А.П. Стахов

Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология

Часть 2. “Золотая» Информационная Технология

Религиозность ученого состоит в восторженном отношении к законам гармонии.

Альберт Эйнштейн

Аннотация

Цель настоящей статьи – показать, что увлечение Алана Тьюринга проблемой филлотаксиса и числами Фибоначчи не является случайным. Эти исследования нельзя рассматривать иначе, как предчувствие гениального ученого использования естественной «Математики Природы» для создания вычислительных машин будущего. Настоящая статья состоит из двух частей: *Математика Гармонии* и *«Золотая» Информационная Технология*. В первой части излагаются основы «Математики Гармонии» как истинной «Математики Природы» и как нового междисциплинарного направления современной науки. Показано, что эта математика имеет прямое отношение к теории относительности и 4-й проблеме Гильберта. Вторая часть статьи посвящена изложению «золотой» информационной технологии как основы информационных технологий будущего (коды и компьютеры Фибоначчи, коды золотой пропорции, «золотые» резистивные делители, троичная зеркально-симметричная арифметика, новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи, матричная криптография и др.).

11. Роль систем счисления в развитии информационных технологий

11.1. ***Наиболее существенные вехи в истории систем счисления.*** В настоящее время под *информационными технологиями* (ИТ) чаще всего, понимают *компьютерные технологии*. В частности, ИТ имеют дело с использованием компьютеров и программного обеспечения для хранения, преобразования, защиты, обработки, передачи и получения информации. Обычно эта область науки называется *информатикой*. Рассуждая о математических основах информатики, выделяют такие дисциплины: *системы счисления, теория информации, теория кодирования, криптография, математическая логика, теория графов, теория вычислений, теория алгоритмов, языки программирования и трансляторы, базы данных, компьютерные сети, параллельные вычисления и др.*

В этом перечне *системы счисления* не случайно стоят на первом месте. В своих истоках информатика уходит в глубь тысячелетий и начинается она с создания *систем счисления* и *абаков* – примитивных калькуляторов. Возникновение первых систем счисления относится к периоду зарождения математики, когда потребности счета предметов, измерения времени, земельных участков и количества продуктов привели к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Как подчеркивает А.Н. Колмогоров [332], «только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над натуральными числами четырех арифметических действий».

В области систем счисления можно выделить несколько открытий, которые сыграли важную роль в развитии математики, образования и в целом – материальной культуры человечества:

1. Открытие позиционного принципа представления чисел. Как подчеркивается в статье [343], «первой известной нам системой счисления, основанной на поместном или позиционном принципе, является шестидесятеричная система древних вавилонян, возникшая примерно за 2000 лет до н.э.». Согласно гипотезе Нейгебауера [344] позиционный принцип имеет *измерительное происхождение.* Как подчеркивает Нейгебауер, «основные этапы образования позиционной системы в Вавилоне были таковы: (1) установление количественного соотношения между двумя самостоятельными существовавшими системами мер и (2) опускание названий разрядовых единиц при письме». Эти этапы возникновения позиционных систем Нейгебауэр считает совершенно общими, подчеркивая при этом, что «позиционная шестидесятеричная система … оказалась вполне естественным конечным результатом долгого развития, ничем принципиально не отличающегося от аналогичных процессов в других культурах» [344].

2. Десятичная система. Среди позиционных систем счисления наибольшее распространение получила *десятичная система.* Ее прообразом считается *индусская десятичная система*, возникшая примерно в 5-8-м веках нашей эры. В Европу десятичная нумерация проникла из Исламского Востока. Наиболее ранние рукописи на арабском языке, содержащие индусскую позиционную запись чисел, относятся к 9-му столетию нашей эры. Хотя первые записи арабско-индийскими цифрами встречаются в испанских рукописях еще в 10-м веке, десятичная система начинает закрепляться в Европе только начиная с 12-го века. Новая нумерация в Европе встретила сопротивление как со стороны официальной схоластической науки того времени, так и со стороны отдельных правительств. Так, например, в 1299 г. во Флоренции купцам было запрещено пользоваться новыми цифрами, в бухгалтерии приказано было либо пользоваться римскими цифрами, либо писать числа словами. Убежденным сторонником использования арабско-индусской системы счисления в торговой практике был известный итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи), получивший математическое образование в арабских странах.

В процессес исторического развития десятичная система стала главной системой, которая объединила все человечество и стала краеугольным камнем современного математического образования. Эта система кажется нам настолько простой и элементарной, что многие из нас с большим недоверием отнесутся к утверждению, что десятичная система является одним из *крупнейших математических открытий за всю историю математики.* И чтобы убедить читателя в этом, обратимся к мнению «авторитетов».

Пьер Симон Лаплас (1749-1827), французский математик, член Парижской академии наук, почетный иностранный член Петербургской академии наук:

«Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой».

М.В. Остроградский (1801-1862), русский математик, член Петербургской академии наук и многих иностранных академий:

«Нам кажется, что после изобретения письменности самым большим открытием было использование так называемой десятичной системы счисления. Мы хотим сказать, что соглашение, с помощью которого мы можем выразить все полезные числа двенадцатью словами и их окончаниями, является одним из самых замечательных созданий человеческого гения …»

Жюль Таннери (1848-1910), французский математик, член Парижской академии наук:

«Что касается до нынешней системы письменной нумерации, в которой употребляется девять значащих цифр и ноль, и относительное значение цифр определяется особым правилом, то эта система была введена в Индии в эпоху, которая не определена точно, но, по-видимому, после христианской эры. Изобретение этой системы есть одно из самых важных событий в истории науки, и несмотря на привычку пользоваться десятичной нумерацией, мы не можем не изумляться чудной простоте ее механизма».

3. Двоичная система. В связи с развитием компьютерной техники на первые роли в современной науке выдвинулась *двоичная система счисления*. Ее изобретение приписывают индийскому писателю и математику **Пингала**, который в 2-м столетии нашей эры представил первое описание двоичной системы, что почти на полтысячелетия опередило описание двоичной системы, сделанное в 17 в. выдающимся германским математиком **Готфридом Лейбницем** (1646-1716). Лейбница иногда называют последним универсальным гением, которому приписывают два важнейших открытия, которые фундаментально повлияли на развитие математики и информатики: *дифференциальное и интегральное исчисление* и *двоичная арифметика,* основанная на *битах*.

Готфрид Лейбниц (1646-1716).

11.2. ***Двоичная система и "Неймановские принципы».*** Первой универсальной электронной вычислительной машиной считается ЭНИАК, созданная в 1945 г. в США. Перед конструкторами ЭНИАК возникла задача пронализировать сильные и слабые стороны проекта ЭНИАК и дать рекомендации для дальнейшего развития электронных компьютеров. Блестящее ршение этой задачи было дано в отчете Принстонского института перспективных исследований **«Предварительное обсуждение логического конструирования электронного вычислительного устройства»** (июнь 1946 г.). Этот отчет, составленный выдающимся американским математиком **Джоном фон Нейманом** и его коллегами по Принстонскому институту **Г. Голдстейном** и **А. Берксом**, которые участвовали в проекте ЭНИАК, представлял собой проект новой электронного компьютера. Основные рекомендации, изложенные в отчете, известные в современной информатике под названием *Неймановских принципов* или *Неймановской архитектуры*, оказали определяющее влияние на развитие современных компьютеров.

Джон фон Нейман (1903-1957)

Одним из главных в *Неймановских принципах* считается следующий [345]: *машины на электронных элементах должны работать не в десятичной, а в двоичной системе счисления.* Основными преимуществами *двоичной системы* являются следующие [345]: *двухпозиционный характер работы электронных элементов, высокая экономичность двоичной системы и простота выполнения арифметических операций с двоичными числами.*

11.3. ***Возрождение интереса к системам счисления в современной информатике.*** Хотя двоичная система обладает многими неоспоримыми преимуществами, однако она обладает также рядом существенных недостатков [346-349]:

1. Пробема представления отрицательных чисел. . В двоичной системе мы можем представить в *прямом коде* только положительные числа. Для представления отрицательных чисел мы вынуждены использовать специальные коды – *дополнительный* и *инверсный.* Это усложняет арифметические структуры компьютеров и снижает их быстродействие.

2. **Проблема нулевой избыточности.** Как известно, все компьютерные схемы и устройства подвержены многочисленным внешним и внутренним воздействиям, которые приводят к *сбоям* и *отказам*, что является причиной различных ошибок в работе компьютеров. К сожалению, такие ошибки в двоичной системе не могут быть обнаружены, поскольку все двоичные кодовые комбинации являются *разрешенными.* Отсутствие *кодовой избыточности,* которая позволяла бы обнаруживать ошибки непосредственно в процессе вычислений, является принципиальным недостатком классической двоичной системы счисления.

3. **Проблема «длинного переноса».** Если, например, мы суммируем два двоичных числа

$$011111111+000000001=100000000,$$

то при этом возникает «длинный перенос» из младших разрядов суммируемых чисел в старшие, что является принципиальным фактором, снижающим быстродействие компьютеров.

Стремление преодолеть эти недостатки двоичной системы привели к созданию многочисленных систем счисления с «экзотическими» названиями и свойствами [346-349]: *троичная симметричная система счисления, система остаточных классов, система с комплексным основанием, нега-позиционная система счисления, факториальная система, биномиальная система* и др. Все эти системы счисления имели определенные преимущества по сравнению с двоичной системой и были направлены на преодоление рассмотренных выше недостатков двоичной системы и улучшение характеристик компьютеров. Наибольшую популярность получили *троичная симметричная система счисления* [346] и *система остаточных классов* [347], на основе которых были созданы универсальные компьютеры и процессоры для специальных применений.

11.3. ***Троичная система счисления и троичный компьютер «Сетунь».*** В теории систем счисления [346] одной из самых совершенных считается *троичная симметричная система счисления,* под которой понимается следующее позиционное представление чисел:

$$A = \sum_i c_i 3^i , \tag{87}$$

где число 3 – основание системы счисления; 3^i – вес i-го разряда; c_i – троичная цифра i-го разряда, принимающая значение из множества $\{-1= \bar{1}, 0, 1\}$.

Основное преимущество системы счисления (87) по сравнению с классической двоичной системой счисления с цифрами 0 и 1 состоит в изящном решении «проблемы представления отрицательных чисел». Знак числа определяется старшей значащей цифрой троичного представления. Например, число $N_1 = 0\ \bar{1}\ 1\ 1\ 0\ \bar{1}$ является отрицательным, а число $N_2 = 1\ \bar{1}\ 0\ \bar{1}\ 0\ 0\ 1$ положительным. Как положительные, так и отрицательные числа представляются в "прямом" коде, и все арифметические действия выполняются в "прямом" коде. Очень просто получить представление отрицательного числа ($-N$) из троичного представления положительного числа N, используя правило *троичной инверсии*:

$$1 \to \bar{1},\quad 0 \to 0,\quad \bar{1} \to 1. \tag{88}$$

Троичное симметричное сложение и умножение основываются на тривиальных тождествах, связывающих степени числа 3: $3^i + 3^i = 3^{i+1} - 3^i$ (для сложения) и $3^m \times 3^n = 3^{m+n}$ (для умножения). Троичное симметричное вычитание чисел $A - B$ сводится к сложению чисел $A + (-B)$, если к вычитаемому B применить правило троичной инверсии (88). Троичное симметричное деление подобно классическому двоичному делению и сводится к сдвигу делителя и его вычитанию из делимого.

Именно троичная симметричная система счисления (87) является ключевой идеей нового принципа конструирования компьютеров, в основу которого положены три идеи:

1. Использование *троичной симметричной системы счисления.*

2. Использование *троичной логики*

3. Использование *троичного элемента памяти*

Николай Брусенцов

С использованием этого принципа, названного ***троичным принципом Брусенцова*** в честь его создателя [97], уже на заре компьютерной эры был создан компьютер «Сетунь», первый в истории компьютерной техники троичный компьютер [350]. Компьютер «Сетунь» был разработан в 1958 г. в Московском университете. В основу элементной базы были положены магнитные элементы и полупроводниковые диоды; поэтому троичный компьютер «Сетунь» не выдержал конкуренции с “двоичными электронными компьютерами», основанными на *Неймановских принципах*. Однако архитектура компьютера «Сетунь» оказалась настолько совершенной, что в настоящее время проект этого компьютера привлекает внимание многих компьютерных специалистов.

Известный советский компьютерный специалист профессор **Д.А. Поспелов** написал по поводу троичной симметричной системы счисления [346]:

«Барьеры, стоящие на пути приложения троичной симметричной систем счисления в компьютерах, являются препятствиями технического порядка. До сих пор не разработаны экономичные и эффективные элементы с тремя устойчивыми состояниями. Как только такие элементы будут разработаны, большая часть компьютеров универсального типа и многие специальные компьютеры по всей вероятности будут разработана таким образом, чтобы они функционировали в троичной симметрической системе счисления ".

Известный американский ученый **Дональд Кнут** выразил уверенность в том, что замена *двоичного триггера (“flip-flop”) на троичный триггер ("flip-flap-flop") в один прекрасный день обязательно произойдет*.

Необходимо отметить, что разработки процессоров, основанных на троичной системе счисления, активно продолжаются в современной информатике. Например, в работе [351] представлена разработка цифрового троичного процессора для выполнения быстрого преобразования Фурье. Весьма обнадеживающей для троичных компьютеров является информация о том, что группа ученых Пенсильванского университета создала из нанопроволоки память высокой емкости, которая способна сохранять троичные значения (триты) вместо повсеместно используемых двоичных значений (биты) [352]. Если исходить из оценки, что 32 бита соответствуют 20 тритам, а одно нановолокно может кодировать один бит или один трит, то при использовании троичной логики можно записать на одинаковое количество волокон больший объем информации. При этом, количество записанной информации увеличивается, как минимум, на 60 процентов. В работе [353] сообщается о новой разработке российских ученых в области троичной логики – полупроводниковом усилителе с тремя устойчивыми состояниями, изобретенном известным российским специалистом академиком **Виктором Олексенко**. Утверждается, что это изобретение «позволяет создавать в России свои компьютеры и другие электронно-вычислительные машины, отличные от других и работающие как по троичной логике, так и по пятеричной, семеричной и более сложным системам исчисления. Причём стоимость этих ЭВМ может быть ниже существующих и при этом их вычислительные возможности и быстродействие гораздо выше».

Двоичная и троичная симметричная системы счисления являются наиболее яркими примерами того, как системы счисления могут повлиять на развитие информационной технологии. Двоичная система уже привела к возникновению современной информационной революции. Есть все основания полагать, что троичная симметричная система (87) может првести к новой «Троичной Информационной Технологии» или даже «Троичной Информационной Революции» - так стремительно развивается это научное направление.

11.4. ***Система остаточных классов.*** В 60-е годы 20-го столетия широкую популярность получила так называемая *система остаточных классах* (СОК) [347]. Толчком к исследованиям в этой области послужили опубликованные в 1955-1957 гг. работы чешских ученых **М. Валаха** и **А. Свободы**, посвященные представлению чисел в виде совокупности неотрицательных вычетов по группе взаимно простых оснований. Идея была подхвачена советскими учеными **И.Я. Акушским** и **Д.И. Юдицким**, опубликовавшим в 1968 г. книгу «Машинная арифметика в остаточных классах» [347], фундаментальный труд по новой машинной арифметике. На вопрос о побудительных мотивах создания применения СОК в компьютерах **И.Я. Акушский** и **Д.И. Юдицкий** отвечают следующим образом:

«Следует отметить, что позиционные системы счисления, в которых представляется и обрабатывается информация в современных вычислительных машинах, обладает существенным недостатком – наличием межразрядных связей, которые накладывают свой отпечаток на способы реализации арифметических операций, усложняют аппаратуру и ограничивают быстродействие. Поэтому естественно изыскание возможностей такой арифметики, в которой бы поразрядные связи отсутствовали. Оказалось, что такая арифметика может быть построена на базе непозиционной системы счисления, в частности системы остаточных классов».

Таким образом, главной причиной разработки машинной арифметики в системе остаточных классов (СОК) явилось преодоление серьезного недостатка позиционных систем счисления, в частности, двоичной системы – наличие межразрядных связей при выполнении арифметических операций («проблема переноса»), что принципиально снижало быстродействие компьютеров.

Важно подчеркнуть, что Акушский и Юдицкий были не только теоретиками в области СОК, но и принимали активное участие в реализации компьютера на основе СОК. Такой компьютер начал создаваться в Советском Союзе еще в 1957 г. В компьютере, основанном на СОК, была достигнута рекордная производительность – 1,25 млн. операций в секунду, что почти на порядок превышало производительность компьютеров того времени, которые проектировались на основе классической двоичной системы счисления.

Будучи весьма перспективной в отношении межразрядных связей, система остаточных классов оказалась далеко не безупречной в других отношениях, на что обращают внимание Акушский и Юдицкий в своей книге [347]:

«Однако столь удобной в одном отношении системе остаточных классов присущ ряд недостатков в других отношениях: ограниченность действия этой системы полем целых положительных чисел, трудность определения соотношений чисел по величине, определения выхода результата операции из диапазона и т.д.»

И хотя авторам книги [347] удалось продвинуться в преодолении этих трудностей, но полностью разрешить их не удалось. «Компьютерной революции» на основе СОК не получилось, то есть проектировщики компьютеров отдавали все же предпочтение классической позиционной двоичной системе счисления, то есть позиционный принцип представления чисел, одно из величайших изобретений математической мысли, остался непоколебимым. **Поэтому дальнейшее развитие информационной технологии необходимо искать в рамках позиционных представлений.**

11.5. ***О возрастании роли систем счисления в современной математике.*** Системы счисления сыграли огромную роль в развитии математики на этапе ее зарождения. В связи с развитием информатики интерес к системам счисления вновь возрос в современной науке, то есть, спустя 4 тысячелетия после изобретения вавилонянами позиционного принципа в этой области возник период своеобразного «ренессанса». Благодаря усилиям прежде всего специалистов в области информатики, математика как бы вновь возвратилась к периоду своего зарождения, когда именно системы счисления определяли содержание и сущность математики. Но ведь этот период, по мнению многих историков математики [332, 343, 344] считается чрезвычайно важным для развития математики. Именно в этот период были заложены основы такого важнейшего математического понятия как *натуральное число* и созданы начала *теории чисел* (древнегречекая математика), которая по праву называется «царицей математики». Но тогда вполне резонным является постановка следующего вопроса: а не могут ли современные системы счисления, созданные для удовлетворения потребностей компьютерной техники, повлиять на развитие самого понятия числа и теории чисел и таким путем оказать влияние не только на развитие компьютерной науки, но и всей математики.

Как упоминалось выше, развитие новых идей в области систем счисления, которые могут повлиять на развитие современной информатики, необходимо искать в рамках позиционных представлений. И поэтому появление новых позиционных сисем счисления – *фибоначчиевой системы счисления* [45, 64, 66, 68, 71, 79, 82], *систем счисления с иррациональными основаниями* [47, 74, 75, 77,79, 82] и *троичной зеркально-симмеричной арифметики* [97] может рассматриваться как начало нового этапа в развитии информационной технологии - *«Золотой» Информационной Технологии.*

12. Алгоритмическая теория измерения как новое направление в теории позиционных систем счисления.

12.1. ***Задача Баше Менделеева.*** В информатике не очень хорошо известна одна оптимизационная задача, которая имеет прямое отношение к двоичной и троичной симметричной системам счисления. Эта задача возникла в 13 в. и описана в трудах все того же неутомимого Леонардо из Пизы (Фибоначчи). Речь идет о *задаче выбора наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах* [354-356]. Существует два варианта решения *задачи о гирях*. В первом варианте гири разрешается класть только на «свободную» чашу весов. Доказано, что в этом случае «оптимальной» является «двоичная система стандартных гирь»: 1, 2, 4, 8, ..., 2^{n-1}. Возникающий при этом “оптимальный алгоритм измерения» порождает классический двоичный способ представления натуральных чисел:

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i-1} 2^{n-i}, \qquad (89)$$

где $a_{n-i-1} \in \{0,1\}$- двоичная цифра соответсвующего разряда системы счисления (89). Двоичная система счисления имеет следующую «измерительную» интепретацию. Первый шаг «двоичного алгоритма измерения» состоит в том, что «измеряемое число» N сравнивается на первом шаге ($i=1$) со старшей стандартной гирей 2^{n-1}. Если $N \ge 2^{n-1}$, то весы остаются в том же состоянии (двоичная цифра $a_n = 1$), в противном случае весы переходят в противоположное состояние ($a_n = 0$) . Подобным образом можно выполнить «двоичное взвешивание» числа *N*.

Если гири разрешается класть на обе чаши весов, то “оптимальной» оказывается «троичная система гирь»: 1, 3, 9, 27, ..., 3^{n-1}. При этом «троичный алгоритм взвешивания» порождает троичную симметричную систему счисления типа (87).

История *задачи о гирях* такова. Из сочинений Фибоначчи она перекочевала в сочинения еще одного знаменитого итальянского математика **Луки Пачоли** (1454-1514), который поместил эту задачу в свою книгу "Summa de Arithmetica, Geomeytria, Proprtioni et Proportionalita" (1494). Эта книга по праву считается своеобразной математической энциклопедией эпохи Возрождения. Затем *задача о гирях* появилась в "Сборнике приятных и занимательных задач" (1612 г.), написанном французским математиком **Баше де Мизириаком** (1581-1638). В русской историко-математической литературе "задача о гирях" известна также под названием "задачи Баше-Менделеева" [356]. Великий русский ученый **Дмитрий Иванович Менделеев** (1834-1907) заинтересовался этой задачей в свою бытность директором Главной палаты мер и весов России, которую он возглавлял на заключительном этапе своей жизни (с 1992 г. и до 1907 г.). Под его непосредственным влиянием было выполнены исследования по этой проблеме и была доказана оптимальность троичной системы гирь [354-356].

В начале 60-х годов 20-го столетия на стыке измерительной и компьютерной техники возникла новая область - *техника аналого-цифрового и цифро-аналогового* *преобразования информации.* Основная задача этой техники состояла в создании устройств, обеспечивающих автоматическое преобразование информации из аналоговой, непрерывной формы в дискретную, цифровую форму. Такие устройства получили название непрерывно-дискретных, или аналого-цифровых преобразователей. Таким образом, основным назначением этих устройств является обеспечение связи компьютеров с объектами, в которых информация представлена в непрерывной, аналоговой форме. Подобно тому, как задачу взвешивания на рычажных весах можно решить, используя различные наборы гирь, задачу аналого-цифрового преобразования можно решить, используя различные способы или алгоритмы аналого-цифрового преобразования. При этом интерес представляют "оптимальные" или наилучшие (в определенном смысле) алгоритмы аналого-цифрового преобразования. В кандидатской диссертации **Алексея Стахова,** защищенной в 1966 г. [43], а затем в докторской диссертации, защищенной в 1972 г. [44], были изложены результаты новой математической теории алгоритмов аналого-цифрового преобразования, получившей в дальнейшем название *алгоритмической теории измерения* [45, 46].

Таким образом, идеям "великого Фибоначчи" была уготована счастливая судьба в современной науке. С одной стороны, благодаря российскому математику **Николаю Воробьеву** [14] и американскому математику **Вернеру Хоггатту** [11], был возрожден интерес к *задаче о размножении кроликов* и вытекающим из нее числам Фибоначчи - и они стали объектом математических исследований Фибоначчи-ассоциации, организованной в 1963 г. С другой стороны, аспирант Харьковского института радиоэлектроники **Алексей Стахов** в том же 1963 г. приступил к исследованию другой задачи Фибоначчи, - *задачи о гирях,* что привело к созданию *алгоритмической теории измерения* [45, 46] и открытию *р-кодов Фибоначчи* – нового класса позиционных систем счсления.

12.2. ***Принцип асимметрии измерения.*** В основу *алгоритмической теории измерения* [45, 46] была положена новая идея, которая возникает из опыта функционирования аналого-цифровых преобразователей [43, 44]. Эта «опытная» идея привела к неожиданному взгляду на задачу Баше-Менделеева [60, 61, 70]. Рассмотрим первый вариант задачи Баше-Менделеева, когда стандартные гири разрешается класть только на правую, то есть, «свободную» чашу весов (Рис. 1). Пусть "весовщик" использует для взвешивания "двоичную" систему, состоящую из n гирь, записанных в порядке старшинства: 2^{n-1}, 2^{n-2}, … , 2^1, 2^0. Тогда сам процесс измерения реализуется путем сравнения "весовых гирь" с измеряемым грузом Q, что осуществляется с помощью рычажных весов. При этом "весовщик" наблюдает за состоянием или положением, в котором оказываются рычажные весы после очередного сравнения, и в зависимости от этого принимает решение о своих действиях на очередном шаге сравнения.

Будем считать, что рычажные весы могут находиться только в двух положениях: (а) "больше", когда измеряемый груз перевешивает гири на «свободной» чаше весов и (б) "меньше" - в противоположном случае.

Первый шаг "двоичного" алгоритма измерения состоит в том, что "старшая" гиря 2^{n-1} кладется на свободную чашу весов. При этом в зависимости от соотношения весов груза Q и гири 2^{n-1} рычажные весы после первого шага сравнения могут оказаться в положении "больше", если $2^{n-1}< Q$ (то есть весы остаются в том же положении, что и до сравнения, ситуация на Рис. 1-а) или в положении "меньше", если $2^{n-1}\geq Q$ (в последнем случае рычажные весы переходят в противоположное положение, ситуация на Рис. 1-b).

При этом оказывается, что действия "весовщика" после сравнения в первом и во втором случае существенно различаются. Действительно, в первом случае (Рис. 1-а) следующий шаг состоит в добавлении на правую чашу весов очередной по старшинству гири 2^{n-2}. Во втором случае (Рис. 1-b) "весовщик" должен выполнить две операции: снять предыдущую гирю со «свободной» чаши весов, после чего рычажные весы возвращаются в исходное положение (Рис. 1-с), а затем добавить на правую чашу весов следующую гирю.

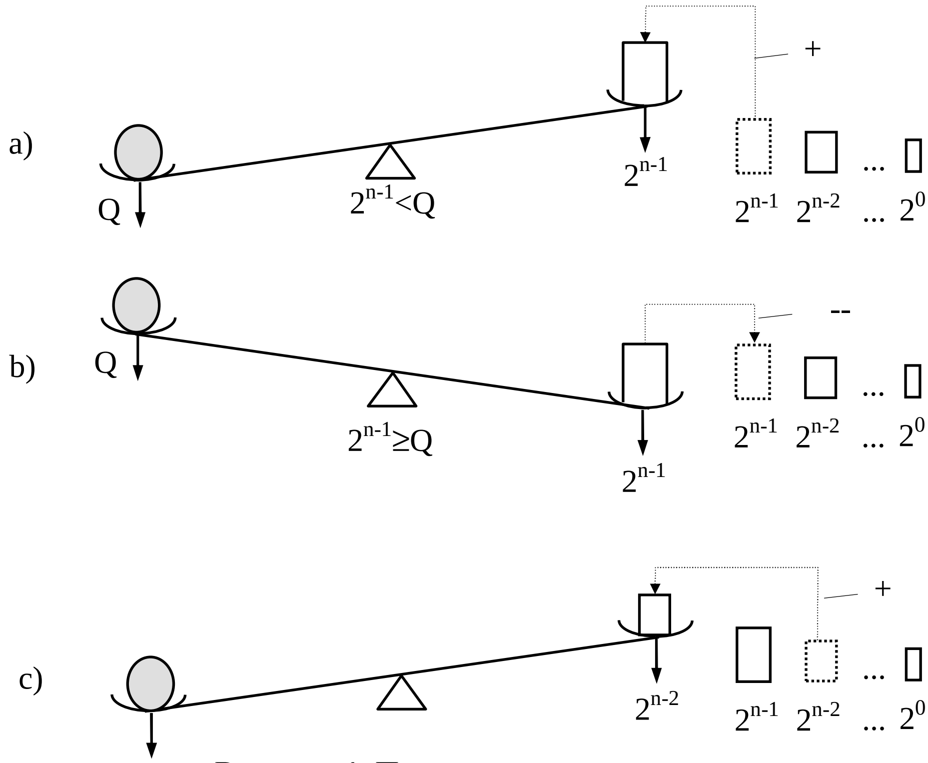

Рисунок 1. Принцип асимметрии измерения

Таким образом, логика любого измерения, осуществляемого с помощью рычажных весов, "***несимметрична"*** в том смысле, что предполагает различную степень сложности действий "весовщика" в зависимости от результата предыдущего сравнения; при этом действия "весовщика" после получения сигнала "меньше" (правая чаша перевесила) оказываются сложнее по сравнению с его действиями после получения сигнала "больше" (весы остались в исходном положении).

Обнаруженное свойство измерения было названо *принципом асимметрии измерения"* [45, 46, 65, 70]. Этот принцип накладывает определенные ограничения на измерение, которые должны быть учтены при выборе «оптимального» алгоритма.

Для строгой формулировки нового варианта *задачи о гирях* (с учетом *принципа асимметрии измерения)* рассмотрим измерение как процесс, протекающий в дискретные моменты времени, и пусть операция "добавить гирю" (+) выполняется за одну единицу дискретного времени, а операция "снять гирю" (-), после которой происходит возврат рычажных весов в исходное положение, - за p единиц дискретного времени, где p может принимать значения из следующего множества $\{0, 1, 2, 3, \ldots , \infty\}$. Параметр p мы будем называть "инерционностью" рычажных весов.

Ясно, что значение p=0 соответствует классическому варианту «задачи о гирях», когда мы в своих рассуждениях пренебрегаем "асимметрией" сравнения. При других значениях p мы получаем другие варианты задачи о гирях, при решении которых должна учитываться "инерционность" p.

12.3. *«Фибоначчиевые» алгоритмы измерения.* Оказывается [45], что если ввести ограничение на измерение, вытекаюшее из *принципа асимметрии измерения,* то оптимальным решением является система гирь, которая выражается с помощью *p-чисел Фибоначчи*, задаваемых с помощью рекуррентного соотоншения (44) при начальных условиях (45), то есть, «оптимальным» решением является следующая система гирь:

$$\left\{F_p(n), F_p(n-1), F_p(n-2), ..., F_p(i), ..., F_p(2), F_p(1)\right\}. \qquad (90)$$

Доказано [45], что с помощью системы гирь (90) можно взвесить все грузы Q, находящиеся в диапазоне $0 \div F_p(n+p+1)$. При этом взвешивание начинается со старшей гири $F_p(n)$, которая разбивает диапазон измерения $0 \div F_p(n+p+1)$ на два поддиапазона $0 \div F_p(n)$ и $F_p(n) \div F_p(n+p+1)$. Заметим, что длина второго поддиапазона равна разности $F_p(n+p+1) - F_p(n)$, которая в соответствии с основным рекуррентным соотношением (44) равна:

$$F_p(n+p+1) - F_p(n) = F_p(n+p).$$

Таким образом, на первом шаге исходный диапазон измерения $0 \div F_p(n+p+1)$ разбивается в «фибоначчивом» отношении:

$$F_p(n+p+1) = F_p(n) + F_p(n+p).$$

В зависимости от результата измерения (0 или 1), диапазон измерения сужается либо до отрезка $F_p(n) \div F_p(n+p+1)$ (показание 1 – весы остались в исходном состоянии) или до отрезка $0 \div F_p(n)$ (показание 0 – весы перешли в противоположное состояние). В первом случае (показание 1) первая гиря оставляется на «свободной» чаше весов и для взвешивания используется следующая по старшинству гиря $F_p(n-1)$, которая разбивает диапазон измерения $F_p(n) \div F_p(n+p+1)$ длиной $F_p(n+p)$ в том же «фибоначчиевом» отношении:

$$F_p(n+p) = F_p(n-1) + F_p(n+p-1).$$

Если же после первого шага взвешивания, весы перешли в противоположное состояние (показание 0), то диапазон измерения сужается до интервала $0 \div F_p(n)$. В этом случае первая стандартная гиря $F_p(n)$ снимается со свободной чаши весов. Согласно *принципу асимметрии измерения* в течение последующих p шагов, пока рычажнык весы переходят в исходное состояние, запрещается класть стандартные гири на свободную чашу весов. Через p шагов после первого шага на свободную чашу весов кладется стандартная гиря $F_p(n-p-1)$, с помощью которой диапазон измерения $0 \div F_p(n)$ разбивается в том же фибоначчиевом отношении:

$$F_p(n) = F_p(n-p-1) + F_p(n-1).$$

Таким образом, суть «фибоначчиевого» алгоритма состоит в последовательном разбиении исходного диапазона измерения и всех последующих диапазонов в «фибоначчиевом» отношении.

Кроме «фибоначчиевых» алгоритмов в алгоритмической теории измерения [45] было получено много других неожиданных «оптимальных» алгоритмов измерения, например, алгоритм измерения, основанный на треугольнике Паскаля и биномиальных коэффициентах. Главный результат *алгоритмичской теории измерения* [45] состоит в том, что каждый «оптимальный» алгоритм измерения порождает новую позиционную систему счисления. Доказано [45], что все известные позиционные системы счисления (двоичная, десятичная, двенадцатиричная, Вавилонская 60-ричная и др.) порождаются соответствующими «оптимальными» алгоритмами измерения, которые являются частными случаями некоторого весьма общего класса «оптимальных» алгоритмов измерения, которые порождают весьма необычные позиционные системы счисления. Из этих рассуждений вытекает, что *алгоритмическая теория измерения* [45] по существу приводит к созданию *общей теории позиционных систем счисления,* то есть, новой математической теории, не существовавшей ранее в математике.

13. Коды Фибоначчи

13.1. ***Фибоначчиевые алгоритмы измерения и p-коды Фибоначчи.*** Подобно тому, как «двоичный» алгоритм измерения порождает «двоичную» систему счисления, *«фибоначчиевые» алгоритмы измерения* [45], порождают новые способы позиционного представления натуральных чисел, названные в [45] *p-кодами Фибоначчи*:

$$N = a_nF_p(n) + a_{n-1}F_p(n-1) + ... + a_iF_p(i) + ... + a_1F_p(1), \qquad (91)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда кода (90); n – разрядность кода (90); $F_p(i)$ – вес i-го разряда, вычисляемый в соответствии с рекуррентным соотношением (44) при начальных условмях (45). Позиционное представление натурального числа N в виде (90) названо *p-кодом Фибоначчи числа N* [45]. Сокращенная запись суммы (90) имеет следующий вид:

$$N = a_n\, a_{n-1} ... a_i \dots a_1. \qquad (92)$$

Заметим, что понятие p-кода Фибоначчи включает в себя бесконечное число различных методов позиционного представления, потому что каждое p «порождает» свой собственный p-код Фибоначчи (p = 0, 1, 2, 3, ...).

Пусть p = 0. Для этого случая 0-числа Фибоначчи $F_0(i)$ совпадают с «двоичными» числами, то есть, $F_0(i) = 2^{i-1}$. Представление (91) для этого случая принимает форму «двоичного» кода:

$$N = a_n2^{n-1} + a_{n-1}2^{n-2} + ... + a_i2^{i-1} + ... + a_12^0, \qquad (93)$$

Пусть p =1. Для этого случая 1-числа Фибоначчи $F_1(i)$ совпадают с классическими числами Фибоначчи, то есть, $F_p(i) = F(i)$. Представление (91) для этого случая принимает вид:

$$N = a_nF(n) + a_{n-1}F(n-1) + ... + a_iF(i) + ... + a_1F(1). \qquad (94)$$

Интересно подчеркнуть, что представление (94) в теории чисел Фибоначчи известно под названием «суммы Цекендорфа» в честь бельгийского исследователя **Эдуарда Цекендорфа** (1901-1983), который, используя (94), доказал еще в 1939 г. *теорему Цекендорфа*. Теорема Цекендорфа утверждает что каждое натуральное число может быть представлено единственным образом в виде суммы (94), состоящей из одного или нескольких различных чисел Фибоначчи, таким образом, чтобы сумма не включала два соседних числа Фибоначчи. Например, $100 = 89 + 8 + 3$. Существуют другие представления числа 100 в виде суммы (94), например, $100 = 89 + 8 + 2 + 1$, $100 = 55 + 34 + 8 + 3$. Однако, эти представления не являются *суммами Цекендорфа*.

Пусть теперь p = ∞. В этом случае все p-числа Фибоначчи тождественно равны 1, то есть, для любого i имеем: $F_p(i)$ = 1. В этом случае представление (91) принимает следующий вид:

$$N = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{N}. \qquad (95)$$

Таким образом p-коды Фибоначчи являются весьма широким обобщением «двоичного» кода (93), соответствующего случаю p=0. Частными случаями p-кодов Фибоначчи являются суммы Цекендорфа (94) (p=1) и «унитарный» код (95) (p = ∞).

Таким образом, *алгоритмическая теория измерения* [45] приводит нас к важному математическому результату в области теории систем счисления. Формула (91), задающая p-код Фибоначчи, является обобщением «двоичной» системы счисления (93)! Благодаря этому открытию мы теперь знаем, что существует бесконечное число «двоичных» позиционных представлений, которые задаются некоторой общей формулой (91)! И классическая «двоичная» система счисления (93) является лишь частным случаем p-кода Фибоначчи (91).

Но «двоичная» система счисления (93) является основой современных компьютеров! Но тогда возникает вопрос: если мы будем использовать «фибоначчиевые» представления (91), то возможно прийдем к новым компьютерам - *компьютерам Фибоначчи*, как нового направления в развитии компьютерной техники!

13.2. ***Свертка и развертка «фибоначчиевых» разрядов.*** Основной особенностью «фибоначчиевых» представлений является *многозначность* представления одного и того же числа. Различные «фибоначчиевые» представления одного и того же числа N в коде (91) для случая $p>0$ могут быть получены одно из другого путем специфических преобразований над двоичными «фибоначчивыми» разрядами, называемыми *сверткой* и *разверткой* «фибоначчиевых» разрядов. Эти кодовые преобразования выполняются в рамках одной и той же двоичной комбинации (92), представляющей сумму (91). Эти кодовые преобразования основаны на рекуррентных соотношениях (4) и (44), связывающих веса разрядов в кодах Фибоначчи (94) и (91). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением кода Фибоначчи (94), весами разрядов которого являются классические числа Фибоначчи. Для этого случая операция *свертки* выполняется над группой из трех «фибоначчиевых» разрядов $a_i a_{i-1} a_{i-2} = 011$. Свертка состоит в замене тройки «фибоначчиевых» разрядов своими отрицаниями, то есть,

$$[011 \to 100] \tag{96}$$

Операция *развертки* выпоняется над группой «фибоначчиевых» разрядов $a_i a_{i-1} a_{i-2} = 100$ и состоит в замене тройки «фибоначчиевых» разрядов своими отрицаниями, то есть,

$$[100 \to 011]. \tag{97}$$

Основное свойство этих операций состоит в том, что их выполнение в «фибоначчиевой» кодовой комбинации (92) не приводит к изменению числа, представляемого этой кодовой комбинации в виде суммы (94). Ниже приведены примеры применения операций *свертки* и *разветрки* для получения различных «фибоначчиевых» представлений чисел 7 и 5:

$$\text{Свертка}: 7 = \begin{matrix} 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{matrix} \qquad \text{Развертка}: 5 = \begin{matrix} 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \end{matrix} \tag{98}$$

Если в «фибоначчиевом» представлении выполнить все возможные *свертки*, то мы прийдем к характерному «фибоначчиевому» представлению, в котором две единицы рядом не встречаются (см. нижнее «фибоначчиевое» представление числа 7). Такое «фибоначчиевое» представление будем называть *минимальной формой числа*. Заметим, что младший разряд «фибоначииевого» представления в минимальной форме всегда равен 0.

Если в «фибоначчиевом» представлении выполнить все возможные *развертки*, то мы придем еще к одному характерному «фибоначчиевому» представлению, в котором два нуля рядом справа от старшего значащего разряда не встречаются (см. нижнее «фибоначчиевое» представление числа 5). Такое «фибоначчиевое» представление будем называть *максимальной формой числа*. Заметим, что младший разряд «фибоначииевого» представления в максимальной форме всегда равен 1.

13.3. ***Диапазон представления и избыточность кодов Фибоначчи.*** С помощью n-разрядного p-кода Фибоначчи (91, 92) можно представить определенное количество целых чисел в некотором диапазоне. Наименьшее число этого диапазона равно

$$N_{\min} = 0 = \underbrace{00...0}_{n}, \tag{99}$$

а максиммальное число равно

$$N_{\max} = \underbrace{11...1}_{n}. \tag{100}$$

«Фибоначчиевый» код (100) является сокращенным представлением следующей суммы:

$$N_{\max}=F_p(n)+ F_p(n\text{-}1)+\ldots+F_p(i)+\ldots+F_p(1). \tag{101}$$

Нетрудно доказать [45], что

$$N_{\max}=F_p(n+p+1)\text{-}1. \tag{102}$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что с помощью n-разрядного p-кода Фибоначчи (91) можно представить $F_p(n+p+1)$ целых чисел в диапазоне $0 \div F_p\left(n+p+1\right)-1$.

Напомним, что при p=0, $F_0\left(i\right)=2^{i-1}$ и p-код Фибоначчи (91) сводится к двоичному коду (93). Как известно, максимальное n-разрядное двоичное число равно 2^n-1, что явлется частным случаем (102), соответствующим случаю p=0.

При p=1 p-код Фибоначчи (91) сводится к простейшему коду Фибоначчи (94), весами разрядов которого являются классические числа Фибоначчи. Для этого случая максимальное n-разрядное число, которое может быть представлено в коде (94), равно $N_{\max}= F\ (n+2)$ -1.

За счет многозначности представления чисел p-коды Фибоначчи (91) при $p>0$ являются избыточными, то есть, для представления одного и того же диапазона чисел они требуют удлинения разрядной сетки. В книге [45] показано, что предельное значение относительной кодовой избыточности простейшего кода Фибоначчи (94) по сравнению с классическим двоичным (неизбыточным) кодом (93) равно 0.44 (44%).

13.4. ***Удивительные аналогии между кодом Фибоначчи и генетическим кодом.*** Открытие *генетического кода* счиатется одним из наиболее важных научных открытий современной науки [342]. Как известно, наследственная информация любых живых организмов кодируется с помощью текстов, составленных из трехбуквенных слов – *триплетов*. Алфавит генетического кода состоит из четырех нитрогенных базисов: ***A*** (аденин), ***C*** (цитозин), ***G*** (гуанин), ***T*** (тиамин). Ипользуя трехбуквенные триплеты, мы можем закодировать 21 объектов, включая 20 аминокислот и один дополнительный объект, называемый *стоп-кодоном* (знак пунктуации). Ясно, что 4^3=64 различных трехбуквенных комбинаций из черырех нитрогенных базисов используется для кодирования 21-го объекта. В этой ситуации некоторые из 21 объектов кодируются несколькими триплетами. Это называется *вырожденностью* генетического кода. Нахождение соответствия между триплетами и аминокислотами (включая стоп-кодон) интерпретируется как *расшифровка генетического кода*.

Теперь рассмотрим 6-разрядный код Фибоначчи (94), использующий 6 чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8 в качестве весов разрядов:

$$N = a_6\times 8 + a_5\times 5 + a_4\times 3 + a_3\times 2 + a_2\times 1 + a_1\times 1. \tag{103}$$

Существуют следующие неожиданные аналогии между 6-разрядным кодом Фибоначчи (103) и генетическим кодом:

(1) **Первая аналогия.** Для представления чисел 6-разрядный код Фибоначчи использует 2^6=64 двоичных комбинаций от 000000 до 111111, что совпадает с количеством триплетов генетического кода (4^3=64).

(2) **Вторая аналогия**. Используя 6-разрядный код Фибоначчи (103), мы можем представить 21 чисел от минимального числа 0=000000 до максимального числа 20=111111. Заметим, что с использованием триплетного кодирования мы можем представить 21 объектов, включая 20 аминокислот и стоп-кодон, который индицирует завершение протеинового синтеза.

(3) **Третья аналогия**. Основным свойством кода Фибоначчи (103) является *множественность* представления чисел. За исключением минимального числа 0 и максимального числа 20, которые имеют единственное представление, 000000 и 111111, соответственно, все остальные числа от 1 до 19 имеют множественное представление в коде Фибоначчи (103. Необходимо отметить, что генетический код имеет подобное свойство, называемое *вырожденностью* генетического кода.

Таким образом, между кодом Фибоначчи (103) и генетическим кодом существуют очень интересные аналогии, которые дают основание выделить коды Фибоначчи (91), (94) в качестве особого класса избыточных кодов. Избыточность кода Фибоначчи (94), равная 44%, совпадает с избыточностью генетического кода, что позволяет выдвинуть гипотезу, что избыточность в 44% является «оптимальной» избыточностью для информационных систем.

14. Арифметика Фибоначчи

14.1. ***Сравнение чисел в коде Фибоначчи.*** Простота сравнения чисел и вытекающая отсюда «наглядность» цифрового представления является одним из важнейших преимуществ позиционных систем счисления, включая двоичную систему. Доказано [45], что *p*-коды Фибоначчи обладают таким же свойством. Единственное отличие состоит в том, что перед сравнением «фибоначчиевые» представления приводятся к минимальной форме, после чего минимальные формы сравниваются поразрядно, начиная со старшего разряда, до момента появления первой пары несовпадающих разрядов.

Например, для сравнения двух чисел A=00111101101 и B=00111110110, прдставленных в коде Фибоначчи (94), необходимо выполнить следуюшее:

1. Приведение сравниваемых кодов к минимальной форме:

$$A = 0\boxed{\mathbf{011}}11\boxed{\mathbf{011}}\boxed{\mathbf{01}} = 010\boxed{\mathbf{011}}1010 = 0101001010\,;$$

$$B = 0\boxed{\mathbf{011}}111\boxed{\mathbf{011}}0 = 010\boxed{\mathbf{011}}11000 = 01010\boxed{\mathbf{011}}000 = 01010100000.$$

Здесь все кодовые комбинации, подлежащие свертке на каждом этапе приведения к минимальной форме, выделены.

2. Поразрядное сравнение минимальных форм чисел A и B, начиная со старшего разряда слева направо до появления первой пары несовпадающих разрядов:

$$A = 01010[\mathbf{0}]10010$$

$$B = 01010[\mathbf{1}]00000.$$

Мы видим, что первая пара несовпадающих разрядов содержит двоичную цифру 0 в минимальной форме первого числа A и двоичную цифру 1 в минимальной форме второго числа B. Это означает, что $B>A$.

14.2. ***Базовые микро-операции.*** Как известно, в классической двоичной арифметике основной арифметической операцией является *сложение*. Вычитание сводится к сложению путем использования понятий *инверсного* и *дополнительного кодов*. Умножение и деление выполняются с использованием операций сложения, вычитания и сравнения. В основе двоичного сложения лежит тривиальное тождество, связывающее двоичные числа:

$$2^m + 2^m = 2^{m+1}, \tag{101}$$

откуда вытекает следующая широко известная таблица сложения двоичных чисел:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} 0 & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & 1 & = & 1 \\ 1 & + & 1 & = & 1 \\ 1 & + & 1 & = & 10 \end{array}} \tag{102}$$

Такой подход вполне применим для создания правил «фибоначчиевого» сложения [64]. Представляя сумму двух чисел Фибоначчи в виде

$$F(n)+F(n)=F(n)+F(n-1)+F(n-2)=F(n+1)+F(n-2), \tag{103}$$

мы можем сконструировать следующую таблицу для «фибоначчиевого» сложения, подобную таблице (102):

$$\boxed{\begin{array}{lllll} 0 & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & 1 & = & 1 \\ 1 & + & 1 & = & 1 \\ 1 & + & 1 & = & 1001 \end{array}} \tag{104}$$

Из таблицы (104) вытекает следующая особенность «фибоначчиевого» сложения. При сложении двух единиц (1+1) в k-м разряде возникает два переноса из k-го разряда – в (k+1)-й и (k-2)-й разряды. При этом вычитание сводится к сложению путем введения понятий *инверсного* и *дополнительного кодов*. Умножение и деление сводится к сложению, вычитанию и сравнению. Подобная арифметика разработана в работах [45, 64, 66, 68].

Однако, более перспективной является арифметика Фибоначчи, основанная на так четырех *базовых микро-операциях* [49]:

$$\text{Свертка}: \quad \boxed{\mathbf{011 \to 100}} \qquad \text{Развертка}: \quad \boxed{\mathbf{100 \to 011}}$$

$$\text{Перемещение}: \quad \boxed{\begin{array}{ll} 1 & 0 \\ \downarrow & = \\ 0 & 1 \end{array}} \qquad \text{Поглощение}: \quad \boxed{\begin{array}{ll} 1 & 0 \\ \updownarrow & = \\ 1 & 0 \end{array}}$$

Операции *свертка* и *развертка* рассмотрены нами выше: они основаны на основном рекуррентном соотношении (4), связывающих веса «фибоначчиевых» разрядов. Эти операции являются *одноместными,* то есть, выполняются в рамках одной «фибоначчиевой» кодовой комбинации, расположенной в одном *регистре*. Напомним, что выполнение этих операций не приводит к изменению значения числа, находящегося в регистре.

Микро-операции *перемещение* и *поглощение* являются *двухместными,* то есть выполняются в рамках «фибоначчиевых» кодовых комбинаций, расположенных в двух регистрах. Эта операция выполняется над одноименными (k-ми) разрядами двух «фибоначчиевых» кодовых комбинаций при условии, что значение этого разряда в верхнем регистре равно 1, а в нижнем регистре равно 0. Операция состоит в «перемещении» $(\downarrow)1$ из верхнего регистра в нижний. Операция *поглощение* также является двухместной операцией. Она состоит во взаимном «поглощении» $(\updownarrow)$ единиц, находящихся в k-х разрядах верхнего и нижнего регистров.

14.3. ***Выполнение логических операций с использованием базовых микро-операций.*** Мы можем продемонстрировать возможность выполнения логических операций над кодовыми комбинациями с использованием *базовых микро-операций*. Выполним, например, все возможные *перемещения* из верхнего регистра A в нижний регистр B:

$$\begin{array}{rl} A & = \mathbf{1}\ 0\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 0\ 1 \\ & \quad\ \downarrow \qquad \downarrow \\ B & = \mathbf{0}\ 1\ 0\ \mathbf{0}\ 1\ 0\ 1 \\ \hline A' & = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\ B' & = 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \end{array}$$

Мы получили две новые кодовые комбинации A' и B' как результат *перемещений*. Важно подчеркнуть, что двоичная комбинация A' является *логической коньюнкцией* $(\wedge)$ исходных двоичных комбинаций A и B, то есть,

$$A' = A \wedge B$$

А двоичная комбинация B' является *логической дизьюнкцией* $(\vee)$ исходных двоичных комбинаций A и B, то есть,

$$B' = A \vee B.$$

Логическая операция *сложения по модулю 2* выполняется путем одновременного выполнения всех возможных операций *перемещения* и *поглощения*. Например,

$$\begin{array}{rl} A & = \mathbf{1}\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 0\ \mathbf{1}\ \mathbf{1}\ 0\ \mathbf{1} \\ & \quad \updownarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow\ \downarrow \quad \updownarrow \\ B & = \mathbf{1}\ 1\ \mathbf{0}\ 0\ 1\ \mathbf{0}\ \mathbf{0}\ 0\ \mathbf{1} \\ \hline A' & = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ = const\,0 \\ B' & = 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \ = A \oplus B \end{array}$$

Мы видим, что две новые кодовые комбинации $A' = \mathrm{const}\,0$ и $B' = A \oplus B$ являются результатом этого преобразования.

Логическая операция *инверсия кода А* сводится к выполению операции *поглощения* над исходной кодовой комбинацией A и «единичной» кодовой комбинацией $B = const1$:

$$\begin{array}{rl} A & = 1\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 0\ \mathbf{1}\ \mathbf{1}\ 0\ \mathbf{1} \\ & \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow\ \updownarrow \quad \updownarrow \\ B & = \mathbf{1}\ 1\ \mathbf{1}\ 1\ 1\ \mathbf{1}\ \mathbf{1}\ 1\ \mathbf{1} \\ \hline A' & = 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \ = const\,0 \\ B' & = 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \ = \ \overline{A} \end{array}$$

14.4. ***Счет и вычитание единиц в коде Фибоначчи.*** Как известно, счётчики используются для построения таймеров или для выборки инструкций из ПЗУ в микропроцессорах. Они могут использоваться как делители частоты в управляемых генераторах частоты (синтезаторах). Во многих случаях применения счетчиков к ним предъявляется требование высокого быстродействия. Как известно, быстродействие счетчика характеризуется временем установления в нем нового состояния. «Критической» ситуацией для счетчиков, построенных на основе классической двоичной системы счисления, является установление нового состояния счетчика в следующей ситации:

$$0111111111 + 1 = 1000000000.$$

В этом случае осуществляется перенос единицы из младшего в старший разряд счетчика. Если счетчик строится на так называемых «счетных триггерах», то такой счетчик обладает очень низким быстродействием. Для ускорения переноса используются схемы группового переноса, что приводит к усложнению схемы счетчика.

Покажем теперь, что *фибоначчиевые счетчики*, основанные на микро-операциях *свертки* (суммирующий счетчик) и *развертки* (вычитающий счетчик) обладают существенными преимуществами по сравнению с двоичными счетчиками. *Счет* единиц в коде Фибоначчи (*суммирующий счетчик*) осуществляется следующим образом. Перед добавлением единицы в младший разряд исходное «фибоначчиевое» представление, соответствующее числу N, приводится в такую форму, чтобы значение младшего разряда было равным 0. Затем в младший разряд добавляется 1, что приводит к тому, что числовое содержание мсетчика становится равным $N+1$. После этого с помощью *свертки* «фибоначчиевое» представление числа $N+1$ приводится в такую форму, чтобы значение младшего разряда было равным 0. Продемонстрируем «фибоначчиевый» счет на следующем примере:

$$\begin{aligned}
&000000+1=0000\boxed{\mathbf{01}}=000010=1\\
&000010+1=000\boxed{\mathbf{011}}=000100=2\\
&000100+1=0001\boxed{\mathbf{01}}=000110=3\\
&00\boxed{\mathbf{011}}0+1=0010\boxed{\mathbf{01}}=001010=4\\
&001010+1=001\boxed{\mathbf{011}}=001100=5\\
&0\boxed{\mathbf{011}}00+1=0100\boxed{\mathbf{01}}=010010=6\\
&010010+1=010\boxed{\mathbf{011}}=010100=7\\
&010100+1=0101\boxed{\mathbf{01}}=010110=8\\
&01\boxed{\mathbf{011}}0+1=\boxed{\mathbf{011}}0\boxed{\mathbf{01}}=100010=9\\
&100010+1=100\boxed{\mathbf{011}}=100100=10\\
&100100+1=1001\boxed{\mathbf{01}}=100110=11\\
&10\boxed{\mathbf{011}}0+1=1010\boxed{\mathbf{01}}=101010=12\\
&101010+1=101\boxed{\mathbf{011}}=1\boxed{\mathbf{011}}00=\boxed{\mathbf{110}}000=000000
\end{aligned} \qquad (105)$$

Здесь жирным шрифтом в скобках выделены те ситуации, когда в фибоначчиевом счетчике осуществляются *свертки*. Рассмотрим ситуацию перехода от «фибоначчиевого» представления числа $8=010110$ к «фибоначчиевому» представлению числа 9. В этом случае одновременно с записью 1 в младший (первый) разряд осуществляется *свертка* единиц 2-го и 3-го разрядов в 4-й разряд ($011\to100$), что приводит к получению «фибоначчиевого» представления числа $9=011001$. На следующем этапе в этом «фибоначчиевом» представлении осуществляется две свертки одновременно, что приводит к появлению нового «фибоначчиевого» представления $\mathbf{011}0\mathbf{01}\to\mathbf{100}0\mathbf{010=9}$. Таким образом, особенность «фибоначчиевого» счета состоит в том, что в любой ситуации переход от числа N к числу $N+1$ осуществляется за время последовательного выполнения не более двух сверток. Заметим, что нижний ряд таблицы (99) соответствует *переполнению* фибоначчиевого счетчика.

Вычитание единиц в коде Фибоначчи (*вычитающий счетчик*) осуществляется путем вычитания единицы из младшего разряда «фибоначчиевого» представления числа N, в котором значение младшего разряда равно 1, с последующей *разверткой* в младших разрядах. Рассмотрим пример функционирования вычитающего «фибоначчиевого» счетчика:

$$\begin{aligned}
&1111-1=11\boxed{\mathbf{10}}=1101=6\\
&1101-1=1\boxed{\mathbf{100}}=1011=5\\
&1011-1=10\boxed{\mathbf{10}}=1001=4\\
&\boxed{\mathbf{100}}1-1=0110=0101=3\\
&0101-1=0\boxed{\mathbf{100}}=0011=2\\
&0011-1=00\boxed{\mathbf{10}}=0001=1\\
&0001-1=0000=0
\end{aligned} \qquad (106)$$

Здесь жирным шрифтом в скобках выделены те ситуации, когда в фибоначчиевом счетчике осуществляются *развертки*. Таким образом, особенность «фибоначчиевого» вычитающего счетчика состоит в том, что в любой ситуации переход от числа N к числу N-1 осуществляется за время последовательного выполнения не более двух разверток.

Рассмотренные выше алгоритмы функционирования суммирующего и вычитающего «фибоначчиевых» счетчиков показывают, что в таких счетчиках заложены предпосылки для конструирования супер-быстрых счетчиков на основе этого подхода (без использования сложных схем группового переноса). То есть, уже этот простейший пример показывает преимущества кодов Фибоначчи перед классическим двоичным кодом.

14.5. ***Фибоначчиевое сложение.*** В качестве примера рассмотрим сложение следующих фибоначчиевых чисел:

$$A_0=010100100 \text{ и } B_0=001010100.$$

При фибоначчиевом сложении мы используем микро-операции *перемещения, свертки и развертки.* Сумма формируется в нижнем регистре B.

Первый шаг фибоначчиевого сложения состоит в выполнении всех возможных *перемещений* двоичных 1 из регистра A в регистр B:

$$\begin{array}{lcccccccccc} A_0 & = & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \\ B_0 & = & 0 & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline A_1 & = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_1 & = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Второй шаг состоит в выполнении всех возможных *разверток* в двоичной комбинации A_1 и всех возможных *сверток* в двоичной комбинации B_1, то есть,

$$A_1 = 000000\boxed{\mathbf{100}} \to A_2 = 000000011$$

$$B_1 = \boxed{\mathbf{011}}110100 \to B_2 = 100110100$$

Третий шаг состоит в выполнении всех возможных *перемещений* двоичных 1 из регистра A в регистр B:

$$\begin{array}{lcccccccccc} A_2 & = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ & & & & & & & & & \downarrow & \downarrow \\ B_2 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline A_3 & = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_3 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Сложение закончено, поскольку все двоичные 1 перемещены в из регистра A в регистр B. После приведения фибоначчиевой двоичной комбинации B_3 к минимальной форме, мы получим сумму B_3=A+B, представленную в минимальной форме:

$$B_3 = 10\boxed{\mathbf{011}}\boxed{\mathbf{011}}1 = 1010010\boxed{\mathbf{01}} = 101001010.$$

14.6. ***Фибоначчиевое вычитание.*** Идея фибоначчиевого вычитания числа B из числа A, основанного на *базовых микро-операциях,* состоит во взаимном *поглощении* всех двоичных единиц в фибоначчиевых числах A и B до тех пор, пока одно из них не станет равным 0. Для этого используются микро-опреации *поглощения* и *развертки.* Результат вычитания всегда формируется в регистре, который содержит большее число. Если результат вычитания формируется в верхнем регистре A, это означает, что результат вычитания имеет знак «+»; в противном случае результат вычитания отрицательный.

Рассмотрим следующий пример. Пусть требуется произвести фибоначчиевое вычитание числа B_0=101010010 из числа A_0=101001000.

Первый шаг состоит в *поглощении* всех возможных 1 в числах A и B:

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & \mathbf{1}\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ & & \updownarrow\quad\ \updownarrow \\ B_0 & = & \mathbf{1}\ 0\ \mathbf{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ \hline A_1 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ B_1 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \end{array}$$

Второй шаг состоит в выполнении микро-операции *развертка* в кодовых комбинациях A_1 и B_1:

$$A_1 = 00000\boxed{\mathbf{100}}0 \to A_2 = 000000110$$

$$B_1 = 0000\boxed{\mathbf{100}}\boxed{\mathbf{10}} = B_2 = 000001101$$

Третий шаг состоит в выполнении микро-операции *поглощение* над кодовыми комбинациями A_2 и B_2:

$$\begin{array}{rcl} A_2 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{1}\ 1\ 0 \\ & & \qquad\qquad\quad\ \updownarrow \\ B_2 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \mathbf{1}\ 0\ 1 \\ \hline A_3 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\ B_3 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Четвертый шаг состоит в *развертке* кодовых комбинаций A_3 и B_3:

$$A_3 = 0000000\boxed{\mathbf{10}} \to A_4 = 000000001$$

$$B_3 = 00000\boxed{\mathbf{100}}1 \to A_4 = 000000111$$

Пятый шаг состоит в выполнении *поглощений* над кодовыми комбинациями A_4 и B_4:

$$\begin{array}{rcl} A_4 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \mathbf{1} \\ & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \updownarrow \\ B_4 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ \mathbf{1} \\ \hline A_5 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ B_5 & = & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

Вычитание закончено. После приведения кодовой комбинации B_5 к минимальной форме получаем:

$$B_5=000001000.$$

Результат вычитания находится в регистре B. Это означает, что результат вычитания отрицательный, то есть разность чисел A-B равна:

$$R = A - B = -000001000 .$$

14.6. *Фибоначчиевое умножение.* Предлагаемый ниже фибоначчиевый метод умножения восходит к *египетскому методу удвоению* [156], который лежал в основе их десятичной арифметики. Суть *фибоначчиевого умножения* состоит в следующем. Рассмотрим произведение $P=A\times B$, где числа A и B представлены в коде Фибоначчи (94). Используя представление множителя B в коде Фибоначчи (94), мы можем представить произведение $P=A\times B$ в следующем виде:

$$P=A\times b_nF(n)+A\times b_{n-1}F(n-1)+\ldots+A\times b_i\,F(i)+\ldots+A\times b_1\,F(1), \qquad (107)$$

где $F(i)$ – число Фибоначчи, b_i – двоичная цифра фибоначчиевого представления числа B.

Алгоритм фибоначчиевого умножения непосредственно вытекает из выражения (107). Умножение сводится к сложению частных произведений вида $A\times b_iF_p(i)$. Они фомируются из множителя A в соответствии со специальной процедурой, напоминающей *египетской метод удвоения* [156]. Продемонстрируем фибоначчиевое умножение на конкретном примере. Предположим, что необходимо умножить числа A=41 и B=305. Для этого проделаем следующее:

1. Сконструируем таблицу из трех столбцов, обозначенных буквами F, G и P.
2. Сформируем последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 в столбеце F.
3. Сформируем в столбце G последовательность чисел $G(n)$, вычисляемых в соответствии с рекуррентным соотношением $G(n)=G(n-1)+G(n-2)$ при начальных условиях $G(1)=G(2)=305$ (число B=305).
4. Отметим жирным шрифтом и наклонной линией (/) все числа столбца F, которые в сумме образуют второй множитель 41 (41=34+5+2).
5. Отметим жирным шрифтом все числа столбца G, соответствующие отмеченным числам столбца F и перепишем их в столбец P.
6. Суммируя все числа столбца P, получим произведение: 41×305=12505.

F	G	P
1	305	
1	305	
/2	**610**	$\rightarrow$ **610**
3	915	
/5	**1525**	$\rightarrow$ **1525**
8	2440	
13	3965	
21	6505	
/34	**10370**	$\rightarrow$ **10370**
$\mathbf{41=34+5+2}$	$\mathbf{41\times 305}$	$\mathbf{=12505}$

14.6. ***Фибоначчиевое деление.*** Фибоначчиевое деление подобно египетскому методу деления, основанному на *методе удвоения* [156]. Рассмотрим этот метод на конкретном примере. Пусть требуется разделить число A=481 (делимое) на число B=13 (делитель) в коде Фибоначчи (94). Деление осуществляется в несколько этапов.

Первый этап:

1. Построим таблицу, состоящую из трех столбцов F, G и D.
2. Сформируем последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 в столбце F.
3. Сформируем в столбце G последовательность чисел $G(n)$, вычисляемых в соответствии с рекуррентным соотношением $G(n)=G(n-1)+G(n-2)$ при начальных условиях $G(1)=G(2)=13$ (делитель B=13).
4. На каждом шаге формирования чисел $G(n)$ сравниваем их с делимым A=481, вписанным в столбец D, и фиксируем результаты сравнения (≤ или >) до получения первого результата сравнения «больше»: 615>481.
5. Отмечаем жирным шрифтом и наклонной линией (/) число Фибоначчи 34 столбца F, которое соответствует предыдущему числу 442 столбца G.
6. Вычислим разницу: R_1 = 481 – 442 = 39.

F	G	D	
1	13	≤ 481	
1	13	≤ 481	
2	26	≤ 481	
3	39	≤ 481	
5	65	≤ 481	$\to R_1 = 481 - 442 = 39$
8	104	≤ 481	
13	169	≤ 481	
21	273	≤ 481	
/34	**442**	≤ 481	
55	615	> 481	

Второй этап:

Второй этап фибоначчиевого деления состоит в повторении первого этапа, но при этом вместо делимого A=481 используется разница R_1 = 39.

F	G	D	
1	13	≤ 39	
1	13	≤ 39	
2	26	≤ 39	$\to R_2 = 39 - 39 = 0$
/3	**39**	≤ 39	
5	65	> 39	

Поскольку R_2 = 39 – 39 = 0, это означает, что фибоначчиевое деление закончено. Результат деления равен сумме всех отмеченных чисел Фибоначчи в столбце F первой и второй таблицы, то есть, 34 + 3 = 37.

15. Компьютер Фибоначчи

15.1. ***Патентование изобретений в области компьютеров Фибоначчи.*** В течение 1971-1977 гг. в Таганрогском радиотехническом университете под научным руководством **Алексея Стахова** были начаты теоретические и инженерные разработки в области компьютров Фибоначчи и различных цифровых устройств на основе кодов Фибоначчи. Эта работа была затем продолжена в Винницком техническом университете (1977-1990 гг.). Внушительный перечень авторских свидетельств СССР и зарубежных патентов, приведенный в списке литературы [144-331], являются достаточно убедительным подтверждением того факта, что в период с 1971 по 1990 гг. в Советском Союзе была проведена грандиозная исследовательская и инженерная работа по созданию *компьютеров Фибоначчи*. Следует отметить, что это направление оказалось единственным советским компьютерным направлением, по которому было принято решение о патентовании изобретений за рубежом. Патентование проводилось в 8 странах (США, Япония, Англия, Франция, ФРГ, Канада, ГДР и Польша). Главная задача такого патентования состояла в том, чтобы защитить приоритет советской науки в этой области компьютерной техники. Западные эксперты не смогли ничего противопоставить советским «фибоначчиевым» изобретениям. Более 60 патентов, выданных патентными ведомствами 8 зарубежных стран на советские изобретения в области компьютеров Фибоначчи [271-331], являются официальными юридическими документами, подтверждающими приоритет советской науки в этой области. Как следует из названий авторских свидетельств и патентов, все основные узлы компьютера Фибоначчи (устройство приведения кода Фибоначчи к минимальной форме, счетчики, сумматоры, множительные и делительные устройства, преобразователи кодов, аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи и т.д.) были защищены авторскими свидетельствами СССР и зарубежными патентами. Многие из «фибоначчиевых» технических решений были признаны *пионерными изобретениями*, то есть, изобретениями, не имеющими прототипа. Одним из таких пионерных изобретений является *устройство для приведения кода Фибоначчи к минимальной форме.* Поскольку это устройство лежит в основе компьютера Фибоначчи, то именно с этого устройства было начато патентование фибоначчиевых изобретений за рубежом [271, 276, 279, 285, 290, 296, 301, 308, 313, 318, 322, 325].

15.2. ***Устройство для приведения кодов Фибоначчи к минимальной форме.*** Устройства для выполнения микро-операций *свертки* и *развертки* играют важную роль при технической реализации арифметических операций в коде Фибоначчи. С помощью таких устройств выполняется операция *приведения кода Фибоначчи к минимальной и максимальной формам.* Такие устройства могут быть реализованы с использованием традиционной элементной базы, в частности, на основе двоичного регистра, имеющего специальные логические схемы для выполнения операций *свертки* и *развертки.*

В качестве примера рассмотрим *устройство для приведения кода Фибоначчи к минимальной форме* (Рис. 2). В общем случае логические элемент AND_k k-го разряда (k=2, 3, 4, 5) выполняет *свертку* над (k-1)-м, k-м и (k+1)-м разрядами. Его три входа соединены в прямыми выходами T_{k-1} и T_k и инверстным выходом триггера T_{k+1}. Легко проследить, что при появлении сигнала синхронизации C происходит переключение триггеров T_{k-1}, T_k, и T_{k+1}, то есть над (k-1)-м, k-м и (k+1)-м разрядами регистра выполняется *свертка* (011 = 100).

Заметим, что все логические элементы AND_1 - AND_5 связаны через общий логический элемнт OR_c с контрольным выходом устройства, что позволяет контролировать устройство.

Важно подчеркнуть, что техническое решение на Рис. 2 было признано пионерным изобретением в СССР и защищено авторским свидетельставом [149], а также патентами США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и др. стран [129, 136, 142, 147, 153, 158, 165, 170, 175, 179, 182].

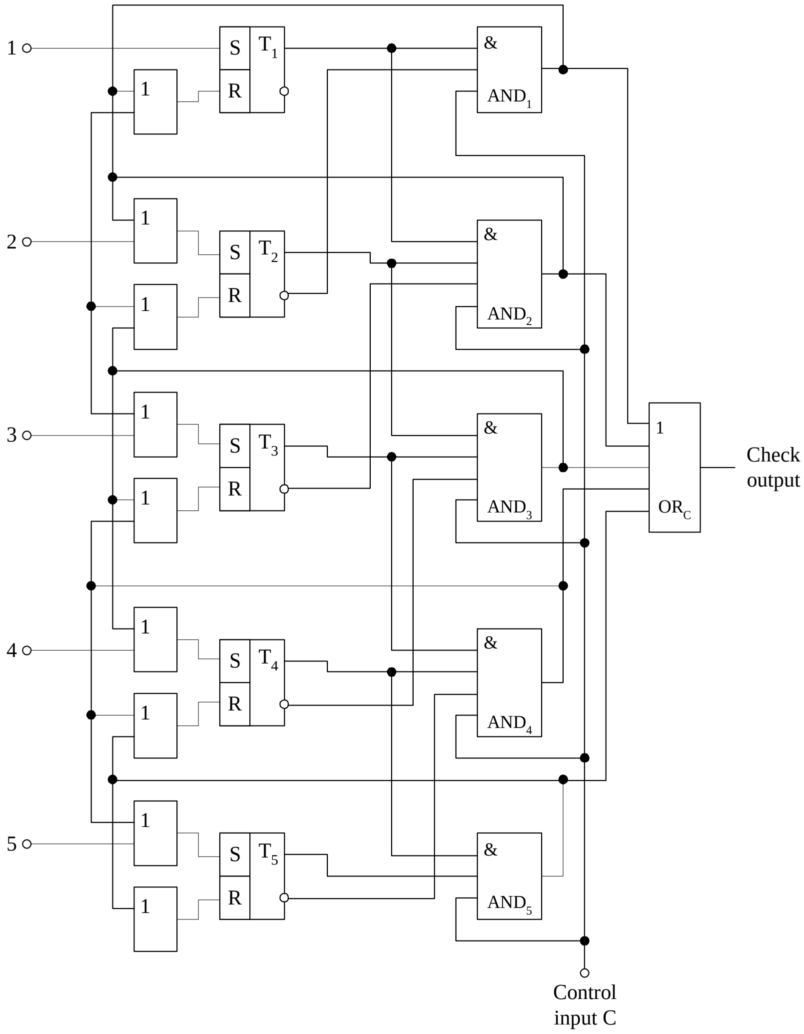

Рисунок 2. Устройство для приведения кода Фибоначчи к минимальной форме

15.3. ***Помехоустойчивый процессор Фибоначчи.*** Проект *компьютер Фибоначчи* финансировался Министерством общего машиностроения СССР (советским ракетным министерством). Именно по заказу Минобщемаша в Специальном конструкторско-технологическом бюро «Модуль» Винницкого технического университета в 1986 г. началась разработка помехоустойчивого процессора Фибоначчи, предназначенного для использования в бортовых системах управления ракетами. Задача состояла в том, чтобы с использованием рассмотренных *базовых микро-операций* разработать процессор Фибоначчи, позволяющий эффективно обнаруживать и исправлять случайные ошибки, возникающие в процессоре в результате сбоев триггеров в момент их переключения.

Аппаратная реализация *помехоустойчивого процессора Фибоначчи* основана на принципе *причина – следствие* (*cause-effect*). Сущность принципа демонстрируется с помощью Рис.3. Процессор на Рис. 3 состоит из информационного и контрольного регистров, связанных логическими схемами «*причина*» (“cause”) и «*следствие*» (“effect”). Исходная информация, которая подвергается обработке, преобразуется в некоторый *результат* с использованием некоторой *базовой микро-операции.* Информация о *результате* фиксируется в контрольном регистре. После этого с помощью логической схемы «*следствие*» (“effect”) проверяется соответствие *результата* некоторой *причине,* то есть *результат* должен соответствовать своей *причине.*

Например, при выполнении микрооперации *свертки* над кодовой комбинации 011 (“cause”) мы получаем новую кодовую комбинацию 100 (“effect”), который является необходимым условием для выполнения микрооперации *развертки*. Это означает это, правильное выполнение *свертки* приводит к условию для выполнения *развертки*. Аналогично правильное выполнение *развертки* приводит к условию *свертки*. Из этого рассуждения вытекает, что микрооперации *свертка* и *развертка* являются взаимно контролируемыми. Этот же принци справедлив для остальных *базовых микро-операций*.

При «регистровой интерпретации» установление соответствия между «причиной» и «результатом» реализуется с помощью «контрольного триггера». «Причина» устанавливает соответствующий «контрольный триггер» в состояние 1, а правильное выполнение микрооперации («результат» соответствует «причине») переключает «контрольный триггер» в состояние 0. Если «результат» не соответствует «причине» (микрооперация выполнена неправильно), тогда «контрольный триггер» остается в состоянии 1 и этот факт является свидетельством ошибки.

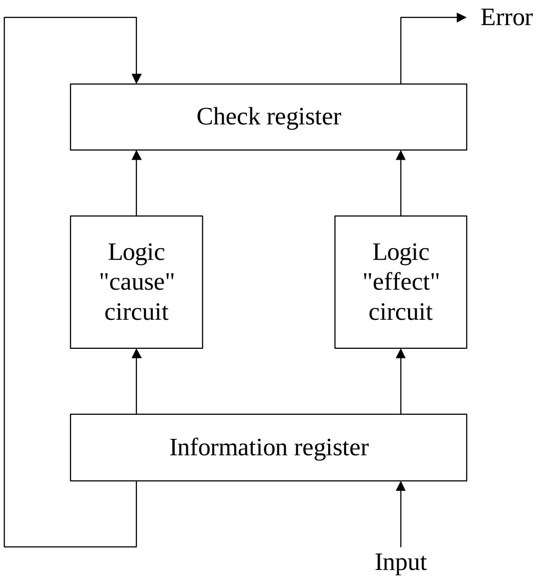

Рисунок 3. Блок-схема «фибоначчиевого» процессора

Рассмотренный выше принцип "причина-следствие" был положен в основу самоконтролирующегося "фибоначчиевого" процессора, который был реализован в виде БИС, спроектированоой НПО «Научный Центр» (г. Зеленоград). Процессор выполнял следующие микрооперации: *запись, чтение, свертка, развертка, перемещение, поглощение, "фибоначчевое" сложение, вычитание, приведение к минимальной форме, циклический сдвиг, конъюнкция, дизъюнкция, сложение по модулю 2.* Наличие контрольного выхода "Ошибка" является важным преимуществом "фибоначчиевого" процессора. Если на контрольном выходе модуля формировался двоичный сигнал 1 (наличие "ошибки"), то все информационные выходы модуля блокировались, то есть ошибочная команда не выполнялась. Чтобы исправить "ошибку", необходимо повторить предшествующую микрооперацию. Если при повторении на контрольном выходе возникает двоичный сигнал 0 (отсутствие "ошибки"), то это означает, что "ошибка" возникла в результате "случайного сбоя", и блокирование информационных выходов снималось. Если при повторении микрооперации двоичный сигнал 1 снова появляется на выходе "ошибка", это означает, что "ошибка" является следствием отказа в модуле и блокирование информационных выходов оставалось.

15.4. ***Драматическая история проекта «Компьютер Фибоначии».*** Основным центром фибоначчиевых исследований в СССР стал Винницкий технический университет и Специальное конструкторско-технологическое бюро «Модуль», где выполнялись опытно-конструкторские работы по проектированию фибоначчиевых устройств. Инженерные разработки СКТБ «Модуль» описаны в брошюре [52].

В 1989 г. по инициативе СКТБ «Модуль» в Госплан СССР было направлено нижеследующее письмо, подписанное видными государственными и научными деятелями СССР.

Заместителю Председателя Госплана СССР т. Ситаряну С.А.

Специальное конструкторско-технологическое бюро "Модуль" при Винницком политехническом институте в содружестве с АН УССР проводит в интересах Минобщемаша научно-исследовательские работы по созданию высоконадежных бортовых процессоров, электронных вычислительных машин, измерительных и управляющих систем на основе кодов Фибоначчи.

Данное научное направление получило широкое всесоюзное и международное признание, защищено 100 авторскими свидетельствами СССР и 62 зарубежными патентами, относится к разряду приоритетных научных направлений и ставит целью выведения отдельных направлений цифровой вычислительной техники на мировой уровень.

Направление обсуждено на НТС Минобщемаша и Госкомизобретений, в АН УССР на Ученом совете Института кибернетики АН УССР им. В.М. Глушкова и получило полное одобрение.

В СКТБ "Модуль" создан высококвалифицированный коллектив разработчиков, способный выполнять научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы на высоком научном уровне.

Широкому внедрению данного направления в производство препятствует отсутствие микроэлектронной элементной базы вычислительных и измерительных систем, выполняющих операции в кодах Фибоначчи. Создание элементной базы на основе БИС большого уровня интеграции возможно только с использованием современных САПР микросхем и новейшей вычислительной техники.

Учитывая достигнутые в СКТБ "Модуль" научно-технические и практические результаты, наличие высококвалифицированных научных кадров, с целью ускорения внедрения в производство перспективного направления по созданию высоконадежных отказоустойчивых, само-контролирующихся и самокорректирующихся средств вычислительной и измерительной техники, что позволит резко повысить надежность систем управления космическими аппаратами, технологическими и энергетическими объектами, работающими в экстремальных условиях, Министерство высшего и среднего специального образования УССР, Академия Наук УССР, Министерство общего машиностроения СССР и Государственный комитет по изобретениям и открытиям при ГКНТ СССР ходатайствуют о выделении в 1990 г. целевым назначением СКТБ "Модуль" валютных ассигнований в объеме 1 млн. рублей для приобретения САПР на базе ЭВМ VAX-11/780.

Президент Академии наук УССР Б.Е. Патон
Министр высшего и среднего образования УССР В.Д. Пархоменко
Министр общего машиностроения СССР В.Х. Догужиев
Председатель Госкомизобретений СССР И.С. Наяшков

Это письмо является ярким свидетельством того огромного интереса, который был проявлен к проекту «Компьютер Фибоначчи» в государственных и научных кругах СССР. В июне 1989 г. по инициативе Президента Академии Наук Украины Бориса Патона состоялось специальное заседание Президиума Академии, посвященное перспективам развития фибоначчиевого направления в СССР. К сожалению, так называемая «Горбачевская» перестройка привела к резкому сокращению финансирования этих работ, и с 1989 г. эти работы были прекращены, что привело к развалу научного и инженерного коллектива разработчиков «фибоначчиевых» систем сбора, обработки, передачи, регистации информации.

15.4. ***Американские исследования по компьютерам Фибоначчи.*** Анализ западных публикаций по «компьютерам Фибоначчи» показал, что в США, начиная с середины 70-х годов, интенсивно проводились работы по созданию фибоначиевых устройств. Наиболее информативной в этом отношении является статья [357]. В статье описывается устройство для приведения кода Фибоначчи к минимальной форме. Весьма интересными являются комментарии к статье. Оказалось, что выполненные исследования были поддержаны отделом научных исследований ВВС США в соответствии с Грантом AFOSR 70-1910, откуда вытекает, что эта разработка проводилась в военных целях.

Следующей характерной публикацией является статья [358]. В статье описывается способ преобразования двоичного представления Фибоначчи в троичное представление Фибоначчи. Из далеко не полного перечня публикаций американских ученых [357-362] можно сделать вывод, что понятие «Компьютер Фибоначчи» прочно вошло в американскую компьютерную литературу и что работы по «Компьютерам Фибоначчи» проводились в США (Университет штата Мериленд) примерно в тот же период, что и работы по «фибоначчиевому» направлению, выполнявшиеся под научным руководством **Алексея Стахова** сначала в Таганрогском радиотехническом институте (1971-1977 гг.), где началось зарубежное патентование фибоначчиевых изобретений, а затем в Винницком политехническом институте (1977 – 1989 гг.). Диссертация V.D. Hong [362], защищенная в 1979 г. в Университете Мериленд, свидетельствует о том, что цели исследований в этой области в СССР (Таганрогский радиотехнический институт и Винницкий политехнический институт) и США были одинаковы – создание самоконтролирующихся и самокорректирующихся компьютеров Фибоначчи.

15.5. ***Фибоначчиевые алгоритмы обработки сигналов.*** Еще одной областью приложения чисел Фибоначчи является *цифровая обработка сигналов*. В российской науке идеи использования чисел Фибоначчи для создания сверхбыстрых алгоритмов цифровой обработки активно развивает доктор физико-математических наук профессор **Чернов В.М.** (Самара, Институт обработки изображений РАН) [363]. Подобные же исследования проводятся в Финляндии (Tampere International Center for Signal Processing). Исследования в области «фибоначчиевых» сигнальных преобразований изложены в книге [364]. В книге широко используются *p-числа Фибоначчи*, при этом показано, что сверхбыстрые «фибоначчиевые» алгоритмы могут быть реализованы только над числовыми данными, представленными в *p*-кодах Фибоначчи. Это означает, что для реализации таких преобразований требуется создание специализированных процессоров Фибоначчи!

И, наконец, последняя весьма интригующая информация. В журнале "Электронные компоненты и системы" № 11, ноябрь 2001 г. на стр. 25 приведена краткая информация об оценочной (демонстрационной) плате с сигнальным процессором семейства ADSP-2189M фирмы Analog Devices. В частности, указывается следующее: *"Демонстрационные программы, поставляемые в составе этого комплекта, включают алгоритмы обработки сигналов, такие как свертка и вычисления в кодах Фибоначчи"*. Указанная информация является убедительным свидетельством того свершившегося факта, что использование чисел Фибоначчи в современной информатике перешло из стадии теоретического обсуждения в реальные разработки.

15.6. ***Коды Фибоначчи и самосинхронизация двоичных последовательностей.*** В 1965 американский инженер **W. H. Kautz** опубликовал статью «Fibonacci codes for synchronization control» [365]. В этой статье впервые показано, что код Фибоначчи может быть успешно использован для решения проблемы самосинхронизации двоичных последовательностей. Рассмотрим суть этой проблемы на примере цифровой магнитной записи. Как известно, минимальная форма кода Фибоначчи обладает тем характерным свойством, что в ней двух единиц рядом не встречается. Если двоичные биты записывать с частотой, соответствующей периоду T, и при этом использовать минимальную форму кода Фибоначчи (двух нулей рядом не встречается) для представления исходной информации, то такая последовательность Фибоначчи при магнитной записи по методу БВНМ (без возвращения к нулю модифицированный) превращается в так называемый *двухчастотный сигнал*, в котором содержится только две основные частоты с периодом T и $2T$. Из двухчастотного сигнала легко сформировать *синхросигнал* – в этом и состоит свойство самосинхронизации кода Фибоначчи. Более детально эта проблема обсуждается в книге [48].

16. Системы счисления с иррациональными основаниями

16.1. ***Система Бергмана.*** В 1957 юный американский математик **Джордж Бергман** сделал важное математическое открытие в области систем счисления. В статье [365], он предложил необычный позиционный способ представления чисел:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i, \tag{108}$$

где A – действительное число, a_i – двоичная цифра {0,1} i-го разряда, i=0,±1,±2,±3,…, Φ^i - вес i-го разряда, $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ (золотая пропорция) - основание системы счисления (108).

Заметим, что веса разрядов Φ^i $\left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\right)$ связаны друг с другом следующим изящными соотношениями:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}. \tag{109}$$

На первый взгляд кажется, что нет никакого различия между формулой (108), задающей систему Бергмана, и формулами для канонических позиционных систем счисления, в частности, двоичной системой:

$$A = \sum_i a_i 2^i, \tag{110}$$

где a_i – двоичная цифра {0,1} i-го разряда, i=0,±1,±2,±3,….

Однако, это только на первый взгляд. Принципиальное отличие системы (108) от двоичной системы (110) состоит в том, что основанием системы счисления (108) является иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ (золотая пропорция), то есть то число, которое широко использует Природа в своих конструкциях. Бергман назвал систему (108) *системой счисления с иррациональным основанием*.

Формула (108) задает принципиально новую систему счисления, которая переворачивает наши представления о позиционных системах счисления, более того, исторически сложившееся соотношение между рациональными и иррациональными числами. До открытия Бергмана считалось, что основанием позиционной системы счислеия может быть только целое число (10 – для десятичной системы, 2 – для двоичной, 60 – для Вавилонской 60-ричной системы). В системе счисления Бергмана (108) основанием системы, то есть, началом исчисления является иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, с помощью которого можно представить все действительные числа, то есть иррациональное число $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ является исходным, первичным числом, с помощью которого можно представить все реальные числа, включая натуральные и рациональные. Именно поэтому мы имеем полное право утверждать, что система Бергмана (108) является одним из наиболее важных математических открытий в области систем счисления после открытия позиционного принципа представлеия чисел (Вавилон, 2000 г. до н.э.) и десятичной системы (Индия, 5-8 столетие нашей эры).

16.2. ***Коды золотой p-пропорции.*** Зададимся целым неорицательным числом $p > 0$ и рассмотрим бесконечное множество геометрических отрезков, длины которых являются степенями золотой *p*-пропорции Φ_p :

$$G_p = \left\{\Phi_p^i\right\}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (111)$$

Заметим, что степени золотой *p*-пропорции Φ_p^i связаны между собой математическим тождеством:

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{i-1}. \qquad (112)$$

Заметим, что при $p = 0$ тождество (111) принимает вид следующего известного тождества для двоичных чисел:

$$2^{n-1} = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \times 2^{n-2}, \qquad (113)$$

которое лежит в основе двоичной системы счисления (110). При $p = 1$ тождество (112) принимает вид (109).

Используя множество (111), можно «сконструировать» следующий способ позиционного представления чисел:

$$A = \underset{i}{\ } a_i \Phi_p^i, \qquad (114)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра *i*-го разряда системы счисления (114), i = 0, ±1, ±2, ±3, … , Φ_p - основание системы счисления (114).

Заметим, что выражение (114) было введено **Алексеем Стаховым** в 1980 г. [74] и названо *кодом золотой p-пропорции.* Теория кодов золотой *p*-пропорции изложена в книге [47].

Выражение (114) «генерирует» бесконечное количество новых позиционных систем счисления, так как каждому *p* (*p*=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (114). Заметим, что при *p*=0 основание $\Phi_p = \Phi_0 = 2$ и система счисления (111) сводится к классической двоичной системе (110).

Для случая *p*=1 основанием системы счисления (114) является классическая золотая пропорция $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ и система (114) сводится к системе Бергмана (108). Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (114), как весьма широкое обобщение двоичной системы (110) и системы Бергмана (108).

Заметим, что при $p > 0$ все основания Φ_p системы (114) являются иррациональными числами. Это означает, что система (114) задает новый, более широкий класс систем счисления с иррациональными основаниями. Единственным исключением является случай $p = 0$, при котором система (114) сводится к двоичной системе (110) – основы современной информационной технологии.

Таким образом, исследования **Джорджа Бергмана** [365] и **Алексея Стахова** [47, 74] привели к открытию нового класса позиционных систем счисления, которые могут стать основой новой информационной технологии – *«Золотой» Информационной Технологии.*

16.3. ***Коды золотой p-пропорции как новые (конструктивные) представления действительных чисел.*** Хотя статья Бергмана [365] содержит результат фундаментального характера для теории чисел, она не была замечена в тот период ни математиками, ни инженерами. Сам Бергман тоже до конца не понял значение своего открытия для развития математики и информатики. В заключение статьи [365] Бергман написал: “Я не знаю никакого полезного приложения данной системы, кроме умственного упражнения и приятного времяпровождения, хотя она может быть полезной для алгебраической теории чисел».

Рассмотрим выражения (108) и (114) с теоретико-числовой точки зрения. Прежде всего заметим, что выражения (108) и (114) можно рассматривать как новые (конструктивные) определения действительных чисел. Ясно, что сумма (114) задает бесконечное число таких представлений, так как каждому целому $p \ge 0$ соответствует свое собственное представление типа (114). Для каждого $p \ge 0$ представление (114) разделяет все действительные числа на две группы, *конструктивные числа*, которые могут быть представлены в виде конечной суммы степеней золотой p-пропорции в виде (114), и *неконструктивные числа*, которые не могут быть представлены в виде конечной суммы (114).

Ясно, что все степени золотой p-пропорции типа $\Phi_p^i\ (i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$ могут быть представлены в виде (114). Например,

$$\Phi_p^1 = 10; \Phi_p^2 = 100;\ \Phi_p^3 = 1000;\ \Phi_p^4 = 10000;$$

$$\Phi_p^{-1} = 0.1;\ \Phi_p^{-2} = 0.01;\ \Phi_p^{-3} = 0.001;\ \Phi_p^{-4} = 0.0001.$$

Это означает, что все иррациональные числа типа $\Phi_p^i\ (i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$ (степени золотой p-пропорции) являются *конструктивными числами* в рамках определения (114). Из определения (114) также вытекает, что все действительные числа, являющиеся суммами степеней золотой p-пропорции, также являются *конструктивными числами* в смысле (114). Например, действительное число $A = \Phi_p^2 + \Phi_p^{-1} + \Phi_p^{-3}$ в соответствии с (114) может быть представлено в виде следующей кодовой комбинации, имеющей конечное число битов:

$$A = 100.101.$$

Заметим, что возможность представления некоторых иррациональных чисел (степеней золотой p-пропорции и их сумм) в виде конечной совокупности «битов» является первым необычным свойством введенных выше позиционных представлений (114), потому что в традиционных системах счиления, в частности, двоичной, такое представление является принципиально невозможным.

16.4. *«Золотые» представления натуральных чисел.* Веса разрядов системы Бергмана (108) и кодов золотой p-пропорции (114) связаны между собой рекуррентными соотношениями (109) и (112), подобными рекуррентным соотношениям для чисел Фибоначчи (4) и p-чисел Фибоначчи (44), (45) соответственно. Это означает, что к системе Бергмана (108) и кодам золотой p-пропорции (114) можно применять микро-операции *свертки* и *развертки*. Применим эти микро-операции для представления натуральных чисел в системе Бергмана (108). Для этого представим вначале число 1 в системе Бергмана (108):

$$1 = \Phi^0 = 1.00\,. \tag{115}$$

Заметим, что в представлении (115) точка разделяет 0-й и (-1)-й разряды.

Применяя *развертку* к кодовому изображению (115), получим следующее изображение числа 1:

$$1 = \Phi^0 = 0.11\,. \tag{116}$$

Добавляя 1 в 0-й разряд кодового изображения (116), получим кодовое изображение числа 2:

$$2 = 1.11\,. \tag{117}$$

Применяя к кодовому изображению (111) *свертку,* получим новое изображение числа 2 (в минимальной форме):

$$2 = 10.01\,. \tag{118}$$

Добавляя 1 в 0-й разряд (118) и выполняя затем *свертку,* получим кодовое изображение числа 3 (в минимальной форме):

$$3 = 11.01 = 100.01. \qquad (119)$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, мы приходим к неожиданному заключению, что сумма

$$N = \sum_i a_i \Phi^i \qquad (120)$$

для любого натурального числа *N* состоит из конечного числа членов, то есть, любое натуральное число является *конструктивным числом* в системе (108), то есть, его кодовое изображение состоит из конечного числа битов. В дальнейшем сумму (120) будем называть Φ*-кодом* натурального числа *N*.

Доказано [85], что это утверждение справедливо для всех кодов золотой *p*-пропорции (114).

16.5. *Z-свойство натуральных чисел.* Рассмотрим Φ-код натурального числа *N*, задаваемый суммой (120). В «теории чисел Фибоначчи» [11, 14] известна следующая формула, связывающая степени золотой пропорции с числами Фибоначчи и Люка:

$$\Phi^i = \frac{L(i) + F(i)\sqrt{5}}{2}. \qquad (121)$$

Если в выражении (120) вместо Φ^i подставить его выражение, задаваемое формулой (121), то после несложных преобразований сумму (120) можно записать в виде:

$$2N = A + B\sqrt{5}, \qquad (122)$$

где

$$A = \sum_i a_i L(i) \qquad (123)$$

$$B = \sum_i a_i F(i). \qquad (124)$$

Исследуем «странное» выражение (122). «Странность» этого выражения состоит в том, что число $2N$, стоящее слева в (122), для любого натурального *N* является четным числом. С другой стороны, выражение справа в (122) является суммой числа *A*, задаваемого (123), и произведения числа *B*, задаваемого (124), на иррациональное число $\sqrt{5}$. Но в соответствии с (123) и (124) числа *A* и *B* всегда являются целыми числами, поскольку числа Фибоначчи и Люка, входяшие в суммы (123), (124), всегда являются целыми числами. Чтобы тождество (122) было справедливо для любого натурального *N*, мы должны потребовать выполнения двух условий:

$$B = \sum_i a_i F(i) = 0 \qquad (125)$$

$$A = \sum_i a_i L(i) = 2N. \qquad (126)$$

Сравним теперь суммы (123) и (120). Так как двоичные цифры a_i в этих суммах совпадают, то отсюда вытекает, что сумма (123) может быть получена из суммы (120), если в последней произвести простую подстановку: $F(i) \to \Phi^i$, для всех $i \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$. Но согласно (125) сумма, полученная в результате такой подстановки, тождественно равна 0 независимо от исходного натурального числа *N*.

В результате этих рассуждений мы доказали следующую теорему.

Теорема 1 (*Z*-свойство натуральных чисел). Если представить произвольное натуральное число *N* в систем Бергмана (120) и затем произвести подстановку типа $F(i) \to \Phi^i$, для всех $i \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$, то возникающая при этом сумма тождественно равна 0 независимо от исходного натурального числа N, то есть, имеет место тождество (125).

Тождество (126) приводит нас к еще одной теореме [85].

Теорема 2 (*D*-свойство натуральных чисел). Если представить произвольное натуральное число N в систем Бергмана (120) и затем произвести подстановку типа $L(i) \to \Phi^i$, для всех $i \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$, то возникающая при этом сумма независимо от исходного натурального числа N равна удвоенному натуральному числу N, то есть, имеет место тождество (126).

Заметим, что Теоремы 1 и 2 справедливы только для натуральных чисел, то есть они выражают некоторые новые свойства натуральных чисел. Таким образом, спустя два с половиной тысячелетия с момента начала теоретического изучения натуральных чисел были обнаружены их новые свойства [85]. И этими математическими открытиями мы обязаны *системе Бергмана* (108), открытой в 1957 г.!

16.6. *F- и L-коды.* А теперь рассмотрим еще два математических результата, вытекающих из Φ-кода (120). Если в Φ-коде (120), представляющем некоторое натуральное число N, произвести следующие подстановки $F(i+1) \to \Phi^i$ или $L(i+1) \to \Phi^i$, для всех $i \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$, то мы получим два новых представления этого же натурального числа N:

$$\boldsymbol{F}\text{-}\mathbf{код}: N = \sum_i a_i F(i+1) \tag{127}$$

$$\boldsymbol{L}\text{-}\mathbf{код}: N = \sum_i a_i L(i+1) \tag{128}$$

Существенно подчеркнуть, что двоичные разряды a_i ($i \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$) для Φ-кода (120), F-кода (127) и L-кода (128) совпадают, то есть одна и та же кодовая комбинация, состоящая из битов $a_i \in \{0,1\}$ ($i \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$) соответствует трем различным кодам: Φ-коду, F-коду и L-коду, представляющим одно и то же натуральное число N. В качестве примера рассмотрим «золотое» представление десятичного числа 10 в системе Бергмана:

$$10=10100.0101. \tag{129}$$

Для Φ-кода (120) «золотое» представление (129) имеет следующую алгебраическую интерпретацию:

$$10 = \Phi^4 + \Phi^2 + \Phi^{-2} + \Phi^{-4}. \tag{130}$$

Используя формулу (121), мы можем представить сумму (130) в виде:

$$10 = \frac{L(4)+F(4)\sqrt{5}}{2} + \frac{L(2)+F(2)\sqrt{5}}{2} + \frac{L(-2)+F(-2)\sqrt{5}}{2} + \frac{L-(4)+F(-4)\sqrt{5}}{2}. \tag{131}$$

Если учесть следующие соотношения, связывающие числа Фибоначчи

$$L(-2) = L(2); L(-4) = L(4); F(-2) = -F(2); F(-4) = -F(4),$$

то сумму (131) можно представить в виде:

$$10 = \frac{2\ L(4)+L(2)}{2} = L(4)+L(2) = 7+3.$$

Рассмотрим теперь интерпретации «золотого» представления (129) в виде F- и L-кодов:

$$10 = F(5)+F(3)+F(-1)+F(-3) = 5+2+1+2;$$

$$10 = L(5)+L(3)+L(-1)+L(-3) = 11+4-1-4.$$

16.7. *«Золотая» арифметика.* Для *системы Бергмана* (108) правила выполнения арифметических операций основываются на следующих тождествах, связывающих веса разрядов:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} \tag{132}$$

$$\Phi^n \times \Phi^m = \Phi^{n+m} \tag{133}$$

Тождество (132) лежит в основе микро-операций *свертки* и *развертки*, которые вместе с микро-операциями *перемещения* и *поглощения* образуют систему *базовых микро-операций* для сложения и вычитания. Ясно, что операции сложения и вычитания совпадают с аналогичными операциями в фибоначчиевой арифметике.

Соотношение (133) лежит в основе операции умножения. Таблица «золотого» умножения имеет следующий вид:

0×0	=	0
0×1	=	0
1×0	=	0
1×1	=	1

То есть, таблица «золотого» умножения совпадает с таблицей двоичного умножения.

Еще одно сходство с классической двоичной арифметикой – возможность представления «золотых» чисел в форме с плавающей запятой.

В качестве примера рассмотрим «золотое» умножение правильных дробей:

A=0.010010 и B=0.001010.

Перед умножением представим сомножители в форме с плавающей запятой:

$$A = 010010\times\Phi^{-6};\, B = 001010\times\Phi^{-6}.$$

Это означает, что мантиссы и порядки сомножителей A и B соответственно равны:

$$m(A) = 010010;\ e(A) = -6 \text{ and } m(B) = 001010; e(B) = -6.$$

Умножение мантисс:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

После сложения порядков: $e(A)+e(B) = -12$ и приведения результата умножения мантисс к минимальной форме получим результат умножения в форме с плавающей запятой:

$$A\times B = 00100000100\times\Phi^{-12}.$$

Деление в «золотой» арифметике выполняется подобно тому как это делается в двоичной арифметике, то есть сводится к сравнению и вычитанию; при этом вычитание осуществляется по правилам «золотой» арифметики.

17. «Золотые» аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи

17.1. *«Золотые» резистивные делители.* Рассмотрим делитель на Рис. 4, в котором значения резисторов $R1$, $R2$ и $R3$ выбраны следующим образом:

$$R1=\Phi_p^{-p}R;\, R2=\Phi_p^{p+1}R;\, R3=\Phi_p R, \tag{134}$$

где Φ_p - золотая p-пропорция, p=0,1,2,3,… .

Ясно, что делитель на Рис. 4 при условии (134) задает бесконечное число различных делителей, так как каждое p «генерирует» свой собственный деитель. В частности, при p=0 золотая p-пропорция $\Phi_p=\Phi_0=2$ и резисторы $R1$, $R2$ и $R3$ принимают следующие значения:

$$R1=R;\, R2=2R;\, R3=2R, \tag{135}$$

откуда вытекает, что при $p=0$ «золотой» делитель (134) сводится к классическому двоичному делителю, на котором основана вся современная цифровая метрология и техника аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразования.

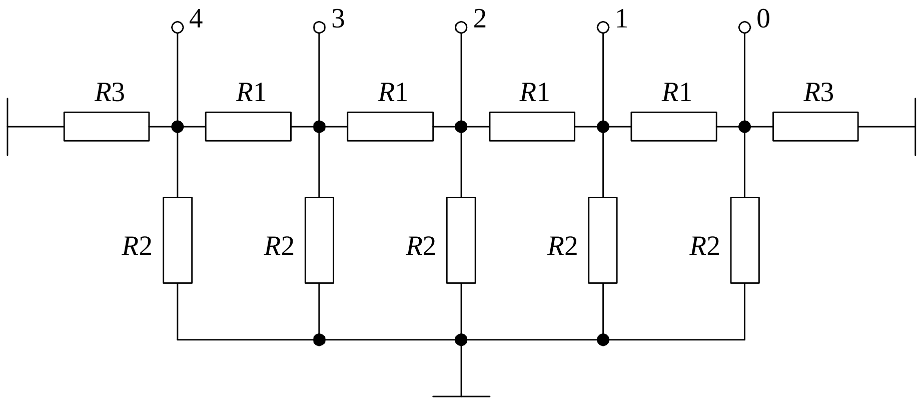

Рисунок 4. «Золотые» резистивные делители

Для случая p=1 резисторы $R1$, $R2$, $R3$ принимают следующие значения:

$$R1=\Phi^{-1}R;\, R2=\Phi^2 R;\, R3=\Phi R, \tag{136}$$

где $\Phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ - классическая золотая пропорция.

Для вывода математических соотношений, лежащих в основе «золотого» резистивного делителя на Рис. 4, будем использовать следующие тождества для золотой p-пропорции:

$$\Phi_p=1+\Phi_p^{-p} \tag{137}$$

$$\Phi_p^{p+2}=\Phi_p^{p+1}+\Phi_p. \tag{138}$$

Используя закон Ома и тождество (138), легко вычислить эквивалентное сопротивление резисторной цепи на Рис. 4 справа от точки 0 и слева от точки 4:

$$R_{e1}=\frac{R2\times R3}{R2+R3}=\frac{\Phi_p^{p+1}R\times\Phi_p R}{\Phi_p^{p+1}R+\Phi_p R}=R. \tag{139}$$

Используя выражение (139) и тождество (137), легко вычислить эквивалентное сопротивление резисторной цепи на Рис. 4 справа от точки 1 и слева от точки 3:

$$R_{e2}=\Phi_p^{-p}R+R=\Phi_p R. \tag{140}$$

Используя выражения (139), (140) и тождества (137), (138), легко показать, что эквивалентное сопротивление резистороной цепи на Рис. 4 слева или справа от любой точки 1, 2, 3 всегда задается выражением (140). Рассматривая эквивалентную схему резисторной цепи на Рис. 4 в любой точке 0, 1, 2, 3, 4 как параллельное соединение «вертикального» резистора $R2=\Phi^{p+1}R$ и двух эквивалентных резисторов справа и слева от точек 0, 1, 2, 3, 4, значения которых задаются выражением (140), мы можем вычислить эквивалентное сопротивление резистороной цепи на Рис. 4 в любой из точек 0, 1, 2, 3, 4:

$$R_{e3} = \frac{\Phi_p R \times R}{\Phi_p R + R} = \frac{\Phi_p}{\Phi_p + 1} R = \frac{1}{1+\Phi_p^{-1}} R. \quad (141)$$

Легко найти коэффициент передачи по напряжению между соседними точками 0-1, 1-2, ..., 3-4:

$$K_U = \frac{U}{\Phi_p}\ , \quad (142)$$

то есть, коэффициент передачи по напряжению между соседними точками 0, 1, 2, 3, 4 в резистивной цепи на Рис. 4 обратно пропорционален золотой p-пропорции Φ_p.

Заметим, что при $p = 0$ выражения (141) и (142) сводятся к хорошо известным выражениям:

$$R_{e3} = \frac{2}{3} R \quad \text{и} \quad K_U = \frac{U}{2}, \quad (143)$$

задающих свойства классического двоичного делителя.

Таким образом, «золотые» резистивные делители, основанные на золотой p-пропорции Φ_p, являются основой «золотой» метрологии [73] и "золотых» цифро-аналоговых и аналого-цифровых преобразователей [47, 76].

17.2. *"Золотые» цифро-аналоговые преобразователи.* Структурная схема «золотого» цифро-аналогового преобразователя (ЦАП), основанного на «золотом» резистивном делителе (Рис. 4), изображена на Рис. 5.

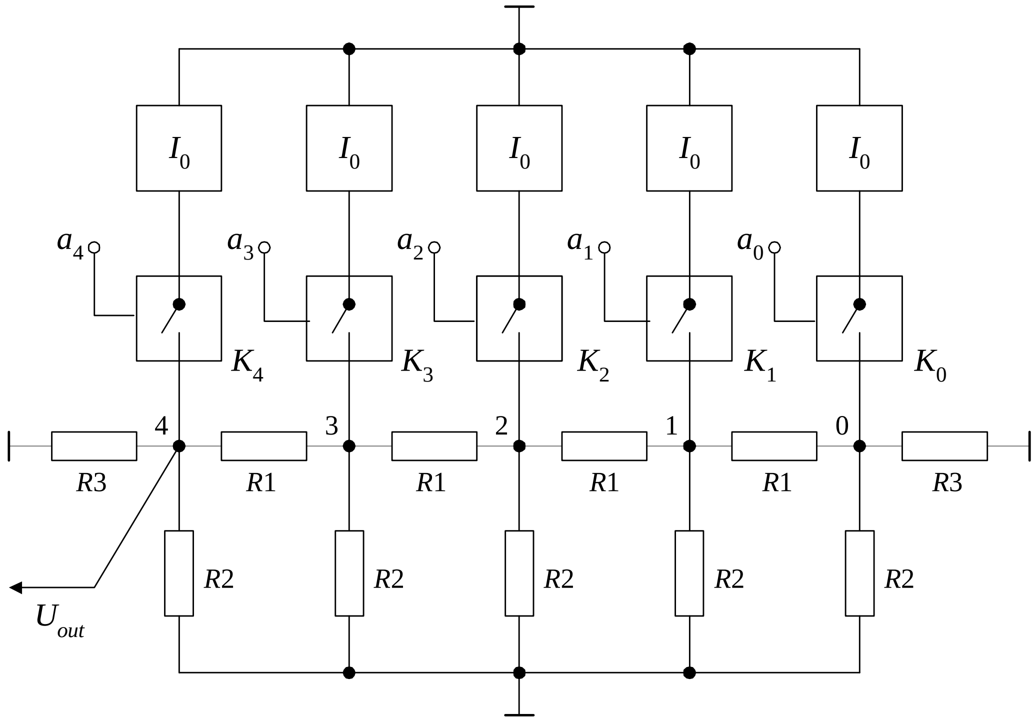

Рисунок 5. «Золотой» цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП)

ЦАП на Рис. 5 осуществляет преобразование «золотого» 5-разрядного кода в электрическое напряжение U_{out} на выходе ЦАП. Однако, число разрядов ЦАП может быть легко увеличено до произольного числа n путем расширения «золотого» резистивного делителя слева направо. «Золотой» ЦАП содержит 5 (n в общем случае) генераторов стандартного элекрического тока I_0 и 5 (n в общем случае) электрических ключей K_0-K_4. Состояния ключей управляются двоичными цифрами $a_4a_3a_2a_1a_0$ кода золотой p-пропорции

(114). Для случая $a_i = 1$ ключ K_i (i=0,1,2,3,…,n) находится в замкнутом положении, для случая $a_i = 1$ - в выключенном. Можно показать, что замкнутый ключ K_i приводит к появлению следующего напряжения в точке i:

$$U_i = \beta_p I_0 R, \tag{144}$$

где $\beta_p = 1 \Big/ \left(1 + \Phi_p^{-1}\right)$.

Так как напряжение (144) передается от i-й точки к (i+1)-й точке с коэффициентом передачи $1/\Phi_p$, тогда на выходе ЦАП возникнет следующее напряжение:

$$U_{out} = \frac{\beta_p I_0 R}{\Phi_p^{n\text{-}i\text{-}1}} = \frac{\beta_p I_0 R}{\Phi_p^{n-1} \times \Phi_p^{-1}} = \frac{\beta_p I_0 R}{\Phi_p^{n\text{-}1}} \times \Phi_p^i.$$

Используя принцип суперпозиции, легко вычислит напряжение на выходе ЦАП при подаче на вход ЦАП n-разрядного кода золотой p-пропорции $a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0$:

$$U_{out} = B_p \sum_{i=0}^{n\text{-}1} a_i \Phi_p^i, \tag{145}$$

где $B_p = \beta_p \, I_0 R \Big/ \Phi_p^{n\text{-}1}$.

Как следует из выражения (145), ЦАП на Рис. 5 преобразует код золотой p-пропорции $a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0$ в эквивалентное электрическое напряжение U_{out} с точностью до постоянного коэффициента B_p.

17.3. *Метрологический контроль «золотого» ЦАП*

В цифровой метрологии [73] существует поблема контроля линейности ЦАП в процессе производства и эксплуатации. Для классического двоичного ЦАП для контроля линейности используется следующее математическое соотношение, связывающее веса двоичных разрядов:

$$2^n = \sum_{i=0}^{n\text{-}1} 2^i + 1.$$

Математические свойства золотой пропорции дают широкие возможности для контроля линейности ЦАП. В частности, для случая p=1 контроль линейности «золотого» ЦАП основывается на следующих соотоношениях:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-3} + \Phi^{n-4} = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-3} + \Phi^{n-5} + \Phi^{n-6} = ... \tag{146}$$

Контроль ЦАП выполняется следующим образом. Контроль линейности ЦАП осуществляется путем последовательной *развертки* (слева направо) следующей входной «золотой» кодовой комбинации:

$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1. \end{matrix}$$

При этом выходное напряжение ЦАП U_{out} должно оставаться неизменным.

Используя операции *свертки* и *развертки*, мы можем контролировать линейность ЦАП для любой входной «золотой» кодовой комбинации, что обеспечивает возможность контроля ЦАП в процессе эксплутации.

17.4. *«Золотой» самокорректирующийся аналого-цифровой преобразователь.*

Наиболее широкую известность получили инженерные разработки СКТБ "Модуль" по проектированию «золотых» самокорректирующихся аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Исследования в этой области, выполненные в Винницком техническом университете, показали, что применение кодов Фибоначчи и "золотой пропорции" позволяет одновременно улучшить все технические параметры АЦП и ЦАП, в частности, точность, быстродействие и самое главное - температурную и временную метрологическую стабильность АЦП и ЦАП. Улучшение всех технических параметров таких АЦП и ЦАП достигалось за счет использования свойства "многозначности" фибоначчиевого и «золотого» представления одной и той же величины.

Приведем технические характеристики одного из таких АЦП, разработанного в СКТБ «Модуль»:

1. Число двоичных разрядов - 18 (17 цифровых и один знаковый)
2. Время преобразования - 15 мкс
3. Общая погрешность - 0,006%
4. Погрешность линейности - 0,003%
5. Частотный диапазон - 25 кГц
6. Рабочий диапазон температур - 20 ± 30°C.

В СКТБ «Модуль» с 1986 по 1989 гг. было налажено мелкосерийное производство такого АЦП. Наиболее важной технической характеристикой «золотого» АЦП являлась его высокая метрологическая стабильность и низкие требования к технологической точности изготовления аналоговых элементов АЦП. Это достигалось с помощью системы встроенного контроля аналоговой части АЦП, реализуемой с помощью специального микропроцессора. Благодаря встроенному контролю в АЦП осуществлялась периодическая автонастройка АЦП на заданную точность, чем и поддерживались высокие точностные параметры АЦП. По мнению известных измерительных фирм СССР, куда поставляло свои разработки СКТБ "Модуль", в СССР на тот период не было подобных разработок.

Подробное описание этой разрабоки можно найти в брошюре [49].

18. «Золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика

18.1. «*Золотое» троичное представление целых чисел.* Новая троичная арифметика, изложенная в работе [97], является оригинальным синтезом троичной симметричной системы счисления (87), использованой **Николаем Брусенцовым** в компьютере «Сетунь», и системы Бергмана (108). Для пояснения сути нового троичного способа представления чисел, основанного на «золотой пропорции», рассмотрим бесконечную последовательность четных степеней золотой пропорции:

$$\left\{\Phi^{2i}\right\}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \tag{147}$$

где $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ - золотая пропорция.

Ясно, что указанная последовательность (147) представляет собой геометрическую прогрессию с основанием $\Phi^2 = \left(3+\sqrt{5}\right)/2$. Последовательность (147) мы будем использовать в качестве весов разрядов для позиционного «троичного» представления чисел, используя троичные цифры $\left\{\bar{1}, 0, 1\right\}$.

Из теории золотого сечения известно следующее важное тождество, связывающее члены рассматриваемой последовательности:

$$\Phi^{2k} + \Phi^{2k} = 2\Phi^{2k} = \Phi^{2(k+1)} - \Phi^{2k} + \Phi^{2(k-1)}, \tag{148}$$

то есть, сумма двух одинаковых четных, то есть, (2*k*)-х степеней золотой пропорции равна алгебраической сумме трех четных степеней золотой пропорции, а именно 2(*k*+1)-й степени, взятой со знаком «плюс», (2*k*)-й степени, взятой со знаком «минус», и 2(*k*-1)-й степени, взятой со знаком «плюс». На языке «троичных» цифр 1, 0 и $\bar{1}$ указанное тождество имеет следующую кодовую интерпретацию:

$$1 + 1 = 1\bar{1}1. \tag{149}$$

Выражение (149) задает правило сложения положительных единиц в новой системе счисления. Это правило гласит, что при сложении положительных единиц необходимо записать отрицательную единицу $\bar{1}$ в текущий разряд промежуточной суммы и сформировать симметрично относительно текущего разряда две положительные единицы, которые являются переносами в соседние (слева и справа) разряды.

Ясно, что не существует никаких проблем по аналогии записать правило сложения отрицательных единиц:

$$\bar{1} + \bar{1} = \bar{1}1\bar{1}. \tag{150}$$

К указанным выше правилам добавим еще четыре правила, которые полностью совпадают с аналогичными правилами сложения в троичной симметричной системе счисления (87):

$$0 + 0 = 0; 1 + 0 = 1; \bar{1} + 0 = \bar{1}; 1 + \bar{1} = 0.$$

В результате получается следующая таблица сложения чисел в новой системе счисления. Эта таблица задает правило сложения двух одноименных троичных разрядов $a_k + b_k$:

a_k / b_k	1	0	$\bar{1}$
1	$1\bar{1}1$	1	0
0	1	0	$\bar{1}$
$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}1\bar{1}$

(151)

Теперь используем таблицу (151) для «конструирования» изображений натуральных чисел в «золотой» троичной системе счисления, в которой весами разрядов являются четные степени золотой пропорции.

Поскольку $1=\Phi^0$, то число 1 в новой системе счисления мы можем представить с помощью следующей записи: 1 = 1,0. Заметим, что запятая, стоящая после 1, означает, что 1 относится к нулевому разряду.

Для получения записи числа 2 используем указанное выше правило (149) для сложения двух положительных единиц. В соответствии с этим правилом число 2 можно представить в виде следующей записи:

$$2=1\bar{1},1. \tag{152}$$

Запись означает, что число 2 может быть выражено в виде суммы трех четных степеней золотой пропорции, то есть,

$$2=\Phi^2-\Phi^0+\Phi^{-2}. \tag{153}$$

Добавляя теперь положительную единицу к нулевому разряду кодовой записи числа 2, получим «троичную» запись числа:

$$3 = 10,1. \tag{154}$$

Эта запись означает ни что иное, как сокращенную цифровую запись следующего выражения:

$$3=\Phi^2+\Phi^{-2}. \tag{155}$$

Заметим, что выражение (155) представляет собой формулу Бине для чисел Люка (11), соответствующую случаю n=2. Число Люка $L(2)=3$.

Ясно теперь, что число 4 имеет следующую цифровую запись:

$$4=11,1, \tag{156}$$

что является цифровой записью следующей суммы:

$$4=\Phi^2+\Phi^0+\Phi^{-2}. \tag{157}$$

Для получения цифровой записи числа 5 добавим 1 к нулевому разряду цифровой записи числа 4, задаваемой (156). В результате этого в соответствии с рассмотренным выше правилом сложения положительных единиц (149) на первом шаге сложения в нулевом разряде промежуточной суммы записывается отрицательная единица $\bar{1}$, при этом из 0-го разряда формируются переносы двух положительных единиц в соседние разряды справа и слева от нулевого разряда. На следующем шаге сложения в соответствием с тем же правилом (149) в соседних разрядах справа и слева от нулевого записываются отрицательные единицы $\bar{1}$ и из них возникают переносы положительных единиц в соседние разряды. Поскольку при этом в нулевой разряд приходят два переноса положительных единиц (от разрядов справа и слева), то после их суммирования с отрицательной единицей, которую мы записали в нулевой разряд на первом этапе сложения, в нулевом разряде будет записана положительная единица $\left(1+1+\bar{1}=1\right)$. В конечном итоге в результате этих преобразований мы получим следующее изображение числа:

$$5=1\bar{1}1,\bar{1}1. \tag{158}$$

Продолжая эти рассуждения, мы получим изображения всех других натуральных чисел, в частности:

$$6=10\,\bar{1},01;\quad 7=10\,0,01;\quad 8=10\,1,01;\quad 9=11\bar{1},11;\quad 10=11\,0,11. \tag{159}$$

Таким образом, в результате проведенных рассуждений мы пришли к следующему позиционному представлению целых чисел:

$$N = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \left(\Phi^2\right)^i, \qquad (160)$$

где c_i – троичная цифра $\left(\bar{1},0,1\right)$ i-го разряда, $\left(\Phi^2\right)^i$– вес i-го разряда позиционного представления (160).

Сумму (160) мы будем называть *троичным* Φ*-кодом целого числа N*.

18.2. ***Представление отрицательных чисел.*** Если к троичному Φ-коду натурального числа N применить правило «троичной инверсии» (88), то в результате мы получим отрицательное число $-N$. Таким образом, с помощью троичного Φ-кода (160) в «прямом коде» могут быть представлены положительные и отрицательные целые числа, что является важным техническим преимуществом троичного Φ-кода (160).

18.3. ***Основание троичного*** Φ***-кода.*** Как вытекает из (160), основанием троичного Φ-кода (160) является иррациональное число

$$\Phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \qquad (161)$$

то есть, троичный Φ-код (160) относится к категории систем счисления с иррациональными основаниями.

18.4. ***Преобразование «золотого» двоичного кода в «золотой» троичный код.*** Существует простой способ преобразования «золотого» двоичного кода (двоичного Φ-кода) в «золотой» троичный код (троичный Φ-код) [97]. Рассмотрим двоичный Φ-код, задаваемый (120). Для преобразования представим Φ-код (120) в минимальной форме. Последнее означает, что каждая двоичная единица a_k=1 в двоичном Φ-коде (120) всегда окружена двумя соседними нулями $a_{k-1} = a_{k+1} = 0$.

Рассмотрим следующее тождество для золотой пропорции:

$$\Phi^k = \Phi^{k+1} - \Phi^{k-1}. \qquad (162)$$

Тождество (162) имеет следующую кодовую интерпретацию:

$k+1$	k	$k-1$		$k+1$	k	$k-1$
0	1	0	=	1	0	$\bar{1}$

(163)

где $\bar{1}$ отрицательная единица, то есть, $\bar{1} = -1$. Из (163) вытекает, что положительная двоичная 1 k-го разряда в «золотом» двоичном коде может быть преобразована в две единицы – положительную единицу (k+1)-го разряда и отрицательную единицу $\bar{1}$ (k-1)-го разряда. При этом в k-м разряде будет записан 0. Если теперь применить преобразование (163) ко всем двоичным разрядам с нечетными индексами (k=2m+1) Φ-кода натурального числа N, представленного в минимальной форме, то мы получим *троичный* Φ*-код*, задаваемый (160).

Преобразование трех соседних двоичных цифр a_{2i+1} a_{2i} a_{2i-1} исходного Φ-кода в троичную цифру c_i троичного Φ-кода осуществляется с помощью простой комбинационной логической схемы, основанной на следующей таблице:

a_{2i+1}	a_{2i}	a_{2i-1}	$\to$	c_i
0	0	0	$\to$	0
0	0	1	$\to$	1
0	1	0	$\to$	1
1	0	0	$\to$	$\bar{1}$
1	0	1	$\to$	0

(164)

18.5. ***Понятия троичного F-кода и L-кода.*** Выше при изучении Φ-кода (120) мы ввели понятия F-кода (127) и L-кода (128), которые получаются из Φ-кода (120) путем замены каждой степени золотой пропорции Φ^i $\left(i = 0,\pm1,\pm2,\pm3,...\right)$ на числа Фибоначчи $F\left(i+1\right)$ и числа Люка $F(i+1)$. Если в троичном Φ-коде (160) произвести такую же подстановку, то в результате мы придем к новым троичным представлениям, называемым *троичным F-кодом* и *троичным L-кодом*:

$$N=\sum_i c_i F_{2i+1} \tag{165}$$

$$N=\sum_i c_i L_{2i+1}. \tag{166}$$

18.6. ***Свойство зеркальной симметрии.*** Ниже в таблице приведены «золотые» троичные представления начального ряда натуральных чисел. Анализ этой таблицы позволяет обнаружить одно интересное свойство «золотого» троичного кода (159). В любом троичном Φ-коде (160) нулевой разряд разбивает троичную кодовую комбинацию на две зеркально-симметричных части – в этом и состоит *свойство зеркальной симметрии,* характерное для всех троичных Φ-кодов (160). Основываясь на этом фундаментальном свойстве, мы будем называть троичный Φ-код (160) *троичной зеркально-симметричной системой счисления.*

i	3	2	1	0	–1	–2	–3
τ^{2i}	τ^6	τ^4	τ^2	τ^0	τ^{-2}	τ^{-4}	τ^{-6}
F_{2i+1}	13	5	2	1	1	2	5
L_{2i+1}	29	11	4	1	–1	–4	–11
N	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	0	0	0	0.	0	0	0
1	0	0	0	1.	0	0	0
2	0	0	1	$\bar{1}$.	1	0	0
3	0	0	1	0.	1	0	0
4	0	0	1	1.	1	0	0
5	0	1	$\bar{1}$	1.	$\bar{1}$	1	0
6	0	1	0	$\bar{1}$.	0	1	0
7	0	1	0	0.	0	1	0
8	0	1	0	1.	0	1	0
9	0	1	1	$\bar{1}$.	1	1	0
10	0	1	1	0.	1	1	0

18.7. ***Диапазон представления чисел в троичной зеркально-симметричной системе счисления.*** Пусть n=2m+1 – число разрядов троичного Φ-кода (160). Тогда с помощью (2m+1)-разрядного троичного кода (160) можно представить некоторое множество целых чисел в диапазоне от максимального числа

$$N_{\max}=\underbrace{11\ldots1}_{m}1.\underbrace{11\ldots1}_{m} \tag{167}$$

до минимального числа

$$N_{\min}=-N_{\max}=\underbrace{\bar{1}\bar{1}\ldots\bar{1}}_{m}\bar{1}.\underbrace{\bar{1}\bar{1}\ldots\bar{1}}_{m}. \tag{168}$$

Ясно, что $|N_{\min}|=N_{\max}$. Это означает, что с помощью (2m+1)-разрядного троичного кода (160) можно представить 2$N_{\max}$+1 целых чисел. В работе [97] доказано, что $N_{\max}$=L(2m+1), где L(2m+1) – число Люка. Отсюда вытекает, что с помощью (2m+1)-разрядного троичного кода (160) можно представить [2L(2m+1)+1] целых чисел в диапазоне от $N_{\max}$=L(2m+1) до $N_{\min}$= - L(2m+1).

18.8. ***Зеркально-симметричное сложение и вычитание.*** Для сложения чисел в новой системе счисления будем использовать рассмотренную выше таблицу (151). Однако при сложении многоразрядных чисел необходимо учитывать переносы, которые возникают в k-й разряд при сложении (k+1)-х и (k-1)-х разрядов слагаемых. При этом могут быть использованы следующие тождества:

$$3\Phi^{2k} = \Phi^{2(k+1)} + \Phi^{2(k-1)} \tag{169}$$

$$4\Phi^{2k} = \Phi^{2(k+1)} + \Phi^{2k} + \Phi^{2(k-1)} \tag{170}$$

где k=0,±1,±2,±3,… .

Тождество (169) означает, что при сложении трех положительных единиц в (2k)-м разряде суммы записывается 0 и при этом возникают два положительных переноса в соседние разряды. Тождество (170) означает, что при сложении четырех положительных единиц в (2k)-м разряде суммы записывается 1 и при этом возникают два положительных переноса в соседние разряды. На Рис. 6 представлены схематические изображения троичных зеркально-симметричных смматоров. Сумматор на Рис. 6-a реализует правило (151) и называется *троичным зеркально-симметричным полусумматором*. Сумматор на Рис. 6-b реализует правила (169) и (170) и называется *троичным зеркально-симметричным полным сумматором*. В этом сумматоре учитываются переносы, которые возникают из соседних разрядов.

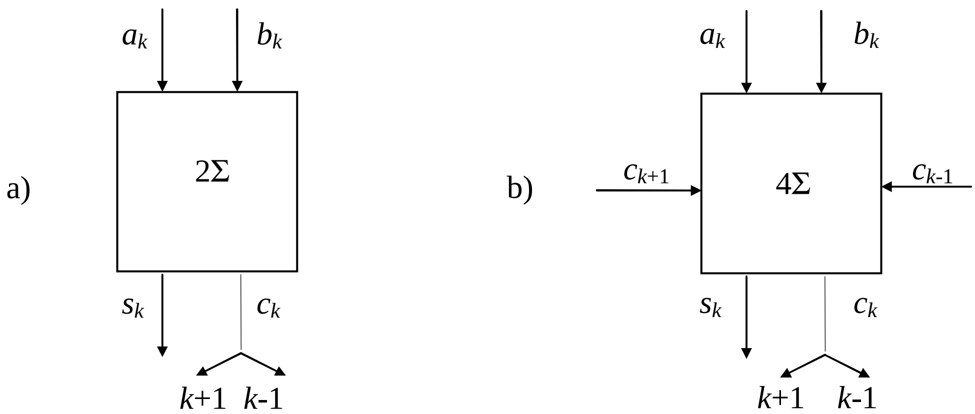

Рисунок 6. Троичные зеркально-симметричные сумматоры:
(a) полусумматор; (b) полный сумматор

На Рис. 7 изображена структурная схема троичного зеркально-смметричного многоразрядного сумматора.

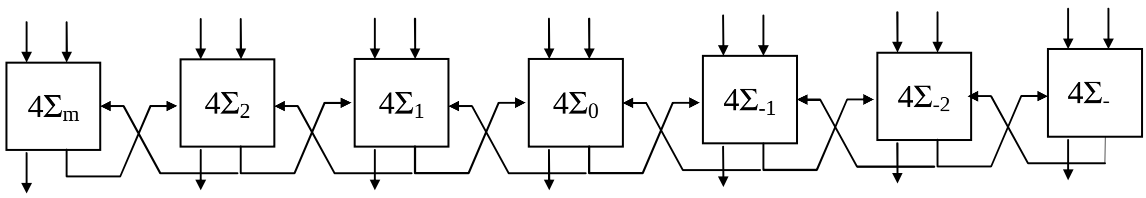

Рисунок 7. Троичный зеркально-смметричный многоразрядный сумматор

Мы можем видеть из Рис. 7, что основная особенность сумматора состоит в том, что перенос из каждого разряда распостраняется симметрично в два соседних разряда вправо и влево. Одноразрядный сумматор $4\Sigma_0$ разделяет многоразрядный суммматор на две части: одноразрядные сумматоры $4\Sigma_1, 4\Sigma_2, 4\Sigma_3$ старших разрядов и одноразрядные сумматоры $4\Sigma_{-1}, 4\Sigma_{-2}, 4\Sigma_{-3}$ младших разрядов.

Рассмотрим пример сложения двух троичных зеркально-симметричных чисел 5 и 10:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
5 & = & 0 & 1 & \bar{1} & 1, & \bar{1} & 1 & 0 \\
10 & = & 0 & 1 & 1 & 0, & 1 & 1 & 0 \\
S_1 & = & 0 & \bar{1} & 0 & 1, & 0 & \bar{1} & 0 \\
C_1 & & 1 & \leftrightarrow & 1 & & 1 & \leftrightarrow & 1 \\
\hline
15 & = & 1 & \bar{1} & 1 & 1, & 1 & \bar{1} & 1
\end{array}
$$

Здесь символ $\leftrightarrow$ означает процесс распространения переносов.

Мы можем видеть, что процесс суммирования для данного случая состоит из двух шагов. Первый шаг – это формирование первой троичной зеркально-симметричной многоразрядной промежуточной суммы S_1 и первого троичного зеркально симметричного переноса C_1. Второй этап – это суммирование чисел S_1+C_1. Так как для этого случая второй пернос C_1=0, то это означает, что суммирование закончено и сумма S_1+C_1=15 представляет собой искомый результат. Важно подчеркнуть, что результат суммирования представлен в зеркально-симметричной форме.

Важное преимущество троичной зеркально-симметричной системы счисления (160) состоит в возможности суммирования всех целых чисел (положительных и отрицательных) в прямом коде, то есть без использования понятий инверсного и дополнительного кодов. В качестве примера рассмотрим сложение отрицательного числа (-24) с положительным числом 15:

$$
\begin{array}{rccccccc}
-24 = & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1, & 0 & \bar{1} & \bar{1} \\
15 = & 1 & \bar{1} & 1 & 1, & 1 & \bar{1} & 1 \\
S_1 & 0 & 1 & 1 & \bar{1}, & 1 & 1 & 0 \\
C_1' = & & \downarrow & 1 & \leftrightarrow & 1 & \downarrow & \\
C_1'' = & \bar{1} & \leftrightarrow & \bar{1} & & \bar{1} & \leftrightarrow & \bar{1} \\
-9 = & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1}, & 1 & 1 & \bar{1}
\end{array}
$$

Важно подчеркнуть, что результат сложения (отрицательное число -9) представлен в «зеркально-симметричной форме»!

Вычитание двух зеркально-симметричных чисел N_1 - N_2 сводится к зеркально-симметричному сложению, если мы представим их разность в следующей форме:

$$N_1 - N_2 = N_1 + (- N_2).$$

Как следует из этого выражения, перед вычитанием необходимо взять троичную инверсию от числа N_2 и затем выполнить зеркально-симметричное сложение.

18.9. ***Зеркально-симметричное умножение и деление.*** В основе зеркально-симметричного умножения лежит следующее тривиальное тождество, связывающее степени золотой пропорции:

$$\Phi^{2k} \times \Phi^{2m} = \Phi^{2(k+m)} \qquad (171)$$

Правило «зеркально-симметричного умножения» двух одноразрядных троичных зеркально-симметричных чисел b_k и a_m, основанное на тождестве (171), задается следующей таблицей:

b_k / a_m	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
0	0	0	0
1	$\bar{1}$	0	1

(172)

Умножение выполняется в прямом коде. Общий алгоритм умножения двух зеркально-симметричных чисел сводится к формированию частичных произведений в соответствии с таблицей (172) и их сложению в соответствии с таблицей зеркально-симметричного сложения (151). В качестве примера умножим отрицательное число $-6 = \bar{1}01{,}0\bar{1}$ на положительное число $2 = 1\bar{1}{,}1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \bar{1} & 0 & 1. & 0 & \bar{1} & \\
 & & 1 & \bar{1}. & 1 & & \\
\hline
 & & \bar{1} & 0. & 1 & 0 & \bar{1} \\
 & 1 & 0 & \bar{1}. & 0 & 1 & \\
\bar{1} & 0 & 1 & 0. & \bar{1} & & \\
\hline
\bar{1} & 1 & 0 & \bar{1}. & 0 & 1 & \bar{1}
\end{array}$$

Результат умножения в рассматриваемом примере формируется как сумма трех частичных произведений. Первое частичное произведение $\bar{1}0{,}10\bar{1}$ есть результат умножения зеркально-симметричного числа $-6 = \bar{1}01{,}0\bar{1}$ на младшую положительную единицу зеркально-симметричного числа $2 = 1\bar{1}{,}1$, второе частичное произведение $10\bar{1}{,}01$ есть результат умножения того же самого числа $-6 = \bar{1}01{,}0\bar{1}$ на среднюю отрицательную единицу числа $2 = 1\bar{1}{,}1$ и, наконец, третье частичное произведение $\bar{1}010{,}\bar{1}$ есть результат умножения того же самого числа $-6 = \bar{1}01{,}0\bar{1}$ на старшую положительную единицу числа $2 = 1\bar{1}{,}1$.

Заметим что произведение равно отрицательному числу $-12 = \bar{1}101{,}01\bar{1}$, которое сохраняет свойство «зеркальной симметрии». Так как старшая цифра произведения является отрицательной единицей, отсюда вытекает, что произведение является отрицательным числом.

Зеркально-симметричное деление выполняется в соответствии с правилами деления в классической троичной симметричной системе счисления (87). Общий алгоритм троичного зеркально-симметричного деления сводится к последовательному вычитанию из делимого сдвинутого делителя, умноженного на очередную троичную цифру промежуточного частного.

18.10. ***Основное преимущество троичной зеркально-симметричной системы счисления.*** Самое важное преимущество «зеркально-симметричной арифметики» состоит в том, что свойство «зеркальной симметрии» является «инвариантом» относительно всех арифметических операций над целыми числами, то есть результаты сложения, вычитания, умножения и даже деления всегда представляются в зеркально-симметричной форме. **А это означает, что найден новый универсальный способ контроля всех арифметических операций в компьютере, основанный на свойства зеркальной симметрии троичных представлений.**

19. Новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи.

19.1. ***Алгебраическая теория корретирующих кодов: общие принципы обнаружения и коррекции ошибок.*** В современной информатике широко используются так называемые *алгебраические коррретирующие коды*. Основная идея таких кодов (код Хемминга, коды Рида-Соломона, циклические коды и др.) [367, 368] состоит в следующем. Пусть исходная кодовая комбинация (КК), называемая *информационной*, состоит из n бит. Для образования корректирующего кода мы добавляем к информационной n-разрдной КК m корретирующих битов и образуем k-разрядную КК коррректирующего кода или (k,n)-кода, где $k=n+m$. Корррекирующие биты образуются из информационной КК путем сложения по «модулю 2» определенных (проверочных) групп информационных разрядов. Все КК корректирующего (k,n)-кода называются *разрешенными КК*. Ясно, что число разрешенных КК совпадает с числом всех возможных информационных КК и равно 2^n. С другой стороны длина каждой разрешенной КК a_1 a_2 a_3 … a_k равна $k=n+m$. Это означает, что число всех возможных КК длины $k=n+m$ равно $2^k=2^{n+m}$. Разделим множество всех возможных k-разрядных КК на две непересекающиеся группы. К первой группе отнесем 2^n *разрешенных КК*, ко второй – все остальные 2^k - 2^n КК, которые мы будем называть *запрещенными КК*. При передаче информации мы посылаем в канал связи одну из 2^n разрешенных КК. Под влиянием помех, действующих в канале, эта разрешенная КК может перейти в одну из 2^k возможных КК. Если рассмотреть все возможные варианты, то мы можем вычислить потенциальное число всех возможных переходов, которые могут возникнуть при передаче всех разрешенных КК корректирующего кода. Оно равно: $N=2^n\times2^k$. Принцип обнаружения ошибок состоит в фиксации запрещенной КК, которая может появиться на выходе канала связи. Все возможные переходы можно разделить на *обнаруживаемые* и *необнаруживаемые*. Обнаруживаемый переход – это такой переход, который приводит к возникновению на выходе канала запрещенной КК. Необнаруживаемые переходы – это такие, которые приводят к появлению на выходе канала другой разрешенной КК. Ясно, что число всех обнаруживаемых переходов для каждой КК корректирующего (k,n)-кода совпадает с числом запрещенных КК и равно 2^k-2^n. Если рассмотреть ситуацию для всего множества разрешенных КК, то можно вычислить число всех обнаруживаемых переходов; оно равно $N_d=2^n\times(2^k$-$2^n)$. Если теперь мы вычислим отношение N_d/N, мы получим первую важную характеристику коррректирующего кода, называемую *птенциальным коэффициентом обнаружения ошибок*:

$$S_d=\frac{N_d}{N}=\frac{2^n(2^k-2^n)}{2^n2^k}=1-\frac{1}{2^m}, \tag{173}$$

где m – число корректирующих разрядов.

Принцип коррекции ошибок состоит в следующем. Все 2^k-2^n запрещенные КК разбиваются на 2^n непересекающихся подмножества $M_1,M_2,M_3,\ldots,M_n$, где 2^n – число разрешенных кодовых комбинаций. Каждая разрешенная КК приписывается к одному из 2^n подмножеств: $a_1\to M_1, a_2\to M_2, a_3\to M_3, \ldots.$ Тогда принцип коррекции состоит в следующем. Если мы получем запрещенную КК, которая принадлежит к подмножеству M_i, мы считаем, что была передана разрешенная КК A_i. В этом случае мы корректируем правильно только те ошибочные КК из множества M_i, которые были образованы из разрешенной КК A_i. В противном случае коррекция ошибки будет выполняться неправильно. Ясно, что число корректируемых ошибочных переходов N_c равно числу всех запрещенных КК, то есть, $N_c=2^k$ - 2^n.

Потенциальный коэффициент коррекции ошибок вычисляется как отношение всех корректируемых переходов N_c к числу всех обнаруживаемых переходов, то есть,

$$S_c=\frac{N_c}{N_d}=\frac{2^k-2^n}{2^n(2^k-2^n)}=\frac{1}{2^n}, \tag{174}$$

где n – число информационных битов в КК коррректирующего (n,k)-кода.

Анализ формул (173) и (174) позволяет сделать некоторые важные выводы, касающиеся эффективности корректирующих алгебраических кодов. Формула (173) показывает, что потенциальный коэффициент обнаружения ошибок увеличивается экспоненциально и стремится к 100% по мере увеличения m. Напомним, что m – это число корректирующих разрядов. Этот факт подтверждает высокую эффективность корректирующих кодов в обнаружении ошибок, которая увеличивается с увеличением числа корректирующих разрядов. В то же время формула (174) показывает, что потенциальный коэффициент коррекции ошибок эспоненциально уменьшается по мере увеличения числа информационных разрядов n. Например, (15,11)-код Хемминга, гарантирующий исправление всех одиночных ошибок, позволяет обнаружить $2^{11}\times(2^{15}-2^{11})$=62,914,560 ошибочных переходов. При этом он может гарантировать правильную коррекцию только $2^{15}-2^{11}$=30,720 из этих ошибочных переходов, то есть, он может потенциально правильно корректировать только 30,720/62,914,560=0.0004882 (0.04882%) ошибочных переходов из общего числа ошибочных переходов. Естественно возникает вопрос о целесообразности практического использования корректирующих алгебраических кодов с такой низкой потенциальной корректирующей способностью для корррекции ошибок. Специалисты в области корректирующих кодов как правило не отвечают на этот вопрос. Однако, во всех учебниках по теории кодирования они описывают рассмотренный выше (15,11)-код Хемминга как одно из высших достижений алгебраической теории кодирования.

Из проведенных рассуждений вытекает первый существенный недостаток алгебраической теории корректирующих кодов [367, 368]: **алгебраические корректирующие коды обладают очень низкой потенциальной корретирующей способностью, которая стремится к нулю с увеличением длины информационной кодовой комбинации.**

Второй их недостаток состоит в том, что объектом коррекции являются очень мелкие информационные элементы – биты или их комбинации.

Возникает вопрос: нельзя ли создать новую теорию корректирующих кодов, которые позволяют корретировать не биты, а значительно более крупные информационные объекты, например, числа или даже файлы.

Одно из направлений создания новой теории корректирующих кодов основано на использовании *теории матриц* [369].

19.2. ***Невырожденные или несингулярные матрицы.*** Квадратная матрица A называется *невырожденной* или *несингулярной*, если существует квадратная матрица B такая, что

$$AB=I \text{ and } BA=I,$$

где I есть единичная матрица. Матрица B называется инверсной к матрице A и обозначается $B = A^{-1}$.

Основное свойство невырожденной матрицы A состоит в том, что ее детерминант не равен 0 [369], то есть, $\det A \neq 0$. Заметим, что все рассмотренные выше матрицы Фибоначчи (55, 57, 59, 60, 61, 63, 66, 67, 68, 69, 71) и «золотые» матрицы (75, 76, 77, 78, 81, 82, 83, 84) являются невырожденными матрицами, поскольку их детерминант равен 1 или (-1).

19.2. ***Метод кодирования-декодирования, основанный на матрицах Фибоначчи.*** Разобъем исходное сообщение M на 4 части $M = m_1 m_2 m_3 m_4$ и представим его в виде квадратной (2×2)-матрицы:

$$M = \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{matrix} . \qquad (175)$$

Заметим, что элементы матрицы M являются целыми неотрицательными числами. Потребуем, чтобы элементы m_1, m_2, m_3, m_4 были выбраны таким образом, чтобы матрица M была *невырожденной* матрицей с детерминантом

$$\det M = m_1 m_2 - m_2 m_3 \neq 0. \tag{176}$$

В простейшем случае мы будем использовать для кодирования простейшую Q-матрицу Фибоначчи Q^n, задаваемую (57). Для декодирования будем использовать инверсные Q-матрицы Фибоначчи Q^{-n}, задваемые (59) или (60). Тогда процесс кодирования-декодирования состоит в следующем:

Кодирование	Декодирование
$M \times Q^n = E$	$E \times Q^{-n} = M$

(177)

Таким образом, *кодирование* состоит в умножении исходной матрицы (175) на *кодирующую матрицу* Q^n; в результате мы получаем *кодовую матрицу* E:

$$E = M \times Q^n = \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{matrix} \times \begin{matrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{matrix} = \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{matrix}, \tag{178}$$

элементы которой задаются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} e_1 &= F(n+1)m_1 + F(n)m_2; \quad e_2 = F(n)m_1 + F(n-1)m_2; \\ e_3 &= F(n+1)m_3 + F(n)m_4; \quad e_4 = F(n)m_3 + F(n-1)m_4. \end{aligned} \tag{179}$$

Заметим, что при $n \geq 1$ числа Фибоначчи всегда являются неотрицательными целыми числами; тогда из (179) вытекает, что элементы кодовой матрицы e_1, e_2, e_3, e_4 всегда являются целыми неотрицательными числами.

Декодирование состоит в умножении кодовой матрицы E на декодирующую матрицу Q^{-n}. После декодирования, исходная матрица M получается из кодовой матрицы E в результате следующих преобразований:

$$M = \begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{matrix} = E \times Q^{-n} = \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{matrix} \times Q^{-n}. \tag{180}$$

Для случая $n=2k+1$ мы можем использовать в качестве декодирующей инверсную матрицу (60) и тогда формула (180) принимает следующий вид:

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{matrix} = \begin{matrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{matrix} \times \begin{matrix} -F(n-1) & F(n) \\ F(n) & -F(n+1) \end{matrix}. \tag{181}$$

Из (181) вытекает, что элементы матрицы M могут быть вычислены через элементы кодовой матрицы E следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 &= -F(n-1)e_1 + F(n)e_2; \quad m_2 = F(n)e_1 - F(n+1)e_2; \\ m_3 &= -F(n-1)e_3 + F(n)e_4; \quad m_4 = F(n)e_3 - F(n+1)e_4. \end{aligned} \tag{182}$$

19.3. *Основные контрольные соотношения.* Вычислим детерминант кодовой матрицы $E = M \times Q^n$:

$$\det E = \det\left(M \times Q^n\right) = \det M \times \det Q^n. \tag{183}$$

Используя тождество (58), мы можем записать:

$$\det E = \det M \times (-1)^n \tag{184}$$

Это и есть *основное контрольное соотношение* для нового метода кодирования информации, задаваемого таблицей (177). Его суть состоит в том, что **детерминант кодовой матрицы *E* полностью определяется детерминантом исходной матрицы *M*; при этом при четном *n*=2*k* детерминанты матриц *E* и *M* совпадают, а при нечетном *n*=2*k*+1 – противополжны по знаку.**

В работе [105] выведены дополнительные контрольные соотношения, связывающие элементы кодовой матрицы (178):

$$e_1 \approx \Phi e_2 : e_3 \approx \Phi e_4, \quad (185)$$

где $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ - золотая пропорция. Заметим, что приближенные равенства (185) становятся все более точными по мере увеличения степени *n* кодирующей матрицы Q^n.

19.4. ***Понятие «ошибки».*** Таким образом, метод кодирования-декодированя, задаваемый таблицей (177), обладает важными контрольными соотношениями (184) и (185), которые могут быть использованы для обнаружения и эффективного исправления «ошибок», возникающих в кодовой матрице в процессе ее передачи по каналу связи. Для реализации этих контрольных соотношений детерминант исходной матрицы $\det M$ должен быть направлен в канал связи вслед за элементами кодовой матрицы *E*.

Прежде всего мы должны уточнить понятие «ошибки», используемое в новом методе кодирования. Заметим, что в данном случае мы имеем дело не с битами, которые являются основными информационными объектами обнаружения и исправления ошибок в классической теории избыточных кодов [367, 368], а с числами, которые являются элементами кодовой матрицы *E*. При этом под «ошибкой» понимается отклонение элемента матрицы от его номинального значения. Например, если один из элементов матрицы, вычисленный согласно (179), равен числу 235, то любое его отклонение от этого значения, которое может возникнуть в канаде связи под воздействием «помех», может рассаматриваться как «ошибка». Ясно, что в кодовой (2×2)-матрице могут возникать одиночные, двойные, тройные и четверные ошибки в указанном выше смысле.

<u>Одиночные ошибки</u>

$$\begin{pmatrix} x & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & y \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ z & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & v \end{pmatrix}, \quad (186)$$

<u>Двойные ошибки</u>

$$\begin{pmatrix} x & y \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x & e_2 \\ z & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x & e_2 \\ e_3 & v \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x & y \\ z & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & y \\ z & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & y \\ e_3 & v \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ z & v \end{pmatrix}. \quad (187)$$

<u>Тройные ошибки</u>

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & e_4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & y \\ e_3 & v \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x & e_2 \\ z & v \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_1 & y \\ z & v \end{pmatrix}. \quad (188)$$

<u>Четвертная ошибка</u>

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}. \quad (189)$$

19.5. ***Обнаружение и исправление ошибок.*** Для обеспечения возможности обнаружения и исправления ошибок в канал связи вслед за элементами кодовой матрицы e_1, e_2, e_3, e_4 посылается «контрольный элемент» $\det M$. Этот «контрольный элемент» привносит наибольший вклад в кодовую избыточность метода кодирования. Как показано в [105], нижняя оценка относительной избыточности составляет 0,33 (33%), что соизмеримо, например, с избыточностью (15,11)-кода Хемминга.

Для обнаружения ошибок используется «основное контрольное соотношение» (184), связывающее информационную матрицу *M* с кодовой матрицей *E*. Для этого с использованием элементов e_1, e_2, e_3, e_4 вычисляется детерминант кодовой матрицы

$$\det E = e_1 \times e_4 - e_2 \times e_3 , \quad (190)$$

который затем сравнивается с $\det M$ в соответствии с соотношением (184). Если соотношение (184) выполняется, то это является признаком отсутствия ощибки в кодовой матрице. В противном случае счиатется, что в кодовой матрице *E* или элементе $\det M$ возникла ошибка, которая должна быть исправлена.

Для исправления ошибок используются контрольные соотношения (184) и (185). При этом основой для исправления служит «контрольный элемент» $\det M$, с использованием которого могут быть вычислены «номинальные значения» искаженных элементов матрицы. Именно поэтому должны быть предприняты дополнительные меры для защиты «контрольного элемента» $\det M$. Например, мы можем ввести дополнительную кодовую избыточность в элемент $\det M$, чтобы обнаруживать ошибки в элементе $\det M$ с использованием классических избыточных кодов.

Основная идея исправления ошибок состоит в следующем. Если мы убедились в «правильности» элемента $\det M$, то после этого мы можем выдвинуть некоторые гипотезы относительно характера возможных ошибок в кодовой матрице *E*. Наиболее вероятной является гипотеза о наличии «одиночной» ошибки в кодовой матрице *E*. В этом случае мы должны рассмотреть четыре гипотезы, задаваемые (186). Если наша гипотеза об «одиночной» ошибке верна, одна из «одиночных» ошибок (186) соответствует реальной ситуации. Для нахождения «правильной» гипотезы из (186) мы можем использовать «основное контрольное соотношение» (184). Из него вытекают четыре алгебраические уравнения:

$$xe_4 - e_2 e_3 = (-1)^n \det M \left(e_1 - \text{ошибочный элемент}\right) \tag{191}$$

$$e_1 e_4 - y e_3 = (-1)^n \det M \left(e_2 - \text{ошибочный элемент}\right) \tag{192}$$

$$e_1 e_4 - e_2 z = (-1)^n \det M \left(e_3 - \text{ошибочный элемент}\right) \tag{193}$$

$$e_1 v - e_2 e_3 = (-1)^n \det M \left(e_4 - \text{ошибочный элемент}\right), \tag{194}$$

откуда вытекает четыре формулы для вычисления возможных «одиночных» ошибок:

$$x = \frac{(-1)^n \det M + e_2 e_3}{e_4} \tag{195}$$

$$y = \frac{-(-1)^n \det M + e_1 e_4}{e_3} \tag{196}$$

$$z = \frac{-(-1)^n \det M + e_1 e_4}{e_2} \tag{197}$$

$$v = \frac{(-1)^n \det M + e_2 e_3}{e_1}. \tag{198}$$

При этом мы должны учесть, что элементы e_1, e_2, e_3, e_4 кодовой матрицы являются целыми числами! Это условие является дополнительным «контрольным соотношением», то есть, мы должны выбирать «правильные» решения *x, y, z, v* уравнений (191)-(194) только среди целочисленных или «диофантовых» решений! Если ни одно из решений (195)-(198) не является целым числом, это означает, что наша гипотеза об «единичных» ошибках является некоррректной и мы должны рассмотреть гипотезы о «двойных» или «тройных» ошибках в кодовой матрице.

Таким образом, метод избыточного кодирования, основанный на использовании матриц Фибоначчи, обладает тремя «контрольными соотношениями» для кодовой матрицы *E*: (1) первое контрольное соотношение (185) задает связь детерминантов исходной и кодовой матриц; (2) второе контрольное соотношение (185) задает приближенное соотношение, которое связывает элементы кодовой матрицы; (3) наконец, третье контрольное соотношение сводится к тому, что элементы кодовой матрицы всегда должны быть целыми числами.

Эти же контрольные соотношения могут быть использованы для коррекции «двойных» и «тройных» ошибок. В случае установления ошибочности гипотезы об «одиночной» ошибке в кодовой матрице *E*, мы можем рассмотреть гипотезу о «двойной» ошибках в кодовой матрице *E*. Согласно (187) число таких ошибок равно 6. Для выяснения того, какой из этих вариантов соответствует реальной ситуации, мы испльзуем «основное контрольное соотношение» (185) для составления 6 алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Например, «двойной» ошибке типа

$$E = \begin{matrix} x & e_2 \\ e_3 & v \end{matrix} , \quad (199)$$

соответствует следующее алгебраическое уравнение:

$$xv - e_2 e_3 = \det M\left(-1\right)^n \ . \quad (200)$$

Как упоминалось выше, «правильное» из 6 алгебраических уравнений должно быть «диофантовым», то есть иметь целочисленные решения. Если ни одно из 6 алгебраических уравнений не имеет целочисленных решений, то мы дожны отбрить гипотезу о «двойных» ошибках. Если уравнение (200) является «диофантовым», то среди всех возможных «диофантовых» решений этого уравнения, мы должны выбрать решение, которое в наибольшей степени удовлятворяет дополнительному контрольному соотношению (185). Для случая (199) между элементами матрицы (199) должны соблюдаться следующие приближенные соотношения:

$$x \approx \Phi e_2 : e_3 \approx \Phi v \ .$$

Таким же путем проверяется гипотеза о «тройной» ошибке в кодовой матрице *E*.

Сделаем одно замечание по поводу корректности использования второго контрольного соотношения (185). При малых значениях *n* (например, *n*=1) приближенные равенства (185) становятся слишком «грубыми» и для коррекции ошибок мы можем использовать только «основное контрольное соотношение» (184). При этом метод гарантирует «правильное» исправление 4 «одиночных» ошибок из возможных 15, задаваемых (186)-(188). В этом случае мы можем оценить «корректирующую способность» предложенного метода с помощью соотношения:

$$S_{cor} = \frac{4}{15} = 0.2667 = 26.67\%. \quad (201)$$

Мало это или много? Для ответа на этот вопрос достаточно сравнить значение (201) с потенциальной корректирующей способностью (15,11)-кода Хемминга, равной 0.0004882 (0.04882%). Отношение $A = \frac{0.2667}{0.0004882} \approx 546$ дает представление о довольно внушительном преимуществе предложенный метода по сравнению с (15,11)-кодом Хемминга. Но ведь с увеличением количества информационных разрядов *n* в корректирующем (*n*,*k*)-коде, потенциальная корректирующая способность кода уменьшается экспоненциально и равна 2^{-n}. Но тогда преимущество A нового метода кодирования еще более возрастает и задается соотношением:

$$A = 0.2667 \times 2^n \ . \quad (202)$$

Нетрудно подсчитать, что при *n*=30 преимущество *A*=10 737 418, то есть предложенный метод кодирования превышает классические алгебраические коды по коррретирующей способности более чем в 10 000 000 раз!

Таким образом, общая идея коррекции ошибок основана на поиске «правильных» ошибочных ситуаций типа (186)-(188) на основе сформулированных выше трех контрольных условий. При выборе кодирующей матрицы Q^n с достаточно большим значением степени матрицы *n* мы можем использовать «дополнительное контрольное соотношение» (185) и при этом корретировать «двойные» и «тройные» ошибки типа (187) и (188). В этом случае наш метод гарантирует исправление 14 ошибок из 15 возможных и тогда «корректирующую способность» предложенного метода задается соотношением:

$$S_{cor} = \frac{14}{15} = 0.9333 = 93.33\%. \quad (203)$$

В этом случае преимущество A задается формулой:

$$A = 0.9333 \times 2^n \ . \quad (204)$$

и является еще более впечатлительным.

Таким образом, основным преимуществом предложенного метода кодирования является существенное повышение потенциальной коррректирующей способности (в миллионы раз) по сравнению с классическими алгебраичесими кодами.

Другое преимущество состоит в том, что метод позволяет исправлять не биты и их сочетания («пачки ошибок»), а элементы матриц, которые могут быть числами неограниченной величины!

Ясно, что метод может иметь много других приложений, одним из которыхявляется создание отказустойчивой памяти компьютеров. Эти и другие приложения потребуют дополнительных исследований, так же, как и использование более сложных «матриц Фибоначчи», задаваемых, например, (71).

20. Матричная криптография.

20.1. ***Недостатки существующих методов криптографии.*** Как известно, все существующие криптографические методы и алгоритмы (как «симметричные», так и с «открытм ключшм» или «асимметричные») [370-375] были созданы для «идеальных условий», когда мы предполагаем, что кодер, канал связи и декодер функционируют «идеально», то есть, кодер осуществоляет «идеальное» преобразование исходного текста в шифрованный текст (шифротекст), канал осуществляет «идеальную» передачу шифротекста, и декодер осуществляет «идеальное» преобразование шифротекста в исходный текст. Чтобы убедиться в том, что наш шифротекст не имеет ошибок, достаточно произвести обратное преобразование шифротекста в исходный текст. Однако это невозможно сделать в криптографических системах с «открытым ключом», поскольку отправитель не знает «секретного ключа». Таким образом, эти рассуждения приводят нас к выводу, что «системы с открытым ключом» обладают существенным недостатком с точки зрения обеспечения контролеспособности криптографической системы: они наиболее уязвимы по отношению к ошибкам, которые могут возникнуть в кодере в процессе преобразования исходного сообщения в шифротекст.

Криптосистемы с «открытым ключом» [372] наиболее часто основаны на вычислительной сложности «сложных» математических проблем, наиболее часто из области теории чисел (*проблема факторизации целых чисел, проблема дискретных логарифмов, эллиптические кривые* и др.). Известно, что криптографические системы с «открытым ключом» существенно «медленнее» по сравнению с системами с «симметричным ключом». Известный специалист в области криптографии Richard A. Molin пишет в книге [374]: “Криптографические методы с публичным ключом существенно междленнее по сравнению с «симметричными» криптографическими системами. Ниже мы увидим как системы с «открытым ключом» и «симметричным ключом» могут быть использованы совместно, чтобы обеспечить объединение эффективности «симметричного» шифрования с высокой криптографической защитой систем с «открытым ключом», в рамках криптографической системы, называемой *гибридной системой*».

Таким образом, наш анализ позволяет сформулмровать ряд существенных недостатков криптографических систем с «открытым ключом»:

(1) Системы с «открытым ключом» требуют более сложных вычислений или болтшее число логических элементов при практической реализации кодера и декодера , что порождает первый недостаток систем с «открытым ключом» - очень низкое быстродействие по сравнению с «симметричными» системами (в 1000 и более раз).

(2) К сожаению, системы с «открытым ключом» являются более уязвивыми для ошибок, которые могут возникнуть в кодере, поскольку «отправитель» не знает

«секретный ключ» и не сожет осуществить обратное преобразование шифротекста в исходный текст с целью проверки шифротекста.

20.2. ***Концепция «гибридной криптографической системы».*** Как известно [375], “недостаток «асимметричных» систем состоит в том, что они значительно более медленные (в 1000 и более раз), чем «симметричные» системы. Во многих качественных системах используются оба вида криптосистем. При этом «публичный ключ» получателя шифрует ключ симметрчного алгоритма, который используется для передачи основного сообщения. Такие комбинированные криптографические системы называются *гибридными криптосистемами*».

20.3. ***«Золотая» криптография.*** **Алексей Стахов** в работах [106, 129] предложил так называемую “золотую» криптографию. Этот криптографический метод напоминает рассмотренный выше метод кодирования-декодирования, основанный на матрицах Фибоначчи, но в качестве кодирующих матриц используются «золотые» матрицы типа (75), (76) и (81), (82), а в качестве декодирующих - инверсные к ним матрицы. Заметим, что «золотые» матрицы являются функциями непрерывной перменной *x*, которая и играет роль «криптографического ключа». При такой шифрации между исходной матрицей и кодовой матрицей сохраняется такое же соотношение, как и при кодировании, основанном на матрицах Фибоначчи, то есть, их детерминанты совпадают с точностью до знака. Этот факт может быть использован для контроля всех преобразований информации в криптосистеме. Заметим, что «золотая» криптография относится к классу «симметричных» систем; поэтому она может эффективно использована в рамках концепции «гибридных криптосостем», когда для передачи криптографического ключа используется криптостмтема с «открытым ключом».

20.4. ***Невырожденные (2×2)-матрицы.*** Как упоминалось, Q -матрица (55, 57) является специальным случаем *невырожденной* (2×2)-матрицы. Рассмотрим общий случай квадратной невырожденной (2×2)-матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{205}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ некоторые действительные числа. Ясно, что для невырожденной матрицы всегда должно выполняться условие:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \tag{206}$$

Инверсия матрицы (205) может быть получена следующим образом [376]:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{207}$$

Как известно [376], детерминант квадратной матрицы равен произведению ее *собственных значений.* Напомним, что собственные значения матрицы (206) могут быть получены следующим образом. Рассмотрим квадратную (2×2)-матрицу, сконструированную из матрицы (205):

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}, \tag{208}$$

где I - *единичная* (2×2)-матрица и λ - непрерывная переменная.

Детерминант матрицы (208) называется *характеристическим полиномом* матрицы *A*:

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \tag{209}$$

Два корня уравнения (209)

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(a_{11}+a_{22}\right)^2}{4} + a_{12}a_{21} - a_{11} + a_{22}} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}\left(A\right) - 4\det\left(A\right)\right] \qquad (210)$$

называются *собственными значениями* матрицы *A*.

Предположим, что квадратная (2×2)-матрица *A* (205) имеет два различных собственных значения λ_1 и λ_2. Возведем матрицу *A* (206) в степень *p*, где *p* – действительное число. Доказано, что матрица A^p может быть выражена через свои собственные значения следующим образом:

$$A^p = \frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^p + \frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2^p = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\left(A-\lambda_2 I\right)\lambda_1^p - \left(A-\lambda_1 I\right)\lambda_2^p\right] \qquad (211)$$

20.5. ***Матричная криптография для цифровых сигналов.*** Как известно, в информационной практике широко используются так называемые *цифровые сигналы*, которые образуются из *непрерывных сигналов* в результате их квантования по времени и уровню. Многие современные медиа-системы основаны на концепции *цифровых сигналов.* К ним относятся *измерительные системы*, *мобильная телефония*, *музыкальные и видео плейеры*, *цифровые камеры* и т.д.

Представим цифровой сигнал *X* в виде последовательности *отсчетов* $\left\{x_i; i = 1, 2, 3, ...\right\}$, то есть,

$$X = \left\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, ..., x_{4k-3}, x_{4k-2}, x_{4k-1}, x_{4k}, ...\right\} \qquad (212)$$

Ясно, что для многих случаев возникает проблема криптографичской защиты цифрового сигнала (212). Прежде всего, очень важно защитить мобильные телефоны от несанкцинированного прослушивания. Другой пример – защита авторских прав на музыкальную и видео информацию. Также важно защищать измерительные системы от запрещенного доступа к измерительной информации. Очевидно, что подобные проблемы существуют для музыкальных и видео систем, а также видео камер.

Рассмотрим невырожденную квадратную $\left(n\times n\right)$-матрицу *E* и ее инверсную матрицу E^{-1}, связанные тождеством:

$$EE^{-1} = I_n, \qquad (213)$$

где I_n - единичная $(n\times n)$-матрица.

Рассмотрим теперь квадратную матрицу *X* того же размера, что и матрица *E*. Образуем произведение матриц *E* и *X*:

$$Y = E\times X \qquad (214)$$

Если мы теперь умножим матрицу *Y* на инверсную матрицу E^{-1}, то мы получим:

$$E^{-1}\times Y = E^{-1}\times\left(E\times X\right) = \left(E^{-1}\times E\right)\times X = I\times X = X \qquad (215)$$

Соотношения (214) и (215) задают *общий принцип матричной криптографии.* Впервые этот принцип был сформулирован в книге [4].

Продемонстрируем это принцип на примере криптографической защиты цифровых сигналов. Для этого представим последовательность цифровых сигналов (212) в виде последовательности квадратных $\left(2\times 2\right)$-матриц:

$$X = \quad X_1 = \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{matrix}, X_2 = \begin{matrix} x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 \end{matrix}, ..., X_k = \begin{matrix} x_{4k-3} & x_{4k-2} \\ x_{4k-1} & x_{4k} \end{matrix}, ... \qquad (216)$$

Выберем теперь в качестве кодирующей матрицы некоторую невырожденную $\left(2\times 2\right)$-матрицу *E* следующего типа:

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \quad (217)$$

Заметим, что матрица (217) в днном случае является *криптографическим ключом*.

Суть шифрации состоит в том, что согласно (214) все матрицы из (216) последовательно умножаются на кодирующую матрицу (217), в результате чего цифровой сигнал (216) преобразуется в шифротекст Y:

$$Y = \{Y_1 = E \times X_1, Y_2 = E \times X_2, ..., Y_k = E \times X_k, ...\} \quad (218)$$

Шифротекст (218) направляется в канала связи для доставки получателю.

Для дешифрации шифротекста (218) криптографический ключ (217) должен быть доставлен получателю. В *гибридной криптографической системе* ключ (217) доставляется получателю с помощью криптографической системы с «открытым ключом».

Получатель с использованием (207) вычисляет инверсную матрицу

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det E} \begin{pmatrix} e_{22} & -e_{12} \\ -e_{21} & e_{11} \end{pmatrix}, \quad (219)$$

которая используется для дешифрации шифротекста (218) согласно правилу (215). В результате преобразования

$$X = \{E \times Y_1 = X_1, E \times Y_2 = X_2, ..., E \times Y_k = X_k, ...\}$$

мы получем исходный цифровой сигнал в виде последовательности матриц вида (216).

Заметим, что этот же общий принцип может быть использован для шифрации цифровых образов, если использовать матрицы больших размеров.

Основным достоинством предложенного метода является высокая скорость шифрации-дешифрации, что позволяет использовать его для криптографической защиты информационных систем, функционирующих в рельном масштабе времени. Проблема защиты системы от криптографических атак решается путем частой сменой случайных криптографических ключей типа (217), передача которых осуществляется с использованием криптосистемы с «открытым ключом», входящим в состав «гибридной системы». При этом криптографическая стойкость системы в целом обеспечивается криптостемой с «открытым ключом».

21. Заключение

1. Проведенное исследование является итогом длительных и целенаправленных исследований, проведенных автором и его учениками в течение 45 лет (1963-2008) и изложенных в многочисленных публикациях, включая книги [], статьи [], авторские свидетельства [] и зарубежные патенты []. Эти исследования преследовали две цели: (1) создание **Математики Гармонии** как нового междисциплинарного направления современной науки; (2) создание **«Золотой» Информационной Технологии** как нового направления в информатике. В этих направлниях получены следующие научные результаты:
2. **Математика Гармонии.** Основным итогом исследований, изложенных в работах [11, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 26, 27, 29, 31, 32, 34, 35, 38 -143], является создание *Математики Гармонии* как нового междисциплинарного направления современной науки. К наиболее существенным результатам *Математики Гармонии* относятся следующие:

2.1. Развит новый подход к происхождению и истории математики [90, 108, 109]. Согласно этому подходу, начиная с «Начал» Евклида, в математике развиваются два направления – *Классическая Математика* и *Математика Гармонии. Классическая Математика* позаимствовала в «Началах» Евклида аксиоматичческий подход к построению математических теорий. *Математика Гармонии* в своих истоках восходит к *золотому сечению* (Теорема II.11 “Начал» Евклида) и *Платоновым Телам* (13-я Книга “Начал» Евклида). Широкое использование золотого сечения и Платоновых Тел в современой науке (квазикристаллы Шехтмана [340], фуллерены [341], новая геометрическая теория филлотаксиса (*геометрия Боднара*) [26], *«закон структурной гармонии систем» Сороко* [16] *«золотые» геноматрицы Петухова* [342] и др.) являются подтверждением важнейшей тенденции – возрождение интереса соременной науки к проблем гармонии, золотого сечения и Платоновым телам. Математика Гармонии является отражением этой тенднции в современной математике.

2.2. Обнаружение связи *чисел Фибоначчи* с *треугольником Паскаля* [15, 45, 148-150] является одним из важных математических открытий 20-го века. Развитие этого подхода привело к введению понятия *обобщенных р-чисел Фибоначчи* [45]. На этой основе дано обобщение задачи о золотом сечении и введено понятие *золотой р-пропорции* [45], что привело к формулировке *обобщенного принципа золотого сечения* [103] и *закона структурной гармонии систем* [16].

2.3. Пожалуй, наиболее существенным результатом Математики Гармонии является введение нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* [54, 55, 81, 98, 107], что является «прорывом» в развитии гиперболических представлений в современной математике. Самым главным методологическим итогом этих исследований является осознание той важной роли, которую «золотая пропорция» играет в структурах Природы. Очевидно, что «золотая пропорция» и связанные с ней числа Фибоначчи и Люка выражают некоторую «скрытую гармонию» Природы, суть которой состоит в гиперболическом характере Природы. Таким образом, обнаружение «золотой пропорции» или чисел Фибоначчи в том или ином природном явлении является сигналом к тому, что геометрическая природа этого явления является гиперболической.

2.4. В настоящее время эти функции использованы для создания новой геометрической теории филлотасиса (*«геометрия Боднара»*) [26] и *преобразований Фибоначчи-Лоренца* [143], что позволило дать новую («золотую») интерпретацию эволюции Вселенной до, в момент и после «Большого Взрыва».

2.5. Понятия обобщенных λ-чисел Фибоначчи и «металлических пропорций», введенные в работах [31, 32, 146], оказалось весьма полезными математическими понятиями. Они привели к разработке нового класса гиперболических функций – *гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка*. Количество таких функций теоретически бесконечно, так каждое действительное число $\lambda > 0$ порождает свой собственный класс гиперболических функций. Частными случаями гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка являются классические гиперболические функции и симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Это математическое открытие может представлять интерес для всего теоретического естествознания, поскольку оно создает предпосылки для создания новых гиперболических моделей природных явлений, что будет способствовать широкому распространеию гиперболического подхода в теоретическом естествознании.

2.6. Гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка представляет фундаментальный интерес с точки зрения *4-й проблемы Гильберта* [143]. Они приводят к так называемым *λ-моделям плоскости Лобачевского*, которые задают бесконечное множество новых интерпретаций плоскости Лобачевского гауссовой кривизны K=-1, изометричных всем ранее известным классическим интерпретациям плоскости Лобачевского гауссовой кривизны K=-1. И эти новые геометрии (число которых бесконечно) вместе с геометриями **Лобачевского, Римана и Минковского** могут «*считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*» (Давид Гильберт). Таким образом, есть серьезные основания предполагать, что новая теория гиперболических функций существенно приближает нас к решению 4-й проблемы Гильберта.

2.7. Развитая Вернером Хоггатом теория *Q-матриц Фибоначчи* [11] получила дальнейшее развитие в рамках *Математики Гармонии*. В работах [51, 83, 105, 106, 129] были разработаны новые классы матриц Фибоначчи и «золотых» матриц, элементами которых являются *p-числа Фибоначчи*, *λ-числа Фибоначчи*, *гиперболические функции Фибоначчи и гиперболические λ-функции Фибоначчи*. Все эти матрицы объединяет общее математическое свойство – их детерминант тождественно равен +1 или -1, то есть речь идет о новом классе квадратных матриц с «единичным» детерминантом, что представляет интерес для теории матриц. Простейшая «золотая» матрица была использована при введении *преобразований Фибоначчи-Лоренца* [143].

2.8. Математика Гармонии является истинной «Математикой Природы», которая воплощена в замечательных созданиях живой Природы (сосновые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и т.д). **Законы Гармонии являются основными законами Природы. Мы должны использовать эти законы в нашей науке и технологии, в частности, в информационной технологии.**

3. **«Золотая» Информационная Технология.** В течение 1971-1991 гг. в бывшем СССР были выполнены теоретические и инженерные разработи в области *компьютров Фибоначчи* и различных цифровых устройств на основе кодов Фибоначчи. Внушительный перечень авторских свидетельств СССР и зарубежных патентов, приведенный в списке литературы [144-331], является достаточно убедительным подтверждением того факта, что в период с 1971 и вплоть до развала Советского Союза в 1991 г. в СССР выполнялась грандиозная научно-исследовательская и инженерная работа по созданию *компьютеров Фибоначчи*, что можно считать началом *«Золотой» Информационной Технологии*. И в этой области советская компьютерная наука значительно опережала западную науку в теоретическом плане. Следует подчеркнуть, что это направление оказалось единственным советским компьютерным направлением, которое широко патентовалось за рубежом (США, Япония, Англия, Франция, ФРГ, Канада, ГДР и Польша). Более 60 патентов, выданных патентными ведомствами указанных стран на советские изобретения в области компьютеров Фибоначчи [271-331], являются официальными юридическими документами, подтверждающими приоритет советской науки в этой области. Дальнейшее развитие «Золотой» Информационной Технологии должно осуществляться в следующих направлениях:

3.1. Развитие *алгоритмической теории измерения* [45, 46] как обобщения *задачи Баше-Менделеева* и математической основы общей теории позиционных систем счисления [78, 79, 82].

3.2. Развитие теории *кодов Фибоначчи* [64, 66, 68, 71] и *кодов золотой пропорции* [47, 74, 75] и вытекающих из них новых компьютерных арифметик [77, 78] как основы *компьютеров Фибоначчи* и *«золотых» компьютеров*. Это научное направление защищено авторскими свидетельствами и зарубежными патентами [144-331].

3.3. Развитие теории *«золотых» троичных позиционных представлений* и вытекающей из них *«золотой» троичной зеркально-симметричной арифметики* [97]. Новая компьютерная арифметика была высоко оценена выдающимся американским ученым **Дональдом Кнуттом,** почетным профессором Стенфордского университета и Лауреатом Премии Тьюринга. Современные успехи в области создания троичных элементов памяти [351-353] дают основание высказать уверенность, что новая троичная компьютерная арифметика будет воплощена в практические разработки.

3.4. Развитие теории *«золотых» резистивных делителей* как основы *«золотой» цифровой метрологии* [73] и *«золотых» аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей* [76].

3.5. Развитие *новой теории корректирующих кодв, основанной на матрицах Фибоначчи* [51, 83, 105]. Это может привести к созданию супер-надежных систем передачи и хранения информации.

3.6. Развитие *матричной и «золотой» криптографии* [51, 106, 110, 129], что может привести к созданию криптографических систем, работающих в реальном масштабе времени.

Автор надеется, что в настоящей статье он дал достаточно исчерпывающее объяснение сути *Математики Гармонии* и *«Золотой» Информационной Технологии*, хотя согласно *закона Мерфи* «даже если ваше объяснение настолько ясно, что исключает всякое ложное толкование, все равно найдется человек, который поймет вас неправильно».

Не только Богу, но и моей жене Антонине, моему верному и единственному спутнику по жизни, известно, сколько сомнений, преград и непонимания пришлось преодолеть автору в течение 45 лет, чтобы создать то, что изложено в работах [43-331]. В повести Ю. Нагибина "Пик удачи" герой книги сказал так: "*Что есть у человека кроме жены? Родители всегда уходят слишком рано, а дети слишком поздно, когда отношения уже безнадежно испорчены. Друзья? Но это такая редкость! Открытие интимно, близко к тебе, пока живет в твоей голове, затем оно становится шлюхой, доступной каждому. Остается лишь жена, стареющая, слабеющая, надоедливая, сварливая, глупая и все же единственная, вечная. Лишь в ней одной доказательство того, что ты личность или хотя бы особь!*". И лучше не скажешь!

Литература:

1. Jonathan Swinton. Fibonacci phyllotaxis: Turing's problem, 2002 www.swintons.net/jonathan/Turing/fibonacci.htm
2. A. M. Turing. The Chemical Basis of Morphogenesis. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, volume B 237, 1952, pages 37--72.
3. A. M. Turing. The morphogen theory of phyllotaxis. In Saunders, 1992.
4. Timerding H.E. Der Golden Shnitt. Leipzig and Berlin: Verlag und Druck B.G. Teubner, 1918 (Russian translation, 1924).
5. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Ленинград-Москва: ОНТИ, 1935
6. Гика Матила. Эстетика пропорций в природе и искусстве (пер. с фр). Москва: Издательство Академии Архитектуры , 1936.

7. Thompson, D'Arcy W. On Growth and Form. New York: McMillan, 1944.
8. Gardner Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York: Publishing House "Dover", 1952.
9. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.
10. Brousseau Alfred. An Introduction to Fibonacci Discovery. San Jose, California: Fibonacci Association, 1965.
11. Hoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
12. Huntley H. E. The Divine Proportion: a Study in Mathematical Beauty. Dover Publications, 1970.
13. Ghyka Matila. The Geometry of Art and Life. Dover Publications, 1977.
14. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
15. Реньи Альфред. Трилогия математики (пер. с венг.). Москва: Мир, 1980
16. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
17. Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa: Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen).
18. Garland T.H. Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers. Dale Seymour, 1987.
19. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
20. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Вычшая школа, 1989.
21. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. Москва: Молодая Гвардия», 1990.
22. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы. Москва: Стойиздат, 1990.
23. Runion G.E. The Golden Section. Dale Seymour, 1990.
24. Fisher Robert, Fibonacci Applications and Strategies for Traders. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
25. Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. Минск: РИТС, 1993
26. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
27. Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific, 1997.
28. Цветков В.Д. Сердце, золотоая пропорция и симметрия. Пущино: ОНТИ РНЦ РАУ, 1997
29. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998.
30. Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998.
31. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
32. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999
33. Prechter, Robert R. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. Gainseville, Georgia: New Classics Library, 1999.
34. Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. Москва: Воскресенье, 2000
35. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.
36. Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
37. Livio, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.
38. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
39. Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві. Львів: Українскі Технології, 2005
40. Петруненко В.В. Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления. Минск: Право и жкономика, 2005.
41. Olsen Scott. The Golden Section: Nature's Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006.
42. Сороко Э.М. Золотое сечение, процессы самоорганизации и эволюции сисртем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: URSS, 2006

Диссертации, книги и брошюры А.П. Стахова

43. Стахов А.П. Исследование преобразователей «напряжение-код» с обратной связью, использующих в качестве сравнивающих устройств регенеративные компараторы. Канд. Диссертация. Харьковский институт радиоэлектроники, 1966.
44. Стахов А.П. Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Докторская диссертация. Киевский институт инженеров гражданской авиации, 1972.
45. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.

46. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979 г.
47. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
48. Стахов А.П., Лихтциндер Б.Я., Орлович Ю.П., Сторожук Ю.А. Кодирование данных в информационно-регистрирующих системах. Киев, Техника, 1985 г.
49. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.
50. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations». Toronto, SKILLSET-Training, 1997.
51. Stakhov A.P., Massingua V., Sluchenkova A.A. Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography». Харьков, Изд-во «Основа» Харьковского университета, 1999 г.
52. Stakhov A.P. (editor). The Golden Section: Theory and Applications. Mozambique, University Eduardo Mondlane, Boletin de Informatica, No 9/10, January 1999.
53. Stakhov A.P., Sluchenkova A.A. Museum of Harmony and Golden Section: mathematical connections in Nature, Science and Art». Vinnitsa, ITI, 2003.
54. Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: a New Mathematics for Living Nature. Vinnitsa, ITI, 2003.
55. Стахов А.П. Новая математика для живой природы: Гиперболические функции Фибоначчи и Люка». Винница, Изд-во «ITI», 2003.
56. Стахов А.П. Под знаком «Золотого Сечения»: Исповедь сына студбатовца. Винница, ITI, 2003.
57. Стахов А.П. Сакральная Геометрия и Математика Гармонии. Винница, ITI, 2003.
58. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006.
59. Stakhov A.P. The Harmony Mathematics. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific (in press)

<u>Статьи А.П. Стахова в советских, российских и украинских журналах и сборниках</u>

60. Витенько И.В., Волков А.А., Стахов А.П. Оптимальные алгоритмы функционирования преобразователей «напряжение-код». В кн. Тезисы докладов V научно-технической конференции «Кибернетически пути совершенствования измерительной аппаратуры». ЛОП НТО, Приборпром, 1966.
61. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
62. Алипов Н.В., Витенько И.В., Стахов А.П. Корректирующие (n,k,S)-алгоритмы. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
63. Стахов А.П. Что такое теория измерения? – В кн. Аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, вып.1. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974.
64. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
65. Стахов А.П. Измерение и поиск. В сборнике «Проблемы случайного поиска», №3, Рига, Изд-во «Зинатне», 1974 г.
66. Стахов А.П. «Фибоначчиева» двоичная арифметика и ее применение для контроля вычислительных систем. – В кн. Однородные вычислительные системы и среды. Материалы IV Всесоюзной конференции. Киев, «Наукова думка», 1975.
67. Стахов А.П. Взгляд на нумерационное кодирование с позиций алгоритмической теории измерения. Доклады IV Всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации. Изд-во Томского института радиоэлектроники и автоматизированных систем управления. Москва-Томск, 1975.
68. Стахов А.П. Использование естественной избыточности «фибоначчиевых» систем счисления для контроля вычислительных систем. Автоматика и вычислительная техника, №6, 1975 г.
69. Стахов А.П. Об одном обобщении чисел Фибоначчи. - В сб. Вопросы кибернетики. Труды III Всесоюзного семинара по комбинаторной математике. Изд-во Научного Совета по комплексной проблеме «Кибернетика». Москва, 1976.
70. Стахов А.П. Принцип асимметрии логики измерения. Проблемы передачи информации, №3, 1976 г.
71. Стахов А.П. «Фибоначчиевые» двоичные позиционные системы счисления. В сб. Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи. Москва, Наука, 1976 г.
72. Стахов А.П. Методологические аспекты введения кодовой избыточности в цифровые вычислительные машины. Автоматика и вычислительная техника, №15, 1976 г.
73. Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. В сб. Современные проблемы метрологии. Москва, Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978 г.

74. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
75. Стахов А.П., Лужецкий В.А. Машинная арифметика ЦВМ в кодах Фибоначчи и «золотой» пропорции. Москва, Изд-во АН СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981 г.
76. Стахов А.П. Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №6, 1981 г.
77. Стахов А.П. Коды золотой пропорции или системы счисления для ЭВМ будущего? Журнал «Техника — молодежи», №7, 1985 г.
78. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №2, 1988 г.
79. Стахов О.П. За принципом золотої пропорції: перспективний шлях розвитку обчислювальної техніки. Вісник Академії наук Української РСР, №1-2, 1990 г. Стахов О.П. Вимірювання — фундаментальна проблема науки. Вісник Академії наук Української РСР, №6, 1991 г.
80. Стахов О.П. Золотий переріз і наука про гармонію систем. Вісник Академії наук Української РСР», №12, 1991 г.
81. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
82. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения: новый взгляд на теорию позиционных систем счисления и компьютерную арифметику. Международный научный журнал «Управляющие системы и машины», №4-5, 1994.
83. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
84. Стахов О.П. Чи може бути створена нова елементарна математика, що базується на «Золотому Перетині»? Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету. Серія «Фізика і математика», вип. 1, 2002 р.
85. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
86. Стахов А.П. Сакральная Геометрия и Математика Гармонии. Труды Международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница, 2003 г.
87. Стахов А.П. Кодирование данных, основанное на фибоначчиевых матрицах. Труды Международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница, 2003 г.
88. Стахов А.П. Золотое сечение, священная геометрия и математика гармонии. Сборник «Метафизика. Век XXI». Москва: БИНОМ, 2006, с. 174-215
89. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки и ее приложения. Известия Международной Академии наук высшей школы. №2 (36), 2006. – с. 52-64.
90. Стахов А.П. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и «Математика Гармонии» как альтернативное направление в развитии матеатической науки. Totallogy-XXI. Постнекласичні дослідження. №17/18. – Київ: ЦГО НАН України. – 2007. с. 274-323.

<u>Статьи А.П. Стахова в международных журналах и сборниках</u>

91. Стахов А.П., Розин Б.Н. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Number, Time, Relativity. Proceedings of International Scientific Meeting. Moscow, 10 August – 13 August, 2004.
92. Стахов А.П., Розин Б.Н. Новый класс гиперболических функций. Труды Института прогрессивных исследований, вып. 4, Израиль, Арад, 2004 г.
93. Стахов А.П. Коды и компьютеры Фибоначчи, матрицы Фибоначчи и новая теория кодирования. Труды Института прогрессивных исследований, вып. 4, Израиль, Арад, 2004 г.
94. Stakhov A.P. The Medial Section as a Proportion for the Thermo-dynamical Equilibrium of Self-organizing Systems. Proceedings of the International Symposium «System Analysis and Simulation», Berlin, 1988.
95. Stakhov A.P. The Golden Section in the measurement theory. An International Journal «Computers & Mathematics with Applications», Volume 17, No 4-6, 1989.
96. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
97. Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.
98. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.

99. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar . Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26(3);** 677-684.
100. Stakhov A., Rozin B. The "golden" algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1415-1421.
101. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1162-1177.
102. Stakhov A., Rozin B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2006, **28 (4)**: 1014-1025.
103. Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26 (2)**: 263-289.
104. Stakhov A. Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5)**: 1124-1146.
105. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
106. Stakhov A. The "golden" matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.
107. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
108. Stakhov A. Three "key" problems of mathematics on the stage of its origin, the "Harmony Mathematics" and its applications in contemporary mathematics, theoretical physics and computer science. Visual Mathematics, Volume 9, No.3, 2007 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
109. Stakhov A. Three "key" problems of mathematics on the stage of its origin and the "Harmony Mathematics" as alternative way of mathematics development. Mathematics & Design. Fifth International Mathematics & Design Conference – V M&D. – 88-102.
110. Stakhov A. And Sluchenkova A. Design of new coding theory and cryptography based on the Fibonacci and "golden" matrices. Mathematics & Design. Fifth International Mathematics & Design Conference – V M&D. – 154-165.

Электронные публикации А.П. Стахова

111. Стахов А.П., Слученкова А.А. Музей Гармонии и Золотого Сечения, 2001 (www.goldenmuseum.com/).
112. Stakhov A.P. Museum of Harmony and the Golden Section: mathematical connections in Nature, Science and Art, 2002 (www.fenkefeng.org/essaysm18004.html)
113. Стахов А.П. Компьютер Фибоначчи. Москва, PC Week, 2002, № 34 (352) (www.pcweek.ru/Year2002/N34/CP1251/Strategy/chapt2.htm)
114. Стахов А.П. Компьютер Фибоначчи (www.ssga.ru/erudites_info/computers/kompfib.html)
115. Стахов А.П. Компьютеры Фибоначчи и новая теория кодирования: история, теория, перспективы. Электронный журнал Таганрогского радиотехнического университета «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы», № 2 (18), 2004 (http://pitis.tsure.ru/files18/p5.pdf)
116. Стахов А.П., Розин Б.Н. Теория формул Бине для *p*-рядов Фибоначчи и Люка. Электронный журнал Таганрогского радиотехнического университета «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы», № 1 (21), 2005 (http://pitis.tsure.ru/files21/10.pdf).
117. Стахов А.П. Сакральная геометрия и математика гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.11176, 26.04.2004 (www.trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02020028.htm).
118. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005(www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320001.htm)
119. Стахов А.П. «Металлические Пропорции» Веры Шпинадель // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12532, 25.10.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320029.htm)
120. Стахов А.П. Формула Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320030.htm)
121. Стахов А.П. «Код да Винчи», Платоновы и Архимедовы тела, квазикристаллы, фуллерены, решетки Пенроуза и художественный мир Матюшки Тейи Крашек // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12561, 07.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320031.htm)
122. Стахов А.П., Розин Б.Н. «Золотые» гиперболические модели Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12616, 22.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320034.htm)
123. Стахов А.П. Троичный принцип Брусенцова, система счисления Бергмана и «золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12355, 15.08.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320001.htm)
124. Стахов А.П. Теорема Пифагора и числа Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12403, 06.09.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320003.htm)

125. Стахов А.П. Додекаэдр, тайна Египетского календаря, циклы Солнечной Системы и «Арифметика Вселенной» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13065, 10.03.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320039.htm)
126. Стахов А.П. Матричный подход в «теории Золотого Сечения» и «золотые» геноматрицы Сергея Петухова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13439, 15.06.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321050.htm)
127. Стахов А.П. «Принцип Золотой Пропорции» в «Началах» Евклида и «Обобщенный Принцип Золотого Сечения» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13523, 06.07.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321051.htm)
128. Стахов А.П. Еще раз о математической истории Золотого Сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13714, 25.08.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321029.htm)
129. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm)
130. Стахов А.П. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и новые направления в развитии математики, теоретической физики и информатики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14135, 12.01.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321064.htm)
131. Стахов А.П. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка: история и приложения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14429, 31.05.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321057.htm)
132. Стахов А.П. «Стратегические ошибки» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14555, 27.08.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321070.htm)
133. Стахов А.П. Важнейшие научные открытия современной науки, основанные на «золотом сечении» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14575, 18.09.2007 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321071.htm)
134. Стахов А.П., О новом обобщении чисел Фибоначчи и «золотой пропорции» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14681, 02.01.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321073.htm
135. Стахов А.П. Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14688, 12.01.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321074.htm
136. А.П. Стахов, «Математика Гармонии» как новое междисцилинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14729, 08.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321078.htm
137. Стахов А.П. Металлические Пропорции – новые математические константы Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm
138. Стахов А.П. От «Золотого Сечения» к «Металлическим Пропорциям». Генезис великого математического открытия от Евклида к новым математическим константам и новым гиперболическим моделям Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14774, 16.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321081.htm
139. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая Фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода ДНК, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть I. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14778, 20.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321082.htm
140. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода ДНК, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть II. Резонансная структура генетического кода ДНК // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14779, 26.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321083.htm
141. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода днк, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть III. Преобразования Фибоначчи-Лоренца и их связь с золотым универсальным генетическим кодом // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14782, 27.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321084.htm
142. Стахов А.П., Арансон С.Х., Хантон И.В. Золотая фибоначчиева гониометрия, резонансная структура генетического кода ДНК, преобразования Фибоначчи-Лоренца и другие приложения. Часть IV. Другие приложения чисел Фибоначчи, золотого сечения и золотой фибоначчиевой гониометрии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14783, 28.04.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321085.htm
143. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm

Авторские свидетельства А.П. Стахова

144. Параллельный сумматор. Авторское свидетельство № 559237, Бюллетень изобретений №19, 1977 г. (соавторы Лужецкий В.А., Оводенко А.В.)
145. Комбинационный сумматор. Авторское свидетельство № 570896, Бюллетень изобретений №32, 1977 г. (соавторы Лужецкий В.А., Оводенко А.В.)
146. Двоичный счетчик с последовательным переносом. Авторское свидетельство № 577682, Бюллетень изобретений №39, 1977 г. (соавторы Вишняков Ю.М., Фомичев А.В., Соляниченко Н.А.)
147. Накапливающий сумматор. Авторское свидетельство № 577528, Бюллетень изобретений №39, 1977 г. (соавторы Лужецкий В.А., Оводенко А.В.)
148. Генератор последовательности обобщенных чисел Фибоначчи с произвольными начальными условиями. Авторское свидетельство № 662926, Бюллетень изобретений №18, 1979 г. (соавтор Лужецкий В.А.)
149. Устройство для приведения *p*-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 662930, Бюллетень изобретений №18, 1979 г. (соавтор Фомичев А.В.)
150. Преобразователь прямого кода в обратный. Авторское свидетельство № 662931, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
151. Преобразователь *p*-кода Фибоначчи в двоичный код. Авторское свидетельство № 662932, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
152. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 662933, Бюллетень изобретений №18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
153. Устройство для сравнения *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 662934, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Соляниченко Н.А.)
154. Устройство для умножения целых чисел. Авторское свидетельство № 662941, Бюллетень изобретений № 18, 1979 г. (соавтор Лужецкий В.А.)
155. Последовательный сумматор. Авторское свидетельство № 696452, Бюллетень изобретений № 41, 1979 г. (соавторы Оводенко А.В., Лужецкий В.А.)
156. Сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 732864, Бюллетень изобретений № 17, 1980 г.
157. Устройство для отображения информации на экране электронно-лучевой трубки. Авторское свидетельство № 734757, Бюллетень изобретений № 18, 1980 г.
158. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 744564, Бюллетень изобретений № 24, 1980 г. (соавтор Лужецкий В.А.)
159. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 750721, Бюллетень изобретений № 27, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Бородянский М.Е., Лужецкий В.А.)
160. Генератор случайных кодов. Авторское свидетельство № 752307, Бюллетень изобретений № 28, 1980 г. (соавторы Лихтциндер Б.Я., Орлович Ю.П., Сторожук Ю.А.)
161. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 758510, Бюллетень изобретений № 31, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Лужецкий В.А.)
162. Устройство для приведения *p*-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 779997, Бюллетень изобретений № 42, 1980 г. (соавторы Лужецкий В.А., Азаров А.Д., Ужвак Ю.И.)
163. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 783979, Бюллетень изобретений № 44, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И.)
164. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 790285, Бюллетень изобретений № 47, 1980 г. (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И.)
165. Генератор случайных кодов. Авторское свидетельство № 809131, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г. (соавторы Лихтциндер Б.Я., Орович Ю.П., Сторожук Б.Я.)
166. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 809540, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г.
167. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 809541, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г.
168. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 809542, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г.
169. Преобразователь аналоговых величин в код Фибоначчи. Авторское свидетельство № 809552, Бюллетень изобретений № 8, 1981 г. (соавторы Бородянский М.Е., Онопко В.Л.)
170. Устройство для контроля *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 817718, Бюллетень изобретений № 12, 1981 г. (соавторы Соляниченко Н.А., Черняк А.И., Замчевский В.В., Сачанюк В.И.)
171. Устройство для приведения *p*-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 840880, Бюллетень изобретений № 23, 1981 г. (соавторы Козак А.А., Соляниченко Н.А.)
172. Параллельный сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 840891, Бюллетень изобретений № 23, 1981 г. (соавторы Соляниченко Н.А., Лужецкий В.А., Оводенко А.В., Козак А.А.)

173. Устройство для приведения *p*-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 842782, Бюллетень изобретений № 24, 1981 г. (соавторы Соляниченко Н.А., Черняк А.И., Замчевский В.В.)
174. Устройство для приведения *p*-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 842786, Бюллетень изобретений № 24, 1981 г.
175. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 864548, Бюллетень изобретений № 34, 1981 г. (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Петросюк Ю.А.)
176. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 911720, Бюллетень изобретений № 9, 1982 г. (соавторы Азаров А.Д., Петросюк Ю.А., Волков В.П.)
177. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 928632, (соавторы Азаров А.Д., Петросюк Ю.А., Волков В.П.), БИ, 1982 г.
178. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 947955, (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Ужвак Ю.Н., Верховой В.П.), БИ, 1982 г.
179. Устройство магнитной записи для коррекции цифровой информации. Авторское свидетельство № 949717 (соавторы Лихтциндер Б.Я., Сторожук Ю.А., Гайдаш А.В., Орлович Ю.П.), БИ, 1982 г.
180. Цифро-аналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 953721 (соавторы Сушко А.Ф., Акимов А.А., Петросюк Ю.А., Ефименко В.Н.), БИ, 1982 г.
181. Сервопривод с цифровым управлением. Авторское свидетельство № 962952 (соавтор Северилов В.А.), БИ, 1982 г.
182. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1005298 (соавторы Петросюк Ю.А., Черняк А.И., Конючевский О.В., Сухарев А.А.), БИ, 1982 г.
183. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1005300 (соавторы Рвачев М.А., Волков В.П., Черняк А.И., Петросюк Ю.А.), БИ, 1982 г.
184. Устройство контроля цифроаналоговых преобразователей. Авторское свидетельство № 1008902 (соавторы Петросюк Ю.А., Конючевский О.В., Хуторянец А.Е.), БИ, 1982 г.
185. Устройство для приведения *p*-кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1019434 (соавторы Гаврилюк Г.И., Соляниченко Н.А., Замчевский В.В.), БИ, 1983 г.
186. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1027815 (соавторы Моисеев В.И., Азаров А.Д., Стейскал В.Я.), БИ, 1983 г.
187. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1046926 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Волков В.П., Ужвак Ю.Н.), БИ, 1983 г.
188. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1051701 (соавторы Петросюк Ю.А., Конючевский О.В., Сухарев А.А., Хуторянец А.Е.), БИ, 1983 г.
189. Разрядный элемент для преобразования кода в напряжение каскадной структуры. Авторское свидетельство № 1056448 (соавторы Петросюк Ю.А., Сухарев А.А.), БИ, 1983 г.
190. Сумматор кодов с иррациональными основаниями. Авторское свидетельство № 1083182 (соавторы Лужецкий В.А., Стахов Д.А.), БИ, 1983 г.
191. Устройство для приведения *p*-колов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1092489 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Оникиенко А.И.), БИ, 1984 г.
192. Дифференциальный аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1138949 (соавторы Марценюк В.П., Азаров А.Д.), БИ, 1984 г.
193. Устройство для развертки *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1141396 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Соболева И.С.), БИ, 1984 г.
194. Преобразователь прямого кода Фибоначчи в обратный. Авторское свидетельство № 1164891 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Данишин А.В.), БИ, 1985 г.
195. Счетчик импульсов в *p*-кодах Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1172006 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1985 г.
196. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1179533 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я.), БИ, 1985 г.
197. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1177078 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Васильева Т.Н.), БИ, 1985 г.
198. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1197079 (соавторы Азаров А.Д., Волков В.П., Стейскал В.Я.), БИ, 1985 г.
199. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1200422 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Лысюк В.В.), БИ, 1985 г.
200. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1221750 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Васильева Т.Н.), БИ, 1985 г.
201. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1216829 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Масленникова Н.А., Оганесян Р.С.), БИ, 1985 г.
202. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1221754 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я.,Степанова И.П.), БИ, 1985 г.
203. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1221755 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Васильева Т.Н.), БИ, 1985 г.

204. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1223368 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Лысюк В.В., Алексанян Р.Г.), БИ, 1985 г.
205. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1226664 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Нечипоренко Л.М.), БИ, 1985 г.
206. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1231609 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Конючевский О.В.), БИ, 1986 г.
207. Преобразователь код-ток. Авторское свидетельство № 1246378 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я.), БИ, 1986 г.
208. Устройство для цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1248072 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я.), БИ, 1986 г.
209. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1251326 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Замчевский В.В., Золотарев С.И.), БИ, 1986 г.
210. Устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1254469 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1986 г.
211. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1257847 (соавторы Азаров А.Д., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Масленникова Н.А.), БИ, 1986 г.
212. Устройство цифроаналогового преобразования. Авторское свидетельство № 1257848 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Степанова И.П.), БИ, 1986 г.
213. Последовательное устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1262482 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П.), БИ, 1986 г.
214. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1279064 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Конючевский О.В.), БИ, 1986 г.
215. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1288913 (соавторы Азаров А.Д., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Майстришин В.Я.), БИ, 1986 г.
216. Устройство аналого-цифрового преобразования. Авторское свидетельство № 1288914 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Козырь Л.В..), БИ, 1986 г.
217. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1297224 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Фролов Г.Ф., Золотарев С.И.), БИ, 1986 г.
218. Устройство для приведения n-разрядных кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1300649 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Щекотихин О.В., Тишаев А.С.), БИ, 1986 г.
219. Регистр сдвига. Авторское свидетельство № 1302320 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1986 г.
220. Способ аналого-цифрового преобразования. Авторское свидетельство № 1304172 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Моисеев В.И., Марценюк В.П.), БИ, 1986 г.
221. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1319280 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Моисеев В.И., Степанова И.П., Васильева Т.Н.), БИ, 1987 г.
222. Устройство аналого-цифрового преобразования. Авторское свидетельство № 1330758 (соавторы Марценюк В.П., Моисеев В.И., Коваль О.В.), БИ, 1987 г.
223. Устройство для деления кодов "золотой пропорции". Авторское свидетельство № 1361544 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П.), БИ, 1987 г.
224. Счетчик импульсов в p-кодах Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1379940 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е.), БИ, 1987 г.
225. Конвейерный аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1381706 (соавторы Арапов С.М., Азаров А.Д., Волков В.П., Арапова Е.М.), БИ, 1987 г.
226. Устройство для приведения кодов Фибоначчи к минимальной форме. Авторское свидетельство № 1392554 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Сачанюк В.И.), БИ, 1988 г.
227. Последовательный сумматор. Авторское свидетельство № 1411734 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Гаврилюк Г.И.), БИ, 1988 г.
228. Сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1411735 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Соболева И.С.), БИ, 1988 г.
229. Анализатор спектра в ортогональном базисе. Авторское свидетельство № 1416982 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1988 г.
230. Устройство для развертки кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1417194 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Гуменюк Я.А.), БИ, 1988 г.
231. Устройство для преобразования формы кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1418910 (соавторы Лужецкий В.А., Стахов Д.А., Ваховский В.Г.), БИ, 1988 г.
232. Преобразователь двоичного кода. Авторское свидетельство № 1427573 (соавторы Лужецкий В.А., Ваховский В.Г., Стахов Д.А.), БИ, 1988 г.
233. Преобразователь кода Фибоначчи в двоичный код. Авторское свидетельство № 1432789 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Тарасова О.Н., Звенигородская Т.И.), БИ, 1988 г.
234. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1438008 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Сержанов В.В., Золотарев С.И.), БИ, 1988 г.

235. Устройство для контроля 3-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1439596 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В.), БИ, 1988 г.
236. Последовательный сумматор кодов с иррациональными основаниями. Авторское свидетельство № 1439577 (соавторы Козак А.А., Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1988 г.
237. Преобразователь двоичного кода в код Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1439751 (соавторы Лужецкий В.А., Ваховский В.Г., Козлюк П.В., Попович И.М.), БИ, 1988 г.
238. Устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1444751 (соавторы Козак А.А., Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1988 г.
239. Последовательное устройство для умножения. Авторское свидетельство № 1444754 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1988 г.
240. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1450112 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Тарасова О.Н., Марцев Н.П.), БИ, 1988 г.
241. Устройство для кодирования по векторному методу. Авторское свидетельство № 1444754 (соавторы Черняк А.И., Марценюк В.П., Пилипчак В.И., Пленсак О.А.), БИ, 1988 г.
242. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 14624486 (соавторы Соляниченко Н.А., Сержанов В.В., Вартапетян Э.А.), БИ, 1988 г.
243. Устройство для контроля 3-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1478217 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1989 г.
244. Устройство для контроля *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1478340 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1989 г.
245. Счетчик импульсов в *p*-кодах Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1480121 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Андреев А.Е., Малиночка В.П.), БИ, 1989 г.
246. Устройство для деления в 2-коде золотой пропорции. Авторское свидетельство № 1485231 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1989 г.
247. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 1485232 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Кузовова И.С.), БИ, 1989 г.
248. Сумматор последовательного действия. Авторское свидетельство № 1488789 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Заболотная Н.И.), БИ, 1989 г.
249. Арифметико-логическое устройство. Авторское свидетельство № 1495789 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Глебова М.В.), БИ, 1989 г.
250. Устройство для контроля 3-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1478217 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Ваховский В.Г.), БИ, 1989 г.
251. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1495993 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Лысюк В.В., Васильева Т.Н., Рафалюк А.Е., Крупельницкий Л.В., Майстришин В.В.), БИ, 1989 г.
252. Преобразователь напряжение-код. Авторское свидетельство № 1508343 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Короновский А.И., Петросюк Ю.А.), БИ, 1989 г.
253. Устройство для контроля *p*-кода Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1510100 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В.), БИ, 1989 г.
254. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1513619 (соавторы Азаров А.Д., Моисеев В.И., Марценюк В.П., Стейскал В.Я., Орлович Ю.П., Лысюк В.В., Васильева Т.Н., Рафалюк А.Е.), БИ, 1989 г.
255. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1529458 (соавторы Лужецкий В.А., Квитка Н.А., Тютюнников И.Е.), БИ, 1989 г.
256. Микропрограммное устройство управления. Авторское свидетельство № 1536379 (соавторы Лужецкий В.А., Сухарев А.А., Хуторянец А.Е.), БИ, 1989 г.
257. Цифроаналоговый преобразователь. Авторское свидетельство № 1538254 (соавторы Азаров А.Д., Стейскал В.Я., Волков В.П., Плакидюк Н.В.), БИ, 1989 г.
258. Устройство для контроля *p*-кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1545330 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Сегнет Т.И.), БИ, 1989 г.
259. Параллельный сумматор кодов Фибоначчи. Авторское свидетельство № 1546966 (соавторы Лужецкий В.А., Шебуков В.А., Ваховский В.Г., Коротин В.В., Попович И.М.), БИ, 1989 г.
260. Устройство для суммирования Фибоначчи-десятичных кодов. Авторское свидетельство № 1546968 (соавторы Лужецкий В.А., Козлюк П.В., Горлачева Е.А.), БИ, 1989 г.
261. Последовательный сумматор. Авторское свидетельство № 1546970 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е., Кондратенко В.В.), БИ, 1989 г.
262. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1547062 (соавторы Квитка Н.А., Лужецкий В.А., Квитка С.Н., Петросюк Ю.А.), БИ, 1989 г.
263. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1550620 (соавторы Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Власюк И.П.), БИ, 1989 г.
264. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 1552174 (соавторы Лужецкий В.А., Коротин В.В., Попович И.М.), БИ, 1989 г.

265. Устройство для деления. Авторское свидетельство № 1552175 (соавторы Лужецкий В.А., Черняк А.И., Малиночка В.П., Андреев А.Е.), БИ, 1989 г.
266. Устройство для регулирования тока. Авторское свидетельство № 1552311 (соавтор Погорелов В.Я.), БИ, 1989 г.
267. Преобразователь кода. Авторское свидетельство № 1557685 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Тарасова О.Н., Золотарев С.И.), БИ, 1989 г.
268. Устройство для цифровой магнитной записи. Авторское свидетельство № 1569878 (соавторы Марценюк В.П., Пилипчак В.И., Пленсак О.А., Степаненко А.В.), БИ, 1990 г.
269. Аналого-цифровой преобразователь. Авторское свидетельство № 1571761 (соавторы Моисеев В.И., Стейскал В.Я., Крупельницкий Л.В.), БИ, 1990 г.
270. Преобразователь кодов. Авторское свидетельство № 1578813 (соавторы Соляниченко Н.А., Замчевский В.В., Гуменюк Я.А.), БИ, 1990 г.

Зарубежные патенты А.П. Стахова

271. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of the USA No 4161725.
272. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of USA No 4187500.
273. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of USA No 4159529.
274. Device for display information representation. Patent certificate of USA No 4148074.
275. Digit-to-analog converter. Patent certificate of USA No 4290050.
276. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of USA No 4290051.
277. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of USA No 4276608.
278. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of England No 1566978.
279. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of England No 1543302.
280. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of England No 1565460.
281. Device for display information representation. Patent certificate of England No 1577184.
282. Device for obtaining of the "Golden" binary code. Patent certificate of England No 2048593.
283. Digit-to-analog converter. Patent certificate of England No 2033631.
284. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificate of England No 2038122.
285. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of England No 2050011.
286. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of England No 2025095.
287. Digit-to-analog converter for the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of England No 2090490.
288. Analog-to-digital converter. Patent certificate of England No 2091507.
289. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of Germany No 2413823.
290. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Germany No 2732008.
291. Device for display information representation. Patent certificate of Germany No 2756806.
292. Digit-to-analog converter. Patent certificate of Germany No 2848911.
293. Digit-to-analog converter. Patent certificate of Germany No 2842672.
294. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of Germany No 2921053.
295. Analog-to-digital converter. Patent certificate of Germany No 3050456.
296. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Japan No 1118407.
297. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of Japan No 1112711.
298. Device for display information representation. Patent certificate of Japan No 1098040.
299. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of Japan No 1147296.
300. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of France No 7739466.
301. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificates of France No 7722036, No 2359460.
302. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of France No 2375655.
303. Device for display information representation. Patent certificates of France No 7737360, No 2375669.
304. Device for obtaining of the "Golden" binary code. Patent certificates of France No 2457601, No 7913131.
305. Digit-to-analog converter. Patent certificates of France No 7833461, No 2441295.
306. Digit-to-analog converter. Patent certificates of France No 7831692, No 2441295.
307. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificates of France No 7900329, No 2446035.
308. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificates of France No 7917216, No 2460367.
309. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of France No 425753.

310. Digit-to-analog converter for the *p*-Fibonacci codes. Patent certificates of France No 8100570, No 2498031.
311. Analog-to-digital converter. Patent certificate of France No 8104127.
312. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of Canada No 1116754.
313. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Canada No 1134510.
314. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of Canada No 1103807.
315. Device for display information representation. Patent certificate of Canada No 1096075.
316. Digit-to-analog converter. Patent certificate of Canada No 1137228.
317. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificate of Canada No 1137227.
318. Device for reduction of *p*-Fibonacci codes to the minimal form. Patent certificate of Canada N1132263.
319. Parallel adder of the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of Canada No 1127313 .
320. Digit-to-analog converter for the *p*-Fibonacci codes. Patent certificate of Canada No 1165889.
321. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of Poland No 124795.
322. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of Poland No 108086.
323. Adder of Fibonacci codes. Patent certificates of Poland No 109971.
324. Converter of analogous values to *p*-Fibonacci code. Patent certificate of DDR No 133373.
325. Reduction method of *p*-Fibonacci code to the minimal form and device for its realization. Patent certificate of DDR No 150514.
326. Adder of Fibonacci codes. Patent certificate of DDR No 136317.
327. Device for display information representation. Patent certificate of DDR No 134005.
328. Device for obtaining of the "Golden" binary code. Patent certificates of DDR No 142780.
329. Digit-to-analog converter. Patent certificates of DDR No 140187.
330. Digit-to-analog converter. Patent certificates of DDR No 138400.
331. Analog-to-digital converter realizing the comparison-subtraction method. Patent certificate of DDR No 141033.

<u>Публикации других авторов</u>

332. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, 1991.
333. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Москва: Физматгиз, 1960.
334. Татаренко А.А. Золотые Tm – гармонии и Dm – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
335. Александров П.С. **(**общий редактор**)**. Проблемы Гильберта. Москва, «Наука», 1969.
336. Пойа Д. Математическое открытие (пер. с англ.). Москва: Наука, 1970.
337. Mohanty S.G. On a partition of generalized Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 1968, V.6, No 1.
338. Hoggatt V.E. A new angle on Pascal's Triangle. The Fibonacci Quarterly, 1968, V.6, No 4.
339. Spears C.P., Bicknell-Johnson M. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees, Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 7, 1998, 377-391.
340. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2, с. 347-363
341. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
342. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Москва, Бином, 2006. — 216-250
343. Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Происхождение систем счисления. В книге «Энциклопедия элементарной математики». Книга первая. Арифметика, Москва-Ленинград, Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1954.
344. Нейгебауер О. Лекции по истории античных математических наук. Том 1. Догреческая математика. Москва-Ленинград: ОНТИ, НКТИ, 1937.
345. Апокин И.А., Майстров Л.Е. Развитие вычислительных машин. Москва: Наука, 1974.
346. Поспелов Д. А. Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия . Москва: Высшая школа, 1960.
347. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. Москва: Соаветское радио, 1968.
348. Касаткин В.Н. Новое о системах счления. Киев: Высшая школа, 1989.
349. Шауман А.М. Основы машинной арифметики. Ленингоад: Изд-во Ленинградского университета, 1979.
350. Николай Петрович Брусенцов - творец первого и единственного в мире троичного компьютера "Сетунь" http://www.icfcst.kiev.ua/MUSEUM/Brusentsov_r.html
351. Цифровые процессоры сигналов на основе троичных кодов http://www.ci.ru/inform13_08/p_23.htm

352. Физики создали нанопамять с использованием троичной логики
http://www.moyaufa.ru/35590/1/view/news.html
353. Троичная логика – прогресс в IT-тенологиях http://www.izobretenija.ru/vashi/667
354. Давыдов Е.С. Наименьшие группы чисел для образования натуральных рядов. Санкт-Петербург, 1903.
355. Гартц В.Ф. Лучшая система для весовых гирь. Санкт-Петербург, 1910.
356. Депман И.Я. История арифметики. Мокква: Учпедгиз, 1959.
357. Monteiro P. and R.W. Newcomb (University of Maryland). Minimal and maximal Fibonacci Representations: Boolean Generation. The Fibonacci Quarterly, 1976, v.14, No 1.
358. Licomendes P. and Newcomb R. (University of Maryland). Multilevel Fibonacci Conversion and Addition. The Fibonacci Quarterly, 1984, v.22, No 3.
359. Ligomenides P. and Newcomb R. Equivalence of some Binary, Ternary, and Quaternary Fibonacci Computers". Proceeding of the Eleventh International Symposium on Muliple-Valued Logik, Norman, Oklahoma, May 1981.
360. Ligomenides P. and Newcomb R.. Complement Representations in the Fibonacci Computer. Proceedings of the Fifth Symposium ob Computer Arithmetic, Ann Arbor, Michigan, May 1981.
361. Newcomb R. Fibonacci Numbers as a Computer Base. Conference Proceedings of the Second Interamerican Conference on Systems and Informatics, Mexico City, November 27, 1974.
362. Hoang V.D. A Class of Arithmetic Burst-Error-Correcting Codes for the Fibonacci Computer. PhD Dissertation, University Maryland, December 1979.
363. Chernov, V.M., Pershina M.V. Fivonacci-Mersenne and Fibonacci-Fermat discrete transforms. The Journal "Boletin de Informatica". Special issue "The Golden Section: Theory and Applications", No 9/10, 1999. Mozambique: Publishing House of the Eduardo Mondlane University.
364. Stankovic R.S., Stankovic M., Astola, J.T., Egizarian K. Fibonacci Decision Diagram, Tampere International Center for Signal Processing, 2000.
365. Kautz W. H. Fibonacci codes for synchronization control. IEEE Trans. Inform. Theory, 1965, vol. IT-1 1
366. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
367. Kharkevitch A.A. A struggle against noises. Moscow: Publishing House "Fizmatgiz", 1963 (in Russian).
368. Peterson WW, Weldon E.J. Error-correcting codes. Cambridge, Massachusetts, and London: The MIT Press, 1972.
369. Hohn F.E. Elementary Matrix Algebra. New York: Macmillan Company, 1973.
370. Seberry, J., Pierzyk, J. Cryptography. An Introduction to Computer Security: Prentice Hall, New York-London-Toronto-Sydney-Tokyo (1989).
371. Davies, D.W., Price, W.L. Security for Computer Networks. An Introduction to Data Security in Teleprocessin and Electronic Funds Transfer: John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapure, Second Edition (1989).
372. Diffie W. and Hellman M. E. New Directions in Cryptography. ***IEEE Trans. on Info. Theory***, Vol. IT-22, 644-654 (1976).
373. Menezes A., Van Oorshot P.C. and Vanstone S.A. Handbook on Applied Cryptography: CRC Press, Boca Raton, Florida (1996).
374. Mollin, Richard A. An Introduction to Cryptography. Second Sedition: CRC, Champan & Hall (2001).
375. Hybrid cryptosystems. From Wikipedia, the free encyclopedia.
http://en.wikipedia.org/wiki/Hybrid_cryptosystem
376. Invertible matrices. Wikipedia. Free Encyclopedia http://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix