчи и золотое сечение стали использоваться для изучения динамики текста: музыкального и словесного.

Собственно математических достижений было немного, если не считать трех замечательных открытий.

Первое открытие выполнено в области непрерывных дробей. В 1917 г. американским математиком Куртом Альтшулером золотое сечение впервые было представлено в виде повторного радикала, состоящего исключительно из единичек:

$$\lim\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}\rightarrow 1{,}618$$

Таким образом, золотое сечение пополнило ряды замечательных математических констант, которые могут быть представлены в виде непрерывной дроби, повторного радикала, бесконечного произведения или каким-то других итерационных структур. Число φ заняло почетное место в тройке великих констант: e, π, φ.

Следует также упомянуть замечательные формулы великого индийского математика Сриниваза Рамунаджана (1887-1920), полученные благодаря его гениальной интуиции, не укладывающейся в рамки практического разума. Вот одна из них. Обе связывает три замечательных числа: e,π и φ (Жуков, 2004, с. 61):

$$\frac{1}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+..}}}=\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}-\varphi\right)e^{\frac{2\pi}{5}}$$

А теперь остановимся на одном достаточно курьезном открытии. О нем упоминает Мартин Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» (Гарднер, 1971, с. 230). В русский перевод вошли три книги, изданные им в США в интервале 1959-1966 гг.

С. А. Ясинский в книге (Ясинский, 2004, с. 153) обратил внимание на интересное замечание Гарднера: «Стифен Барр, сын Марка Барра, давшего *числу* φ *его название*, прислал мне оттиск статьи своего отца, опубликованной в лондонском Sketch в 1913 году. В этой статье содержится следующее *обобщение этого замечательного числа*. Если построить аддитивный ряд, в котором каждый член (начиная с четвертого) равен сумме трех предыдущих, то *предел отношения последующего члена к предыдущему будет равен 1,839*…Аналогичный предел аддитивного ряда, в котором каждый член, начиная с пятого, равен сумме четырех предыдущих, равен 1, 927… В общем случае

$$n = \frac{\log(2-x)^{-1}}{\log x},$$

где n – число слагаемых, которые необходимо взять для получения следующего члена ряда, а x – предел отношения последующего члена к предыдущему. При $n = 2$ мы получаем обычные числа Фибоначчи с $x = \varphi$. При n, стремящемся к бесконечности, x стремится к 2». В этой пространной цитате содержится по крайней мере три интересных пассажа. С позиций сегодняшнего дня мы можем сказать, что при трех слагаемых мы получаем так называемые числа Трибоначчи, которые были заново открыты Фейнбергом (Feinberg, 1963) только в середине 60-х гг. Для многих будет интересно, что обозначение золотого сечения буквой φ в честь великого греческого зодчего Фидия также принадлежит Барру. Любопытно также, что Гарднер назвал числа Барра (числа Трибоначчи) обобщением числа φ. Так же поступил и А. П. Стахов, назвав свою рекуррентную последовательность обобщением золотого сечения, что породило среди некоторых участников золотосеченского движения острую терминологическую дискуссию. Из сказанного видно, что Стахов в таком словоупотреблении имеет сторонника в лице великого популяризатора математики и автора математических головоломок Мартина Гарднера, а также Марка Барра и его сына Стифена – знаменитого «фокусника» и «умника» от математики.

Ознакомим читателя с еще одним интригующим развитием гармонических изысканий. Речь идет об их связи с квантовой механикой.

Все началось с музыки. Норберт Винер в 1925 г. в своем докладе в Геттенгене, посвященном гармоническим колебаниям, как и Пифагор, заострил внимание на том, что законы физики в каком-то смысле аналогичны нотной записи мелодии. Он стремился подчеркнуть, что в музыке, как и в квантовой теории, «имеется существенная разница между поведением, относящимся к очень малым интервалам времени (или пространства), и тем, что мы считаем нормальным поведением» (Винер, 1967, с. 101-103) Далее Винер связывает свои идеи с принципом двойственности Гейзенберга. Он говорит о том, что «Гейзенберг обнаружил, что в условиях, при которых положение частицы может быть измерено с очень высокой точностью, ее импульс или скорость могут быть измерены только с малой точностью». Далее Винер пишет о том, что эта точность имеет ту же природу, что и двойственность между высотой и длительностью в музыке. Гейзенберг объяснил это с помощью гармонического анализа, усовершенствованием которого занимался Винер. Музыкальная интерпретация Винером принципа двойственности известна крайне узкому кругу ученых. Но гипотеза эта очень смелая и экстравагантная. Но главное состоит в том, что в ее основе лежат идеи Пифагора о гармонии Вселенной.

Возможно, если устроить серьезный информационный поиск, то можно будет разыскать в первой половине XX в. еще какие-то математические достижения, относящиеся к золотосеченской теме, но в целом информационного вала здесь нет.

Этого нельзя сказать о прикладных исследованиях этого периода. Здесь есть определенные достижения, но и они в целом могут рассматриваться как развитие идей XIX в.

Замечательным исключением из этого ряда работ является статья *Эмиля Карловича Розенова*, написанная в 1904 г.. Основой статьи послужил доклад Розенова «О применении закона золотого деления к музыке», сделанный им на заседании Московского научно-музыкального кружка 15 октября 1903 года и опубликованной в «Русской музыкальной газете» (1904, № 25–28), а также в «Известиях С.-Петербургского общества музыкальных собраний (СПб, 1904, июнь-август, с. 1–19).

Отличительной чертой статьи Розенова является то, что здесь золотое сечение в явном виде используется для анализа не только музыкального, но и словесного текста. До Розенова эта эстетическая характеристика использовалась только при анализе музыки. Причем Розенов исследует оба типа звучащего текста с единых позиций и в единых терминах. К такому методу анализа Розенова, по его же словам, побудили обратиться «бедность, шаткость, и разрозненность музыкальной эстетики» и желание разгадать «таинственные творческие законы природы, руководящие музыкальным формовоплощением художественно-эмоциональных идей через посредство человеческого гения» (Розенов, 1982, с. 119). Это очень важная мысль, ибо для Розенова закон природы, воплощенный в выдающихся произведениях искусства, превращается в эстетический закон.

В центре внимания Розенова – динамическая развертка текста и разыскание в нем точки-кульминации, которая может «1) служить моментом раздела между главными частями произведения и установить этим пропорциональные размеры частей по отношению к целому; она может 2) подчеркнуть кульминационный пункт возрастающего по напряжению ожидания и может 3) отметить главную, основную мысль произведения, поместив ее на столь заметное для непосредственного чувственного восприятия место» (Розенов, там же, с. 125).

Далее Розенов на материале текстов М.Ю.Лермонтова («Бородино», Умирающий гладиатор», «Демон», «Три пальмы», «Кубок» Ф. Шиллера, «То было раннею весной» А. К. Толстого) демонстрирует эффективность своей методики. Тот же вывод делается для ряда произведений Баха, Бетховена, Моцарта, Вагнера и Глинки, народных песен.

В заключение Розенов отмечает, что закон золотого сечения проявляется далеко не во всех случаях. Наиболее четко он «проявляется у гениальных авторов, а у последних – преимущественно в эпоху их полной зрелости и главным образом, в лучших, наиболее одухотворенных творениях их» (Розенов, 1982, с. 156).

Несколько позднее Леонид Леонидович Сабанеев (1881–1968) предпринял детальное исследование проявления золотого сечения. Им было исследовано более 2 тыс. произведений русских и зарубежных композиторов.

Сабанеев исходил из посылки (Сабанеев, 1925), что музыкальное произведение во времени делится на части некоторыми вехами, которые облегчают восприятие сложного целого. Такими вехами, по Сабанееву, являются: изменение структуры мелодии, интонационные кульминационные пункты, изменение тональности и др. При этом в большинстве случаев такие изменения, переломы, переключения делят текст по закону золотого сечения.

Интересно, что в динамике музыкальных произведений Сабанеев обнаруживает не только классическое, а целую серию золотых сечений. Каждое сечение отражает свое музыкальное событие в развитии музыкальной темы. В изученных им 1770 сочинений 42 композиторов он зафиксировал 3275 золотых сечений. Причем в подавляющем числе произведений золотое сечение проявляется.

Наиболее всесторонне Сабанеевым были изучены все этюды Шопена. Все они, кроме трех, содержат золотое сечение (всего было выявлено 154 таких сечений). Сабанеев обратил внимание также и на то, что в ряде случаев зеркальная симметрия сочетается с золотой. В таких случаях произведение распадается на несколько равных частей, в каждой из которых можно выделить золотое сечение.

Характерно, что Сабанеев, как и Розенов, указывает на то, что золотое сечение чаще всего обнаруживается в высокохудожественных произведениях, написанных выдающимися композиторами. Причем весьма примечателен тот факт, что *в произведениях композиторов XX в. золотая пропорция встречается значительно реже, чем у их предшественников*. Это было следствием отхода от классических традиций, массовым распространением модернизма и авангардизма.

Исследования Розенова и Сабанеева позднее были продолжены *Львом (Лео) Абрамовичем Майзелем* (1907–2000). В своей книге (Майзель, 1960) он отмечает наличие в произведении некоторого «кульминационного взлета», высшей точки, причем такое построение характерно не только для произведения в целом, но и для его частей. Майзель подчеркивает, что кульминация редко располагается в центре произведения, она обычно асимметрично смещена. Например, в восьмитактных мелодиях Бетховена, Шопена, Скрябина высшая точка располагается на сильной доле шестого такта или на последней мелкой доле пятого такта, т. е. в точке золотого сечения. По мнению Майзеля, доля таких восьмичленных мелодий, в которых подъем занимает пять тактов, а последующий спуск – три, необычайно велика. Если автор пишет гармонично, то наверняка это проявляется в установленной числовой закономерности. Рисунок мелодии имеет такой «профиль»: от длительного периода нарастания через кульминацию к более короткому спаду.

Наряду с работами в области текстовой гармонии продолжались усилия по популяризации золотого сечения, его замечательных свойств и вариантов его приложения, преимущественно в архитектуре, на основе теории пропорций.

Здесь выдающуюся роль сыграли два исследователя Матила Гика (Гика, 1935) и Герман Давидович Гримм (Гримм, 1936).

Заметным явлением в математико-гармонических штудиях этого времени является книга немецкого математика *Генриха Тимердинга* «Золотое сечение», написанная в 1919 г. (Тимердинг, 2005). Математическая часть книги представляет собой элементарное изложение теории золотого сечения посредством геометрических структур. Что касается прикладной части (наиболее интересной), то она содержит критическое изложение эстетических идей Цейзинга и Фехнера. Тимердинг рассматривает сильные и слабые стороны их концепций. Много места Тимердинг отводит вопросам искажения визуального восприятия произведений изобразительного искусства и влияния этого искажения на математико-гармонические характеристики.

Кроме того, Тимердинг высказал ряд принципиальных соображений. На некоторых из них мы считаем необходимым остановиться.

1. Тимердинг говорит о двух подходах к изучению золотого сечения в искусстве. Первый подход он называет реалистическим. Согласно такому подходу каждое явление должно быть рассмотрено без пристрастия и предвзятости, обусловленной предварительным установлением нормы. «Поэтому, – пишет Тимердинг, – для художника необходимо только наблюдение и овладение техникой его искусства, а всякое знание является для него опасным, так как оно нарушает правильность и непосредственность его восприятия» (Тимердинг, 2005, с.60). Второй подход Тимердинг считает идеалистическим. Художник стремится передать тип, некоторый идеал, который формируется в сознании художника. Никакой реальный объект его не достигает, он может лишь приблизиться к нему. Но этот тип может быть сформирован не умозрительно, а экспериментальным путем через статистическое обобщение. Для этого нужно измерить множество объектов данного рода и вычислить среднюю величину. Это соответствует методу А. Кетле, о котором мы говорили в предыдущем очерке .

2. Тимердинг весьма скептически относится к тем исследователям, которые смотрят на золотое сечение, как на господствующее отношение и на норму в природе и искусстве. Большие надежды он возлагает на биометрию, осуществляющую систематическое измерение живых существ на массовом материале. Именно результаты биометрических исследований должны дать ответ на вопрос о роли золотого и прочих отношений в природе и искусстве. Таким образом, Тимердинг предостерег от чрезмерного оптимизма относительно всеобщности золотого сечения и призвал к проведению статистических исследований на массовом материале.

3. Тимердинг активно предостерегал и от мистического толкования золотого сечения, «которое не требуется для понимания действительных законов искусства и психологических условий художественных впечатлений, а лишь препятствует правильному пониманию этих условий и направляет на ложный след, вследствие необоснованного введения метафизического элемента» (Тимердинг, 2005, с. 86). Обратим внимание на то, что эта фраза-

напутствие в книге Тимердинга является заключительной. Это предостережение не теряет актуальности и в XXI в.

Во время второй мировой войны крупнейший французский архитектор XX в. *Ле Корбюзье* (1887–1965) начинает разрабатывать свой знаменитый «Модулор», описанный им в одноименной книге с подзаголовком «Опыт соразмерной масштабу человека гармоничной системы мер, применяемой как в архитектуре, так и в механике» (Ле Корбюзье, 1976). Корбюзье продолжил традиции Витрувия и архитекторов эпохи Возрождения, у которых в центре творчества была идея проекта , совместив идеи старых мастеров с искусством авангарда. В основу своего модулора Корбюзье положил пропорции человеческого тела, связанные с золотым сечением. Вообще в творчестве Корбюзье очень сильным было конструкторское начало. Например, в 1914 г. совместно с инженером М. Дюбуа он запатентовал свой проект Домино, в котором предугаданы возможности строительства из крупноразмерных строительных элементов, что было ярким новаторским шагом. *Это был первый случай в истории патентования, когда интеллектуальная собственность была защищена человеком, причастным к сознательному, рабочему математико-гармоническому конструированию.* Значительно позднее, патентование, но в более широких масштабах применительно к информационным технологиям было осуществлено А. П. Стаховым и его коллегами. Но на этом мы остановимся ниже.

Современником Ле Корбюзье был выдающийся русский и советский архитектор *Иван Владиславович Жолтовский* (1867-1959). В 20-е гг. он изучал архитектуру в Италии, где на него сильное впечатление произвели работы Андреа Палладио. Четыре книги великого итальянца Жолтовский перевел на русский язык. Увлекшись Палладио, Жолтовский занялся также изучением пропорций в архитектуре и искусстве. На основании золотой пропорции он конструирует производную функцию, которая вошла в историю архитектуры как функция Жолтовского. Последняя является удвоенным третьим членом нисходящего ряда золотого сечения от единицы до 0,236: 1,000 – 0,618 – 0,382, 0,236. Удвоенный отрезок последнего члена равен 0,472. Эта величина может быть проинтерпретирована также как средняя геометрическая золотого сечения и его дополнения до единицы: $0{,}472 = 2 \times 0{,}618 \times 0{,}382$. Это малый отрезок функции Жолтовского. Больший отрезок равен $1 - 0{,}472 = 0{,}528$. Последующие члены равны, соответственно, $0{,}528 : 0{,}472 = 1{,}118$; $1 : 1{,}118 = 0{,}896$. Исходя из этого соотношения, получаем так называемый «живой квадрат» Жолтовского, у которого высота составляет $0{,}896$ его ширины.

Определенный вклад развитие золотосеченских идей внес великий кинорежиссер *Сергей Михайлович Эйзенштейн* (1896–1948), который начал заниматься математикой еще в юности. Он понимал необходимость введения точных методов анализа, чем объясняется, в частности, его увлечение русским авангардом, достижениями русских формалистов, а также золотым сечением. Специфической особенностью работ Эйзенштейна было то, что и золотое сечение и логарифмическая спираль – линия типа латинского *S*, им изучались как структурные схемы, соотносящиеся с общими законами природы. Логарифмическую спираль в версии Хогарта . Эйзенштейн обсуждает в контексте соединения двух противоположных начал – *инь* и *янь*, характерных для китайской модели мира. Такая спираль рассматривается Эйзенштейном как модель развития.

Можно отметить также интерес Эйзенштейна к динамической организации временных искусств: музыки, словесных произведений, кинофильмов. Например, он, анализируя произведения Пушкина, отмечает характерные точки поэтического текста, в которых проявляется закон золотого сечения (Иванов, 1976, с.193).

Характерные переломы композиции в точках золотого сечения он использовал и при «конструировании» фильма «броненосец Потемкин».

Он разбил ленту на пять частей. В первых трёх действие разворачивается на броненосце. В двух последних — в Одессе, где поднимается восстание. Этот переход в город происходит точно в точке золотого сечения. В каждой части также есть свой перелом, соответствующий золотому сечению.

Таким образом, Эйзенштейн, как Ле Корбюзье и Жолтовский сознательно использовал в своих шедеврах идею золотого сечения, рассматривая связанные с ним структуры как элемент творческого метода.

В первой половине XX века появились первые признаки прорастания математико-гармонических идей в техносферу. Это произошло в электросвязи благодаря усилиям профессора Михаила Александровича Бонч-Бруевича (1888–1940) – советского радиотехника, основателя отечественной радиотехнической промышленности. В его учебнике «Элементы радиотехники» (Бонч-Бруевич, 1938) был приведен пример расчета однородной лестничной цепи, в которой токи были пропорциональны отношениям чисел в последовательности Фибоначчи. С этой работы начались исследования электрических цепей в Электротехническом институте инженеров связи в Ленинграде, которому позднее было присвоено имя Бонч-Бруевича. Ныне это Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций.

Несколько позднее в исследования по данной проблеме включился профессор Владимир Николаевич Листов (1900–1978), основоположник и первый заведующий кафедрой «Электрическая связь» Ленинградского института железнодорожного транспорта – коллега М. А. Бонч-Бруевича по Нижегородской лаборатории. Увлеченность Листова золотым сечением имела два источника. Во-первых, это идеи Бонч-Бруевича в области электрических цепей (Листов, 1936). Во-вторых, его страстная увлеченность архитектурой, где он находил различные варианты проявления золотого сечения. Архитектурные исследования Листова отличались высоким профессионализмом. Это нашло отражение в книге, посвященной выдающемуся русскому архитектору итальянского происхождения Ипполиту Антоновичу Монигетти (Листов, 1976). В лице Владимира Николаевича мы находим счастливое и редкое в новейшее время сочетание искусствоведа, инженера и ученого.

В 30-е гг. были продолжены исследования в области гармонического анализа, восходящие к учению Пифагора и теории гармонических колебаний Фурье. Норберт Винер (Винер, 1967, с. 101-105) пишет о том, что

3. Вторая половина XX века: 1950–1985 гг.

Во второй половине XX в. математико-гармоническое движение стало постепенно набирать силу и к концу 60-х становится массовым. В значительной мере «виновата» в этом атмосфера творческих исканий, характерная для динамичных и революционных 60-х. Но прежде чем на авансцену вышли шестидесятники, было еще преддверие 60-х, где также наблюдалось заметное оживление.

Для этого периода характерны две согласованных тенденции: математизация гуманитарного знания, его дегуманизация и обратная тенденция – гуманизация математического знания. Ситуация изменилась весьма радикально. Возникли математическая лингвистика, математическая психология, математическое искусствоведение и другие математико-гуманитарные гибриды. К метрическим дисциплинам, возникшим в XIX в. (биометрии, антропометрии, стилеметрии, эконометрии), присоединились новые: наукометрия, информметрия, библиометрия, психометрика, социометрия и др. В гуманитарных науках, например, в лингвистике, стал распространяться метод эксперимента, свойственный естественным наукам. Благодаря неуклонно возрастающей роли вычислительных машин возникли новые прикладные задачи: машинный перевод, распознавание и синтез речи, компьютерные методы идентификации личности, информационный поиск и др.

В этот период в математико-гармонических изысканиях постепенно вызревали новые тенденции.

Прежде всего, началась массовая пропаганда математико-гармонических идей, прежде всего среди одаренной молодежи, а затем и среди специалистов разных отраслей науки и искусства, включая математиков через благородную хоббистскую деятельность в рамках «фибоначчизма».

Мало-помалу стала складываться система отраслевых ветвей математики гармонии с разной степенью концептуальной и методической зрелости.

4. Математические исследования

В 50-е гг. был заложен фундамент дальнейшего бурного развития математического учения о гармонии. В этом десятилетии были опубликованы три выдающиеся книги: «Возвратные последовательности» А. Я. Маркушевича (1951 г.) (Маркушевич, 1951) и «Симметрия» Германа Вейля (1952 г.) (Вейль, 2007) и «Числа Фибоначчи» Н. Н. Воробьева (1950), а также эпохальная статья американского школьника 12-летнего Джона Бергмана «Система счисления на иррациональном основании» (Bergman, 1957). Заслуживает особого упоминания также большая статья венгерского математика Альфреда Реньи «Вариации на тему Фибоначчи» (Реньи, 1959).

Большинство математических работ середины века имеют откровенно научно-популярный характер, но на основе весьма сложной элементарной математики.

Начнем наш обзор с замечательной книги советского математика *Александра Ивановича Маркушевича* (1908–1979) (Маркушевич, 1950) – выдающегося популяризатора математики и вообще достижений науки. По его инициативе был начат выпуск серии книг «Библиотека учителя» и «Популярные лекции по математике». Последняя серия была открыта его книгой «Возвратные последовательности». Книга представляет собой расширенное содержание лекции, читанной автором для школьников IX и X классов – участников Московской математической олимпиады, а затем – в несколько преобразованном виде и в Московском институте усовершенствования учителей. Кроме того, Маркушевич был одним из авторов и редактором 12-томной «Детской энциклопедии» (1971–1978), а также одним из инициаторов и авторов «Энциклопедии элементарной математики» (1951–1952, 1963–1966). Интересно также, что *Маркушевич является автором статьи «Начала» Евклида в Большой советской энциклопедии*.

Сказанное позволяет сделать заключение, что Маркушевич был прежде всего популяризатором науки и его книга «Возвратные последовательности» занимает в его творчестве заметное место.

Маркушевич доносит до читателя основательно подзабытую теорию возвратных последовательностей, основы которой были заложены в начале XVIII в. французским алгебраистом де Муавром. После Муавра развернутую теорию возвратных последовательностей дал Леонард Эйлер, посвятивший возвратным последовательностям тринадцатую главу своего «Введения в анализ бесконечно малых» (1748). В XX в. изложение теории возвратных последовательностей содержится в лекциях, читанных знаменитыми русскими математиками П. Л. Чебышевым (Чебышев, 1936, с. 139–147) и А. А. Марковым (Марков, 1910) в рамках теории конечных разностей.

Прежде всего, Маркушевич знакомит читателя с понятием характеристического уравнения. Он пишет, что возвратному уравнению (рекуррентной формуле) порядка k соответствует алгебраическое уравнение степени k с теми же коэффициентами – его характеристическое уравнение. Каждый из корней характеристического уравнения представляет собой знаменатель геометрической прогрессии, удовлетворяющей данному возвратному уравнению. В случае, когда все корни характеристического уравнения различны между собой, получаются k различных геометрических прогрессий, образующих базис возвратного уравнения. Следовательно, в этом случае члены любой последовательности, удовлетворяющей возвратному уравнению, можно получить путем почленного сложения некоторых геометрических прогрессий (числом k) (Маркушевич, 1951, с. 25).

А теперь приведем интерпретацию Маркушевичем последовательности Фибоначчи.

Возвратное уравнение (рекуррентная формула) для этой последовательности имеет вид:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n ,$$

Откуда получаем характеристическое уравнение:

$$q^2 = q + 1.$$

Решая это уравнение, получим два действительных корня:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ и } \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Поэтому общий член последовательности Фибоначчи можно записать так:

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты *A* и *B*, положим $n = 1$ и $n = 2$; получим:

$$u_1 = 1 = A + B$$

$$u_2 = 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A - B)$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}},\ B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

И, следовательно,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

или

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].$$

Это и есть общее выражение для чисел Фибоначчи, полученное в XVIII в. де Муавром, а позднее Бине.

Маркушевич рассматривает некоторые важные свойства последовательностей Фибоначчи. Часть из них стали позднее хрестоматийными. Отметим лишь интригующую связь между числами Фибоначчи и алгоритмом Евклида (там же, с. 29–30), которая в более поздних исследованиях не фигурирует.

Значительным шагом в развитии математико-гармонического направления была также книга *Николая Николаевича Воробьева (1925-1995)* «Числа Фибоначчи» (Воробьев, 1950) – советского математика, специалиста в области алгебры, математической логики и теории вероятностей, основателя советской школы теории игр. Книга Воробьева приобрела огромную популярность и выдержала множество изданий огромными тиражами.

Костяк книги образуют круг тем, обсуждавшихся на нескольких занятиях математического кружка школьников при Ленинградском университете в 1949/50 учебном году.

В «Предисловии» к книге Воробьев отмечает, что числа Фибоначчи – это собрание трудных, но увлекательных задач, рассыпанных по разным изданиям научно-популярного характера. При этом каждая задача имеет вид маленькой теории, со своей историей, проблематикой и методами, связанными с большой математикой.

В книге рассматриваются основные свойства чисел Фибоначчи, а также теоретико-числовые свойства, связь чисел Фибоначчи с непрерывными дробями и геометрией. В заключительном разделе рассматривается важная оптимизационная задача – теория поиска, основанная на числах Фибоначчи.

Наиболее интересной представляется часть книги, посвященная теоретико-числовым свойствам чисел Фибоначчи. Речь идет об их делимости. Например, Воробьев доказывает такую теорему: «если n делится на m, то и u_n делится на u_m» или такую: «каково бы ни было целое число, среди первых $m^2 - 1$ чисел Фибоначчи найдется хотя бы одно, делящееся на m».

Далее, Воробьев приводит несколько «признаков делимости» чисел Фибоначчи.

Число Фибоначчи четно тогда и только тогда, когда его номер делится на 3.

Число Фибоначчи делится на 3 тогда и только тогда, когда его номер делится на 4.

Число Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делится на 6.

Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делится на 5.

Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делится на 8.

Этот раздел книги, хотя в нем используется техника, не выходящая за пределы элементарной математики, достаточно не элементарен даже для математика – профессионала.

Числа Фибоначчи, как отмечает Воробьев в последнем издании своей книги (1978 г), ярко проявили себя в нескольких математических вопросах, среди которых в первую очередь он упоминает решение аспирантом Ленинградского университета Ю. В. Матиясевичем *десятой проблемы Гильберта*.

В этом же издании Воробьев рассматривает игру «цзяньшицзы», теоретико-игровой анализ которой опирается на детальное рассмотрение фибоначчиевых представлений натуральных чисел. Кроме того, Воробьев рассматривает приобретшую широкую известность теорию поиска унимодальной функции, построенную впервые, как отмечает Воробьев, известным американским математиком Р. Беллманом.

Что касается десятой проблемы Гильберта, то этой теме по свежим следам была посвящена статья Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова (Варпаховский, Колмогоров, 1970). Авторы отмечают, что суть проблемы заключается в возможности построения алгоритма, который позволил бы для любого алгебраического уравнения с любым числом неизвестных и целочисленными коэффициентами выяснить, имеет ли это уравнение по крайней мере одно целочисленное решение. Вывод Матиясевича оказался неожиданным: требуемого алгоритма не существует. Доказать это помогли числа Фибоначчи.

Примерно в том же ключе, что и книга Маркушевича и Воробьева, написана большая статья выдающегося венгерского математика *Альфреда Реньи* (1921 –1970). Эта статья построена (1960 г.) в увлекательной манере. Она представляет собой, как выразился сам автор, последовательность взаимосвязанных математических (алгебраических, геометрических, комбинаторных) задач на тему «последовательности Фибоначчи».

Работа Реньи, как и все его творчество, в высшей степени оригинальна и по форме, и по содержанию. Реньи берет основное определение последовательности Фибоначчи, т. е. основную тему, а затем начинает наматывать вариации на эту тему с точки зрения комбинаторики и алгебраических, числовых и геометрических свойств этих последовательностей.

Помимо классической схемы Фибоначчи (идеализированной задачи о размножении кроликов) Реньи приводит задачу о росте деревьев, задачу о раскраске домов разной этажности, задачу о вариантах составления телевизионных программ, задачу о рассаживании персон за круглым столом. Через такие наглядные задачи Реньи приходит от чисел Фибоначчи к числам Люка.

Помимо классической последовательности Фибоначчи Реньи приводит варианты, зависящие от других начальных условий. Такие последовательности он называет последовательностями типа Фибоначчи, а также формулирует правило вычисления всех членов этой последовательности по известным значениям двух любых чисел.

Реньи дает также интересную геометрическую интерпретацию отношения последующего члена к предыдущему при стремлении последовательности к бесконечности.

Не прошел Реньи и мимо замечательных свойств треугольника Паскаля. Наряду с известными манипуляциями с треугольником (смещение, наклонные линии) Реньи использует ход шахматного коня.

Интересны также соображения Реньи о делимости чисел Фибоначчи. В частности, Реньи установил, что остатки от деления чисел Фибоначчи на любое целое число образуют периодическую последовательность. Такие последовательности играют большую роль при генерировании так называемых «псевдослучайных чисел».

В конце статьи Реньи высказывает интересные соображения относительно рекурсий и рекуррентности, а также приводит любопытную нелинейную последовательность, каждый член которой (начиная с третьего) равен произведению двух предыдущих. Нетрудно проверить, что *n*-й последовательности

$$2, 4, 8, 32, 256, 8192, \ldots$$

равен 2^{F_n}, где F_n – *n*-е число Фибоначчи.

Завершая краткий обзор вариаций Реньи, нам трудно удержаться, чтобы не привести его похвальное слово в адрес чисел Фибоначчи: «Начав «вариации» с чисел Фибоначчи, мы затронули множество интересных вопросов, относящихся к алгебре, теории чисел, комбинаторике, геометрии, теории разностных и дифференциальных уравнений, теории поиска, рекурсивных алгоритмов и метода Монте-Карло. Разумеется, избранная нами тема отнюдь не исчерпана, но и приведенных выше «вариаций» достаточно для того, чтобы понять простую истину: подобно тому как незатейливая мелодия таит в себе несравненно больше, чем кажется при первом прослушивании, простая математическая задача (например, задача Леонардо Фибоначчи о размножении кроликов) при всестороннем рассмотрении позволяет заглянуть в широкий круг актуальных проблем современной математики».

В 1952 г. была опубликована великая книга *Германа Вейля* «Симметрия». В ней в концентрированной форме представлены результаты его творчества. Сам Вейль назвал эту книгу своей лебединой песнью.

Если попытаться отнести книгу Вейля к какому-нибудь жанру письменной речи, то ее, несомненно, нужно отнести к жанру научной литературы и притом в двух ипостасях: в собственно научном и научно-популярном. Но в равной степени ее можно отнести к жанру публицистики. В книге изящно, ненавязчиво и предельно деликатной форме излагаются серьезнейшие проблемы современной математики.

Примечательно и то, что Вейль обсуждает не только математические, но философские проблемы симметрии. Причем теоретические и прикладные аспекты находятся в гармоническом равновесии. Более того, Вейль акцентирует внимание на том, что «математика играет весьма существенную роль в формировании нашего духовного облика. Занятие математикой – подобно мифотворчеству, литературе или музыке – это одна из наиболее присущих человеку областей творческой деятельности, в которой проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии» (Klein, 1930)

Вейль определяет симметрию так: « …симметрия обозначает тот вид согласованности отдельных частей, которая объединяет их в единое целое», т. е. он придерживается вполне традиционной точки зрения. Например, Витрувий дает такое определение симметрии: «Симметрия возникает из пропорции… Пропорция есть соразмерность составных частей целым». Вейль также отмечает, что красота тесно связана с симметрией (Вейль, там же). Далее, Вейль отмечает, что симметрия тесно связана также и с гармонией. В целом создается впечатление, что понятия симметрии, соразмерности, согласованности, гармонии, красоты и др. относятся к одному семантическому пространству, при этом симметрия, как говорит Вейль, « является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство» (Вейль, там же, с. 37). Вейль не дает окончательного решения, он не высказывает твердого мнения относительно того, где здесь курица, а где яйца, но дает пищу для размышлений, которые выходят за рамки данного очерка.

Важной познавательной установкой Вейля является то, что симметрия (и вся группа понятий, с ней связанная) соотносится не только с природой, но и с продуктами созидательной творческой деятельности человека. Его философское кредо можно квалифицировать как *космизм*, покоящийся на законах математики. Такой подход прекрасно согласуется с духом и буквой пифагореизма.

Основываясь на наглядных представлениях, относящихся к природе (кристаллы, закономерности филлотаксиса, строение внутренних органов человека) и искусству (орнаменты, архитектура, символика), Вейль рассматривает многочисленные разновидности симметрии и их порождение и постепенно подводит читателя к абстрактным идеям, в частности к идее группы и поля в математике и теории относительности.

В заключение приведем оценку, данную Б. В. Бирюковым в «Послесловии» к «Симметрии» Вейля: «По цельности и гармонии своих частей, по богатству и действенности заключенных в ней научных и методологических целей, по яркости и выразительности изложения она принадлежит к классическим произведениям мировой научной литературы» (Бирюков, 2007).

5. Прикладные исследования

Во второй половине XX в. велись интенсивные исследования в области психологической ветви математико-гармонических изысканий.

Интересные идеи в этой области высказывает *Яков Давыдович Гликин* (1900-1987) – выдающийся советский архитектор и градостроитель, за плечами которого огромные достижения в архитектуре и ее теории.

Но в данном случае нас будут интересовать не эти достижения, а то, что он со всей возможной остротой поставил вопрос о психологических аспектах гармонического пропорционирования и, прежде всего, о закономерностях зрительного восприятия объектов художественного творчества (Гликин, 1979, с. 26 и далее).

Основные проблемы по Гликину здесь такие: 1. Психофизиологические закономерности зрительного восприятия, непосредственно связанные с пропорциональностью; 2. Глазомерная оценка пропорциональных членений и их относительная точность; 3. Оптимальные условия зрительного восприятия пропорциональности и гармонии архитектурных сооружений и ансамблей в натуре.

Гликин основывается на пороговых ощущениях, которые рассматривал Эрнст Вебер (Weber, 1854). Немецкий психолог, исследуя пороговые ощущения при оценке веса, освещенности, длины линий и давления на кожу, пришел к заключению, что наши ощущения относительны и являются лишь мерой изменения вызывающих их раздражителей. Гликин отмечает, что в яркий солнечный день мы не ощущаем света 100-ватной лампы, поскольку по отношению к солнечному свету прирост освещенности слишком мал, тогда как в темноте нас слепит и зажженная спичка.

Г. Фехнер (Fechner, 1860) исходя из допущения, что едва уловимые изменения в ощущениях и в вызывающих их раздражениях можно рассматривать как бесконечно малые величины, установил математическую зависимость между величиной раздражения R и соответствующей интенсивностью ощущения E в виде дифференциального уравнения $\frac{dR}{R} = mdE$, где m – некоторый постоянный коэффициент. Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, он получил формулу $LogR - LogR_o = m(E - E_0)$. Далее, заменив натуральные логарифмы на десятичные и приняв $R_0 = 0$ и $E_0 = 0$, Фехнер получил формулу $E = p \ln R + C$, в которой p и С – постоянные величины, зависящие от природы раздражения и индивидуальных особенностей восприятия.

Эта формула и есть психофизический закон Вебера-Фехнера. Из него следует, что интенсивность наших ощущений растет пропорционально логарифмам вызывающих их раздражений. Иначе говоря, при возрастании раздражения в геометрической прогрессии ощущение изменяется в арифметической прогрессии.

По мнению Гликина, закон Вебера-Фехнера имеет особое значение потому, что он дает возможность раскрыть психофизическую сущность пропорциональности. Мотивирует он это тем, что если прологарифмировать пропорциональную последовательность золотых чисел 1,000 – 1, 618 – 2, 618 – 4, 236 и т.д., то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Это означает, что зрительные ощущения возрастают на определенную постоянную величину при возрастании раздражения в геометрической прогрессии. Гликин утверждает, что архитектурные ряды подобно звуковым рядам нотной записи образуют закономерную и взаимосвязанную систему пропорций в соответствии требованиям архитектурной композиции.

Гликин в своей книге подверг серьезному критическому анализу опыт отечественных архитекторов в их стремлении приспособить золотое сечение к различным версиям пропорционирования.

Говоря о Парфеноне как некотором идеале, совершенстве, образце, всегда волновавшем воображение архитекторов, Гликин говорит о том, что исследователи искали тайну его гармонии разными методами, разными вариантами пропорционирования: Цейзинг и Жолтовский – с помощью золотого сечения, Покровский – на основе особенностей оптических законов зрения, Хэмбидж – методом разложения площадей, Мессель – делением окружности, Хазанов – с позиций модульных размеров. И каждый из перечисленных и многих не перечисленных ученых находит в Парфеноне гармонию, основанную на своей концепции и методе пропорционирования.

Такая ситуация настораживает и даже может вызвать неуверенность (Гликин, 1979, с. 45). Слишком много красивых, стройных сосен, в которых можно и заблудиться. Может быть, в Парфеноне слишком много гармонических красок, вариаций и оттенков. И каждый исследователь при хорошем воображении находит то, что его волнует. Не случайно, такая капризная гармония дала основание Ле Корбюзье бросить неожиданную реплику, что Парфенон – это не архитектура, а скульптура (Гликин, там же, с. 46).

6. Теоретико-информационная интерпретация психофизики Фехнера

Еще одна психофизическая идея Г. Фехнера, касающаяся закономерностей восприятия фигур прямоугольной формы, математиком В. М. Петровым и архитектором Н. Е. Прянишниковым (Петров, Прянишников, 1979) была проинтерпретирована с теоретико-информационных позиций. Опишем их подход с той степенью детализации, к какой прибегают авторы, так как иначе суть их позиции может ускользнуть из внимания.

Авторы выдвигают гипотезу, что при распознавании формы (в данном случае прямоугольника со сторонами a и b) используется тот же компаративный механизм, который действует и других сферах психики. Сравнивая меньшую сторону с большей, мы фактически сравниваем прямоугольник с квадратом, в который он превратился бы, если бы большая сторона сжалась до размеров меньшей. А так как глаз обследует не отрезки, а фигуру, то именно такое сравнение (прямоугольника с квадратом) и должно иметь место для опознания формы.

Прямоугольник разрезается авторами на две части, одна из которых представляет собой квадрат, а оставшаяся – малый («лишний») прямоугольник, дополняющий квадрат до большого прямоугольника. Наблюдатель придает «особое значение» сигналам именно с этого малого прямоугольника, потому что эти сигналы являются источником «разбаланса» (отклонения от зеркальной симметрии) и служат для опознания формы объекта.

Далее авторы переходят к теоретико-информационной интерпретации.

Известно, что количество информации равно $H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$. В предлагаемой модели сигнал может принимать два значения: точка фиксации расположена либо на «разбалансированной» части объекта (малый прямоугольник), либо на его «сбалансированной» (квадратной) части. Поскольку эти события являются альтернативными (т. е. сумма их вероятностей равна единице), то ситуация описывается вышеприведенной формулой. Авторы показывают, что эта функция имеет лишь один экстремум-максимум при «оптимальной» вероятности $p_{iопт} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$, при этом $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$. Эти два числа совсем не намного отличаются от золотого сечения. Отсюда авторы делают вывод, что максимальная эстетическая предпочтительность прямоугольных объектов, построенных по правилу золотого сечения, объясняется максимальностью количества информации такой формы по сравнению с другими прямоугольниками. Такое объяснение представляется авторам гораздо более правдоподобным, чем традиционное, восходящее к Фехнеру, объяснение, основанное на «гармоничности» средней пропорциональности, что не соответствует никакому реальному механизму функционированию психики. От себя добавим, что здесь авторы чуть-чуть погорячились, так как интерпретация золотого сечения Евклидом также осуществляется с помощью площадей прямоугольников и квадратов: площадь большого квадрата приравнивается сумме малого квадрата и малого прямоугольника. В результате такого приравнивания возникает квадратное уравнение (именно поэтому оно и называется квадратным), корнем которого является золотое сечение. При этом сама процедура приравнивания может рассматриваться как оптимизационная. Что касается эстетической интерпретации золотого сечения, то этот вопрос ввиду его исключительной сложности заслуживает внимательного и всестороннего осуждения. Но сам по себе предлагаемый авторами теоретико-информационный подход является перспективным..

7. Техносфера и информационные технологии

В рассматриваемый период был сделан еще один важный шаг: *началась экспансия этих структур в техносферу*.

Применение математико-гармонических структур в инженерном деле, как мы говорили в предыдущих очерках (Мартыненко, 2010а) исторически связано с искусством проекта, которое сложилось в эпоху Возрождения и сознательно использовалось в архитектуре и строительстве. Но не только там.

7.1. Техническая эстетика

В XX в. архитектурные идеи проектирования были распространены и на собственно техносферу – на проектирование внешнего облика машин, механизмов, изделий и соотношение габаритов составляющих их частей. Речь идет, прежде всего, о технической эстетике и бионике. Известно, что еще в конце 30-х гг. Л. Эрлих разработал конструкцию пропорционального сверлильного станка в соответствии с законами золотого сечения (Васютинский, 1990), а в начале 50-х гг. инженер Э. Шехвиц также предложил при конструировании многошпиндельного полуавтомата использовать те же закономерности (там же). Это примеры сознательного использования принципа пропорционирования. Однако многие конструкторы, как и в архитектуре или в строительстве, проектируя машины, действуют согласно закону золотой пропорции интуитивно.

7.2. Электросвязь

В начале второй половины XX были также продолжены исследования, связанные с применением золотого сечения и чисел Фибоначчи в области электрических цепей.

Свои исследования в области в изучении оптимальных условий передачи энергии через лестничные фильтры с использованием золотого сечения продолжил В. Н. Листов (Листов, 1943, 1964).

В 1968 г. вышла любопытная брошюра известного математика и популяризатора науки И. М. Яглома «Как разрезать квадрат?», в которой была приведена разветвленная электрическая цепь, демонстрирующая схему разрезания квадрата (Яглом, 1968). В этой схеме сила тока и напряжение в разветвлениях распределяются в соответствии с числами Фибоначчи.

Значительный вклад в теорию электрических цепей внес продолжатель дела М. А. Бонч-Бруевича и В. Н. Листова белорусский ученый и инженер *Николай Федорович Семенюта* (р. в 1929 г.). В работах автора рассмотрен более общий случай в сравнение с работами его предшественников (Семенюта, 1971, 1972, 1974), благодаря введению понятия лестничных чисел и лестничных последовательностей. При этом автор показал, что числа Фибоначчи являются частным случаем лестничных чисел. Семенюта получил формулы для вычисления четных и нечетных членов лестничных последовательностей с помощью гиперболических функций.

7.3. Системы счисления и компьютеры Фибоначчи

В 50-е гг. в истории золотого сечения произошло знаменательное событие. В 1957г. американский вундеркинд *Джордж Бергман* построил систему счисления, названную им «системой счисления с иррациональным основанием типа золотой пропорции» (Bergman, 1957). Бергман опубликовал свою систему в возрасте 12 лет. Сейчас Бергман – профессор одного из университетов в США. В системе Бергмана любое натуральное число представимо в виде суммы степеней числа φ:

$$1 = \varphi^{-1} + \varphi^{-2},$$
$$2 = \varphi + \varphi^{-2},$$
$$3 = \varphi^{2} + \varphi^{-2},$$
$$4 = \varphi^{2} + \varphi^{0} + \varphi^{-2}$$
$$5 = \varphi^{3} + \varphi^{-1} + \varphi^{-4} \text{ и т. д.}$$

Если использовать последовательность чисел φ^{i} в качестве «весов разрядов» двоичной системы счисления, то получим двоичную систему счисления, имеющую иррациональное основание φ. Система Бергмана может быть задана в виде следующего выражения:

$$A = \sum \alpha_i \varphi^{i},$$

где A – некоторое действительное число, α_i – двоичные цифры 0 или 1, $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \ldots, \varphi^{i}$ – вес i-й цифры в системе счисления, φ (золотая пропорция) – основание системы счисления.

Сам Бергман отнесся к этому результату не слишком серьезно, полагая, что он не имеет шансов на практическое применение. Достижение юного Джорджа не получило достойной оценки и со стороны коллег. Виновата здесь, с одной стороны юность Бергмана, а с другой несвоевременность его идеи. Ее место было уже прочно занято двоичной системой. Да и сам Бергман писал по этому поводу: « Я не знаю ни одного практического применения подобных систем, кроме как умственного упражнения и приятного времяпровождения, хотя эта система может быть пригодна для теории алгебраических чисел».

В последнем пункте Бергман прав. Его система после достижения де Муавра является еще одним мостом, связывающим математику гармонии с теорией чисел, мостом, переброшенным между иррациональными и целыми числами, между рекуррентными последовательностями и натуральным рядом чисел.

Что касается его системы счисления, то сложись ситуация для Бергмана несколько иначе, развитие информатики могло пойти другим путем. Но это было маловероятно ввиду исключительной простоты неймановской системы и ее тотального внедрения в практику.

Более 20 лет статья юного Джорджа пылилась на полке, пока в начале 70-х гг. близкие идеи не были высказаны советскими учеными И. В. Витенько и А. П. Стаховым. Но они продвинулись существенно дальше, дав этой идее жизнь и четкую прикладную направленность. При этом их идеи имели под собой убедительное теоретическое основание.

Известно, что развитие компьютерной техники на многие десятилетия вперед определили так называемые «Неймановские принципы». Первой универсальной электронной вычислительной машиной считается машина ЭНИАК, созданная в 1945 г. в США.

Одним из главных в перечне Неймановских принципов считается следующий: машины на электронных элементах должны работать не в десятичной, а в двоичной системе счисления. Основными преимуществами *двоичной системы* являются: двухпозиционный характер работы электронных элементов, высокая экономичность двоичной системы и простота выполнения арифметических операций с двоичными числами.

Неймановские принципы таят в себе «ловушку», в которую попала вся компьютерная техника и основанные на ней информационные технологии. Дело в том, что двоичная система обладает «нулевой избыточностью». Это означает, что в классической двоичной системе отсутствует механизм обнаружения ошибок в процессоре и компьютере. Эти ошибки неизбежно возникают под влиянием различных внешних и внутренних факторов. Это означает, что «Неймановские машины», являются принципиально ненадежными: сбой лишь одного электронного элемента в процессоре может привести к серьезной технологической катастрофе.

Выход в создавшейся ситуации был найден в создании *систем счисления с иррациональными основаниями,* основанными на «золотой пропорции» и ее обобщениях.

В 70-е и 80-е годы 20-го столетия в Советском Союзе были проведены теоретические и инженерные разработки компьютеров принципиально нового типа, названных *компьютерами Фибоначчи* или *«золотыми» компьютерами, а также* новых средств измерительной техники – «золотых» аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей (АЦП и ЦАП). Основной эффект от использования КФ и КЗП в вычислительной и измерительной технике состоял в существенном повышении контролеспособности компьютерных средств, а также точности и метрологической стабильности АЦП и ЦАП. Эти исследования были начаты в Таганрогском радиотехническом институте (1971–1977), а затем продолжены в Винницком политехническом институте (1977–1990). Теоретические результаты этих исследований опубликованы в книгах (Стахов, 1977), а инженерные разработки описаны в брошюре (Стахов, 1979).

На тему «Компьютеры Фибоначчи» в СССР было проведено беспрецедентное по своим масштабам патентование изобретений во всех ведущих странах-производителях компьютерной техники (США, Япония, Англия, ФРГ, Франция, Канада и др.). 65 зарубежных патентов являются официальными юридическими документами, которые подтверждают приоритет советской науки в этом важном направлении. В 1989 г. это направление было заслушано и одобрено на специальном заседании Президиума Академии наук Украины. К сожалению, известные геополитические события привели в конце 80-х годов к прекращению инженерных разработок в этом направлении. Но сами идеи создания «золотых» компьютеров как альтернативы «неймановских» компьютеров не потеряли своей актуальности и ждут массового внедрения в информационные технологии завтрашнего дня.

Это направление исследовательской и конструкторской деятельности велось под знаменем «алгоритмической теории измерения» (Стахов, 1977, 1979). Отличительной чертой этой теории явилось введение «фибоначчиевых» алгоритмов. Эти алгоритмы основаны на обобщенных *p*-числах Фибоначчи, задаваемых следующей трехчленной рекуррентной формулой:

$$F_n^p = F_{n-1}^p + F_{n-p-1}^p$$

где $p = 0,1,2,3,...$ – заданное целое число, характеризующее расстояние, между слагаемыми, равное числу вставных членов между ними. Рекуррентная формула задает бесконечное количество числовых последовательностей, частными случаями которых являются двоичные числа (p=0) и классические числа Фибоначчи (p=1).

Несколько раньше (в интервале 1962-1965 гг.) это обобщение рассматривалось американским математиком и педагогом венгерского происхождения Джорджем Пойя в увлекательной книге «Математическое открытие», опубликованной в СССР в 1976 г. (Пойя, 1976). Пойя получил рекуррентную формулу, связанную с этим обобщением, рассматривая свойства треугольника Паскаля (там же, с. 113-114). Кстати, Пойя рассматривает в этой же книге и последовательность Трибоначчи, связывая ее с безымянным треугольником триномиальных коэффициентов (там же, с. 116). По-видимому, следуя логике Пойя, можно построить треугольник тетраномиальных, пентаномиальных и т. п. коэффицинтов. Говоря о такого рода последовательностях, Пойя не вкладывает в них никакого «судьбоносного» смысла. Для него это просто упражнение или задача для учителей и продвинутых школьников. Естественно, он не связывает эти последовательности с какими-либо практическими приложениями.

Любопытно, что в это же время (в 1965 г.) Стивен Барр в книге «Россыпи головоломок» (Барр, 1987, русский перевод, с. 77-78, 211-212) приходят к еще одному обобщению – серебряному сечению Падована-Газале, о котором говорит Газале несколько десятилетий спустя. При этом для Барра это обобщение было всего лишь одним из упражнений для продвинутых школьников. Более того, Барр не связывал этот результат с золотосеченской проблематикой. Этот результат навязывает Бару автор данной книги. Ведь для Бара – это просто интеллектуальная игрушка, основанная на некоторых геометрических соотношениях, с которыми читатель при желании может ознакомиться по указанному нами адресу. Любопытно, однако что в книге Бара примерно каждая десятая задача связана с золотым сечением.

Возвращаясь к обобщению А. Стахова и И. Витенько, отметим, что они пришли к нему, анализируя классическую задачу Фибоначчи о взвешивании. Эта задача, как и знаменитая задача о кроликах, была описана Леонардо Пизанским в 1202 г. в книге «Liber abaci». А. Стахов, сопоставляя «двоичный» ряд гирь и фибоначчиевый, пришел к формулировке описанного выше рекуррентного отношения, которому соответствует система обобщенных золотых сечений. Решение этой задачи – неожиданный и красивый ход фибоначчизма.

Проблема была переведена в практическую плоскость, что послужило в дальнейшем основой для разработки компьютеров Фибоначчи (Стахов, 1979,1989).

Пионерские исследования и практические разработки украинских исследователей явились серьезным прорывом в создание теоретической базы и производство вычислительных машин нового типа.

Завершая наше изложение, обратим внимание на очень важную черту рассмотренного периода. Для него характерно возникновение массовых неформальных сообществ «золотосеченцев» и «фибоначчистов». Первое сообщество возникло в Сан-Хосе вокруг ежеквартальника «Fibonacci Quarterly» издаваемом с 1963 г., возникла (в значительной мере благодаря усилиям П. П. Стахова) многочисленная Славянская группа, включающая ученых России, Украины, Белоруссии, Польши, значительная группа ученых стала группироваться вокруг электронных журналов «Visual Mathematic», Института «Золотое сечение» Академии Тринитаризма. Стали проводиться масштабные Международные научные конференции. Информационный поток по золотосеченской проблематике стал стабильным и мощным. Но он еще более возрос качественно и количественно по мере движения к концу столетия, обретя черты информационного вала. Именно поэтому мы вынесли этот период за пределы нашего внимания, считая, что он достоин особого рассмотрения. Мы рассмотрим этот период, как уже говорилось выше, чуть позднее, потому что мы имеем дело с событиями с минимальным сроком давности, и это, наверное, еще не история. Отметим также, что для этого бурного периода существуют детальные обзоры, выполненные А. П. Стаховым (Стахов, 2007, 2010).

8. Основные итоги

1. В первой половине XX в. на фоне скромных математических достижений устойчиво развивались две ставших уже традиционными области применения идеи пропорционирования, преимущественно на основе золотого сечения. Это музыка и архитектура.

В музыке, прежде всего усилиями Розенова, Сабанеева, Майзеля была выдвинута гипотеза о динамической развертке музыкального текста от длительного периода нарастания через кульминацию к более короткому спаду. Причем точка кульминации, как правило, совпадает с золотым сечением.

Аналогичные исследования были осуществлены и на материале вербального текста. Необходимо отметить, закон золотого сечения был применен на таком материале впервые (Розенов).

Принципиально важными являются первые попытки сознательного, «рабочего» применения принципа золотого сечения в архитектуре (Ле Корбюзье, и большая группа советских архитекторов – Жолтовский, Гликин и др.). С. Эйзенштейн применил принцип золотого сечения в кинематографе.

2. Заметным событием в первой половине XX в. была книга немецкого математика Г. Тимердинга, в которой остро ставятся спорные проблемы корректного применения золотого сечения в искусстве.

3. В начале второго пятидесятилетия XX в. наблюдается резкий подъем популяризаторской активности в золотосеченской теме. Публикуются серьезные работы А. Маркушевича, В. Воробьева, А. Реньи, В. Хоггата и др., в которых излагается теория чисел Фибоначчи, рассматриваются их замечательные свойства, их место в теории чисел, комбинаторике, варианты их использования в прикладных задачах.

4. Опубликована эпохальная книга Г. Вейля, позиционирующая числа Фибоначчи и золотое сечение в рамках теории симметрии и системе космогонических гармонических представлений

5. Опубликованы два замечательных достижения. Первое – решение с помощью чисел Фибоначчи 10-й проблемы Гильберта (Ю. Матиясевич), второе – создание новой системы счисления на основе золотого сечения (Дж. Бергман).

6. Введен в математико-гармонический оборот закон Вебера-Фехнера, касающийся психологических экспериментов по схеме «стимул-реакция»

7. В техносфере серьезным успехом следует считать теорию электрических цепей на основе чисел Фибоначчи, развиваемую в трудах М. А. Бонч-Бруевича, В. Н. Листова и Н. Ф. Семенюты.

8. Фундаментальным достижением математико-гармонического направления второй половины XX в. является создание под руководством А. П. Стахова компьютеров Фибоначчи и их фронтальное патентование в технологически ведущих странах. Таким образом, идея Бергмана получила теоретическое и практическое подтверждение. Образовалась ось Бергман-Стахов, которая стала «обрастать деталями» в последующие десятилетия. Получила второе дыхание и знаменитая задача о взвешивании, которая также была введена, с одной стороны, в мир рекуррентных последовательностей (суммативное правило и уравнение А. П. Стахова), а с другой, в мир современных информационных технологий .

9. Перечисленные достижения создали основу для мощного интеллектуального рывка и созданию предпосылок для формирования междисциплинарной сферы, которая уже в XXI веке конституировалась под знаменем математики гармонии.

Заключение

Подведем итоги. Сделаем это табличным способом. Пусть столбцы будут именами исторических периодов, а строки - именами направлений математико-гармонических изысканий. Таблица позволяет видеть историю каждого направления и становление математико-гармонических представлений в целом.

	Античность	Средние века	Возрождение	Рационализм
1	Теория пропорций: *Пифагор, Евклид*			
2	Конструирование музыкальных инструментов: *Пифагор*			
3	*Платоновы* тела		*Пачоли, Леонардо да Винчи*	Гармония мира Кеплера; связь с пропорцией Евклида: *Кеплер*
4	Пропорция *Евклида*		Божественная пропорция: *Пачоли*	Связь с посл. Фибоначчи: Кеплер,
5	Алгоритм *Евклида*			Непрерывные дроби: Катальди
6	Пропорции человеческого тела: *Витрувий*			
7			Искусство проекта: *Дюрер*	
8	*Архимедова* спираль	Равенство, Сходство, Порядок: *Св. Августин*		Снежинки: *Кеплер*
9	Гномоны *Герона*			
10		Последовательность *Фибоначчи*		Связь с пропорцией *Евклида*
11		Задача о взвешивании: *Фибоначчи*		
12			Задача о разделе ставки: *Пачоли, Кардано*	Треугольник *Паскаля*
13			Уравнения второй и третьей степени: дель Ферро, *Тарталья, Кардано*	

14				Двоичная система: *Лейбниц*
15				

	Просвещение	Новое время	Новейшее время
1			Пропорционирование: *Ле Корбюзье, Жолтовский* и др.
2	Гармонические колебания: *Фурье*		Квантовая механика, принцип двойственности: *Винер, Гайзенберг, Макс Борн*
3	Формула *Эйлера* для многогранников		Теория групп: *Вейль*
4		Термин «Золотое сечение»: Мартин Ом Закон золотого сечения: *Цейзинг*	Обобщение ЗС *Стахова* Серебряное сечение *Падована* Приложения ЗС в архитектуре, музыке, словесности: *Розенов, Сабанеев, Гликин* и др.
5			Представление ЗС в виде повторного радикала: *Альтшиллер*
6			«Модулор» *Ле Корбюзье*
7			Электросвязь (лестничные цепи): *Бонч-Бруевич, Листов, Семенюта*; Компьютеры Фибоначчи: *Стахов*
8	Спираль *Бернулли*		Теория симметрии: *Вейль*
9			Теория фракталов: *Мандельброт* и др.
10	Рекуррентные последовательности: *Муавр, Бернулли*; Исчисление конечных разностей: *Муавр*; формула *Муавра*	Последовательность *Люка*, Формула *Муавра- Бине*	Описание свойств возвратных посл-тей и посл- тей Фибоначчи: *Маркушевич, Воробьев, Хоггат, Реньи;* посл-сть Трибоначчи (*Фейнберг*)
11		Задача о взвешивании *Буше-Менделеева*	p – сечения *Стахова*
12	Локальная теорема *Муавра-Лапласа*, Нормальный закон: *Муавр*		
13			Уравнение третьей

			степени *Стахова*, Уравнение третьей степени *Падована*
14			Система счисления с иррациональным основанием: *Бергман, Стахов*
15			Решение 10-ой проблемы Гильберта: *Матиясевич*

Заметим, что в таблице приведена информация, касающаяся в основном математических аспектов. Но и она наверняка не является полной. Но эта таблица всегда может быть дополнена сведениями, релевантными с точки зрения желающего этого добиться. Такая информация даже необходима. Например, я не нашел сведений о том, кто и когда придумал представление золотого сечения в виде непрерывной дроби. До конца не ясным остается также вопрос, называл ли Леонардо да Винчи божественную пропорцию Луки Пачоли золотым сечением или нет. Некоторые другие вопросы также ждут уточнения.

Таблица дает наглядное представление о роли конкретного ученого в развитии математико-гармонических представлений.

Отметим также, что в математико-гармонических изысканиях достаточно четко просматриваются два основных направления: теоретическое направление, включающее математическую и философскую составляющую и прикладное направление. В основе математической части лежит теория рекуррентных последовательностей и более общая теория конечных разностей, в основе философской части – различные варианты толкования категории гармонии, а прикладное направление отражает варианты применения математико-гармонических идей в природе и обществе.

К середине 80-х был *в основном построен фундамент системы математико-гармонических представлений*. В дальнейшем мы попытаемся показать, что на этом фундаменте в последующие годы будут возведены и другие принципиальные элементы этого учения. Это послужило созданию условий для конституирования *Математика гармонии* – единого учения с широчайшим междисциплинарным потенциалом.

Этот короткий, но плодоносный период будет рассмотрен нами в очередном очерке-обзоре, который займет в нашей истории особое место.

Литература

Абачиев С. К. Радужная фрактальность треугольника Паскаля. http://spkurdyumov.narod.ru/Mat100.htm#Ma344.

Айрапетов Ш. А. О принципах архитектурной композиции И.В. Жолтовского. М.: УРСС, 2004

Аносов Д. В. Взгляд на математику и нечто из нее. Библиотека «Математическое просвещение». Вып. 3. М.: МЦНМ, 2003.

Барр Ст. Россыпи головоломок. Перевод с англ. М.: Мир, 1987.

Бирюков Б. В. Г. Вейль и методологические проблемы науки / Г. Вейль. Симметрия. Перевод с немецкого. М.: Издательство ЛКИ, 2007. – С.174–191.

Бонч-Бруевич М. А. Элементы радиотехники. М.: Связьтехиздат, 1938.

Брюсов В. Я. Сила русского глагола. М.: Советская Россия, 1973.

Буало Н. Поэтическое искусство. М.: Государственное издательство художественной литературы, 1957.

Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Перевод с голл. М.: Физматгиз, 1959

Варпаховский Ф. Л., Колмогоров А. Н. О решении десятой проблемы Гильберта / Квант, 1970, № 7, с. 39–44.

Васютинский Н.А. Золотая пропорция. М.: Молодая гвардия , 1990. Серия «Эврика»

Вейль Г. Симметрия. Перевод с англ. М.: Издательство ЛКИ, 2007.

Вересаев В. Живая жизнь: О Достоевском и Толстом; Аполлон и Дионис (о Ницше). М.: Политиздат, 1991.

Вернадский В. И. Основы кристаллографии. М., 1904, ч. 1, вып. 1.

Винер Н. Я – математик. Перевод с англ. М.: Наука, 1967

Винберг Э. Б. Симметрия многочленов. Серия: Библиотека «Математическое просвещение». М.: МЦМНО, 2001.

Винкельман И. И. Избранные произведения и письма. М.-Л.: Academia, 1935.

Витенько И. В., Волков А. А., Стахов А. П. Оптимальные алгоритмы функционирования преобразователей «напряжение-код». В кн. Тезисы докладов V научно-технической конференции «Кибернетически пути совершенствования измерительной аппаратуры». ЛОП НТО, Приборпром, 1966.

Витенько И. В., Стахов А. П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования / Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.

Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969. Серия: Популярные лекции по математике. Вып. 6.

Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов / Перевод с англ.. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. Пер. с англ. М.: Мир, 1971.

Гарднер М. Математические новеллы. Пер. с англ. М., Мир, 1974.

Гете И. Статьи и мысли об искусстве. М.-Л., «Искусство», 1936.

Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. М.: Всесоюзная академия архитектуры, 1936.

Гилберт К., Кун Г. История эстетики. Перев. с англ.. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. М.: МЦНМО, 2006.

Гликин Я. Д. Методы архитектурной гармонии. Л.: Стройиздат, 1979.

Гримм Г. Д. Пропорциональнгость в архитектуре. М.: ОНТИ, 1935

Деев А. Н. Категория «гармонии». Понимание и история эволюции. Новосибирск: ЦЭРИС, 1999.

Декарт Р. Рассуждение о методе. М.: Изд-во АНСССР, 1953.

Дружинин Н. К. Развитие основных идей статистической науки. М.: Статистика, 1979.

Депман И. Я. История Арифметики. М.: КомКнига, 2007

Дюрер А. Дневники, письма, трактаты. Искусство: М.-Л.: 1957, т. 2.

Жуков А. В. Вездесущее число π. М.: Editorial УРСС, 2004.

Иванов Вяч. Вс. Очерки по истории семиотики в СССР. М. Наука, 1976.

Кант И. Критика способности суждения. СПб, 1898.

Кант И. Сочинения. М.: 1963–1966. Т. 1– 6.

Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. М.-Л., ГТТИ, 1935.

Кеплер И. О шестиугольных снежинках. М.: Наука, 1983.

Кетле А. Социальная система и законы, ею управляющие. СПб, 1866.

Кетле А. Социальная физика или опыт исследования о развитии человеческих способностей. Киев, 1911.

Краткий словарь по эстетике. Под ред. М. Ф. Овсянникова. М.: Просвещение, 1983.

Кузмин О. В. Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения. Соросовский образовательный журнал. 2000, т. 6, № 5, с. 100–109.

Курант Р., Роббинс Н. Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов. Перевод с англ. Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: МЦНМО, 2001.

Ле Корбюзье. Модулор. М.: Стройиздат, 1976.

Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. М.: Знание, 1968.

Леонардо да Винчи. Избранные произведения. М.-Л..: Academia. 1935. Т. 2.

Листов В. Н. Дальняя связь. М.: Транспорт, 1964.

Листов В. Н. Ипполит Монигетти. Л.: Стройиздат, 1974.

Листов В. Н. Элементарная теория синтеза фильтров. М.: Трансжелдориздат, 1963.

Литературная теория немецкого романтизма // Л.: Изд. Писателей, 1935.

Локар Э. Руководство по криминалистике. Москва, Юридическое издательство НКЮ СССР, 1941.

Лука Пачоли. О божественной пропорции. Репринт изд. 1508 г. с приложением перевода А. И. Щетникова. М.: Фонд «Русский авангард», 2007.

Лука Пачоли. Трактат о счетах и записях. М.: Финансы и статистика, 1994.

Марков А. А. Исчисление конечных разностей. Одесса, 1910.

Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. Популярные лекции по математике. Вып. 1, 1951.

Мартыненко Г. Я. Модель гармонии сложных социальных систем. Труды VII Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Т. 1, Красноярск, СФУ, 2008, С. 148–173.

Мартыненко Г. Я. Основы стилеметрии. Л.: Издательство ЛГУ, 1988.

Махов А. И. Musica literaria. Идея словесной музыки в европейской поэтике. М.: Intrada, 2005.

Мещеряков В. Т. Развитие представлений о гармонии в домарксистской и марксистко-ленинской философии. Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1981.

Михайлов А.И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Научные коммуникации и информатика. М.: Мир, 1976.

Ницше Ф. Падение кумиров: Сборник. Перевод с нем. СПб: Азбука-классика, 2008.

Ницше Ф. Рождение трагедии из духа музыки. Перевод с нем. СПб: «Азбука классика», 2007.

Ойстин Оре. Приглашение в теорию чисел. Перев. с англ. М.: Едиториал УРСС, 2003.

Панкин А. Ф. Число как искусство / Языки науки – языки искусства / Редактор-составитель З. Е. Журавлева. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – С. 170–178.

Паскаль Б. Мысли. Перевод с французского. СПб: Азбука-Классика, 2005.

Петров В. М., Прянишников Н. Е. Формулы прекрасных пропорций / Число и мысль. Вып. 2. М., 1979. С. 72–83.

Платон. Сочинения в 3-ч т. Перевод с древнегреч. под ред. А. Ф. Лосева и В. Ф. Асмуса. М.: Мысль, 1972, Т. 3, ч. 1.

Пойген Х.-О., Рихтер П.Х. Что такое математика (элементарный очерк идей и методов. Пер. с англ. Под ред. А.Н.Колмогорова. М.: МЦНМО, 2000.

Пойя Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. Перевод с англ. М.: Наука, 1976.

Пропп В. Я. Морфология волшебной сказки. М., 1969.

Реньи А. Вариация на тему Фибоначчи / Трилогия о математике. Перевод с венгерского. М.: Мир, 1980.

Розенов Э. К. Закон золотого сечения в поэзии и музыке / Статьи о музыке. Избранное. М.: Музыка, 1982.

Рябушкин Е. В. Ленинское наследие и статистика. М.: Наука, 1978.

Сабанеев Л. Л. Этюды Шопена в освещении золотого сечения. Опыт позитивного обоснования / Искусство, ГАХН. М., 1927. Т.II—III, вып. 2-3.

Семенюта Н. Ф. Анализ электрических цепей методом рекуррентных чисел / Электрическая связь на железнодорожном транспорте. Гомель: Бел. ИИЖТ, 1974. Вып.134, с. 3–19.

Семенюта Н. Ф. О связи рекуррентных числовых последовательностей и гиперболических функций / Применение АВМ и ЭЦВМ к решению некоторых задач механики деформируемых тел. Гомель: БелИИЖТ, 1973. Вып.114, с. 39–43.

Семенюта Н. Ф. Применение рекуррентных соотношений к анализу электрических цепей / Электрические машины, цепи и системы: Труды Белорусского ин-та инженеров ж.-д. транспорта. Гомель: БелИИЖТ, 1971.

Соколов Я. Лука Пачоли. Человек и мыслитель. В кн.: Пачоли Лука. Трактат о счетах и записях. М.: Финансы и статистика, 1994.

Соловьев В. Чтения о Богочеловечестве; Статьи; Стихотворения и поэма; Из трех разговоров: Краткая повесть об Антихристе. СПб: Худож. Лит., 1994

Стахов А. П. «Золотая» пропорция в цифровой технике // Автоматика и вычислительная техника, № 1, 1980 г.

Стахов А. П. Алгоритмическая теория измерения. М.: Знание, серия «Математика и кибернетика», вып. 6, 1979.

Стахов А. П. Важнейшие научные открытия современной науки, основанные на «золотом сечении» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14575, 18.09.2007 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321071.htm).

Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское радио, 1977.

Стахов А. П. Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и

Стахов А. П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн.: Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, Вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.

Стахов А. П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984.

Стахов А. П. Сакральная геометрия и математика гармонии // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та містецтві. Вінниця: Вінницький державний аграрний університет, 2003. С. 8–26.

Стахов А. П., Райлян И. Г. «Золотая» научная парадигма: этапы большого пути от Пифагора, Платона и Евклида до «Математики Гармонии» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15615, 26.10.2009.

Стахов А. П. Взгляд на «Математику Гармонии» сквозь призму «Элементарной Математики» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16243, 23.12.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321106.htm.

Стахов А. П. Формула Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005.

Стилвел Д. Математика и ее история. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

Тимердинг Г. Е. Золотое сечение. Перевод с нем. М.: Комкнига, 2005.

Толстой А. Н. Хождение по мукам. Минск, 1973.

Торвальд Ю. Сто лет криминалистики. М.: Издательство «Прогресс», 1974. С. 440.

Тростников В. Н. Алгебра гармонии. М., Знание, 1968.

Успенский В. А. Апология математики: сборник статей /Владимир Андреевич Успенский. СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2009.

Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1979.

Чебышев П. Л. Теория вероятностей, лекции 1879-1880 гг. М.-Л., 1936.

Шафрановский И. И. История кристаллографии с древнейших времен до начала XIX столетия. Л.: Наука, 1978.

Шиллер Ф. Собр. соч., т. VI. М.: Гослитиздат, 1957.

Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука.

Шрейдер Ю. А., Шаров А. А. Системы и модели. М.: Советское радио, 1971.

Штерн А. С. Введение в психологию: Курс лекций. М.: Флинта. Московский психолого-социальный институт, 2003.

Эстетика раннего французского романтизма. М., 1982.

Юшкевич А. П. История математики. Математика XVIII столетия. М.: АНСССР. Институт естествознания и математики. Под ред. А. П. Юшкевича. М.: 1972.

Юшкевич А. С. История математики с древнейших времен до начала XIX века. Т. 1. С древнейших времен до начала нового времени. М.: Наука, 1970.

Яглом И. М. Математические структуры и математическое моделирование. М.: Советское радио, 1980.

Яглом М. М. Как разрезать квадрат? М.: Наука, 1968.

Ясинский С. А. «Золотая пропорция» в электросвязи. Ясинский СПб: ВУС, 1999.

Bense M.. Einführung in die Informations-theoretische Ästhtik. Hamburg, 1969.

Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31. P.: 98–119.

Boyer C., Merzbach U. A History of Mathematics. New York: John Wiley & Sons, 1989.

Cohn J. Experimentelle Untersuchungen über die Gefühlsbetonung der Farben, Heiligkeiten und ihrer Kombinationen // Philos. Studien 10, 562–603 (1894).

Darling D. "Leibniz' harmonic triangle" in *The Universal Book of Mathematics: From Abracadabra To Zeno's paradoxes*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2004.

Dittenberger W. Sprachliche Kriterien für Chronologie der Platonische Dialoge. Hermes 16. Berlin, 1881. S. 321–345.

Eysenck H. J. An Experimental Study of the Good Gestalt. In: Psychological Review. 1942. N 49. Pp. 344–364.

Fechner G. T. Vorschule der Ästhetik, 2 Bände, Leipzig, 1876.

Livio M. The Golden Ratio. The Story of Phi, The World’s Most Astonishing Numbers. New York, Broadway books, 2002.

Mager D. On the Affective Tone of Simple Sense-Impressions // The American Journal of Psychology, 1895, VII, p. 270–295.

Pareto W. Cours d'économie politique. v. 1–2, Lausanne, 1896–1897.

Pearce, E. Aesthetics of simple forms. Psychological Review, 1894, 1, 483–495.

Schneer C. Kepler's New Year's Gift of a Snowflake. Isis, Volume 51, No. 4. University of Chicago Press, 1960, pp. 531–545.

Stakhov A. Three "key" problems of mathematics o n the stage of its origin,the "Harmony Mathematics" and its applications in contemporary mathematics, theoretical physics and computer science. Visual Mathematics, 2007, Vol. 9, No http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/stakhov2007/stakhov1.htm.

Vasari G. On Technique. Ed. G. B. Brown. London, 1907.

Weber E. H. Testsinn und Gemeingtfuhl Wagners Handbuch der Physiologie. 1846. Bd. 3.

Wiora W. Die Musik im Weltbild der Deutschen Romantik. In: Wiora W.: Historische und Systematische Musikwissenschaft. Tutzing, 1972.

Witmer L. Zur experimentallen Ästhetik einfacher? Raumlichen Formverhaltnisse // Philosofische Studien, 1893.

Zeising A. Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers. Leipzig, 1854.