А.П. Стахов

Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология

Часть 1. Математика Гармонии

Религиозность ученого состоит в восторженном отношении к законам гармонии.

Альберт Эйнштейн

Аннотация

Цель настоящей статьи – показать, что увлечение Алана Тьюринга проблемой филлотаксиса и числами Фибоначчи не является случайным. Эти исследования нельзя рассматривать иначе, как предчувствие гениального ученого использования естественной «Математики Природы» для создания вычислительных машин будущего. Настоящая статья состоит из двух частей: *Математика Гармонии* и *«Золотая» Информационная Технология*. В первой части излагаются основы «Математики Гармонии» как истинной «Математики Природы» и как нового междисциплинарного направления современной науки. Показано, что эта математика имеет прямое отношение к теории относительности и 4-й проблеме Гильберта. Вторая часть статьи посвящена изложению «золотой» информационной технологии как основы информационных технологий будущего (коды и компьютеры Фибоначчи, коды золотой пропорции, «золотые» резистивные делители, троичная зеркально-симметричная арифметика, новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи, матричная криптография и др.).

1. Тьюринг и числа Фибоначчи

1.1. ***Тьюринг и филлотаксис.*** **Алан Матисон Тьюринг** (1912 —1954) — английский математик, логик, криптограф, изобретатель *машины Тьюринга*. Алан Тьюринг имеет широкую и по-прежнему возрастающую репутацию одного из наиболее творческих мыслителей 20-го века. Его научные интересы - от теоретической информатики до искусственного интеллекта и биологии - охватывают многие новые исследовательские темы 21-го века. В ознаменование выдающихся достижений Алана Тьюринга в области теоретической информатики учреждена *премия Тьюринга (Turing Award)* - самая престижная премия в информатике, вручаемая *Ассоциацией вычислительной техники* за выдающийся научно-технический вклад в этой области.

Алан Тьюринг (1912 —1954)

Тьюринг учился в Шерборнской школе, где проявил незурядные способности к математике и химии, затем в Королевском колледже Кембриджского университета, который окончил в 1934. Непосредственным его учителем, а впоследствии коллегой был математик **М.Х.А.Ньюмен** (1897-1984); Тьюринг слушал его курс по основаниям математики в 1935. В том же году Тьюринг получил стипендию Королевского колледжа для работы над диссертацией. Именно в этот период он опубликовал ключевую статью с изложением того научного открытия, которое мы теперь называем *машиной Тьюринга* - фундаментальной идеи в области информатики и математической логики. В 1936-1938 он стажировался в Принстонском университете в США, где его научным руководителем был американский логик **А.Чёрч** (1903-1995). После получения докторской степени Тьюринг отклонил предложение **Джона фон Неймана** остаться в США и вернулся в Кембридж, где получил стипендию Королевского колледжа для занятий логикой и теорией чисел, посещая одновременно семинары **Л.Витгенштейна** по философии математики.

Во время Второй Мировой войны Тьюринг работал в **Блечли Парке —** британском криптографическом центре, где возглавлял одну из исследовательских групп, занимавшихся расшифровкой закодированных немецкой шифровальной машиной «Энигма» сообщений Кригсмарине и Люфтваффе. Читая закодированные немецкие сообщения, можно сделать заключение, что в марте 1943 года Великобритания стояла на грани поражения в битве за Атлантику и во всей Второй мировой войне. Вполне вероятно, что без расшифровки кода «Энигмы» ход этой войны был бы иным.

После того как Джон фон Нейман в США предложил план создания компьютера EDVAC, аналогичные работы были развернуты в Великобритании в Национальной физической лаборатории, где Тьюринг проработал с 1945 по 1948. Ученый предложил весьма амбициозный проект ACE (Automatic Computing Engine - Автоматическая Вычислительная Машина), который, однако, так и не был реализован. 1947-1948 академический год Тьюринг провел в Кембридже, а в мае 1948 М.Ньюмен предложил ему пост преподавателя и заместителя директора вычислительной лаборатории Манчестерского университета, занявшего к этому времени лидирующие позиции в разработке вычислительной техники в Великобритании. В 1951 Тьюринг был избран членом Лондонского королевского общества.

Менее широко известно, что кроме исследований в области теоретической информатики Тьюринг увлекался решением еще одной научной проблемы, не имеющей, на первый взгляд, прямого отношения к информатике. Речь идет о *филлотаксисе* – широко известном ботаническом явлении, лежащем в основе процессов формообразования многих ботанических объектов. Когда и где Тьюринг проявил интерес к проблеме филлотаксиса? Ответ на этот вопрос можно найти в статье [1]. В статье утверждается, что еще в школе Тьюринг ознакомился с классической книгой *On Growth and Form*, опубликованной в 1917 г. английским биологом и математиком **D'Arcy Wentworth Thompson** (1860-1948). В этой книге детально рассматривается явление филлотаксиса. Когда Тьюринг вернулся из США в Кембридж (1947-1948), он посещал лекции по физиологии и именно тогда сделал первые попытки дать логическое описание нервной системы и продолжил свои исследования по филлотаксису. Первая статья Тьюринга на эту тему [2] опубликована в 1952 г. Позже, уже после его смерти в 1954 г., его последователи обработали и опубликовали в 1992 г. его вторую статью на эту тему [3].

Таким образом, мы можем сформулировать основные научные задачи, решение которых принесли Тьюрингу славу создателя теоретической информатики и крупного ученого-мыслителя 20-го века:

1. *Машина Тьюринга,* которая является расширением *конечного автомата* и, согласно тезису Чёрча–Тьюринга, способна имитировать любую абстрактную вычислительную машину, реализующую процесс пошагового вычисления.
2. Расшифровка криптографичского кода немецкой шифровальной машиной «Энигма», что существенно повлияло на ход Второй Мировой войны.
3. Проект Автоматической Вычислительной Машины ACE (Automatic Computing Engine)
4. Исследования по филлотаксису

Исследования Тьюринга по филлотаксису, конечно, можно рассматривать как «хобби» Тьюринга, не имеющее никакого отношения к его главным результатам в области информатики и вычислительной техники. Однако, не следует забывать, что Алан Тьюринг являлся одним их гениальных ученых-мыслителей 20-го века. И его исследования по филлотаксису, связанные с исследованиями по созданию логической модели мозга – уникальной естественной вычислительной машины – нельзя рассматривать иначе, как гениальное предчувствие использования естественной «Математики Природы» для создания вычислительных машин будущего.

Хорошо известно, что в явлении филлотаксиса ключевую роль играют *числа Фибоначчи*, открытые в 13-м веке известным итальянским математиком Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи).

Leonardo Fibonacci
(dall'opera *I benefattori dell'umanità*; vol. VI, Firenze, Ducci, 1850)

Фибоначчи (около 1170 – после 1228)

Во второй половине 20-го века интерес к числам Фибоначчи и связанной с ними «золотой пропорции» - великого математического открытия античной математики – чрезвычайно возрос. Наиболее активные исследования в области теории чисел Фибоначчи и их приложений были начаты в США, СССР и других странах. В 1963 г. в США создана математическая Фибоначчи-ассоциация и начал издаваться специальный математический журнал «The Fibonacci Quarterly”. Интерес современной науки к этой проблематике подтверждается достаточно внушительным перечнем книг по этой проблеме, опубликованных в течение 20-го и начала 21-го векf [4-42]. С начала 70-х годов 20-го столетия под научным руководством автора настоящей статьи в СССР начались работы по созданию принципиально новой информационной технологии, основанной на *кодах Фибоначчи и золотой пропорции*. Итоги 40-летних исследований автора в этой области [43-331] завершились созданием *Математики Гармонии* - нового междисциплинарного направления современной науки – и вытекающей из нее новой информационной технологии – *«Золотой» Информационной Технологии*. В 2008 г. международное издательство «World Scientific” приняло к публикации книгу Alexey Stakhov “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” [59], что само по себе является международным признанием “Математики Гармонии» и вытекающей из нее «Золотой» Информационной Технологии.

Главная цель настоящей статьи – привлечь внимание научного компьютерного сообщества к новому научному направлению в области информатики - *«Золотой» Информационной Технологии*, основанной на *Математике Гармонии.*

2. Новый взгляд на историю возникновения математики с точки зрения «проблемы гармонии»

Как известно, традиционный взгляд на происхождение математики [332] состоит в следующем. Как утверждает **А.Н. Колмогоров** (1903-1987) [332], две практические проблемы стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения: *проблема счета* и *проблема измерения*. Проблема счета привела к созданию первых способов представления чисел и выполнения над ними арифметических операций. Главным итогом этого длительного периода в развитии математики было формирование понятия *натурального числа* – фундаментального понятия математики, без которого немыслимо ее существование. Проблема измерения лежит у истоков возникновения *геометрии*. Эта проблема впервые начала развиваться в Древнем Египте и привела к созданию *геометрии*, что в перводе с греческого означает *измерение земли*. Эта проблема получила дальнейшее развитие в греческой науке. Именно открытие *несоизмеримых отрезков,* сделанное в научной школе Пифагора, считается важнейшим математическим открытием в этой области. Это открытие привело к введению понятия *иррационального числа* - второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики.

В работах [90, 108, 109] **Алексей Стахов** развил новый взгляд на историю возникновения математики. Суть подхода состоит в том, чтобы к упоминавшимся выше двум «ключевым» проблемам математики на этапе ее зарождения – *проблеме счета* и *проблеме измерения*, которые стимулировали развитие «классической математики» [332], добавить еще одну «ключевую» проблему – *проблему гармонии*, связанную с *золотым сечением* - одним из важнейших математических открытий античной математики (Теорема 2.11 «Начал» Евклида). Согласно этому подходу, на раннем этапе в математике было сделано ряд важных математических открытий, которые фундаментально повлияли на развитие математики и всей науки в целом. Важнейшими из них являются:

(1) *Позиционный принцип представления чисел*, открытый вавилонскими математиками во 2-м тысячелетии до н.э. и воплощенный ими в Вавилонской 60-ричной системе счисления. Это важное математическое открытие лежит в основе всех последующих позиционных систем счисления, в частности, десятичной системы и двоичной системы. Это открытие, в конечном итоге, привело к формированию понятия *натурального числа* – важнейшего понятия, лежащего в основе математики. Но самое важное, что именно это открытие лежит в основе двоичной системы счисления – основы современной информационной технологии, то есть современная информационная технология в своих истоках восходит к Вавилонской математике.

(2) *Несоизмеримые отрезки.* Это открытие, сделанное в научной школе Пифагора, привело к переосмысливанию ранней пифагорейской математики, в основе которой лежал «принцип соизмеримости величин», и к открытию *иррациональных чисел* – второго (после натуральных чисел) важнейшего понятия математики. Эти два понятия (натуральные и иррациональные числа) и лежат в основе «классической математики».

(3) *Золотое Сечение.* Впервые описание этого открытия дано в «Началах» Евклида в Теореме II.11 о *делении геометрического отрезка в крайнем и среднем отношении.* Эта теорема была введена Евклидом с целью создания строгой геометрической теории

«Платоновых тел» (в частности, додекаэдра), изложению которых посвящена заключительная (13-я) книга «Начал» Евклида. Как известно, «золотое сечение» стало своеобразным каноном древнегреческого искусства и затем широко использовалось в искусстве Возрождения, а также в искусстве 19-го и 20-го столетий. «Математическая теория золотого сечения» получила дальнейшее развитие в работах французских математиков 19-го века Бине («формулы Бине») и Люка («числа Люка»). Во второй половине 20-го века эта теория получила развитие в работах советского математика **Николая Воробьева** (1925-1995) [14] и американского математика **Вернера Хогатта** (1921-1980) [11]. Развитие этого направления, в конечном итоге, привело к возникновению «Математики Гармонии» [96, 109, 109] - нового междисциплинарного направления современной науки, которое имеет отношение к современной математике, теоретической физике и компьютерной науке (см. Рис. 1). Такой подход приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что **параллельно с «Классической Математикой» в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – «Математика Гармонии», которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении в крайнем и среднем отношении» (Теорема 2.11) и на теории правильных многогранников, изложенной в 13-й книге «Начал» Евклида.**

Рисунок 1. «Ключевые» проблемы античной математики и новые направления в математике, теоретической физике и информатике

Математика Гармонии является истинной «Математикой Природы», которая проявляет себя во многих созданиях Природы (сосновых шишках, ананасах, кактусах, головках подсолнечников и др.). Она может привести к сближанию математики с теоретическим естествознанием и развитию новых научных направлений, имеющих фундаментальное значение для развития современной науки, в частности, «Золотой» Теоретической Физики и «Золотой» Информационной Технологии.

3. Золотое Сечение, числа Фибоначчи и Люка

3.1. ***Золотое сечение.*** Из «Начал Евклида» к нам пришла следующая геометрическая задача, называемая задачей *о делении отрезка в крайнем и среднем отношении* (Теорема II.11). В сoременной интерпретации суть задачи состоит в том, чтобы разделить отрезок *AB* точкой *C* в такой пропорции, чтобы большая часть отрезка *CB* так относилась к меньшей части *AC*, как отрезок *AB* к своей большей части *CB*, то есть:

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{AC} \tag{1}$$

Задача сводится к решению алгебраического уравнения

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{2}$$

имеющего два корня $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Положительный корень x_1 и представляет собой знаменитое иррациональное число

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{3}$$

получившее различные «красивые» названия: *золотое число, золотая пропорция, золотое сечение, божественная пропорция.*

3.2. ***Числа Фибоначчи и Люка.*** С “золотой пропорцией» (3) тесно связаны две замечательные числовые последовательноcити – *числа Фибоначчи* $F(n)$ и *числа Люка* $L(n)$ [11, 14], задаваемые следующими рекуррентными соотношениями:

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2);\quad F(0)=0, F(1)=1 \tag{4}$$

$$L(n)=L(n-1)+L(n-2);\quad L(0)=0, L(1)=1 \tag{5}$$

где $n\in\{0,\pm1,\pm2,\pm3,...\}$. Таблица чисел Фибоначчи и Люка, задаваемых рекуррентными соотношениями (4) и (5), приведена ниже.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$F(-n)$	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55
$L(n)$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$L(-n)$	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

Как вытекает из таблицы, члены последовательностей $F(n)$ и $L(n)$ обладают замечательными математическими свойствами. Например, для нечетных n=2k+1 члены последовательностей $F(n)$ and $F(-n)$ совпадают, то есть $F(2k+1)= F(-2k-1)$, а для четных n=2k они противоположны по знаку, то есть: $F(2k)= - F(-2k)$. Что касается чисел Люка $L(n)$, то здесь все наоборот, то есть $L(2k)=L(-2k)$ и $L(2k+1)= - L(-2k-1)$.

3.3. ***Математические свойства золотой пропорции.*** Золотая пропорция в течение многих тысячелетий вызывала восторг многих великих ученых и мыслителей, включая Пифагора, Платона, Евклида, Леонардо да Винчи, Луки Пачоли, Иоганна Кеплера. Золотая пропорция, действительно, уникальное иррациональное число, что подтверждается следующими математичесими свойствами «золотой пропорции»:

1. Свойство «аддитивности» и «мультипликативности»:

$$\Phi^n=\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}=\Phi\times\Phi^{n-1} \tag{6}$$

2. Представление в виде «радикалов»:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{...}}}} \qquad (7)$$

3. Представление в виде цепной дроби:

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}} \qquad (8)$$

На представление «золотой пропорции» в виде цепной дроби в свое время обратили внимание известные российские математики **А.Я. Хинчин [333] и Н.Н. Воробьев** [14]. Выражение (8) задает уникальное свойство «золотой пропорции», которое выделяет ее среди всех иррациональных чисел. Суть этого свойства состоит в том, что *«золотая пропорция» среди всех иррациональных чисел хуже всех аппроксимируется рациональными дробями,* так как цепная дробь (8) является наиболее медленно сходящейся цепной дробью. Если теперь аппроксимировать «золотую пропорцию» рациональными дробями, то мы приходим к последовательности отношений чисел Фибоначчи:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},... \qquad (9)$$

Но ведь эти соотношения отражают ни что иное, как знаменитый *ботанический закон филлотаксиса*, что было серьезным научным увлечением **Алана Тьюринга**. Как известно, согласно закону (9) формируются сосновые шишки, кактусы, ананасы, головки подсолнечника и др. То есть Природа воплотила уникальные математические свойства «золотой проорции» в своих замечательных конструкциях!

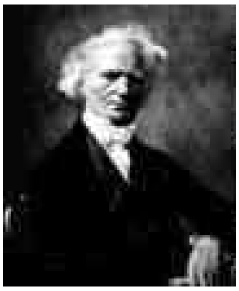
С учетом вышеизложенного, мы можем теперь понять Иоганна Кеплера и Алексея Лосева, которые выразили свой восторг «золотым сечением» в следующих словах:

Иоганн Кеплер: «В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Алексей Лосев: «С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - Золотого Сечения... Их (древних греков – А.С.) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

4. Формулы Бине

В 19 в. в развитии теории «золотого сечения» было сделано важное математическое открытие. Речь идет о так называемых *формулах Бине,* выведенных французским математиком **Бине** (**Jacques Philippe Marie Binet)** (1786-1856) в 19-м веке.



Бине (1786 – 1856)

Рассмотрим формулы Бине для чисел Фибоначчи $F(n)$ и чисел Люка $L(n)$:

$$F(n)=\frac{\Phi^{n}-(-1)^{n}\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} \tag{10}$$

$$L(n)=\Phi^{n}+(-1)^{n}\Phi^{-n} \tag{11}$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, ... , Φ - золотая пропорция.

Кажется невероятным, что формулы (10), (11) действительно задают две целочисленные последовательности $F(n)$ и $L(n)$, задаваемые рекуррентными соотношениями (4), (5).

Заметим, что эти формулы были открыты **Муавром (Moivre)** (1667-1754) и **Бернулли (Bernoulli)** (1687-1759) на одно столетие раньше Бине. Однако в современной математической литературе эти формулы называются *формулами Бине*.

Анализ формул Бине (10) и (11) дает нам возможность ощутить истинное «эстетическое наслаждение» и еще раз убедиться в мощи человеческого разума. Действительно, мы знаем, что числа Фибоначчи и Люка всегда являются целыми числами. Но из формул Бине (10) и (11) вытекает, что числа $F(n)$, как и числа Люка $L(n)$, с помощью формул Бине выражаются через «золотую пропорцию», которая является иррациональным числом. Таким образом, уникальность «формул Бине» состоит в том, что они выражают связь между целыми числами и иррациональными.

Удивительно, что в классической математике «формулы Бине» не получили должного признания, подобно другим известным математическим формулам («формулы Эйлера», «формулы Муавра» и т.д.). И не все математики их знают. Изучение «формул Бине», а также «золотого сечения», «чисел Фибоначчи и Люка», как правило, не включается в современные математические программы школьного и университетского образования. По-видимому, такое отношение к «формулам Бине» связано с «золотым сечением», которое всегда вызывало почему-то «аллергию» у большинства математиков.

Но главная «стратегическая ошибка» состоит в том, что математики 19-го века не усмотрели в формулах Бине прообраз нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка*, которые были открыты украинскими учеными Боднаром, Стаховым, Ткаченко и Розиным спустя 100 лет после исследований Бине [54, 55, 81, 98, 107]. Если бы гиперболические функции Фибоначчи и Люка были открыты в 19-м столетии, то гиперболическая геометрия и ее приложения в физической науке выглядели бы иначе.

5. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка и их роль в современной науке

5.1. ***Гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*** В 1984 г. **Алексей Стахов** опубликовал книгу «Коды Золотой Пропорции» [47], в которой формулы Бине (10) и (11) были представлены в виде, который ранее не использовался в математической литературе:

$$L(n)=\begin{cases}\Phi^{n}+\Phi^{-n} \text{ для четных } n=2k\\ \Phi^{n}-\Phi^{-n} \text{ для нечетных } n=2k+1\end{cases} \tag{12}$$

$$F(n)=\begin{cases}\dfrac{\Phi^{n}+\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} \text{ для нечетных } n=2k+1\\ \dfrac{\Phi^{n}-\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} \text{ для четных } n=2k\end{cases} \tag{13}$$

Сходство формул Бине, представленных в виде (12), (13), с классическими гиперболическими функциями

$$sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}; \qquad ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \tag{14}$$

настолько поразительно, что формулы (12), (13) можно считать прообразом нового класса гиперболических функций, основанных на «золотой пропорции», то есть, **А.П. Стахов** еще в 1984 г. [47] предвосхитил введение нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка*. Разработка новой теории гиперболических функций, основанных на *формулах Бине* (12), (13), была завершена **Алексеем Стаховым** и **Иваном Ткаченко** в 1993 г. [81]. Дальнейшее развитие эта идея получила в работах **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [98, 107], которые ввели так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*

Симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x)=\frac{\Phi^{x}-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x)=\frac{\Phi^{x}+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{15}$$

Симметричный гиперболический синус и косинус Люка

$$sLs(x)=\Phi^{x}-\Phi^{-x}; \qquad cLs(x)=\Phi^{x}+\Phi^{-x} \tag{16}$$

Числа Фибоначчи и Люка определяются однозначно через симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F(n)=\begin{cases}sFs(n), & n=2k\\ cFs(n), & n=2k+1\end{cases} \qquad L(n)=\begin{cases}cLs(n), & n=2k\\ sLs(n), & n=2k+1\end{cases} \tag{17}$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, ...

5.2. ***Значение гиперболических функций Фибоначчи и Люка для теории чисел Фибоначчи.*** Формулы (17) означают, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка (15) и (16) в дискретных точках n=0, ±1, ±2, ±3, ... совпадают с последовательностями Фибоначчи и Люка, задаваемыми рекуррентными соотношениями (4) и (5). Таким образом, гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются более общими («непрерывными») математическими объектами, частными случаями которых являются последовательности Фибоначчи и Люка. Это положение имеет принципиальное значение для *теории чисел Фибоначчи* [11, 14]. Это означает, что «дискретная» по своей природе *теория чисел Фибоначчи* является частным случаем более общей («непрерывной») *теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка* [54, 55, 81, 98, 107]. При этом любое тождество для чисел Фибоначчи и Люка может быть выражено в форме соответствующего («непрерывного») тождества для гиперболических функций Фибоначчи и Люка. В качестве примера мы можем рассмотреть «формулу Кассини»

$$\left[F(n)\right]^2 - F(n-1)F(n+1) = (-1)^{n+1}, \tag{18}$$

которая связывает три соседних числа Фибоначчи. Формулу (18) можно представить в виде двух формул, задаваемых для четных и нечетных значений n ($n=2k$ и $n=2k+1$, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$):

$$\left[F(2k)\right]^2 - F(2k-1)F(2k+1) = -1; \quad \left[F(2k+1)\right]^2 - F(2k)F(2k+2) = 1 \tag{19}$$

Если теперь воспользоваться соотношениями (17), то формулы (19) можно представить в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи:

$$\begin{gathered} \left[sFs(n)\right]^2 - cFs(n-1)cFs(n-1) = -1 \text{ для } n = 2k; \\ \left[cFs(n)\right]^2 - sFs(n-1)sFs(n-1) = 1 \text{ для } n = 2k+1. \end{gathered} \tag{20}$$

Заменяя в (20) дискретную переменную n на непрерывную переменную x, мы получим следующее два “непрерывных» тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи, которые являются обобщением *формулы Кассини* (18):

$$\begin{gathered} \left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x-1)cFs(x-1) = -1; \\ \left[cFs(x)\right]^2 - sFs(x-1)sFs(x-1) = 1. \end{gathered} \tag{21}$$

Заметим, что каждому «дискретному» тождеству для чисел Фибоначчи и Люка соответствует некоторое «непрерывное» тождество для гиперболичских функций Фибоначчи и Люка [98, 107]. И наоборот, любое «непрерывное» тождество для гиперболичских функций Фибоначчи и Люка может быть превращено в некоторое «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи и Люка, если воспользоваться соотношением (17). Это означает, что «классическая теория чисел Фибоначчи» [11, 14, 18], которая развивалась в математике от Фибоначчи (13 в.) до наших дней как бы «вырождается» и превращается в теорию гиперболических функций Фибоначчи и Люка; при этом числа Фибоначчи и Люка и гиперболические функции Фибоначчи и Люка существуют в тесном и неразрывном единстве; при дискретных значениях непрерывной переменной x гиперболические функции Фибоначчи и Люка превращаются в числа Фибоначчи и Люка. Наиболее ярко это проявляется в таком широко известном ботаническом явлении как *филлотаксис,* геометрическая теория которого изложена в работах украинского исследователя Олега Боднара [26].

5.3. ***Геометрия Боднара.*** Независимо от **Стахова, Ткаченко** и **Розина** к этим же идеям пришел украинский исследователь **Олег Боднар,** который ввел так называемые *«золотые» гиперболические функции* [26], которые отличаются от гиперболических функций Фибоначчи и Люка (15), (16) только постоянными коэффициентами. Используя новый класс гиперболических функций, Боднар создал оригинальную геометрическую теорию филлотаксиса, в которой показал, что «геометрия филлотаксиса» является неевклидовой геометрией, основанной на «золотых» гиперболичсеских функциях.

Таким образом, в работах **Боднара, Стахова, Ткаченко** и **Розина** сделан прорыв *гиперболических представлений* в теоретическом естествознании. В этих работах введен новый класс гиперболических функций, основанных на золотой пропорции [81, 98], и показано [26], что эти функции являются «естественными» функциями Природы, которые обнаруживают себя в ботаническом явлении филлотаксиса (сосновые шишки, кактусы, ананасы, головки подсолнечнков, корзинки цветов и т.д.) и других явлениях и структурах Природы в виде «фибоначчиевых» спиралей на поверхности филлотаксисных объектов.

Самым главным результатом этих исследований является осознание той важной роли, которую золотая пропорция играет в структурах Природы. **Очевидно, что золотая пропорция и связанные с ней числа Фибоначчи и Люка выражают некоторую *скрытую гармонию Природы,* суть которой состоит в гиперболическом характере Природы. Таким образом, обнаружение золотой пропорции или чисел Фибоначчи в том или ином природном явлении является сигналом к тому, что геометрическая природа этого явления является гиперболической.**

5.4. ***Преобразования Фибоначчи-Лоренца.*** Необходимо отметить, что исследования в области новой теории гиперболических функций [54, 55, 81, 98, 107] и особенно исследования Боднара [26] имеют непосредственное отношение к исследованиям Тьюринга по геометрической теории филлотаксиса. Но значение новых гиперболических функций для современной науки далеко выходит за пределы биологии и ботаники. Они затрагивают все теоретическое естествознание. Например, в работе [143] **Алексей Стахов** и **Самуил Арансон** развили новый подход к *преобразованиям Лоренца,* которые лежат в основе специальной теории относительности. В работе [143] введены так называемые *преобразования Фибоначчи-Лоренца,* основанные на гиперболических функциях Фибоначчи (15). Такой подход привел к новой («золотой») интерпретации эволюции Вселенной до, в момент и после «Большого Взрыва».

6. Обобщенные λ-числа Фибоначчи и Люка, «металлические пропорции» и гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка

6.1. ***Обобщенные λ-числа Фибоначчи.*** В конце 20-го и начале 21-го века несколькими исследователями (**Шпинадель** [31], **Газале** [32], **Татаренко** [146]) независимо друг от друга было введено оригинальное обобщение рекуррентного соотношения Фибоначчи. Зададимся положительным действительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующеее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \quad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1. \tag{22}$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, ...

Числовые последовательности, порождаемые рекуррентным соотношеним (22), будем называть λ-*числами Фибоначчи* или λ-*последовательностями Фибоначчи.* Ясно, что количество λ-*последовательностей Фибоначчи* теоретически бесконечно, так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует своя λ-*последовательность Фибоначчи.*

Ясно, что при $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (22) сводится к классическому рекуррентному соотношению Фибоначчи (4). При $\lambda = 2$ рекурентное соотношение (22) сводится к следующему:

$$F_2(n+2) = 2F_2(n+1) + F_2(n); \quad F_2(0) = 0, F_2(1) = 1. \tag{23}$$

Это рекуррентное соотношение «генерирует» широко известные *числа Пелли*

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...

Ниже приведены примеры λ- чисел Фибоначчи для λ =1, 2, 3, 4. Заметим, что второй ряд этой таблицы ($\lambda = 1$) задает классические числа Фибоначчи, в то время как третий ряд ($\lambda = 2$) задает *числа Пелли.*

λ	Φ_λ	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5
2	$1+\sqrt{2}$	29	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	29

3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	109	-33	10	-3	1	0	1	3	10	33	109
4	$2+\sqrt{5}$	305	-72	17	-4	1	0	1	4	17	72	305

6.2. ***«Металлические пропорции»***. Нетрудно найти характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения (22):

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0 \tag{24}$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \tag{25}$$

Вера Шпинадель назвала положительные корни уравнения (24)

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \tag{26}$$

металлическими пропорциями [31]. При $\lambda = 1$ «металлическая пропорция» (26) сводится к «золотой пропорции» (3).

Заметим, что *металлические пропорции* обладают следующими замечательными математическими свойствами, подобными свойствам (6)-(8) классической золотой пропорции:

1. Свойство «аддитивности» и «мультипликативности»:

$$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda \times \Phi_\lambda^{n-1} \tag{27}$$

2. Представление в виде «радикалов»:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}} \tag{28}$$

3. Представление в виде цепной дроби:

$$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}} \tag{29}$$

6.3. ***Формулы Газале.*** **Мидхат Газале** доказал [32], что λ*-числа Фибоначчи* могут быть выражены через *металлические пропорции* (26) в виде следующей формулы:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \tag{30}$$

которую в работе [129] названо *формулой Газале для* λ*-чисел Фибоначчи.*

Алексей Стахов в работе [129] вывел *формулу Газале для* λ*-чисел Люка,* которая имеет следующий вид:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n} \tag{31}$$

В работе [129] также показано, что числовые последовательности $L_\lambda(n)$, задаваемые формулой (28), могут быть выражены рекурсивно в виде рекуррентного соотношения:

$$L_\lambda(n+2) = \lambda L_\lambda(n+1) + L_\lambda(n); \quad L_\lambda(0) = 2, L_\lambda(1) = \lambda. \tag{32}$$

Ниже приведены примеры λ- чисел Люка для λ =1, 2, 3, 4

λ	Φ_λ	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11
2	$1+\sqrt{2}$	-82	34	-14	6	-2	2	2	6	14	34	82

3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	-393	119	-36	11	-3	2	3	11	36	119	393
4	$2+\sqrt{5}$	-1364	322	-76	18	-4	2	4	18	76	322	1364

Заметим, что при $\lambda = 1$ указанные числовые последовательности сводятся к классическим числам Люка, а при $\lambda = 2$ – к числовым последовательностям, известным как *числа Пелли-Люка*.

6.4. ***Гиперболические*** λ***-функции Фибоначчи и Люка.*** Основываясь на формулах Газале (30) и (31), **Алексей Стахов** ввел в [129] так называемые *гиперболические* λ*-функции Фибоначчи и Люка*, задаваемые следующими выражениями:

Гиперболический λ-синус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right] \quad (33)$$

Гиперболический λ-косинус Фибоначчи

$$cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right] \quad (34)$$

Гиперболический λ-синус Люка

$$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right] \quad (35)$$

Гиперболический λ-косинус Люка

$$cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right] \quad (36)$$

Поскольку при $\lambda = 1$ основанием гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка (33)-(36) является классическая «золотая пропорция» (3), а сами они для этого случая сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка (15), (16), то логично назвать функции (15), (16) *«золотыми» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*.

Для случая $\lambda = 2$ «серебрянная пропорция» $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций. Мы будем называть их *«серебряными» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_2(x) = \frac{\Phi_2^x - \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right]$$

$$cF_2(x) = \frac{\Phi_2^x + \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right]$$

$$sL_2(x) = \Phi_2^x - \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}$$

$$cL_2(x) = \Phi_2^x + \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}$$

Для случая $\lambda = 3$ «бронзовая пропорция» $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций. Мы будем называть их *«бронзовыми» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_3(x)=\frac{\Phi_3^x-\Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right]$$

$$cF_3(x)=\frac{\Phi_3^x+\Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x+\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right]$$

$$sL_3(x)=\Phi_3^x-\Phi_3^{-x}=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}$$

$$sL_3(x)=\Phi_3^x+\Phi_3^{-x}=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x+\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}$$

Для случая $\lambda=4$ «медная пропорция» $\Phi_4=2+\sqrt{5}$ является основанием нового класса гиперболических функций. Мы будем называть их *«медными» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_4(x)=\frac{\Phi_4^x-\Phi_4^{-x}}{\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\ \left(2+\sqrt{5}\right)^x-\left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}$$

$$sF_4(x)=\frac{\Phi_4^x+\Phi_4^{-x}}{\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\ \left(2+\sqrt{5}\right)^x+\left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}$$

$$sL_4(x)=\Phi_4^x-\Phi_4^{-x}=\left(2+\sqrt{5}\right)^x-\left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}$$

$$cL_4(x)=\Phi_4^x+\Phi_4^{-x}=\left(2+\sqrt{5}\right)^x+\left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}$$

Заметим, что перечень этих функций можно продолжить до бесконечности. При этом следует отметить, что число новых гиперболичнских функций, задаваемых (33)-(36), превышает число натуральных чисел. Число новых гиперболических функций совпадает с числом действительных чисел, потому что каждое положительное действительное число $\lambda>0$ порождает свой класс гиперболических функций типа (33)-(36).

6.5. ***Связь золотой пропорции с металлическими пропорциями.*** Нетрудно составить следующую сравнительную таблицу, связывающую *золотую пропорцию* с *металлическими пропорциями*:

Золотая пропорция ($\lambda=1$)	**Металлические пропорции ($\lambda>0$)**
$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
$\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$	$\Phi_\lambda=\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}}$
$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	$\Phi_\lambda=\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\ldots}}}$
$\Phi^n=\Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}=\Phi\times\Phi^{n-1}$	$\Phi_\lambda^n=\lambda\Phi_\lambda^{n-1}+\Phi_\lambda^{n-2}=\Phi_\lambda\times\Phi_\lambda^{n-1}$
$F(n)=\frac{\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_\lambda(n)=\frac{\Phi_\lambda^n-(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$L(n)=\Phi^n+(-1)^n\Phi^{-n}$	$L_\lambda(n)=\Phi_\lambda^n+(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}$
$sFs(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}};\ cFs(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}};\ cF_m(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sLs(x)=\Phi^x-\Phi^{-x};\ cLs(x)=\Phi^x+\Phi^{-x}$	$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x};\ cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}$

Красота этих формул завораживает. Это дает право предположить, что «Принцип математической красоты» Дирака может быть полностью применим к металлическим пропорциям и гиперболическим λ-функциям Фибоначчи и Люка. И это дает надежду, что что эти математические результаты могут стать фундаментом теоретического естествознания.

6.5. ***Связь гиперболических функций Фибоначчи и Люка с классическими гиперболическими функциями.*** Нетрудно доказать, что для случая $\lambda_e = e - \frac{1}{e} \approx 2.35040238...$ гиперблические λ-функции Люка совпадают с классическими гиперболическими функциями с точностью до коэффициента ½, то есть,

$$sh(x) = \frac{sL_m(x)}{2} \quad \text{и} \quad ch(x) = \frac{cL_m(x)}{2}. \tag{37}$$

Ниже приведена таблица формул для классических гиперболических функций и для гиперболических λ-функций Фибоначчи.

Formulas for the classical hyperbolic functions	Formulas for the hyperbolic Fibonacci λ-functions
$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}; cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sh(x+2) = 2sh(1)ch(x+1) + sh(x)$ $ch(x+2) = 2sh(1)sh(x+1) + ch(x)$	$sF_\lambda(x+2) = \lambda cF_\lambda(x+1) + sF_\lambda(x)$ $cF_\lambda(x+2) = \lambda sF_\lambda(x+1) + cF_\lambda(x)$
$sh^2(x) - ch(x+1)ch(x-1) = -ch^2(1)$ $ch^2(x) - sh(x+1)sh(x-1) = -ch^2(1)$	$sF_\lambda(x)^{2} - cF_\lambda(x+1)cF_\lambda(x-1) = -1$ $cF_\lambda(x)^{2} - sF_\lambda(x+1)sF_\lambda(x-1) = 1$
$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$	$cF_\lambda(x)^{2} - sF_\lambda(x)^{2} = \frac{4}{4+\lambda^2}$
$sh(x+y) = sh(x)ch(x) + ch(x)sh(x)$ $sh(x-y) = sh(x)ch(x) - ch(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} sF_\lambda(x+y) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x) + cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} sF_\lambda(x-y) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x) - cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(x+y) = ch(x)ch(x) + sh(x)sh(x)$ $ch(x-y) = ch(x)ch(x) - sh(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} cF_\lambda(x+y) = cF_\lambda(x)cF_\lambda(x) + sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} cF_\lambda(x-y) = cF_\lambda(x)cF_\lambda(x) - sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(2x) = 2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}} cF_\lambda(2x) = sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)$
$ch(x) \pm ch(x)^{n} = ch(nx) \pm sh(nx)$	$cF_\lambda(x) \pm sF_\lambda(x)^{n} = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}^{n-1} cF_\lambda(nx) \pm sF_\lambda(nx)$

Заметим, что подобная таблица формул для гиперболических λ-функций Люка $sL_\lambda(x)$ и $cL_\lambda(x)$ может быть получена из предыдущей таблицы путем умножения гиперболических λ-функций Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ and $cF_\lambda(x)$ на постоянный коэффициент $\sqrt{4+\lambda^2}$.

Таблицы формул для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка образуют основу так называемой **«золотой» фибоначчиевой гониометрии.** Эти таблицы являются достаточно убедительным подтверждением того факта, что в данном случае речь идет о новом классе гиперболичеких фуннкций, которые сохраняют все хорошо известные свойства классических гиперболических функций $sh(x)$ и $ch(x)$, но, в дополнение, они обладают дополнительными (“рекурсивными”) свойствами, которые объединяют их с замечательными числовыми последовательностями – λ-*числами Фибоначчи и Люка* $F_\lambda(n)$ и $L_\lambda(n)$.

6.6. ***Четвертая проблема Гильберта.*** В случае гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка речь идет об общей теории гиперболических функций, частными случаями которых являются классические гиперболические функции (14) и симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка (15) и (16). Ясно, что количество функций (33)-(36) теоретичски бесконечно, так каждое действительное число $\lambda > 0$ генерирует свой собственный класс гиперболических функций типа (33)-(36). Поэтому введенные выше гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (33)-(36) имеют важное значение для дальнейшего развития гиперболической геометрии, так как они создают предпосылки для создания бесонечного количества новых гиперболических моделей природных явлений. Для подтвеждения этого вывода сошлемся на работу [143], в которой гиперболические функции (33)-(36) рассматриваются в связи с решением 4-й проблемы Гильберта. Как известно, в докладе «Математические проблемы», сделанном на II Международном Конгрессе математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, **Давид Гильберт** (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе. Русский перевод доклада Давида Гильберта и комментарии к нему даны в работе [335]. В частности, четвёртая проблема Гильберта в [335] формулируется следующим образом: «*Возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*». Под геометрией, ближайшей к евклидовой, Гильберт понимал прежде всего геометрии Лобачевского, Римана и Минковского. В работе [143] показано, что более общий класс гиперболических функций – *гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка* (33)-(36) - представляет фундаментальный интерес с точки зрения 4-й проблемы Гильберта. Именно эти *гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка* приводят к так называемым λ-*моделям плоскости Лобачевского*, которые задают бесконечное множество новых интерпретаций плоскости Лобачевского гауссовой кривизны K=-1, изометричных всем ранее известным классическим интерпретациям плоскости Лобачевского гауссовой кривизны K=-1. И эти новые геометрии (число которых бесконечно) вместе с геометриями Лобачевского, Римана и Минковского могут «*считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*» (Давид Гильберт).

7. Треугольник Паскаля и обобщенные *p*-числа Фибоначчи

Еще одно обобщение чисел Фибоначчи и золотой пропорции связано с *треугольником Паскаля* – специальной числовой таблицей, введенной знаменитым французским математиком и физиком **Блезом Паскалем** (1623-1662).

Блез Паскаль (1623-1662)

С помощью этой таблицы легко вычисляются так называемые *биномиальные коэффициенты* C_n^k. Таблица строится на основе следующих правил:

$$C_n^0 = C_n^n = 1; \qquad (38)$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}; \qquad (39)$$

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k. \qquad (40)$$

Соотношение (40) называется *законом Паскаля*.

Заметим, что биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля широко используются в различных разделах математики, информатики и других науках. По существу, это – один из фундаментальных математических объектов, лежащих в основе точных наук. Знаменитый математик **Якоб Бернулли** (1654-1705) писал:

«Эта таблица имеет ряд чудесных свойств. Только что мы показали, что она составляет существо теории соединений, но те, кто тесно соприкасаются с геометрией, знают, что она хранит ряд фундаментальных секретов этой области математики».

Представим Треугольник Паскаля в виде треугольной таблицы, называемой *прямоугольным треугольником Паскаля*. Будем называть эту таблицу *0-треугольником Паскаля* (смысл такого определения станет ясен ниже).

0-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Такая таблица начинается с «нулевого столбца», который содержит единственный биномиальный коэффициент $C_0^0 = 1$ и из «нулевого ряда», который содержит биномиальные коэффициенты: $C_0^0 = 1, C_1^0 = 1, C_2^0 = 1, C_3^0 = 1, ..., C_n^0 = 1, ...$. Заметим, что «гипотенуза» 0-треугольника Паскаля состоит из биномиальных коэффициентов типа $C_0^0 = 1, C_1^1 = 1, C_2^2 = 1, C_3^3 = 1, ..., C_n^n = 1, ...$.

Ясно, что в *n*-м столбце сверху вниз расположены следующие биномиальные коэффициенты: $C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^n = 1$. Тогда, если просуммировать биномиальные коэффициенты n-го столбца 0-треугольника Паскаля, то получим сумму, равную «двоичному числу» 2^n, то есть

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 2^n. \tag{41}$$

Если теперь вычислить все суммы типа (37), начиная с нулевого столбца, то получим широко известный нам «двоичный ряд чисел»:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ..., 2^n, ... , \tag{42}$$

то есть, 0-треугольник Паскаля «генерирует» двоичный ряд чисел (42).

Формула (42) носит фундаментальный характер для теории двоичного кодирования, основы современных компьютеров и современной информационной технологии. Действительно, рассмотрим множество n-разрядных двоичных слов, начиная с 00 … 0 и заканчивая 11 … 1. Как известно, число элементов этого множества равно 2^n. Разобьем это множество на (n+1) непересекающихся подмножеств: к первому подмножеству отнесем все двоичные слова, состоящие из 0 единиц и n нулей (ясно, что этому условию удовлетворяет только одна кодовая комбинация 00…0, то есть число элементов этого подмножества равно $C_0^0 = 1$), ко второму подмножеству отнесем все двоичные слова, содержащие одну единицу и (n-1) нулей (число элементов этого подмножества равно C_n^1), к (m+1)-му подмножеству отнесем все n-разрядные двоичные слова, каждое из которых содержит m единиц и (n-m) нулей (число кодовых комбинаций, входящих в это подмножество, равно C_n^m), наконец, к (n+1)-му подмножеству отнесем все двоичные слова, состоящие из одних единиц (ясно, что этому условию удовлетворяет только одна кодовая комбинация 11…1, то есть число элементов этого подмножества равно $C_n^n = 1$). Из проведенных рассуждений вытекает справедливость формулы (21).

А теперь сдвинем каждый ряд 0-треугольника Паскаля на один столбец вправо относительно предыдущего ряда. В результате такого преобразования мы получим некоторый «деформированный» треугольник Паскаля, который мы будем называть *1-треугольником Паскаля.*

1-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				1	3	6	10	15	21	28	36
						1	4	10	20	35	56
								1	5	15	35
										1	6
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты 1-треугольника Паскаля по столбцам, начиная с 0-го столбца то, к нашему удивлению, мы обнаружим, что такое суммирование приведет нас к числам Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, F(n+1), … , \tag{39}$$

которые были получены Фибоначчи в 13-м столетии при решении «задачи о размножении кроликов»!

Из этих рассуждений легко вывести также математическую формулу, которая позволяет выразить числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F(n+1) = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + ... + C_{m+r}^m, \tag{40}$$

где n, m и r связаны между собой следующим соотношением: n=2m+r.

Любопытно подчеркнуть, что связь треугольника Паскаля с числами Фибоначи обнаружена сразу несколькими математиками независимо друг от друга, в частности, Пойа [336], Mohanty [337], Hoggatt [338], Реньи [15] и др.

Если теперь в 0-треугольнике Паскаля сдвинуть биномиальные коэффициенты каждого ряда на 2 столбца вправо относительно предыдущего ряда, то мы получим новый «деформированный» треугольник Паскаля, который мы назовем *2-треугольником Паскаля.*

2-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						1	3	6	10	15	21	28
									1	4	10	20
												1
1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60

Суммируя биномиальные коэффициенты по столбцам, мы получим следующий числовой ряд:

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, ... \qquad (41)$$

Если обозначить n-е число этого ряда через $F_2(n)$, то нетрудно увидеть, что члены этого ряда задаются следующей рекуррентной формулой

$$F_2(n) = F_2(n\text{-}1) + F_2(n\text{-}3) \qquad \text{для } n \geq 4 \qquad (42)$$

при начальных условиях

$$F_2(1) = F_2(2) = F_2(3) = 1. \qquad (43)$$

В дальнейшем мы будем называть числа $F_2(n)$, задаваемые рекуррентной формулой (42) при начальном условии (43), *2-числами Фибоначчи.*

А теперь рассмотрим ситуацию, когда в 0-треугольнике Паскаля мы сдвигаем биномиальные коэффициенты каждого ряда на p столбцов вправо относительно предыдущего ряда, где p может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, ... Полученный таким путем «деформированный» треугольник Паскаля мы будем называть *p-треугольником Паскаля.* Нетрудно показать, что суммирование биномиальных коэффициентов p-треугольника Паскаля по столбцам, начиная с 0-го столбца, приведет нас к новому числовому ряду, который задается следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n\text{-}1)+F_p(n\text{-}p\text{-}1) \quad \text{для} \quad n>p+1 \qquad (44)$$

при начальном условии

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1 \qquad (45)$$

Числовые ряды, генерируемые рекуррентной формулой (44) при начальных условиях (45), были названы *p-числами Фибоначчи* [45].

Таким образом, проведенные выше “манипуляции» с треугольником Паскаля, привели нас к небольшому математическому открытию. Во-первых, установлена связь треугольника Паскаля с числами Фибоначчи, что лишний раз подчеркивает фундаментальность числового ряда Фибоначчи. Во-вторых, мы обнаружили новый класс рекуррентых числовых последовательностей, названных *p-числами Фибоначчи* [45]. Как вытекает из (44) и (45), рекурентное соотношение, задающее *p-числа Фибоначчи,* генерирует бесконечное количество рекуррентных числовых рядов, частными случаями которых является «двоичный ряд» (p=0) и ряд Фибоначчи (p=1). Эти числовые ряды непосредственно вытекают с треугольника Паскаля (диагональные суммы треугольника Паскаля).

8. Обобщенные золотые *p*-сечения

8.1. ***Предел отношения соседних p-чисел Фибоначчи.*** А теперь исследуем отношение соседних p-чисел Фибоначчи $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ при $n \to \infty$, то есть установим предел отношения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}=x\,.$$

В работе [45] показано, что эта задача сводится к решению алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} = x^p + 1, \tag{46}$$

которое при p=1 сводится к классическому «золотому» уравнению (2).

Положительный корень этого уравнения Φ_p назван в [45] *обобщенной золотой пропорцией* или *золотой p-пропорцией.*

Значения золотых p-пропорций для начfльных значений p приведены в таблице.

Золотые *p*-пропорции

p	0	1	2	3	...	∞
Φ_p	2	1,618	1,465	1,380	...	1

Таким образом, между числами $\Phi_p=2$ и $\Phi_\infty=1$ находится бесконечное число иррациональных чисел, *золотых p-пропорций*, которые выражают более сложные «гармонии», чем классическая золотая пропорция $\Phi_1=1.618$. То есть, золотых p-пропорций существует бесконечное количество. И все они выражают некоторые математические свойства треугольника Паскаля, ранее неизвестные.

8.2. ***Геометричская формулировка задачи о золотом p-сечении.*** Задача о «золотом сечениии» (1) допускает следующее обобщение. Зададимся целым неотрицательным числом p=0, 1, 2, 3, ... и разделим отрезок *AB* точкой *C* в следующей пропорции:

$$\frac{CB}{AC}=\left(\frac{AB}{CB}\right)^p \tag{47}$$

Если обозначить $\frac{AB}{CB}=x$ и учесть, что *AB* = *AC* + *CB*, то отношение $\frac{AB}{CB}=x$ можно представить в виде:

$$x=\frac{AC+CB}{CB}=1+\frac{1}{\frac{CB}{AC}} \tag{48}$$

откуда вытекает алгебраическое уравнение (46), полученное нами при исследовании отношений соседних p-чисел Фибоначчи.

Это означает, что деление отрезка в пропорции (47) осуществляется в отношении золотой p-пропорции Φ_p. Заметим, что пропорция (47) сводится к «дихотомии» (то есть к делению отрезка пополам) для случая p = 0 и к классическому золотому сечению для случая p = 1. Таким образом задача (47) есть обобщение классической задачи о золотом сечении, задаваемой (1). Учитывая это обстоятельство, деление отрезка *AB* точкой *C* в пропорции (47) было названо *золотым p-сечением*, а положительный корень алгебраического уравнения (46) *золотой p-пропорцией* [45].

8.3. ***Обобщенный принцип золотого сечения.*** В последние годы **Алексей Стахов** и **Борис Розин** выполнили широкий комплекс исследований, касающихся «золотых p-пропорций» и алгебраического уравнения (46) [100-103]. Наиболее важные математические результаты состоят в следующем:

1. Исследованы свойства корней алгебраического уравнения (46) и выведены выражения для алгебраических уравнений (46) со степенью выше p+1, имеющих общий корень – золотую p-пропорцию Φ_p [100].

2. Выведена обобщенная формул Бине для p-чисел Фибоначчи. Она имеет следующий вид:

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^n, \tag{49}$$

где x_1, x_2, …, x_{p+1} – корни уравнения (46), и k_1, k_2, …, k_{p+1} – постоянные коэффициенты, зависящие от значений начальных членов (45) последовательности p-чисел Фибоначчи [101].

3. Выведена обобщенная формула Бине, задающая *p-числа Люка* – новый класс рекуррентных числовых последовательностей [101]. Эта формула имеет вид:

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n. \tag{50}$$

Обобщенные p-числа Люка могут быть заданы с помощью рекуррентной формулы

$$L_p(n)= L_p(n-1)+L_p(n-p-1) \tag{51}$$

при следующих начальных условиях:

$$L_p(0)=p+1; \quad L_p(1)=L_p(2)=\ldots=L_p(p)=1. \tag{52}$$

4. Разработана теория непрерывных функций для p-чисел Фибоначчи и Люка [102].

Но главным результатом является обоснование *обобщенного принципа золотого сечения,* основанного на понятии золотой p-пропорции Φ_p [103]. Этот принцип является обобщением классического «принципа дихотомии» и «принципа золотого сечения» и задается следующей математической формулой:

$$1 = \Phi_p^{-1} + \Phi_p^{-(p+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_p^{-(i-1)(p+1)-1}. \tag{53}$$

В частности, при p=0 золотая p-пропорция Φ_p принимает значение $\Phi_0 = 2$ и формула (53) принимает вид выражения

$$1 = 2^{-1} + 2^{-1} = \sum_{i=-1}^{\infty} 2^i ,$$

которое задает «принцип дихотомии». При p=1 золотая p-пропорция Φ_p принимает значение $\Phi_1 = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ («золотая пропорция») и формула (53) принимает вид выражения

$$1 = \Phi^{-1} + \Phi^{-2} = \sum_{i=-1}^{\infty} \Phi^{-(2i-1)} ,$$

которое задает «принцип золотого сечения».

8.4. ***Фибоначчиево деление биологических клеток.*** Наиболее убедительным примером «природного характера» обобщенных p-чисел Фибоначчи и вытекающего из него «обобщенного принципа золотого сечения» является такое широко распространенное биологическое явления как деление биологических клеток в процессе их роста. При кинетическом анализе роста биологических клеток часто предполагается, что деление исходной клетки на две дочерние клетки осуществляется строго симметрично («принцип дихотомии»). Однако, для многих биологических объектов таких как бактерии, дрожжи, насекомые, растения деление клеток является строго асимметричным, когда продукты двоичного деления обладают явно выраженными пространственными и функциональными различиями. Неожиданная информация содержится в статье [340], посвященой проблеме роста биологических клеток. Как утверждается в статье [340], асимметричное двоичное деление клеток осуществляетсчя согласно рекуррентному соотношению для обобщенных p-чисел Фибоначчи. Таким образом, p-числа Фибоначчи являются адекватной математической моделью роста и размножения не только «кроликов», но и биологических клеток.

8.5. ***Закон структурной гармонии систем.*** Однако наиболее далеко в оценке роли обобщенных золотых p-сечений в современной науке пошел белорусский философ Эдуард Сороко, который считается одним из наиболее авторитетных ученых в области гармонии и золотого сечения. Главная идея Сороко [16] состоит в том, чтобы рассмотреть реальные системы с "диалектической точки зрения". Как известно, всякий объект природы может быть представлен как диалектическое единство двух противоположных сторон A и B. Эта диалектическая связь может быть выражена в виде следующего равенства:

$$A + B = U \text{ (universum)}. \qquad (54)$$

Равенство (54) является наиболее общей формой выражения так называемого *закона сохранения*. Здесь A и B различия внутри единства, логически непересекающиеся классы или состояния субстрата некоторого целого. Единственное условие: A и B должны измеряться одной и той же мерой, быть членами отношения, лежащего внутри единства. Примерами (54) могут быть вероятность и невероятность событий, масса и энергия, ядро атома и его оболочка, вещество и поле, анод и катод, животные и растения, духовное и материальное начала в системе ценностей, доход и расход и т.д.

Рассмотрим процесс самоорганизации системы. Он сводится к переходу системы в состояние *"гармонического равновесия"*. Сороко доказывает, что существует некоторое соотношение, пропорция между сторонами A и B диалектического противоречия (54) в состоянии «гармонического равновесия». Это соотношение имеет строго регулярный характер и является причиной стабильности системы.

Исследуя равенство (54), Сороко по существу приходит к «обобщенному принципу золотого сечения», задаваемому (53). При этом он приходит к следующему важному заключению, которое он называет *законом структурной гармонии систем* [16]**:**

"Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную ... устойчивость".

В чем принципиальная особенность "Закона Сороко"? Начиная с Пифагора, ученые связывали понятие гармонии с единственной золотой пропорцией (3), которая считалась уникальной и неповторимой благдаря ее математическим свойствам (6)-(8). "Закон Сороко" утверждает, что «гармоничное состояние» системы, соответствующее классической золотой пропорции, не является единственным и что для одной и той же системы может существовать бесконечное количество "гармоничных" состояний, соответствующих обобщенным золотым p-пропорциям $\Phi_p \left(p = 0,1,2,3,... \right)$.

9. Матрицы Фибоначчи и “золотые» матрицы

9.1. ***Q-матрица Фибоначчи.*** Во второй половине 20-го столетия теория чисел Фибоначчи дополнилась важным математическим результатом – *матрицами Фибоначчи*. Инициатором этих исследований является американский математик Вернер Хогатт, создатель Фибоначчи-ассоциации. Рассмотрим так называемую Q-матрицу Фибоначчи, описанную в книге [11]:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (55)$$

Заметим, что детерминант Q-матрицы равен -1, то есть:

$$\det Q = -1. \tag{56}$$

Возведение *Q*-матрицы (55) в *n*-ю степень приводит к матрице

$$Q^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \tag{57}$$

элементами которой являются числа Фибоначчи.

Детерминант матрицы (57) задается выражением:

$$\det Q^n = F(n+1)F(n-1) - F(n)^2 = (-1)^n \tag{58}$$

Сравнивая выражение (58) с *формулой Кассини* (18), мы приходим к неожиданному заключению, что они совпадают, то есть матрица (57) содержит в себе одно из наиболее важных тождеств для чисел Фибоначчи – *формулу Кассини*.

Ниже приведена таблица матриц Q^n и Q^{-n} для начальных значений *n*:

n	0	1	2	3	4	5
Q^n	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix}$
Q^{-n}	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&5\\5&-8\end{pmatrix}$

Сравнивая Q^n и Q^{-n} для четных (*n*=2*k*) и нечетных (*n*=2*k*+1) значений *n*, мы приходим к заключению, что для четных *n*=2*k* «инверсная» матрица $Q^{-n}, n = 2k$ может быть выражена через элементы матрицы Q^n следующим образом:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} F(n-1) & -F(n) \\ -F(n) & F(n+1) \end{pmatrix}, n = 2k; k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \tag{59}$$

то есть, для получения «инверсной» матрицы Q^{-n} из исходной матрицы Q^n необходимо в исходной матрице (57) поменять местами диагональные элементы $F(n+1)$ и $F(n-1)$, а диагональные элементы $F(n)$ взять с обратным знаком.

Для случая *n*=2*k*+1 «инверсная» матрица $Q^{-n}, n = 2k$ выглядит следующим образом:

$$Q^{-n} = \begin{pmatrix} -F(n-1) & F(n) \\ F(n) & -F(n+1) \end{pmatrix}, n = 2k+1, k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \tag{60}$$

то есть, в этом случае диагональные элементы $F(n+1)$ и $F(n-1)$ в исходной матрице (57) необходимо поменять местами и взять их с противоположным знаком.

Заметим, что матрицы (55) и (57) являются «генерирующими» матрицами для классических чисел Фибоначчи (4).

9.2. ***G_λ-матрица.*** **Алексей Стахов** в работе [129] ввел новый класс матриц, которые являются «генерирующими» для λ-чисел Фибоначчи (22). Зададимся действительным положительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим квадратную (2×2)-матрицу следующего типа:

$$G_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Заметим, что детерминант матрицы (61) равен -1, то есть,

$$\det G_\lambda = -1. \tag{62}$$

В [129] доказаны следующие свойства G_λ-матрицы (61):

$$G_\lambda^n = \begin{pmatrix} F_\lambda(n+1) & F_\lambda(n) \\ F_\lambda(n) & F_\lambda(n-1) \end{pmatrix} \tag{63}$$

$$\det G_\lambda^n = F_\lambda(n+1)\times F_\lambda(n-1) - \left[F_\lambda(n)\right]^2 = (-1)^n. \tag{64}$$

Заметим, что формула (64) является обобщением *формулы Кассини* (18) для λ-чисел Фибоначчи (22).

Доказаны [129] следующие свойства G_λ-матриц:

$$G_\lambda^n = \lambda G_\lambda^{n-1} + G_\lambda^{n-2}. \tag{65}$$

$$G_\lambda^{-2k} = \begin{pmatrix} F_\lambda(2k-1) & -F_\lambda(2k) \\ -F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k+1) \end{pmatrix} \tag{66}$$

$$G_\lambda^{-2k-1} = \begin{pmatrix} -F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k+1) \\ F_\lambda(2k+1) & -F_\lambda(2k+2) \end{pmatrix} \tag{67}$$

9.3. ***Q_p-матрицы Фибоначчи.*** **Алексей Стахов** в работе [83] ввел новый класс матриц Фибоначчи, которые являются «генерирующими» матрицами для p-чисел Фибоначчи, задаваемых рекуррентым соотношением (44) при начальных условиях (45). Для заданного p (p=1,2,3,…) обобщенная матрица Фибоначчи - Q_p-матрица имеет следующий вид:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{68}$$

Q_p-матрица (68) является квадратной (p+1)×(p+1)-матрицей. Она состоит из единичной (p×p)-матрицы, ограниченной последней строкой 1000...00 и первым столбцом, который состоит из «нулей», ограниченных «единицами» сверху и снизу. Для случаев p=1,2,3,4 Q_p-матрицы принимают следующий вид:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q;\ \ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \ Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \ Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{69}$$

В работе [83] доказаны следующие свойства Q_p-матрицы (68):

$$\det Q_p = (-1)^p. \tag{70}$$

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}, \tag{71}$$

$$\det Q_p^n = (-1)^{pn}. \tag{72}$$

Заметим, что элементами матрицы (71) являются p-числа Фибоначчи, задаваемые (44) и (45).

9.4. *«Золотые» Q-матрицы.* Представим Q-матрицу (57) в виде двух матриц для четных (n=2k) и нечетных (n=2k+1) значений n:

$$Q^{2k}=\begin{pmatrix} F(2k+1) & F(2k) \\ F(2k) & F(2k-1) \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$Q^{2k}=\begin{pmatrix} F(2k+2) & F(2k+1) \\ F(2k+1) & F(2k) \end{pmatrix} \tag{74}$$

Выражая числа Фибоначчи в матрицах (73) и (74) в терминах гиперболических функций Фибоначчи (15) на основании соотношения (17) и затем заменяя дискретную переменную k на непрерывную переменную x, можно получить два типа «золотых» Q-матриц [106], соответствующих выражениям (73) и (74) соответственно:

$$Q_0(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Доказано [106], что матрицы, «инверсные» к (75) и (76), принимают следующий вид:

$$\overline{Q_0}(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x-1) & -sFs(2x) \\ -sFs(2x) & cFs(2x+1) \end{pmatrix} \tag{77}$$

$$\overline{Q_1}(x)=\begin{pmatrix} -sFs(2x) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & -sFs(2x+2) \end{pmatrix}. \tag{78}$$

Используя свойства гиперболических функций Фибоначчи, задаваемых (21) , можно вычислить детерминанты матриц (73) и (74):

$$\det Q_0(x)=cFs(2x+1)cFs(2x-1)-\left[sFs(2x)\right]^2=1 \tag{79}$$

$$\det Q_1(x)=cFs(2x+2)cFs(2x)-\left[sFs(2x+1)\right]^2=-1. \tag{80}$$

Таким образом, особенность матриц (75)-(78) состоит в следующем. Во-первых, они являются функциями непрерывной переменной x. Во-вторых, элементами матриц (75)-(78) являются гииерболические функции Фибоначчи (15). В-третьих, их детерминанты не зависят от значения переменной x и тождественно равны +1 или -1.

9.5. *«Золотые»* G_λ *-матрицы.* В работе [129] введен новый класс матриц, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи (33) и (34). Эти матрицы названы «золотыми» G_λ - матрицами:

$$G_{0,\lambda}(x)=\begin{pmatrix} cF_\lambda(2x+1) & sF_\lambda(2x) \\ sF_\lambda(2x) & cF_\lambda(2x-1) \end{pmatrix} \tag{81}$$

$$G_{1,\lambda}(x)=\begin{pmatrix} sF_\lambda(2x+2) & cF_\lambda(2x+1) \\ cF_\lambda(2x+1) & sF_\lambda(2x) \end{pmatrix} \tag{82}$$

$$\overline{G_{0,\lambda}}(x)=\begin{pmatrix} cF_\lambda(2x-1) & -sF_\lambda(2x) \\ -sF_\lambda(2x) & cF_\lambda(2x+1) \end{pmatrix} \tag{83}$$

$$\overline{G_{1,\lambda}}(x)=\begin{pmatrix} -sF_\lambda(2x) & cF_\lambda(2x+1) \\ cF_\lambda(2x+1) & -sF_\lambda(2x+2) \end{pmatrix} \tag{84}$$

Матрицы (81) и (82) обладают следующим уникальными свойствами:

$$\det G_{0,\lambda}(x)=cF_m(2x+1)\times cF_m(2x-1)-\left[sF_m(2x)\right]^2=1 \tag{85}$$

$$\det G_{1,\lambda}(x) = sF_m(2x+2) \times sF_m(2x) - \left[cF_m(2x+1)\right]^2 = -1 \qquad (86)$$

Таким образом, особенность матриц (81)-(84) состоит в следующем. Во-первых, они являются функциями двух непрерывных переменных x и $\lambda > 0$. Во-вторых, элементами матриц (81)-(84) являются гиперболические λ-функции Фибоначчи (33) и (34). В-третьих, их детерминанты не зависят от значений переменных x и λ и тождественно равны +1 или -1.

Литература:

1. Jonathan Swinton. Fibonacci phyllotaxis: Turing's problem, 2002 www.swintons.net/jonathan/Turing/fibonacci.htm
2. A. M. Turing. The Chemical Basis of Morphogenesis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, volume B 237, 1952, pages 37--72.
3. A. M. Turing. The morphogen theory of phyllotaxis. In Saunders, 1992.
4. Timerding H.E. Der Golden Shnitt. Leipzig and Berlin: Verlag und Druck B.G. Teubner, 1918 (Russian translation, 1924).
5. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Ленинград-Москва: ОНТИ, 1935
6. Гика Матила. Эстетика пропорций в природе и искусстве (пер. с фр). Москва: Издательство Академии Архитектуры , 1936.
7. Thompson, D'Arcy W. On Growth and Form. New York: McMillan, 1944.
8. Gardner Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York: Publishing House “Dover”, 1952.
9. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.
10. Brousseau Alfred. An Introduction to Fibonacci Discovery. San Jose, California: Fibonacci Association, 1965.
11. Hoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
12. Huntley H. E. The Divine Proportion: a Study in Mathematical Beauty. Dover Publications, 1970.
13. Ghyka Matila. The Geometry of Art and Life. Dover Publications, 1977.
14. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
15. Реньи Альфред. Трилогия математики (пер. с венг.). Москва: Мир, 1980
16. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
17. Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa: Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen).
18. Garland T.H. Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers. Dale Seymour, 1987.
19. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
20. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Вычшая школа, 1989.
21. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. Москва: Молодая Гвардия», 1990.
22. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы. Москва: Стойиздат, 1990.
23. Runion G.E. The Golden Section. Dale Seymour, 1990.
24. Fisher Robert, Fibonacci Applications and Strategies for Traders. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
25. Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. Минск: РИТС, 1993
26. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
27. Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific, 1997.
28. Цветков В.Д. Сердце, золотоая пропорция и симметрия. Пущино: ОНТИ РНЦ РАУ, 1997
29. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998.
30. Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998.
31. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
32. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999
33. Prechter, Robert R. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. Gainseville, Georgia: New Classics Library, 1999.
34. Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. Москва: Воскресенье, 2000
35. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.

36. Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
37. Livio, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.
38. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
39. Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві. Львів: Украïнскі Технологiï, 2005
40. Петруненко В.В. Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления. Минск: Право и жкономика, 2005.
41. Olsen Scott. The Golden Section: Nature's Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006.
42. Сороко Э.М. Золотое сечение, процессы самоорганизации и эволюции сисртем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: URSS, 2006

<u>Диссертации, книги и брошюры А.П. Стахова</u>

43. Стахов А.П. Исследование преобразователей «напряжение-код» с обратной связью, использующих в качестве сравнивающих устройств регенеративные компараторы. Канд. Диссертация. Харьковский институт радиоэлектроники, 1966.
44. Стахов А.П. Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Докторская диссертация. Киевский институт инженеров гражданской авиации, 1972.
45. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
46. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979 г.
47. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
48. Стахов А.П., Лихтциндер Б.Я., Орлович Ю.П., Сторожук Ю.А. Кодирование данных в информационно-регистрирующих системах. Киев, Техника, 1985 г.
49. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.
50. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations». Toronto, SKILLSET-Training, 1997.
51. Stakhov A.P., Massingua V., Sluchenkova A.A. Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography». Харьков, Изд-во «Основа» Харьковского университета, 1999 г.
52. Stakhov A.P. (editor). The Golden Section: Theory and Applications. Mozambique, University Eduardo Mondlane, Boletin de Informatica, No 9/10, January 1999.
53. Stakhov A.P., Sluchenkova A.A. Museum of Harmony and Golden Section: mathematical connections in Nature, Science and Art». Vinnitsa, ITI, 2003.
54. Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: a New Mathematics for Living Nature. Vinnitsa, ITI, 2003.
55. Стахов А.П. Новая математика для живой природы: Гиперболические функции Фибоначчи и Люка». Винница, Изд-во «ITI», 2003.
56. Стахов А.П. Под знаком «Золотого Сечения»: Исповедь сына студбатовца. Винница, ITI, 2003.
57. Стахов А.П. Сакральная Геометрия и Математика Гармонии. Винница, ITI, 2003.
58. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006.
59. Stakhov A.P. The Harmony Mathematics. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific (in press)

<u>Статьи А.П. Стахова в советских, российских и украинских журналах и сборниках</u>

60. Витенько И.В., Волков А.А., Стахов А.П. Оптимальные алгоритмы функционирования преобразователей «напряжение-код». В кн. Тезисы докладов V научно-технической конференции «Кибернетически пути совершенствования измерительной аппаратуры». ЛОП НТО, Приборпром, 1966.
61. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
62. Алипов Н.В., Витенько И.В., Стахов А.П. Корректирующие (n,k,S)-алгоритмы. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
63. Стахов А.П. Что такое теория измерения? – В кн. Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, вып.1. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974.
64. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.

65. Стахов А.П. Измерение и поиск. В сборнике «Проблемы случайного поиска», №3, Рига, Изд-во «Зинатне», 1974 г.
66. Стахов А.П. «Фибоначчиева» двоичная арифметика и ее применение для контроля вычислительных систем. – В кн. Однородные вычислительные системы и среды. Материалы IV Всесоюзной конференции. Киев, «Наукова думка», 1975.
67. Стахов А.П. Взгляд на нумерационное кодирование с позиций алгоритмической теории измерения. Доклады IV Всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации. Изд-во Томского института радиоэлектроники и автоматизированных систем управления. Москва-Томск, 1975.
68. Стахов А.П. Использование естественной избыточности «фибоначчиевых» систем счисления для контроля вычислительных систем. Автоматика и вычислительная техника, №6, 1975 г.
69. Стахов А.П. Об одном обобщении чисел Фибоначчи. - В сб. Вопросы кибернетики. Труды III Всесоюзного семинара по комбинаторной математике. Изд-во Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика». Москва, 1976.
70. Стахов А.П. Принцип асимметрии логики измерения. Проблемы передачи информации, №3, 1976 г.
71. Стахов А.П. «Фибоначчиевые» двоичные позиционные системы счисления. В сб. Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи. Москва, Наука, 1976 г.
72. Стахов А.П. Методологические аспекты введения кодовой избыточности в цифровые вычислительные машины. Автоматика и вычислительная техника, №15, 1976 г.
73. Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. В сб. Современные проблемы метрологии. Москва, Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978 г.
74. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
75. Стахов А.П., Лужецкий В.А. Машинная арифметика ЦВМ в кодах Фибоначчи и «золотой» пропорции. Москва, Изд-во АН СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981 г.
76. Стахов А.П. Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №6, 1981 г.
77. Стахов А.П. Коды золотой пропорции или системы счисления для ЭВМ будущего? Журнал «Техника — молодежи», №7, 1985 г.
78. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №2, 1988 г.
79. Стахов О.П. За принципом золотої пропорції: перспективний шлях розвитку обчислювальної техніки. Вісник Академії наук Української РСР, №1-2, 1990 г. Стахов О.П. Вимірювання — фундаментальна проблема науки. Вісник Академії наук Української РСР, №6, 1991 г.
80. Стахов О.П. Золотий переріз і наука про гармонію систем. Вісник Академії наук Української РСР», №12, 1991 г.
81. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
82. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения: новый взгляд на теорию позиционных систем счисления и компьютерную арифметику. Международный научный журнал «Управляющие системы и машины», №4-5, 1994.
83. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
84. Стахов О.П. Чи може бути створена нова елементарна математика, що базується на «Золотому Перетині»? Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету. Серія «Фізика і математика», вип. 1, 2002 р.
85. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
86. Стахов А.П. Сакральная Геометрия и Математика Гармонии. Труды Международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница, 2003 г.
87. Стахов А.П. Кодирование данных, основанное на фибоначчиевых матрицах. Труды Международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница, 2003 г.
88. Стахов А.П. Золотое сечение, священная геометрия и математика гармонии. Сборник «Метафизика. Век XXI». Москва: БИНОМ, 2006, с. 174-215
89. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки и ее приложения. Известия Международной Академии наук высшей школы. №2 (36), 2006. – с. 52-64.

90. Стахов А.П. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и «Математика Гармонии» как альтернативное направление в развитии матеатической науки. Totallogy-XXI. Постнекласичні дослідження. №17/18. – Київ: ЦГО НАН України. – 2007. с. 274-323.

Статьи А.П. Стахова в международных журналах и сборниках

91. Стахов А.П., Розин Б.Н. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Number, Time, Relativity. Proceedings of International Scientific Meeting. Moscow, 10 August – 13 August, 2004.
92. Стахов А.П., Розин Б.Н. Новый класс гиперболических функций. Труды Института прогрессивных исследований, вып. 4, Израиль, Арад, 2004 г.
93. Стахов А.П. Коды и компьютеры Фибоначчи, матрицы Фибоначчи и новая теория кодирования. Труды Института прогрессивных исследований, вып. 4, Израиль, Арад, 2004 г.
94. Stakhov A.P. The Medial Section as a Proportion for the Thermo-dynamical Equilibrium of Self-organizing Systems. Proceedings of the International Symposium «System Analysis and Simulation», Berlin, 1988.
95. Stakhov A.P. The Golden Section in the measurement theory. An International Journal «Computers & Mathematics with Applications», Volume 17, No 4-6, 1989.
96. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
97. Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.
98. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
99. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar . Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26(3);** 677-684.
100. Stakhov A., Rozin B. The "golden" algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1415-1421.
101. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1162-1177.
102. Stakhov A., Rozin B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2006, **28 (4)**: 1014-1025.
103. Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26 (2)**: 263-289.
104. Stakhov A. Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5)**: 1124-1146.
105. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
106. Stakhov A. The "golden" matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.
107. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
108. Stakhov A. Three "key" problems of mathematics on the stage of its origin, the "Harmony Mathematics" and its applications in contemporary mathematics, theoretical physics and computer science. Visual Mathematics, Volume 9, No.3, 2007 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
109. Stakhov A. Three "key" problems of mathematics on the stage of its origin and the "Harmony Mathematics" as alternative way of mathematics development. Mathematics & Design. Fifth International Mathematics & Design Conference – V M&D. – 88-102.
110. Stakhov A. And Sluchenkova A. Design of new coding theory and cryptography based on the Fibonacci and "golden" matrices. Mathematics & Design. Fifth International Mathematics & Design Conference – V M&D. – 154-165.

Электронные публикации А.П. Стахова

111. Стахов А.П., Слученкова А.А. Музей Гармонии и Золотого Сечения, 2001 (www.goldenmuseum.com/).
112. Stakhov A.P. Museum of Harmony and the Golden Section: mathematical connections in Nature, Science and Art, 2002 (www.fenkefeng.org/essaysm18004.html)
113. Стахов А.П. Компьютер Фибоначчи. Москва, PC Week, 2002, № 34 (352) (www.pcweek.ru/Year2002/N34/CP1251/Strategy/chapt2.htm)
114. Стахов А.П. Компьютер Фибоначчи (www.ssga.ru/erudites_info/computers/kompfib.html**)**
115. Стахов А.П. Компьютеры Фибоначчи и новая теория кодирования: история, теория, перспективы. Электронный журнал Таганрогского радиотехнического университета «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы», № 2 (18), 2004 (http://pitis.tsure.ru/files18/p5.pdf)

116. Стахов А.П., Розин Б.Н. Теория формул Бине для *p*-рядов Фибоначчи и Люка. Электронный журнал Таганрогского радиотехнического университета «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы», № 1 (21), 2005 (http://pitis.tsure.ru/files21/10.pdf).
117. Стахов А.П. Сакральная геометрия и математика гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.11176, 26.04.2004 (www.trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02020028.htm).
118. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005(www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320001.htm)
119. Стахов А.П. «Металлические Пропорции» Веры Шпинадель // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12532, 25.10.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320029.htm)
120. Стахов А.П. Формула Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320030.htm)
121. Стахов А.П. «Код да Винчи», Платоновы и Архимедовы тела, квазикристаллы, фуллерены, решетки Пенроуза и художественный мир Матюшки Тейи Крашек // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12561, 07.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320031.htm)
122. Стахов А.П., Розин Б.Н. «Золотые» гиперболические модели Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12616, 22.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320034.htm)
123. Стахов А.П. Троичный принцип Брусенцова, система счисления Бергмана и «золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12355, 15.08.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320001.htm)
124. Стахов А.П. Теорема Пифагора и числа Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12403, 06.09.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320003.htm)
125. Стахов А.П. Додекаэдр, тайна Египетского календаря, циклы Солнечной Системы и «Арифметика Вселенной» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13065, 10.03.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320039.htm)
126. Стахов А.П. Матричный подход в «теории Золотого Сечения» и «золотые» геноматрицы Сергея Петухова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13439, 15.06.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321050.htm)
127. Стахов А.П. «Принцип Золотой Пропорции» в «Началах» Евклида и «Обобщенный Принцип Золотого Сечения» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13523, 06.07.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321051.htm)
128. Стахов А.П. Еще раз о математической истории Золотого Сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13714, 25.08.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321029.htm)
129. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm)
130. Стахов А.П. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и новые направления в развитии математики, теоретической физики и информатики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14135, 12.01.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321064.htm)
131. Стахов А.П. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка: история и приложения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14429, 31.05.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321057.htm)
132. Стахов А.П. «Стратегические ошибки» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14555, 27.08.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321070.htm)
133. Стахов А.П. Важнейшие научные открытия современной науки, основанные на «золотом сечении» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14575, 18.09.2007 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321071.htm)
134. Стахов А.П., О новом обобщении чисел Фибоначчи и «золотой пропорции» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14681, 02.01.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321073.htm
135. Стахов А.П. Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321074.htm
136. А.П. Стахов, «Математика Гармонии» как новое междисцилинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14729, 08.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321078.htm
137. Стахов А.П. Металлические Пропорции – новые математические константы Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm
138. Стахов А.П. От «Золотого Сечения» к «Металлическим Пропорциям». Генезис великого математического открытия от Евклида к новым математическим константам и новым

гиперболическим моделям Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14774, 16.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321081.htm
139. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая Фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода ДНК, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть I. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14778, 20.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321082.htm
140. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода ДНК, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть II. Резонансная структура генетического кода ДНК // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14779, 26.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321083.htm
141. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода днк, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть III. Преобразования Фибоначчи-Лоренца и их связь с золотым универсальным генетическим кодом // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14782, 27.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321084.htm
142. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода ДНК, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть IV. Другие приложения чисел Фибоначчи, золотого сечения и золотой фибоначчиевой гониометрии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14783, 28.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321085.htm
143. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm

Авторские свидетельства А.П. Стахова

144. Параллельный сумматор. Авторское свидетельство № 559237, Бюллетень изобретений №19, 1977 г. (соавторы Лужецкий В.А., Оводенко А.В.)
145. Комбинационный сумматор. Авторское свидетельство № 570896, Бюллетень изобретений №32, 1977 г. (соавторы Лужецкий В.А., Оводенко А.В.)
146. Двоичный счетчик с последовательным переносом. Авторское свидетельство № 577682, Бюллетень изобретений №39, 1977 г. (соавторы Вишняков Ю.М., Фомичев А.В., Соляниченко Н.А.)
147. Накапливающий сумматор. Авторское свидетельство № 577528, Бюллетень изобретений №39, 1977 г. (соавторы Лужецкий В.А., Оводенко А.В.)
148. Генератор последовательности обобщенных чисел Фибоначчи с произвольными начальными условиями. Авторское свидетельство № 662926, Бюллетень изобретений №18, 1979 г. (соавтор Лужецкий В.А.)
149. Устройство для приведения *p*-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 662930, Бюллетень изобретений №18, 1979 г. (соавтор Фомичев А.В.)
150. Преобразователь прямого кода в обратный. Авторское свидетельство № 662931, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
151. Преобразователь *p*-кода Фибоначчи в двоичный код. Авторское свидетельство № 662932, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
152. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 662933, Бюллетень изобретений №18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
153. Устройство для сравнения *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 662934, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
154. Устройство для умножения целых чисел. Авторское свидетельство № 662941, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Лужецкий В.А.)
155. Последовательный сумматор. Авторское свидетельство № 696452, Бюллетень изобретений № 41, 1979 г. (соавторы Оводенко А.В., Лужецкий В.А.)
156. Сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 732864, Бюллетень изобретений № 17, 1980 г.
157. Устройство для отображения информации на экране электронно-лучевой трубки. Авторское свидетельство № 734757, Бюллетень изобретений № 18, 1980 г.
158. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 744564, Бюллетень изобретений № 24, 1980 г. (соавтор Лужецкий В.А.)
159. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 750721, Бюллетень изобретений № 27, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Бородянский М.Е., Лужецкий В.А.)
160. Генератор случайных кодов. Авторское свидетельство № 752307, Бюллетень изобретений № 28, 1980 г. (соавторы Лихтциндер Б.Я., Орлович Ю.П., Сторожук Ю.А.)
161. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 758510, Бюллетень изобретений № 31, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Лужецкий В.А.)

162. Устройство для приведения p-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 779997, Бюллетень изобретений № 42, 1980 г. (соавторы Лужецкий В.А., Азаров А.Д., Ужвак Ю.И.)
163. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 783979, Бюллетень изобретений № 44, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И.)
164. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 790285, Бюллетень изобретений № 47, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И.)
165. Генератор случайных кодов. Авторское свидетельство № 809131, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г. (соавторы Лихтциндер Б.Я., Орович Ю.П., Сторожук Б.Я.)
166. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 809540, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г.
167. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 809541, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г.
168. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 809542, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г.
169. Преобразователь аналоговых величин в код Фибоначчи. Авторское свидетельство № 809552, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г. (соавторы Бородянский М.Е., Онопко В.Л.)
170. Устройство для контроля p-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 817718, Бюллетень изобретений № 12, 1981 г. (соавторы Соляниченко Н.А., Черняк А.И., Замчевский В.В., Сачанюк В.И.)
171. Устройство для приведения p-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 840880, Бюллетень изобретений № 23, 1981 г. (соавторы Козак А.А., Соляниченко Н.А.)
172. Параллельный сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 840891, Бюллетень изобретений № 23, 1981 г. (соавторы Соляниченко Н.А., Лужецкий В.А., Оводенко А.В., Козак А.А.)
173. Устройство для приведения p-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 842782, Бюллетень изобретений № 24, 1981 г. (соавторы Соляниченко Н.А., Черняк А.И., Замчевский В.В.)
174. Устройство для приведения p-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 842786, Бюллетень изобретений № 24, 1981 г.
175. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 864548, Бюллетень изобретений № 34, 1981 г. (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Петросюк Ю.А.)
176. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 911720, Бюллетень изобретений № 9, 1982 г. (соавторы Азаров А.Д., Петросюк Ю.А., Волков В.П.)
177. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 928632, (соавторы Азаров А.Д., Петросюк Ю.А., Волков В.П.), БИ, 1982 г.
178. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 947955, (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Ужвак Ю.Н., Верховой В.П.), БИ, 1982 г.
179. Устройство магнитной записи для коррекции цифровой информации. Авторское свидетельство № 949717 (соавторы Лихтциндер Б.Я., Сторожук Ю.А., Гайдаш А.В., Орлович Ю.П.), БИ, 1982 г.
180. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 953721 (соавторы Сушко А.Ф., Акимов А.А., Петросюк Ю.А., Ефименко В.Н.), БИ, 1982 г.
181. Сервопривод с цифровым управлением. Авторское свидетельство № 962952 (соавтор Северилов В.А.), БИ, 1982 г.
182. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1005298 (соавторы Петросюк Ю.А., Черняк А.И., Конючевский О.В., Сухарев А.А.), БИ, 1982 г.
183. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1005300 (соавторы Рвачев М.А., Волков В.П., Черняк А.И., Петросюк Ю.А.), БИ, 1982 г.
184. Устройство контроля цифроаналоговых преобразователей. Авторское свидетельство № 1008902 (соавторы Петросюк Ю.А., Конючевский О.В., Хуторянец А.Е.), БИ, 1982 г.
185. Устройство для приведения p-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1019434 (соавторы Гаврилюк Г.И., Соляниченко Н.А., Замчевский В.В.), БИ, 1983 г.
186. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1027815 (соавторы Моисеев В.И., Азаров А.Д., Стейскал В.Я.), БИ, 1983 г.
187. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1046926 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Волков В.П., Ужвак Ю.Н.), БИ, 1983 г.
188. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1051701 (соавторы Петросюк Ю.А., Конючевский О.В., Сухарев А.А., Хуторянец А.Е.), БИ, 1983 г.
189. Разрядный элемент для преобразования кода в напряжение каскадной структуры. Авторское свидетельство № 1056448 (соавторы Петросюк Ю.А., Сухарев А.А.), БИ, 1983 г.
190. Сумматор кодов с иррациональными основаниями. Авторское свидетельство № 1083182 (соавторы Лужецкий В.А., Стахов Д.А.), БИ, 1983 г.
191. Устройство для приведения p-колов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1092489 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Оникиенко А.И.), БИ, 1984 г.

192. Дифференциальный аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1138949 (соавторы Марценюк В.П., Азаров А.Д.), БИ, 1984 г.
193. Устройство для развертки *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1141396 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Соболева И.С.), БИ, 1984 г.
194. Преобразователь прямого кода Фибоначчи в обратный. Авторское свидетельство № 1164891 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Данишин А.В.), БИ, 1985 г.
195. Счетчик импульсов в *p*-кодах Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1172006 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1985 г.
196. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1179533 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я.), БИ, 1985 г.
197. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1177078 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Васильева Т.Н.), БИ, 1985 г.
198. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1197079 (соавторы Азаров А.Д., Волков В.П., Стейскал В.Я.), БИ, 1985 г.
199. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1200422 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Лысюк В.В.), БИ, 1985 г.
200. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1221750 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Васильева Т.Н.), БИ, 1985 г.
201. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1216829 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Масленникова Н.А., Оганесян Р.С.), БИ, 1985 г.
202. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1221754 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я.,Степанова И.П.), БИ, 1985 г.
203. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1221755 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Васильева Т.Н.), БИ, 1985 г.
204. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1223368 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Лысюк В.В., Алексанян Р.Г.), БИ, 1985 г.
205. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1226664 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Нечипоренко Л.М.), БИ, 1985 г.
206. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1231609 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Конючевский О.В.), БИ, 1986 г.
207. Преобразователь код-ток. Авторское свидетельство № 1246378 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я.), БИ, 1986 г.
208. Устройство для цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1248072 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я.), БИ, 1986 г.
209. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1251326 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Замчевский В.В., Золотарев С.И.), БИ, 1986 г.
210. Устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1254469 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1986 г.
211. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1257847 (соавторы Азаров А.Д., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Масленникова Н.А.), БИ, 1986 г.
212. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1257848 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Степанова И.П.), БИ, 1986 г.
213. Последовательное устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1262482 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П.), БИ, 1986 г.
214. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1279064 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Конючевский О.В.), БИ, 1986 г.
215. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1288913 (соавторы Азаров А.Д., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Майстришин В.Я.), БИ, 1986 г.
216. Устройство аналого-цифрового преобразования. Авторское свидетельство № 1288914 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Козырь Л.В..), БИ, 1986 г.
217. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1297224 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Фролов Г.Ф., Золотарев С.И.), БИ, 1986 г.
218. Устройство для приведения *n*-разрядных кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1300649 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Щекотихин О.В., Тишаев А.С.), БИ, 1986 г.
219. Регистр сдвига. Авторское свидетельство № 1302320 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1986 г.
220. Способ аналого-цифрового преобразования. Авторское свидетельство № 1304172 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Моисеев В.И., Марценюк В.П.), БИ, 1986 г.
221. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1319280 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Моисеев В.И., Степанова И.П., Васильева Т.Н.), БИ, 1987 г.
222. Устройство аналого-цифрового преобразования. Авторское свидетельство № 1330758 (соавторы Марценюк В.П., Моисеев В.И., Коваль О.В.), БИ, 1987 г.

223. Устройство для деления кодов "золотой пропорции". Авторское свидетельство № 1361544 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П.), БИ, 1987 г.
224. Счетчик импульсов в *p*-кодах Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1379940 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1987 г.
225. Конвейерный аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1381706 (соавторы Арапов С.М., Азаров А.Д., Волков В.П., Арапова Е.М.), БИ, 1987 г.
226. Устройство для приведения кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1392554 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Сачанюк В.И.), БИ, 1988 г.
227. Последовательный сумматор. Авторское свидетельство № 1411734 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Гаврилюк Г.И.), БИ, 1988 г.
228. Сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1411735 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Соболева И.С.), БИ, 1988 г.
229. Анализатор спектра в ортогональном базисе. Авторское свидетельство № 1416982 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1988 г.
230. Устройство для развертки кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1417194 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Гуменюк Я.А.), БИ, 1988 г.
231. Устройство для преобразования формы кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1418910 (соавторы Лужецкий В.А., Стахов Д.А., Ваховский В.Г.), БИ, 1988 г.
232. Преобразователь двоичного кода. Авторское свидетельство № 1427573 (соавторы Лужецкий В.А., Ваховский В.Г., Стахов Д.А.), БИ, 1988 г.
233. Преобразователь кода Фибоначчи в двоичный код. Авторское свидетельство № 1432789 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Тарасова О.Н., Звенигородская Т.И.), БИ, 1988 г.
234. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1438008 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Сержанов В.В., Золотарев С.И.), БИ, 1988 г.
235. Устройство для контроля 3-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1439596 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В.), БИ, 1988 г.
236. Последовательный сумматор кодов с иррациональными основаниями. Авторское свидетельство № 1439577 (соавторы Козак А.А., Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1988 г.
237. Преобразователь двоичного кода в код Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1439751 (соавторы Лужецкий В.А., Ваховский В.Г., Козлюк П.В., Попович И.М.), БИ, 1988 г.
238. Устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1444751 (соавторы Козак А.А., Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1988 г.
239. Последовательное устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1444754 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1988 г.
240. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1450112 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Тарасова О.Н., Марцев Н.П.), БИ, 1988 г.
241. Устройство для кодирования по векторному методу. Авторское свидетельство № 1444754 (соавторы Черняк А.И., Марценюк В.П., Пилипчак В.И., Пленсак О.А.), БИ, 1988 г.
242. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 14624486 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Вартапетян Э.А.), БИ, 1988 г.
243. Устройство для контроля 3-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1478217 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1989 г.
244. Устройство для контроля *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1478340 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1989 г.
245. Счетчик импульсов в *p*-кодах Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1480121 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е., Малиночка В.П.), БИ, 1989 г.
246. Устройство для деления в 2-коде золотой пропорции. Авторское свидетельство № 1485231 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1989 г.
247. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 1485232 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Кузовова И.С.), БИ, 1989 г.
248. Сумматор последовательного действия. Авторское свидетельство № 1488789 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Заболотная Н.И.), БИ, 1989 г.
249. Арифметико-логическое устройство. Авторское свидетельство № 1495789 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Глебова М.В.), БИ, 1989 г.
250. Устройство для контроля 3-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1478217 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1989 г.
251. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1495993 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Лысюк В.В., Васильева Т.Н., Рафалюк А.Е., Крупельницкий Л.В., Майстришин В.В.), БИ, 1989 г.
252. Преобразователь напряжение-код. Авторское свидетельство № 1508343 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Короновский А.И., Петросюк Ю.А.), БИ, 1989 г.

253. Устройство для контроля *p*-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1510100 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В.), БИ, 1989 г.
254. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1513619 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Орлович Ю.П., Лысюк В.В., Васильева Т.Н., Рафалюк А.Е.), БИ, 1989 г.
255. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1529458 (соавторы Лужецкий В.А., Квитка Н.А., Тютюнников И.Е.), БИ, 1989 г.
256. Микропрограммное устройство управления. Авторское свидетельство № 1536379 (соавторы Лужецкий В.А., Сухарев А.А., Хуторянец А.Е.), БИ, 1989 г.
257. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1538254 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Волков В.П., Плакидюк Н.В.), БИ, 1989 г.
258. Устройство для контроля *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1545330 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Сегнет Т.И.), БИ, 1989 г.
259. Параллельный сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1546966 (соавторы Лужецкий В.А., Шебуков В.А., Ваховский В.Г., Коротин В.В., Попович И.М.), БИ, 1989 г.
260. Устройство для суммирования Фибоначчи-десятичных кодов. Авторское свидетельство № 1546968 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Горлачева Е.А.), БИ, 1989 г.
261. Последовательный сумматор. Авторское свидетельство № 1546970 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е., Кондратенко В.В.), БИ, 1989 г.
262. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1547062 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Квитка С.Н., Петросюк Ю.А.), БИ, 1989 г.
263. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1550620 (соавторы Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Власюк И.П.), БИ, 1989 г.
264. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 1552174 (соавторы Лужецкий В.А., Коротин В.В., Попович И.М.), БИ, 1989 г.
265. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 1552175 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1989 г.
266. Устройство для регулирования тока. Авторское свидетельство № 1552311 (соавтор Погорелов В.Я.), БИ, 1989 г.
267. Преобразователь кода. Авторское свидетельство № 1557685 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Тарасова О.Н., Золотарев С.И.), БИ, 1989 г.
268. Устройство для цифровой магнитной записи. Авторское свидетельство № 1569878 (соавторы Марценюк В.П., Пилипчак В.И., Пленсак О.А., Степаненко А.В.), БИ, 1990 г.
269. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1571761 (соавторы Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Крупельницкий Л.В.), БИ, 1990 г.
270. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1578813 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Гуменюк Я.А.), БИ, 1990 г.

Зарубежные патенты А.П. Стахова

271. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of the USA No 4161725.
272. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of USA No 4187500.
273. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of USA No 4159529.
274. Device for display information representation. Patent certificate of USA No 4148074.
275. Digit-to-analog converter. Patent certificate of USA No 4290050.
276. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of USA No 4290051.
277. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of USA No 4276608.
278. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of England No 1566978.
279. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of England No 1543302.
280. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of England No 1565460.
281. Device for display information representation. Patent certificate of England No 1577184.
282. Device for obtaining of the "Golden" binary code. Patent certificate of England No 2048593.
283. Digit-to-analog converter. Patent certificate of England No 2033631.
284. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificate of England No 2038122.
285. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of England No 2050011.
286. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of England No 2025095.
287. Digit-to-analog converter for the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of England No 2090490.
288. Analog-to-digital converter. Patent certificate of England No 2091507.
289. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of Germany No 2413823.

290. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Germany No 2732008.
291. Device for display information representation. Patent certificate of Germany No 2756806.
292. Digit-to-analog converter. Patent certificate of Germany No 2848911.
293. Digit-to-analog converter. Patent certificate of Germany No 2842672.
294. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of Germany No 2921053.
295. Analog-to-digital converter. Patent certificate of Germany No 3050456.
296. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Japan No 1118407.
297. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of Japan No 1112711.
298. Device for display information representation. Patent certificate of Japan No 1098040.
299. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of Japan No 1147296.
300. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of France No 7739466.
301. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificates of France No 7722036, No 2359460.
302. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of France No 2375655.
303. Device for display information representation. Patent certificates of France No 7737360, No 2375669.
304. Device for obtaining of the "Golden" binary code. Patent certificates of France No 2457601, No 7913131.
305. Digit-to-analog converter. Patent certificates of France No 7833461, No 2441295.
306. Digit-to-analog converter. Patent certificates of France No 7831692, No 2441295.
307. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificates of France No 7900329, No 2446035.
308. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificates of France No 7917216, No 2460367.
309. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of France No 425753.
310. Digit-to-analog converter for the *p*-Fibonacci codes. Patent certificates of France No 8100570, No 2498031.
311. Analog-to-digital converter. Patent certificate of France No 8104127.
312. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of Canada No 1116754.
313. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Canada No 1134510.
314. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of Canada No 1103807.
315. Device for display information representation. Patent certificate of Canada No 1096075.
316. Digit-to-analog converter. Patent certificate of Canada No 1137228.
317. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificate of Canada No 1137227.
318. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of Canada N1132263.
319. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of Canada No 1127313 .
320. Digit-to-analog converter for the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of Canada No 1165889.
321. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of Poland No 124795.
322. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Poland No 108086.
323. Adder of Fibonacci codes. Patent certificates of Poland No 109971.
324. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of DDR No 133373.
325. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of DDR No 150514.
326. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of DDR No 136317.
327. Device for display information representation. Patent certificate of DDR No 134005.
328. Device for obtaining of the "Golden" binary code. Patent certificates of DDR No 142780.
329. Digit-to-analog converter. Patent certificates of DDR No 140187.
330. Digit-to-analog converter. Patent certificates of DDR No 138400.
331. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificate of DDR No 141033.

Публикации других авторов

332. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, 1991.
333. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Москва: Физматгиз, 1960.
334. Татаренко А.А. Золотые Tm – гармонии и Dm – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
335. Александров П.С. **(**общий редактор**)**. Проблемы Гильберта. Москва, «Наука», 1969.
336. Пойа Д. Математическое открытие (пер. с англ.). Москва: Наука, 1970.

337. Mohanty S.G. On a partition of generalized Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 1968, V.6, No 1.
338. Hoggatt V.E. A new angle on Pascal's Triangle. The Fibonacci Quarterly, 1968, V.6, No 4.
339. Spears C.P., Bicknell-Johnson M. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees, Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 7, 1998, 377-391.
340. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2, с. 347-363
341. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
342. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Москва, Бином, 2006. — 216-250
343. Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Происхождение систем счисления. В книге «Энциклопедия элементарной математики». Книга первая. Арифметика, Москва-Ленинград, Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1954.
344. Нейгебауер О. Лекции по истории античных математических наук. Том 1. Догреческая математика. Москва-Ленинград: ОНТИ, НКТИ, 1937.
345. Апокин И.А., Майстров Л.Е. Развитие вычислительных машин. Москва: Наука, 1974.
346. Поспелов Д. А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия . Москва: Высшая школа, 1960.
347. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. Москва: Соаветское радио, 1968.
348. Касаткин В.Н. Новое о системах счления. Киев: Высшая школа, 1989.
349. Шауман А.М. Основы машинной арифметики. Ленингоад: Изд-во Ленинградского университета, 1979.
350. Николай Петрович Брусенцов - творец первого и единственного в мире троичного компьютера "Сетунь" http://www.icfcst.kiev.ua/MUSEUM/Brusentsov_r.html
351. Цифровые процессоры сигналов на основе троичных кодов http://www.ci.ru/inform13_08/p_23.htm
352. Физики создали нанопамять с использованием троичной логики http://www.moyaufa.ru/35590/1/view/news.html
353. Троичная логика – прогресс в IT-тенологиях http://www.izobretenija.ru/vashi/667
354. Давыдов Е.С. Наименьшие группы чисел для образования натуральных рядов. Санкт-Петербург, 1903.
355. Гартц В.Ф. Лучшая система для весовых гирь. Санкт-Петербург, 1910.
356. Депман И.Я. История арифметики. Мокква: Учпедгиз, 1959.
357. Monteiro P. and R.W. Newcomb (University of Maryland). Minimal and maximal Fibonacci Representations: Boolean Generation. The Fibonacci Quarterly, 1976, v.14, No 1.
358. Licomendes P. and Newcomb R. (University of Maryland). Multilevel Fibonacci Conversion and Addition. The Fibonacci Quarterly, 1984, v.22, No 3.
359. Ligomenides P. and Newcomb R. Equivalence of some Binary, Ternary, and Quaternary Fibonacci Computers". Proceeding of the Eleventh International Symposium on Muliple-Valued Logik, Norman, Oklahoma, May 1981.
360. Ligomenides P. and Newcomb R.. Complement Representations in the Fibonacci Computer. Proceedings of the Fifth Symposium ob Computer Arithmetic, Ann Arbor, Michigan, May 1981.
361. Newcomb R. Fibonacci Numbers as a Computer Base. Conference Proceedings of the Second Interamerican Conference on Systems and Informatics, Mexico City, November 27, 1974.
362. Hoang V.D. A Class of Arithmetic Burst-Error-Correcting Codes for the Fibonacci Computer. PhD Dissertation, University Maryland, December 1979.
363. Chernov, V.M., Pershina M.V. Fivonacci-Mersenne and Fibonacci-Fermat discrete transforms. The Journal "Boletin de Informatica". Special issue "The Golden Section: Theory and Applications", No 9/10, 1999. Mozambique: Publishing House of the Eduardo Mondlane University.
364. Stankovic R.S., Stankovic M., Astola, J.T., Egizarian K. Fibonacci Decision Diagram, Tampere International Center for Signal Processing, 2000.
365. Kautz W. H. Fibonacci codes for synchronization control. IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, vol. IT-1 1
366. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
367. Kharkevitch A.A. A struggle against noises. Moscow: Publishing House "Fizmatgiz", 1963 (in Russian).
368. Peterson WW, Weldon E.J. Error-correcting codes. Cambridge, Massachusetts, and London: The MIT Press, 1972.
369. Hohn F.E. Elementary Matrix Algebra. New York: Macmillan Company, 1973.
370. Seberry, J., Pierzyk, J. Cryptography. An Introduction to Computer Security: Prentice Hall, New York-London-Toronto-Sydney-Tokyo (1989).
371. Davies, D.W., Price, W.L. Security for Computer Networks. An Introduction to Data Security in Teleprocessin and Electronic Funds Transfer: John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapure, Second Edition (1989).
372. Diffie W. and Hellman M. E. New Directions in Cryptography. ***IEEE Trans. on Info. Theory***, Vol. IT-22, 644-654 (1976).

373. Menezes A., Van Oorshot P.C. and Vanstone S.A. Handbook on Applied Cryptography: CRC Press, Boca Raton, Florida (1996).
374. Mollin, Richard A. An Introduction to Cryptography. Second Sedition: CRC, Champan & Hall (2001).
375. Hybrid cryptosystems. From Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Hybrid_cryptosystem
376. Invertible matrices. Wikipedia. Free Encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix