Мартыненко Г.Я.

Числа Стахова-Газале как предельные значения непрерывных мульти-дробей

Известно, что обобщенное уравнение М. Газале (Газале, 2002, с. 162)

$$x^n - ax - b = 0$$

связано с повторным корнем

$$x = \sqrt[n]{b + a\sqrt[n]{b + a\sqrt[n]{b + a\sqrt[n]{\ldots}}}}\ .$$

Этот корень и приведенное выше уравнение Газале интерпретирует через метафору «гильбертов отель» (Газале, там же, с.161-162).

При $n = 3,\ a = 1,\ b = 1$ это уравнение имеет вид $x^3 - x - 1 = 0$. Корень этого уравнения, приближенно равный 1,32471, Газале назвал *серебряным сечением.*

Можно показать, что уравнение Газале связано не только с повторными корнями, но и с непрерывными дробями, точнее с гибридной структурой, которую можно назвать непрерывной *корне-дробью*. Так, для уравнения

$$x^3 - x - 1 = 0$$

корне-дробь предстает в таком виде

$$1 + \cfrac{1}{\sqrt{1 + \cfrac{1}{\sqrt{1 + \cfrac{1}{\sqrt{1\ldots}}}}}}$$

Результат вычислений здесь тот же. Интересно, что при этом происходит понижение степени корня на единицу благодаря эффекту, создаваемому дробными структурами.

Широкой известностью пользуется также обобщение А. Стахова, задаваемое уравнением:

$$x^{n+1} - bx^n - a = 0\ .$$

Это уравнение при $a = 1,\ b = 1$ и $n \geq 1$ имеет корни, которые пробегают спектр значений, задаваемых таблицей (Стахов, 2003, с.12), которая приводится ниже:

Таблица 1

Числа Стахова

n	1	2	3	4	5	6	7
x	1,618	1,466	1,380	1,324	1,285	1,255	1,232

Мы предприняли несколько попыток выразить стаховские числа через повторные корни, непрерывные дроби и непрерывные корне-дроби. Наши попытки успеха не имели, пока мы не остановились на гибридной структуре, представляющей собой комбинацию непрерывных дробей и повторных степеней. Эту структуру мы назвали *непрерывной мульти-дробью.* Например, для уравнения

$$x^3 - x^2 - 1 = 0$$

эта мульти-дробь выглядит так:

$$1+\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{[1+\ldots]^2}\right]^2}\right]^2}\right]^2}$$

Перед нами весьма внушительное и странноватое «сооружение». Но с ним можно работать.

После многочисленных итераций с точностью до пяти знаков получаем стаховское число 1,46557. Таким же образом по мере увеличения степени мы получаем и остальные стаховские числа, представленные в вышеприведенной таблице, и притом с любым заданным числом знаков после запятой. Так, при степени, равной 3, получаем 1,38028, а при степени 4 имеем 1,32472. Это число имеет двух владельцев – Стахова и Газале. Интересно, что количество итераций с увеличением степени резко возрастает, и наша конструкция все медленнее и медленнее сходится к предельной величине.

Сказанное позволяет сделать предварительный вывод, что непрерывные дроби и повторные степени суть некоторые варианты единой дробно-степенной структуры вида

$$1+\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{\left[1+\cfrac{1}{[1+\ldots]^n}\right]^n}\right]^n}\right]^n}$$

При $n = 1/2, 1/3, 1/4 \ldots$ получаем числа Газале, а при $n = 2, 3, 4 \ldots$ – числа Стахова. При $n = 1$ имеем классическое золотое сечение. Сказанное можно изобразить в виде единой таблицы (см. табл. 2):

Таблица 2

Числа Стахова-Газале как предельные значения непрерывных мульти-дробей

n	0	$1/5$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	1	2	3	4	5
Числа Стахова	2	1,883	1,854	1,820	1,755	1,618	1,466	1,380	1,325	1,285
Числа Газале	1	$\sqrt[5]{1{,}883} =$ 1,135	$\sqrt[4]{1{,}854} =$ 1,167	$\sqrt[3]{1{,}820} =$ 1,221	$\sqrt{1{,}755} =$ 1,325	1,618	$1{,}466^2 =$ 2,149	$1{,}38^3 =$ 2,628	$1{,}325^4 =$ 3,082	$1{,}285^5 =$ 3,504

Числа Стахова, соответствующие $n < 1$, можно получить также путем решения уравнения

$$x^{n+1} - x^n - 1 = 0,$$

полагая последовательно $n = 1/2, 1/3, 1/4$ и т. д. В итоге мы получим те же числа, которые приведены во второй строке табл. 2. Например, при $n = 1/2$ получаем уравнение

$$x^{3/2} - x^{1/2} - 1 = 0,$$

корень которого равен 1,755. Это число совпадает с тем, которое находится в столбце $n = 1/2$. Строкой ниже располагается число 1,325, названное Газале серебряным сечением.

Литература

Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов. Перевод с англ. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 272 с.

Стахов А. П. Сакральная геометрия и математика гармонии // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та містецтві. Вінниця: Вінницький державний аграрний університет, 2003. С. 8–26.