

«Золотые» гиперболические миры

В работах [1–2] введен новый класс гиперболических функций обобщенных «золотых» сечений, названных «золотыми» гиперболическими функциями (ЗГФ).

Использование эстетической категории «золотые» служит не для установления неких критериев истинности или универсальности, сколько обусловлено определенной математической и художественной завершенностью, присущей гармоническим пропорциям.

В основу ЗГФ вместо числа e положены числа «золотого» сечения ϕ в его обобщении, адекватном алгебраическому квадратному уравнению.

В статье показано, что «Золотые» гиперболические функции обладают всеми качественными признаками и соотношениями, присущими обычным гиперболическим функциям. Одновременно они отличаются уникальными рекуррентными свойствами, связывающими значения функций, отстоящие друг от друга на целочисленные интервалы аргумента, а для комплексного аргумента – на целочисленные значения его действительной части.

Фактически в одной модели органически объединены непрерывность и дискретность, что, надо полагать, является фундаментальным признаком физического мира. И если окружность символизирует замкнутость и цикличность процессов, то гипербола – динамичность развития по экспоненциальным, степенным и подобным законам.

Целью настоящей работы является исследование практических аспектов применения ЗГФ с демонстрацией результатов в виде параметрических поверхностей.

Они могут быть использованы в системах автоматического проектирования, в архитектуре, строительстве, для построения геометрических моделей различных природных конструкций и др.

Итак, при дальнейшем изложении материала ниже будем различать: n – дискретная переменная, x – непрерывная переменная, z – комплексное число, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, ϕ – число обобщенного «золотого» сечения, $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$.

Математическое представление. Основой ЗГФ являются обобщенные формулы Бине для чисел Фибоначчи F_n и Люка L_n [3]:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-q)^n \phi^{-n}}{\dot{m}} = \frac{\phi^n - (m - \phi)^n}{\dot{m}} = \frac{1}{\dot{m}} \left[\left(\frac{m + \dot{m}}{2} \right)^n - \left(\frac{m - \dot{m}}{2} \right)^n \right], \quad (1)$$

$$L_n = \phi^n + (-q)^n \phi^{-n} = \phi^n + (m - \phi)^n = \left(\frac{m + \dot{m}}{2} \right)^n + \left(\frac{m - \dot{m}}{2} \right)^n. \quad (2)$$

Они адекватны обобщенному «золотому» сечению, которое характеризуется квадратным уравнением $x^2 - mx - q = 0$ и действительным корнем $\phi = \frac{m + \dot{m}}{2} > 0$, где $\dot{m} = \sqrt{m^2 + 4q} = \phi + \frac{q}{\phi}$.

«Золотые» гиперболические функции определены и непрерывны на всей числовой оси и задаются соотношениями (рис. 1)

$$\frac{c}{s} \Big|_{\phi} h_{\phi} x = \frac{\phi^x \pm \phi^{-x}}{2} \quad \text{или} \quad \text{ch}_{\phi} x = \frac{\phi^x + \phi^{-x}}{2}, \quad \text{sh}_{\phi} x = \frac{\phi^x - \phi^{-x}}{2}. \quad (3)$$

Дополнительные ЗГФ (тангенс – th , котангенс – cth , секанс – sech и косеканс – cosech) определяются как

$$\text{th}_{\phi} x = \text{sh}_{\phi} x / \text{ch}_{\phi} x, \quad \text{cth}_{\phi} x = \text{ch}_{\phi} x / \text{sh}_{\phi} x, \quad \text{sech}_{\phi} x = 1 / \text{ch}_{\phi} x, \quad \text{cosech}_{\phi} x = 1 / \text{sh}_{\phi} x.$$

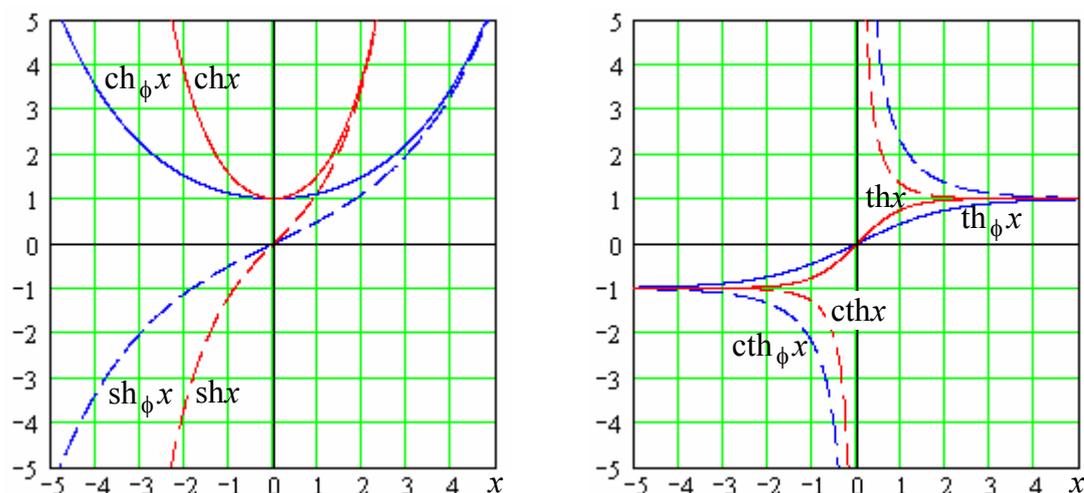


Рис. 1. Графики обычных и «золотых» (с индексом ϕ) гиперболических функций для действительного аргумента, $m = q = 1$

Отметим главные особенности ЗГФ:

1. Полностью сохраняются внешняя и содержательная похожесть на обычные гиперболические функции, и что самое главное – соответствующие формулы и тождества без каких-либо дополнительных преобразований или переводных коэффициентов.

2. Теряя некоторые важнейшие свойства функции e^x , в частности, ее уникальность в интегрально-дифференциальных преобразованиях, взамен приобретаем новые, не менее интересные качества, связанные с неповторимостью «золотых» пропорций и их рекуррентными свойствами в целочисленных аргументах.

Таким образом, в отличие, например, от гиперболических функций Фибоначчи [4–6], ЗГФ обладают всеми свойствами обычных гиперболических функций и одновременно дополнительными, только им присущими признаками, которые обусловлены особенностями обобщенных «золотых» пропорций.

И если число e уникально, например, с точки зрения интегрирования и дифференцирования, то число ϕ – по своим редкостным рекуррентным свойствам.

Применяя формулы (3) к известным соотношениям, описывающим свойства числовых рекуррентных последовательностей Фибоначчи и Люка [3], и переходя от дискретного параметра n к комплексным числам z , можно получить целый арсенал дополнительных тождеств (табл. 1).

Новые соотношения присущи исключительно «золотым» гиперболическим функциям. Это наш новый запас знаний о гиперболичности, который мы приобрели, заплатив за это ни много, ни мало частичной потерей замечательных свойств числа e .

Рассмотрение основных тождеств в табл. 1 позволяет сформулировать основополагающий вывод: «золотые» гиперболические функции обладают одновременно непрерывными и дискретными свойствами. То есть в одной модели мы теперь имеем единовременное проявление непрерывности и целочисленной дискретности.

Способы задания поверхностей. Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$.

Как известно [7, с. 81], непрерывной поверхностью называется множество точек $P(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad (4)$$

при подходящих значениях двух действительных параметров u, v и с правыми частями – непрерывными функциями этих параметров.

Таблица 1

**Основные рекуррентные свойства «золотых» гиперболических функций,
(z – комплексное число, в том числе и целое n)**

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для гиперболических функций обобщенных «золотых» сечений
$F_n = mF_{n-1} + F_{n-2}$	$\text{sh}_\phi z = m \cdot \text{ch}_\phi(z-1) + \text{sh}_\phi(z-2)$
$L_n = mL_{n-1} + L_{n-2}$	$\text{ch}_\phi z = m \cdot \text{sh}_\phi(z-1) + \text{ch}_\phi(z-2)$
$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$	$\text{ch}_\phi z = [\text{ch}_\phi(z+1) + \text{ch}_\phi(z-1)]/m$
$F_n = (L_{n+1} + L_{n-1})/m^2$	$\text{sh}_\phi z = [\text{sh}_\phi(z+1) + \text{sh}_\phi(z-1)]/m$
$\phi^n = \phi F_n + F_{n-1}$	$\text{sh}_\phi z + \text{ch}_\phi z = 2[\phi \cdot \text{sh}_\phi z + \text{ch}_\phi(z-1)]/m$
$\phi^n = \phi L_n + L_{n-1}/m$	$\text{sh}_\phi z + \text{ch}_\phi z = 2[\phi \cdot \text{ch}_\phi z + \text{sh}_\phi(z-1)]/m$
$L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n = (mF_n)^2 + 2(-1)^n$	$\text{ch}_\phi(2z) = 2 \text{ch}_\phi^2 z - 1 = 2 \text{sh}_\phi^2 z + 1$
$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$	$\text{sh}_\phi^2 z = \text{ch}_\phi(z+1) \cdot \text{ch}_\phi(z-1) - \frac{m^2}{4} - 1$
$L_n^2 = L_{n-1}L_{n+1} - m^2(-1)^{n-1}$	$\text{ch}_\phi^2 z = \text{sh}_\phi(z+1) \cdot \text{sh}_\phi(z-1) + \frac{m^2}{4} + 1$

Эта же поверхность может быть задана уравнениями $\varphi(x, y, z) = 0$ или $z = f(x, y)$.

В общем случае поверхности могут иметь более одной полости.

Простая двухсторонняя поверхность состоит из одной полости без каких-либо самопересечений (кратных точек).

Любую поверхность можно представить в параметрическом виде (4), когда каждой паре значений аргументов соответствует одна точка трехмерного пространства (табл. 2), но обратное правило в ряде случаев не выполняется.

Таблица 2

Некоторые примеры параметрического описания поверхностей второго рода

Наименование поверхности	Стандартное (каноническое) представление	Параметрическое задание
Эллипсоид (сфероид)	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	$x = a \sin u \cos v,$ $y = b \sin u \sin v,$ $z = c \cos u$
Однополостный гиперболоид	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	$x = a \text{chu} \cos v,$ $y = b \text{chu} \sin v,$ $z = c \text{shu}$
Двуполостный гиперболоид	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$	$x = \pm a \text{chu},$ $y = b \text{shu} \sin v,$ $z = c \text{shu} \cos v$
Эллиптический параболоид, $p, q > 0$	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$	$x = \sqrt{p} u \cos v,$ $z = u^2/2$ $y = \sqrt{q} \text{shu} \sin v,$
Гиперболический параболоид, $p, q > 0$	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$	$x = \sqrt{p} u \text{chv},$ $z = u^2/2$ $y = \sqrt{q} u \text{shv},$

Основным преимуществом параметрического описания является возможность представления геометрической формы сложных поверхностей, которые визуализировать другими способами очень сложно, поэтому параметрические поверхности широко используются в прикладной геометрии и компьютерной графике.

Параметризация делает такие поверхности удобными для обработки и отображения.

В качестве примера, соответствующего рассматриваемой теме, рассмотрим поверхность второго порядка [8], основанную на «золотом» сечении,

$$z^2 - \left(\frac{\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(y - \frac{\Phi^x}{\sqrt{5}} \right)^2 = 0.$$

По своей форме она напоминает горн или кратер с расширяющимся раструбом и потому названа авторами «Золотой Шофар».

Перейдя от Φ к обобщенному числу ϕ и рассматривая в качестве осей x и y соответственно переменные $\frac{\phi^{-x}}{2}$ и $y - \frac{\phi^x}{2}$, после параметризации указанной поверхности (с помощью цилиндрической системы координат), получаем инвариантные выражения для ее описания через два параметра:

$$\begin{cases} x(u, v) = \frac{\phi^{-u}}{2} \sin v, & z(u, v) = u, \\ y(u, v) = \frac{\phi^u}{2} - \frac{\phi^{-u}}{2} \cos v = \text{sh}_{\phi} u + \frac{\phi^{-u}}{2} (1 - \cos v). \end{cases}$$

Используя такой подход и общие правила параметризации упорядоченных множеств точек, в частности, при отображении поверхностей второго рода (см. табл. 2), с помощью «золотых» гиперболических функций можно построить самые разнообразные поверхности (см. приложение).

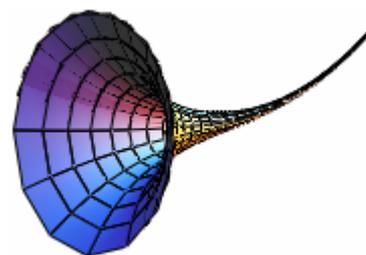
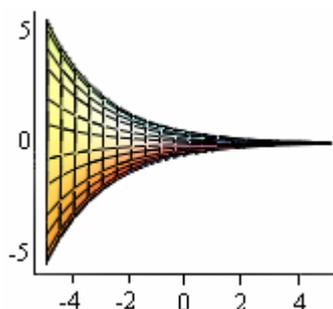
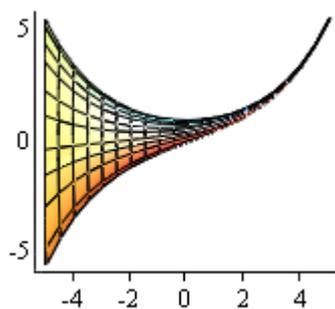
Их выразительность и колоритность не вызывают сомнения. Но еще более важным представляется присутствие в приведенных формах элементов целочисленной дискретности, что позволяет их использовать, например, в архитектуре и строительстве.

Можно также высказать предположение о полезности их применения для описания разнообразных процессов окружающего мира, которому присущи такие свойства, как гиперболичность, непрерывность и дискретность.

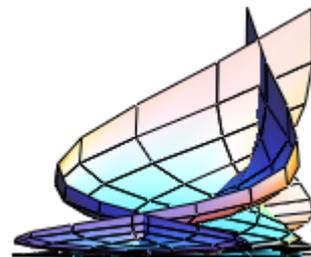
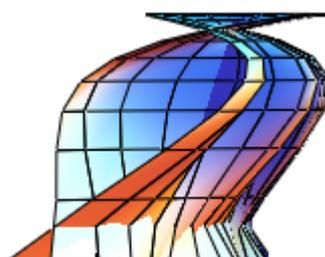
Литература

1. Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідова геометрія у науці та мистецтві. – Львів: НВФ «Українські технології», 2005. – 198 с.
2. Василенко С.Л. Гиперболические функции «золотого» сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567. – Публ.14931 от 05.12.2008. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321092.htm>.
3. Василенко С.Л. Аналитика «золотых» пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567. – Публ. 14795 от 12.05.2008. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm>.
4. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук УССР, 1993. – Т. 208. – № 7. – С. 9–14.
5. Stakhov A., Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos // Solitons & Fractals, 2004. – № 23(2). – P. 379–389.
6. Стахов А.П. От «Золотого Сечения» к «Металлическим Пропорциям». Генезис великого математического открытия от Евклида к новым математическим константам и новым гиперболическим моделям Природы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567. – Публ.14774 от 16.04.2008.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.
8. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar // Chaos, Solitons & Fractals Chaos, Solitons & Fractals, 2005. – V. 26. – № 3. – P. 677–684.

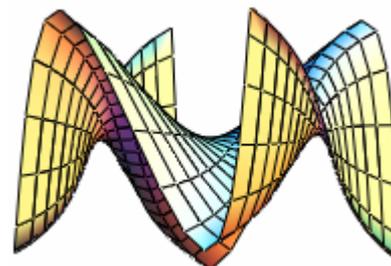
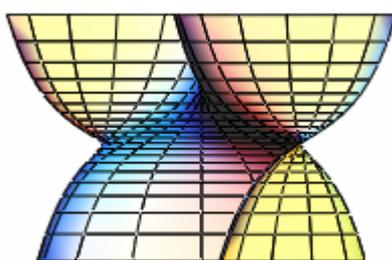
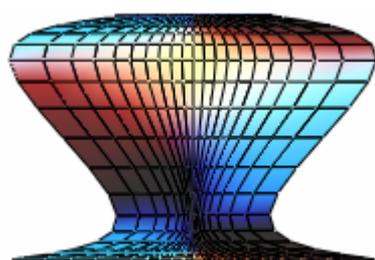
**Галерея параметрических поверхностей,
описываемых с использованием «золотых» гиперболических функций**



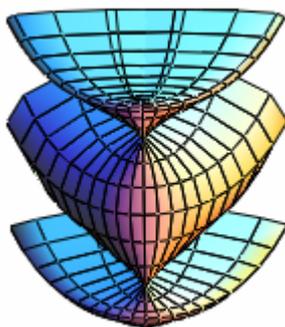
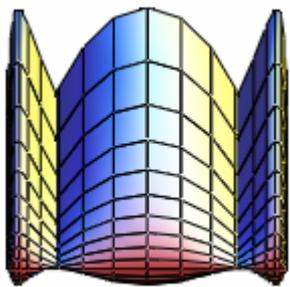
$$x(u, v) = \frac{\phi^{-u}}{2} \sin v, \quad y(u, v) = \operatorname{sh}_{\phi} u + \frac{\phi^{-u}}{2} (1 - \cos v), \quad z(u, v) = u$$



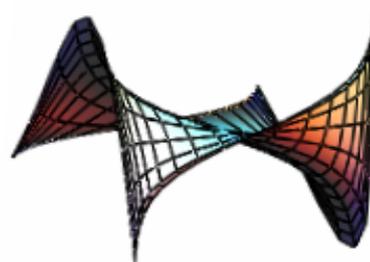
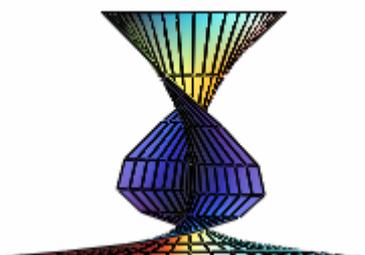
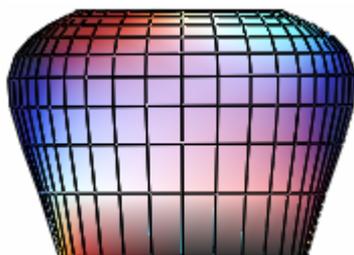
$$x(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} (v - u), \quad y(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} v, \quad z(u, v) = \cos v \cdot \sin u$$



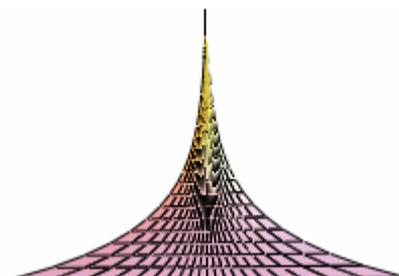
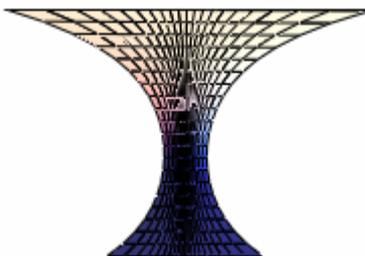
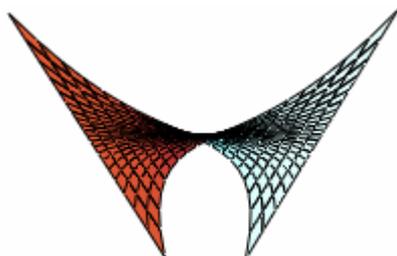
$$x(u, v) = \operatorname{th}_{\phi} v, \quad y(u, v) = \operatorname{sh}_{\phi} u, \quad z(u, v) = u \sin v$$



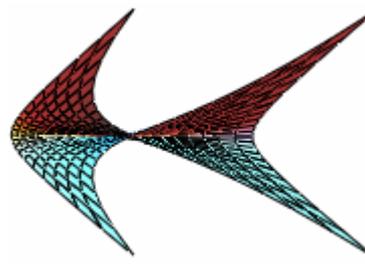
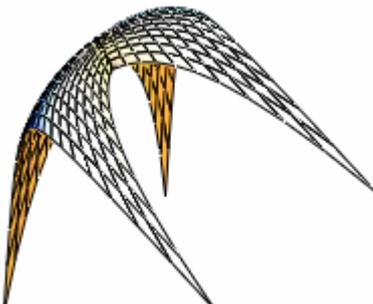
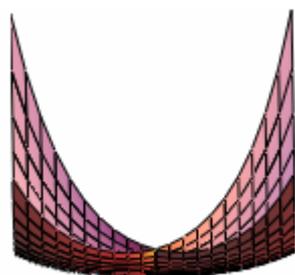
$$x(u, v) = \operatorname{th}_{\phi} v, \quad y(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} u, \quad z(u, v) = u \cos v$$



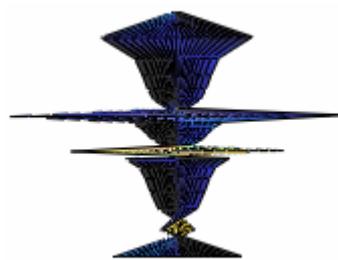
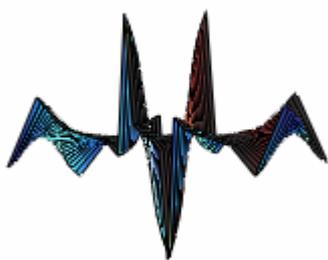
$$x(u, v) = \operatorname{th}_{\phi} v, \quad y(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} u, \quad z(u, v) = v \cos u$$



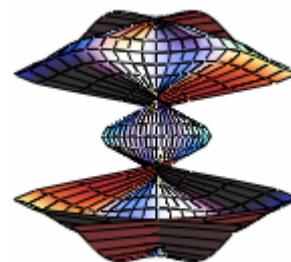
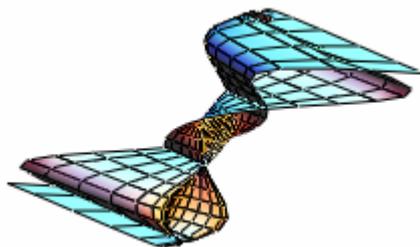
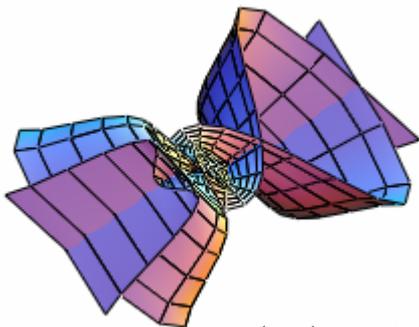
$$x(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} u \cdot \operatorname{sh}_{\phi} v, \quad y(u, v) = \operatorname{sh}_{\phi} u \cdot \operatorname{sh}_{\phi} v, \quad z(u, v) = u$$



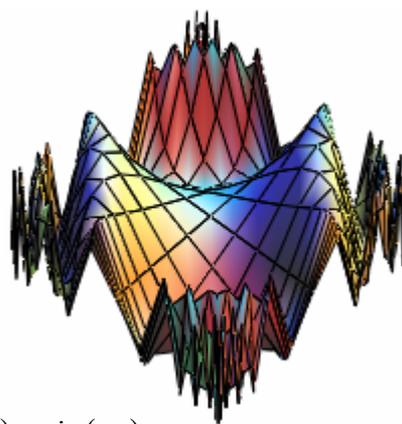
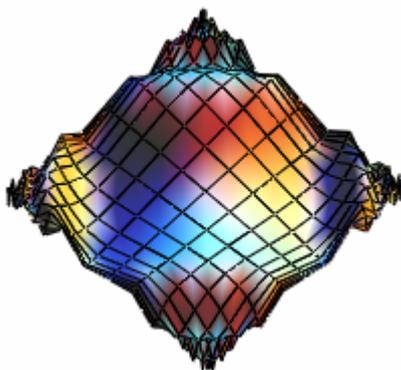
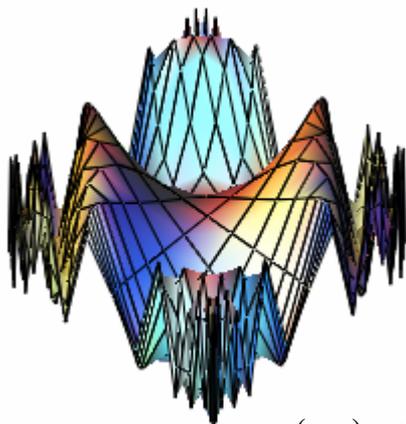
$$x(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} v \cdot \operatorname{ch}_{\phi} u, \quad y(u, v) = \operatorname{sh}_{\phi} v \cdot \operatorname{sh}_{\phi} u, \quad z(u, v) = u$$



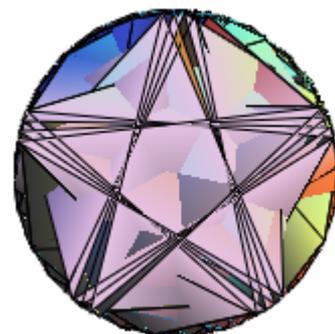
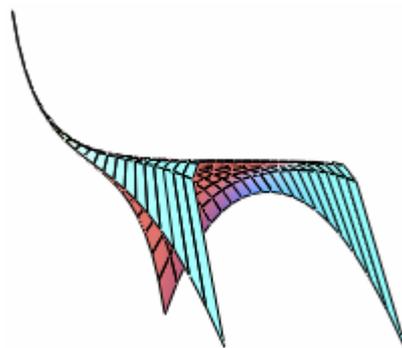
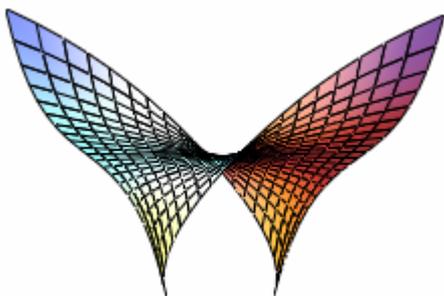
$$x(u, v) = \operatorname{sh}_\phi u, \quad y(u, v) = \operatorname{sh}_\phi v, \quad z(u, v) = v \operatorname{tg} u$$



$$x(u, v) = v \operatorname{ch}_\phi u \cdot \cos u, \quad y(u, v) = u \operatorname{sh}_\phi v \cdot \sin v, \quad z(u, v) = u$$



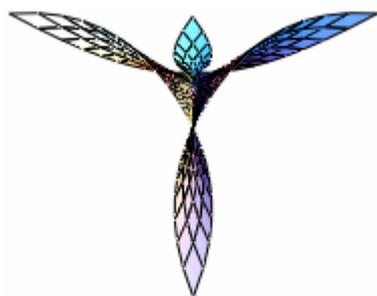
$$x(u, v) = \operatorname{th}_\phi(v), \quad y(u, v) = \operatorname{th}_\phi(u), \quad z(u, v) = \sin(vu)$$



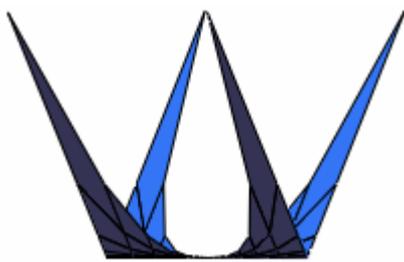
$$\begin{cases} x(u, v) = v \operatorname{sh}_\phi u, \\ y(u, v) = u \operatorname{ch}_\phi v, \\ z(u, v) = v. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = \phi^{-v} \operatorname{ch}_\phi u^2, \\ y(u, v) = \phi^{-v} \operatorname{sh}_\phi u, \\ z(u, v) = u + v. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(u, v) = \operatorname{th}_\phi v, \\ y(u, v) = \cos(vu), \\ z(u, v) = \sin(vu). \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(u, v) = v \operatorname{ch}_{\phi} u, \\ y(u, v) = u \operatorname{ch}_{\phi} v, \\ z(u, v) = uv \end{cases}$$

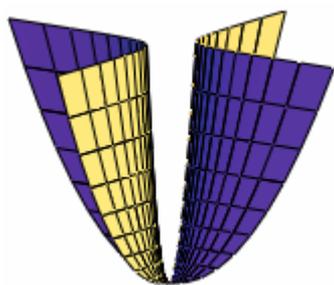


$$\begin{cases} x(u, v) = \operatorname{sh}_{\phi}(uv), \\ y(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi}(uv), \\ z(u, v) = u^3. \end{cases}$$



$$\begin{cases} x(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} v, \\ y(u, v) = \operatorname{sh}_{\phi} u, \\ z(u, v) = \cos v \cdot \sin u \end{cases}$$

Гиперболический параболоид $x(u, v) = u \operatorname{ch}_{\phi} v$, $y(u, v) = u \operatorname{sh}_{\phi} v$, $z(u, v) = u^2/2$
и некоторые поверхности с модификацией функции $z = z(u, v)$



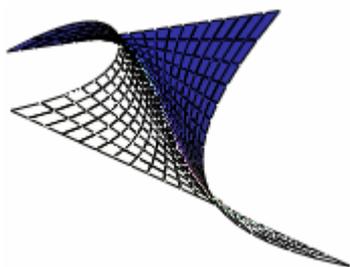
$$z(u, v) = u^2/2$$



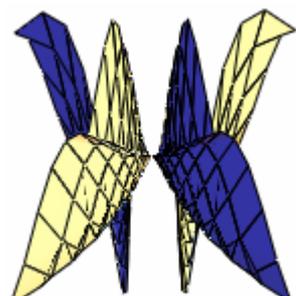
$$z(u, v) = v \sin u$$



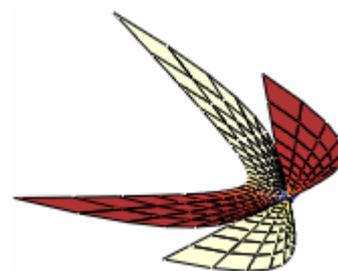
$$z(u, v) = u \sin v$$



$$z(u, v) = u - v$$

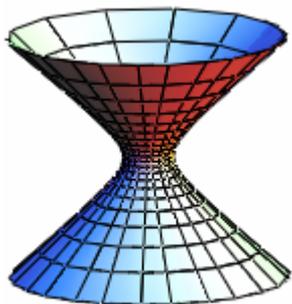


$$z(u, v) = u^2 \cos(u + v)$$

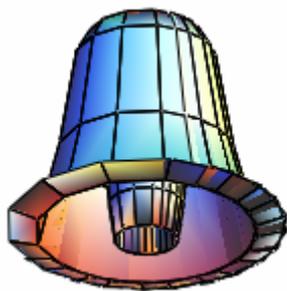


$$z(u, v) = u^4 \operatorname{ch}_{\phi} v$$

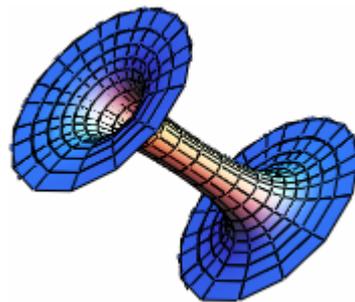
Однополостный гиперboloид $x(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} u \cos v$, $y(u, v) = \operatorname{ch}_{\phi} u \sin v$, $z(u, v) = \operatorname{sh}_{\phi} u$
и некоторые поверхности с модификацией функции $z = z(u, v)$



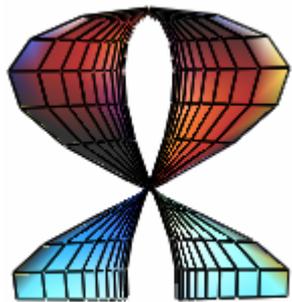
$$z(u, v) = \text{sh}_\phi u$$



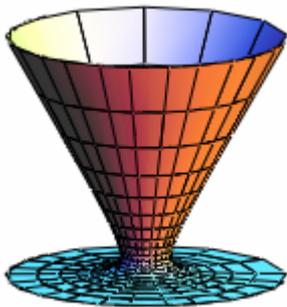
$$z(u, v) = \cos(u + v)$$



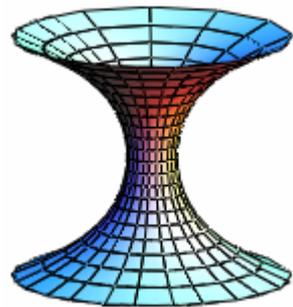
$$z(u, v) = \text{th}_\phi u$$



$$z(u, v) = v \text{th} v$$



$$z(u, v) = \phi^u$$



$$z(u, v) = u$$