

## Фрактальные многоугольники и «золотое» сечение

Рассматривая разнообразные фракталы, возникает интуитивное ощущение их красоты, а искусственно построенные из них интригуют чрезвычайной похожестью на многие природные образования. Подобные чувства рождаются и при исследовании различных объектов, в которых присутствуют элементы гармонических пропорций.

Более того, невольно напрашивается мысль: а не являются ли фракталы и «золотые» сечения следствием некоего общего механизма мироустройства, за которым стоят гармония, согласованность, когерентность и самоподобие.

В этой связи весьма любопытным представляется исследование фрактальных структур в области влияния «золотого» сечения на предмет их устойчивости, изменения форм, визуального восприятия и т.д.

Фрактальный мир природы очень широкий.

И попытки его жесткой привязки к «золотой» пропорции как некому мерилу гармонии, скорее всего, обречены на неудачу.

В то же время уникальность гармонических пропорций, в том числе необычность и исключительность «самого иррационального из всех иррациональных чисел» (в цепных дробях выражается одними единицами), просто не могут не оставить своей след и во фрактальной геометрии природы.

Поэтому становятся понятными устремления некоторых авторов [1] найти признаки «золотых» пропорций во фрактальных размерностях.

Действительно, фрактальные структуры априори имеют дробную размерность, которая чаще всего заключена в интервале  $[1, 2]$ , и некоторые из них достаточно близки к числу  $\Phi \approx 1,618$ . Однако каких-либо явных признаков физической интерпретации в этом обнаружить чаще всего не удается, и можно отнести к простой схожести, – с той или иной погрешностью.

В частности,

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1 + \frac{\ln 9}{35} = 1 + \frac{2 \ln 3}{\ln 5 + \ln 7} = c$$

Здесь больше просматриваются не столько черты фрактальной структуры, сколько сопоставление величины  $\Phi$  и первых пяти простых чисел 1, 2, 3, 5 и 7 с точностью до 5 значащих цифр с относительной погрешностью  $(1 - c/\Phi)100 = 0,007\%$ . Более того, можно нафантазировать множество отношений типа  $\ln N/\ln r$ , выражающих одну из формул вычисления фрактальной размерности и несущественно отличающихся от числа  $\Phi$ .

Целью настоящей работы является выявление возможных взаимосвязей между фрактальными структурами, основанными на правильных многоугольниках, и «золотым» сечением.

Выбор  $k$ -угольников обусловлен тем, что на объектах одинаковой природы можно проследить цепочку изменения фрактальных свойств, начиная с обычной точки ( $k=1$ ), и заканчивая окружностью ( $k \rightarrow \infty$ ), последовательно пройдя разнообразные геометрические образования.

Типичным представителем такого фрактала является известная салфетка Серпинского [2, с. 20], где в качестве топологической подосновы служит равносторонний треугольник.

Автор не ставит задачу синтеза необычных фракталов, поскольку в достаточном количестве их можно найти в ресурсах Интернет.

Поэтому прилагаемый демонстрационный материал служит всего лишь полезным инструментарием, дополняющим аналитические исследования.

**Первое наблюдение.** Во фрактальных структурах можно выделить следующие три основных элемента, которые так или иначе связаны с «золотым» сечением:

1. Фрактальная размерность  $D$  равна числу Фидия  $D = \Phi$  или другим числам обобщенных «золотых» сечений.
2. Длина генерирующих векторов или величина фрактальных преобразований выражается через число  $\Phi$  простыми соотношениями.
3. Повороты векторов относительно нулевой точки на комплексной плоскости соответствуют «золотым» углам (табл. 1), кратным  $\pi/10$ :  $18^\circ$ ,  $36^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $108^\circ$  и т.п.

Таблица 1

Значения тригонометрических функций «золотых» углов

Функция	Аргумент $\alpha$				
	$18^\circ = \pi/10$	$36^\circ = \pi/5$	$54^\circ = 3\pi/10$	$72^\circ = 2\pi/5$	$108^\circ = 3\pi/5$
$2 \sin \alpha$	$\Phi - 1$	$\sqrt{3 - \Phi}$	$\Phi$	$\sqrt{\Phi + 2}$	$\sqrt{\Phi + 2}$
$2 \cos \alpha$	$\sqrt{\Phi + 2}$	$\Phi$	$\sqrt{3 - \Phi}$	$\Phi - 1$	$1 - \Phi$

В частности, чтобы  $k$  одинаковых вектора (генерирующих отрезка) на комплексной плоскости образовали фрактал размерностью  $D = \Phi$ , их величину следует установить равной  $r^{-1} = k^{-1/\Phi}$ , тогда

$$D = \frac{\ln k}{\ln r} = \frac{\ln k}{\ln k^{1/\Phi}} = \Phi,$$

и для всех  $k$  частей целого применяется один общий коэффициент подобия  $r$ .

**Математическая постановка задачи.** Рассмотрим правильный многоугольник с  $k$  вершинами. Используя подход, изложенный в работе [2, с. 42], систему интегрируемых функций, задающую совокупность генерирующих комплексных чисел на комплексной плоскости, определим соотношением

$$F(z)_j = \frac{z + i \cdot (r-1)v_j}{r}, \quad (1)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;

$v_j = R \cdot i e^{i \frac{2\pi}{k} j}$  – один из способов задания комплексных координат вершин равностороннего  $k$ -угольника на описанной вокруг него окружности радиусом  $R$  с центром в начале координат (для удобства рассмотрения за начало отсчета принята мнимая ось, когда первая вершина соответствует положению часовых стрелок на 12 часов),  $j = \overline{0, k-1}$ ;

$r = 1/r' > 1$  – коэффициент сжатия (преобразования подобия) – некоторое число, выбираемое геометрическим построением так, чтобы следующая точка ставилась на расстоянии в  $1/r$  от соответствующей вершины,  $l$  – расстояние до нее начальной точки.

Последовательность комплексных чисел, воспроизводящих фрактальную линию, генерируется случайным образом по рекурсивной формуле

$$z_{n+1} = F(z_n)_{1+\lceil \text{rnd} k \rceil}, \quad (2)$$

где  $z_0 = 0$ ,  $n = \overline{0, N}$ ,  $\text{rnd} k$  – случайное число, равномерно (равновероятно) распределенное на интервале  $(0, k)$ ,  $\lceil \xi \rceil$  – обозначение целой части от  $\xi$ . Для лучшей выразительности фракталов количество итераций целесообразно принять  $N \geq 5 \cdot 10^4$ .

**Второе наблюдение.** Для построения совершенной фрактальной кривой – без самопересечения линий и с одновременным сохранением их непрерывности – коэффициент подобия  $r$  следует назначать строго определенным образом.

Анализ самоподобных фрактальных структур, каждая из частей которых геометрически подобна целому и основана на правильных  $k$ -угольниках, показывает:

- для (5–7)-угольников точка касания соседних фрактальных образований совпадает со второй вершиной первого из них;
- 8-угольник касается одновременно вторым и третьим углами;
- в равносторонних (9–11)-угольниках касается третья вершина;
- 12-угольник касается одновременно третьим и четвертым углами т.д.

Исходя из этого, угол сектора сопряжения  $\beta$  и угол поворота  $\alpha$  от мнимой оси к точке сопряжения рассчитываются по формулам (рис. 1 – 2):

$$\beta = \pi/k, \quad \alpha = 2\beta \cdot (\lceil k/4 \rceil + 1). \quad (3)$$

Тогда по теореме синусов для треугольника АВО находим коэффициент подобия

$$r = 1 + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta}. \quad (4)$$

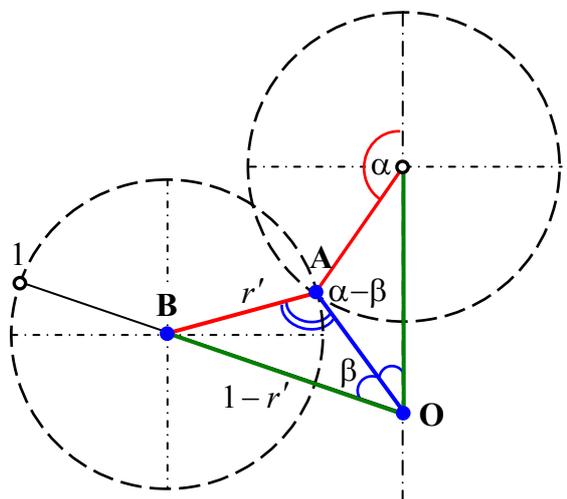


Рис. 1. Графическая интерпретация выбора коэффициента подобия  $r = 1 / r'$

Таблица 2  
Значения параметров фрактальных многоугольников

$k$	$\alpha$	$\beta$	$r$	$D$
1	360	180	2	0
2	180	90	2	1
3	120	60	2	1,5850
4	180	45	2	2
5	144	36	2,6180	1,6723
6	120	30	3	1,6309
7	102,9	25,7	3,2470	1,6523
8	135	22,5	3,4142	1,6934
9	120	20	3,8794	1,6208
10	108	18	4,2361	1,5950
11	98,2	16,4	4,5133	1,5911
12	120	15	4,7321	1,5987
15	96	12	5,7834	1,5431
$\infty$	90	0	$\infty$	1

Следует отметить, что на рис. 1 окружности, хотя в общем случае и пересекаются, фрактальная фигура имеет точку касания двух смежных областей лишь в точке А.

Сами же круги – это условные внешние границы расположения обособленных фрактальных областей, которые изнутри касаются этих окружностей в отдельных  $k$  точках, в частности, в точке А.

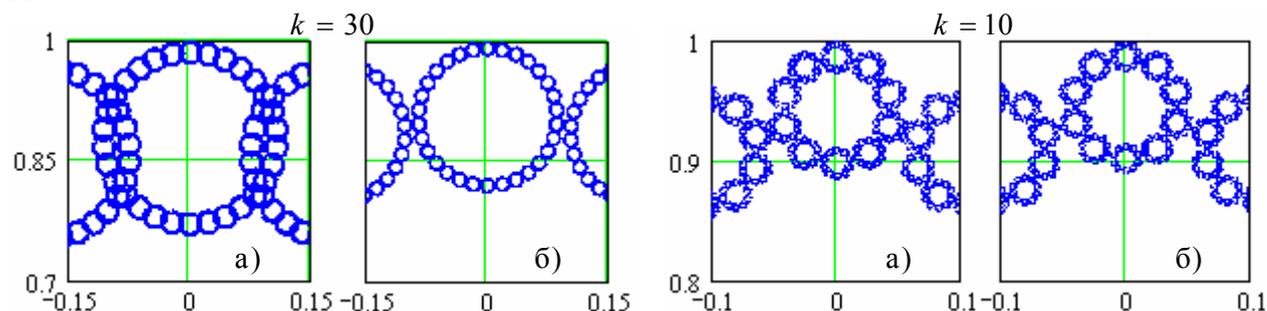


Рис. 2. Примеры некорректного (а) и правильного (б) сопряжений фрактальных областей для  $k$ -угольников

Для  $k$ -угольников  $k = 2 + 4m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), у которых  $\alpha - \beta = \pi/2$ , точки касания окружностей и фрактальных областей совпадают,  $r = 1 + \frac{1}{\sin(\pi/k)}$ .

Величина  $r$  показывает, во сколько раз уменьшаются фрактальные фигуры многоугольника, поэтому фрактальная размерность определяется по общей формуле

$$D_k = \ln k / \ln r_k. \quad (5)$$

Таким образом, генератор состоит из  $k$  векторов длиной  $r_k^{-1}$ , исходящих из начала координат с равными между собой углами  $2\beta = 2\pi/k$ . Фрактал строится путем достаточно большого количества повторения простых операций: замены исходного  $k$ -угольника комбинацией  $k$  других, ему подобных в  $r$  раз меньшего размера.

Эта операция повторяется с каждым из  $k$  маленьких многоугольников и так далее до бесконечности, приходя в конечном итоге к множеству точек, образующих фрактал.

Фрактальный многоугольник является аттрактором для системы интегрируемых функций (1) и образуется при чисто случайном выборе последовательности  $k$  преобразований  $F(z)_j$ ,  $j = \overline{0, k-1}$ .

Фракталы воспроизводятся в осях  $y = \text{Im} z_n$ ,  $x = \text{Re} z_n$  (рис. 4) или зеркальных отображениях  $y = -\text{Im} z_n$ ,  $x = \text{Re}(-z_n)$  и т.п. Представляют интерес и дополнительные преобразования вида  $z_n = z_n''$  (см. приложение), в частности,  $z_n = z_n^{km/5}$  (рис. 5).

### Исследование свойств фрактальных структур.

Изменение параметров фрактальных многоугольников, вычисляемых по формулам (3)–(5), представлено на рис. 3.

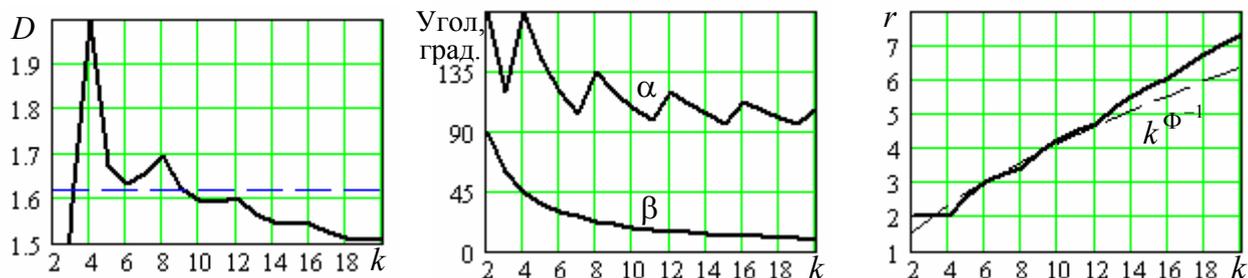


Рис. 3. Фрактальные размерности  $D$ , коэффициенты подобия  $r$  и характерные углы  $\alpha, \beta$  фрактальных структур, основанных на правильных  $k$ -угольниках

Некоторые фрактальные размерности равны:

- треугольник (салфетка Серпинского) .....  $D_3 = \ln 3 / \ln 2$ ;
- 5-угольник .....  $D_5 = \ln 5 / \ln(1 + \Phi)$ ;
- 6-угольник .....  $D_6 = \ln 6 / \ln 3 = 1 + \ln 2 / \ln 3$ ;
- 8-угольник .....  $D_8 = 3 \ln 2 / \ln(2 + \sqrt{2})$ ;
- 10-угольник .....  $D_{10} = \ln 10 / (3 \ln \Phi)$ ;
- 12-угольник .....  $D_{12} = \ln 12 / \ln(3 + \sqrt{3})$ ;
- 15-угольник .....  $D_{15} = \ln 15 / \ln \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{3(3 - \Phi)} - \Phi} \right)$ ;
- 16-угольник .....  $D_{16} = 2^2 \ln 2 / \ln(2 + \sqrt{2} + \sqrt{2(2 + \sqrt{2})})$ .

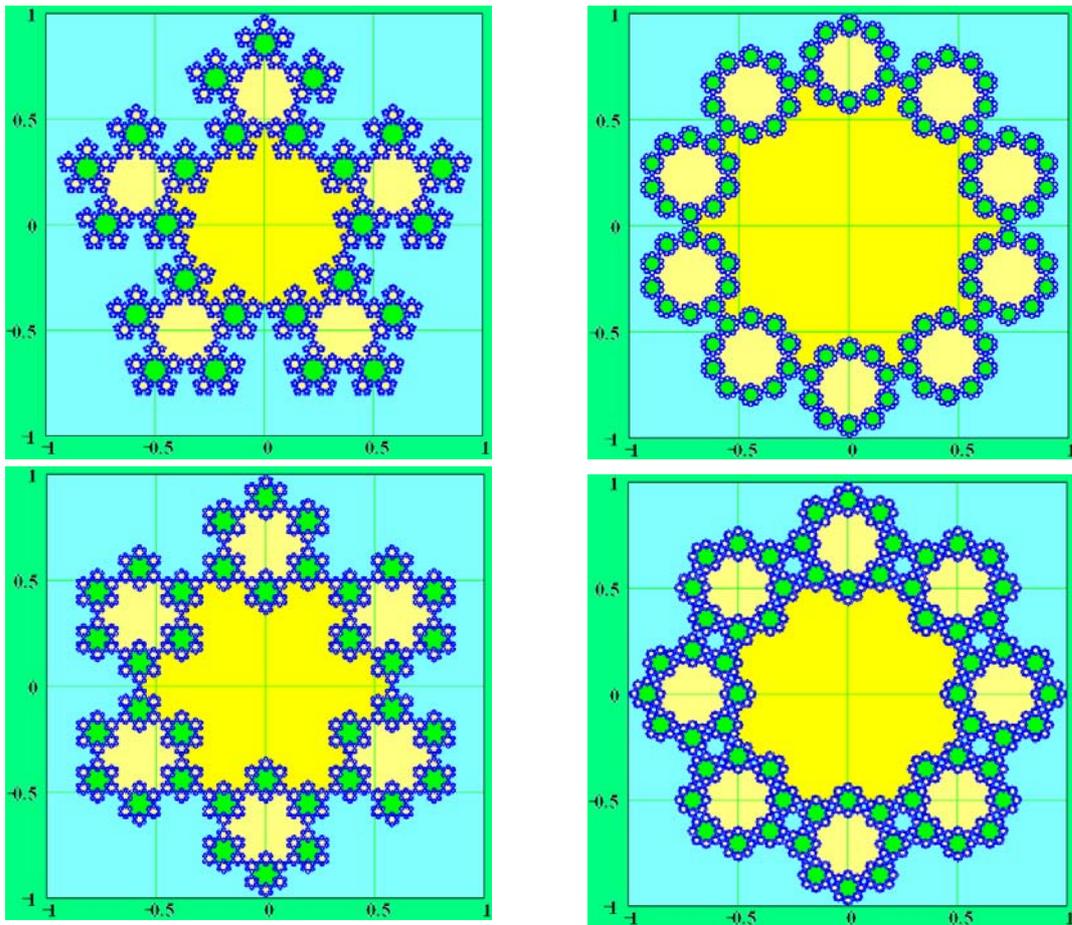


Рис. 4. Фрактальные структуры, основанные на правильных многоугольниках

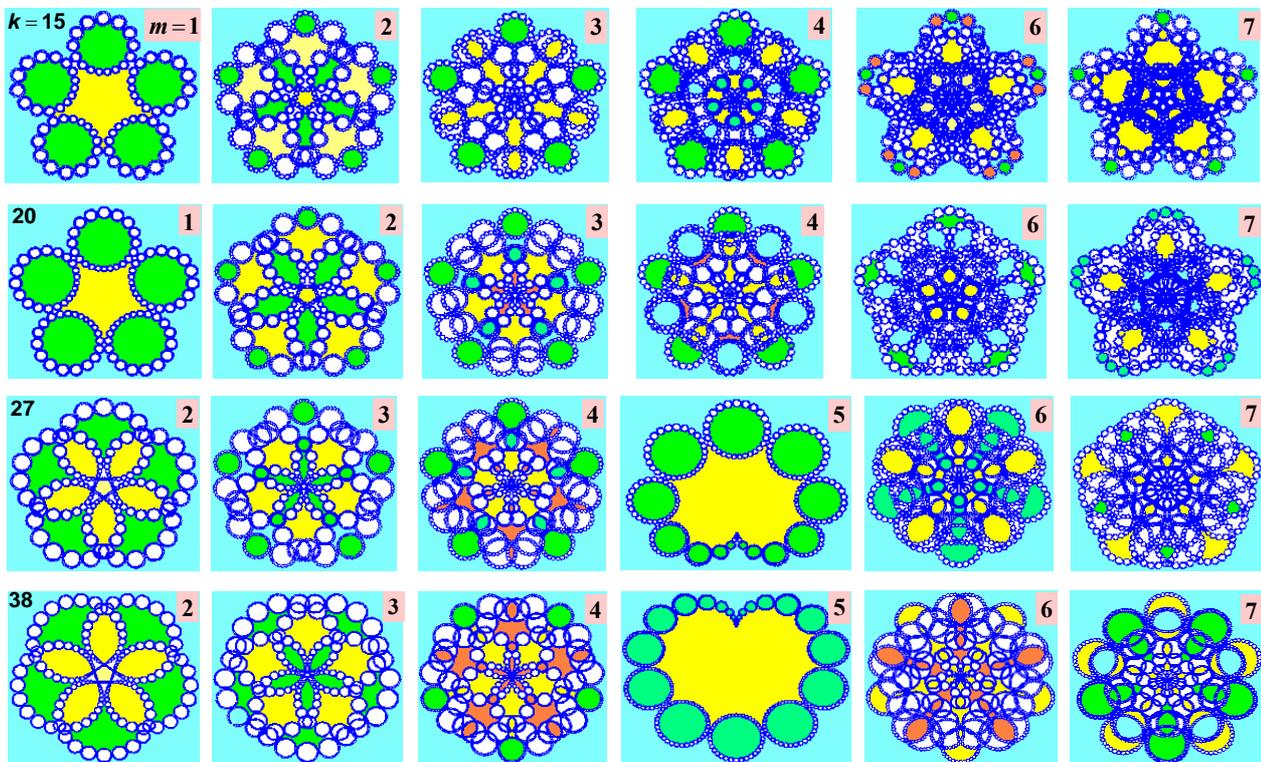


Рис. 5. Фрактальные фигуры с наличием явных признаков «золотых» пропорций на основе дополнительных преобразований  $z_n = z_n^{km/5}$

**Третье наблюдение.** В математическом смысле фракталом (по Мандельброту) называется множество, для которого дробная размерность Хаусдорфа-Безикевича  $D$  строго больше его топологической размерности  $\tilde{D}$ , выражающейся целым числом.

В этой связи характерной является эволюция размерностей:

$k=1$ — точка	— $D_1 = 0$ ,	$\tilde{D}_1 = 0$ ;
$k=2$ — прямая линия (вертикальный отрезок)	— $D_2 = 1$ ,	$\tilde{D}_2 = 1$ ;
$k=3$ — треугольник (салфетка Серпинского)	— $D_3 = 1,59$ ,	$\tilde{D}_3 = 1$ ;
$k=4$ — квадрат, заполняющий плоскость,	— $D_4 = 2$ ,	$\tilde{D}_4 = 2$ ;
$k \geq 5$ — $k$ -угольники,	— $D_k \leq D_8 \approx 1,7$ ,	$\tilde{D}_k = 1$ ;
$k \rightarrow \infty$ — окружность,	— $D_\infty = 1$ ,	$\tilde{D} = 1$ .

Пятиугольник, как совершенный многоугольник, который буквально «нашпигован золотыми сечениями», является своеобразным переходным мостиком от заполняющего плоскость квадрата с топологической размерностью  $\tilde{D}_4 = 2$  — к линии ( $\tilde{D} = 1$ ).

То есть в данном случае «золотое» сечение символизирует, если так можно выразиться, условную пропорцию между плоскостью и линией (рис. 6)

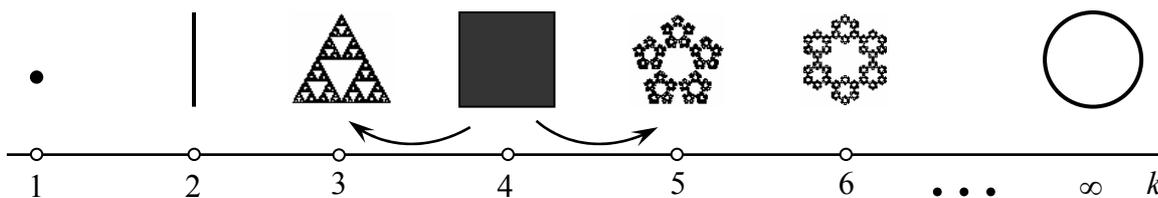


Рис. 6. Переходные формы и эволюция фрактальных структур

И если в Евклидовом пространстве такая пропорциональность лишена физического смысла, то на языке фрактальной геометрии вполне допустима.

Нечто подобное происходит в обратном направлении: при переходе от прямой ( $D_2 = \tilde{D}_2 = 1$ ) через «треугольную» фрактальную линию ( $D_3 \approx 1,59$ ) к плоскости ( $D_4 = \tilde{D}_4 = 2$ ). Поэтому не случайны особые свойства треугольника: в отличие от других многоугольников, он — единственная жесткая (несжимаемая) геометрическая фигура, — в смысле попытки изменения внутренних углов при сохранении общего вида конструкции.

Другими словами, с точки зрения фрактальной геометрии в ее единицах измерений:

- треугольник своей конструктивной жесткостью становится прообразом плоскости;
- пятиугольник, в силу своих особенностей пропорционального разбиения целого на части, первым из всех правильных многоугольников наоборот осуществляет пропорциональное разделение (сопоставление) плоскости линией с фрактальной размерностью  $D_5 = \ln 5 / \ln(1 + \Phi)$ .

Поэтому для восстановления расплывчатого и расщепленного соображения размерности, как «количества пространственных измерений или степени многомерности» [3, с. 30], а также воссоединения двух составляющих, здесь вполне приемлем компромисс в виде «золотой» середины  $\Phi \approx 1,618$  (!?)

Для 8-угольника коэффициент сжатия равен  $r_8 = 1 + \varphi$ , где  $\varphi = 1 + \sqrt{2}$  — обобщенное «золотое» сечение для «металлической» пропорции, описываемой квадратным уравнением с целочисленными коэффициентами  $x^2 - 2x - 1 = 0$ .

Коэффициент сжатия 12-угольника составляет  $r_{12} = \varphi = 2 + \sqrt{3}$ , где  $\varphi$  – обобщенное «золотое» сечение для «металлической» пропорции, которой соответствует квадратное уравнение с иррациональными коэффициентами  $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$ .

В 16-угольнике коэффициент сжатия равен  $r_{16} = 1 + \varphi$ , где  $\varphi$  – обобщенное «золотое» сечение для «металлической» пропорции, описываемой квадратным уравнением с иррациональными коэффициентами  $x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x - 1 = 0$ .

С ростом  $k \geq 5$  фрактальная размерность  $D_k$  имеет общую тенденцию к убыванию (не обязательно монотонно), и в пределе совпадает с топологической размерностью для окружности  $\tilde{D} = 1$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} D_k = 1$ .

Пятиугольник состоит из пяти одинаковых частей, которые подобны целому, но имеют в  $r$  раз меньший размер:

$$r = 1 + \frac{\sin 3\pi/5}{\sin \pi/5} = 1 + \sqrt{\frac{\Phi + 2}{3 - \Phi}} = 1 + \Phi,$$

поэтому его фрактальная размерность равна  $D_5 = \ln 5 / \ln(\Phi + 1) \approx 1,6723$ .

Примечательно, что шестиугольник ( $k=6, r=3$ ), который имеет более отдаленное отношение к «золотому» сечению, чем правильный пятиугольник, тем не менее, обладает фрактальной размерностью  $D_6 = \ln 6 / \ln 3 \approx 1,6309$ , отличающейся от гармонической пропорции только на 0,8 %.

Во всяком случае, он к ней ближе, чем «усеянный золотом» «пятиугольный фрактал» (в смысле наличия в нем множества «золотых» сечений):  $D_5 - \Phi > D_6 - \Phi$ .

Например, каждый конец пятиугольной звезды представляет собой «золотой» треугольник, стороны которого образуют при вершине угол  $36^\circ$ , а основание, отложенное на боковую сторону, делит ее в пропорции «золотого» сечения.

В тоже время в расчете фрактальной размерности  $D_5$  число  $\Phi$  присутствует в явном виде, что указывает на непосредственную связь фрактала с «золотым» сечением. То есть визуально определяемая форма фрактала обусловлена наличием «золотых» углов, а его содержание подтверждается дробной размерностью со знаменателем  $\ln(\Phi + 1)$ .

Внутренняя граница данной фигуры – пятиугольная снежинка Коха – непрерывная кривая, которая нигде не имеет касательной, а в пределе – бесконечную протяженность.

Десятиугольник характерен тем, что его сторона равна  $a = 2 \sin(\pi/10) = \Phi - 1$ . Соответственно коэффициент сжатия  $r = 1 + \frac{2}{\Phi - 1} = \Phi^3$ , а фрактальная размерность  $D_{10} = \ln 10 / (3 \ln \Phi) \approx 1,5950$ .

Ближе всего к числу  $\Phi$  оказывается фрактальная размерность девятиугольника

$$D_9 = 2 \ln 3 / \ln \left[ 1 + (2 \sin 10^\circ)^{-1} \right] \approx 1,6208.$$

**Четвертое наблюдение.** Чтобы получить фигуру с фрактальной размерностью  $\Phi$ , исходя из уравнения (4) коэффициент сжатия следует положить равным  $r = k^{1/\Phi}$ .

Однако если выбрать  $r > k^{1/\Phi}$ , то получается разрыв линии или фрактальная пыль.

Неравенство  $r < k^{1/\Phi}$  приводит к самопересечению фрактальной линии.

Аналогичным образом, решая нелинейное уравнение  $k = r(k)^\Phi$ , где  $r(k)$  – функция от  $k$ , определяемая уравнениями (3)–(4), можно показать, что фрактальная размерность в точности равна  $\Phi$  для 9,06-угольника, если бы таковой реально существовал.

Таким образом, стремление увидеть в конкретной величине фрактальной размерности  $D$  число «золотой» пропорции  $\Phi$ , на физическом уровне не несет особой смысловой нагрузки, свойственной числу  $\Phi$  в его обычном проявлении.

**Выводы.**

1. Определены основные признаки фрактальных структур, связанных с «золотым» сечением.
2. Представлена система интегрируемых функций, задающая совокупность генерирующих комплексных чисел и воспроизводящая фрактальные многоугольники на комплексной плоскости.
3. Получены формулы для построения самоподобных совершенных (без самопересечения) фрактальных кривых, основанных на правильных многоугольниках.
4. Исследована эволюция фрактальных структур, исходя из гипотезы о существовании переходных форм между линией и плоскостью.
5. Определен ряд фрактальных размерностей через «золотое» сечение.
6. Построено множество фрактальных фигур с наличием явных признаков «золотых» пропорций.

**Литература**

1. Шипицын Е.В., Попков В.В. Двойственность и золотое сечение в теории фракталов и хаоса // Вестник Международного Института им. А.Богданова. – 2001. – № 6. – [http://www.bogdinst.ru/vestnik/v06\\_01.htm](http://www.bogdinst.ru/vestnik/v06_01.htm).
2. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы: Учеб. пособ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

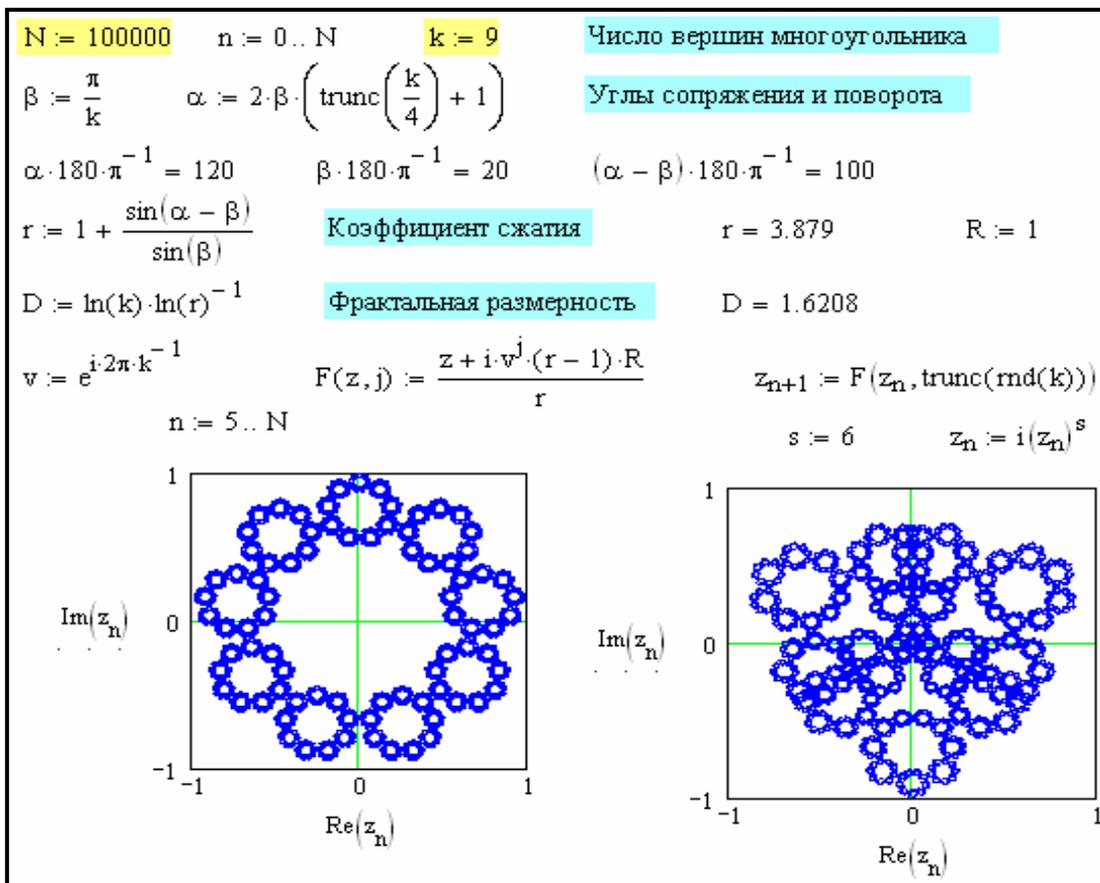
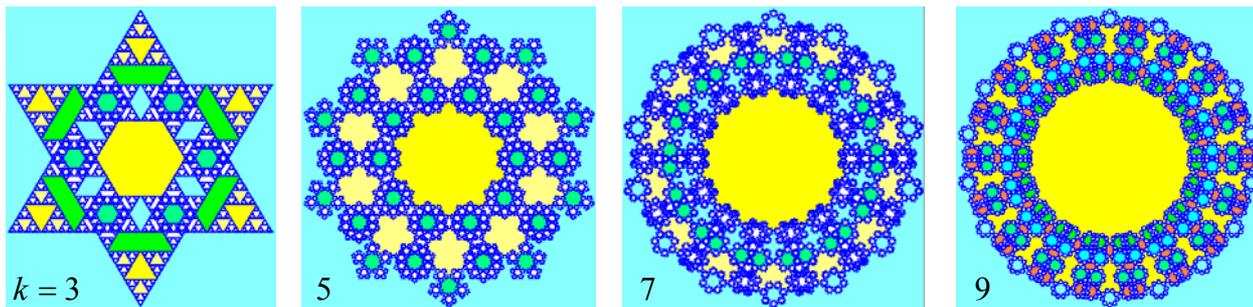


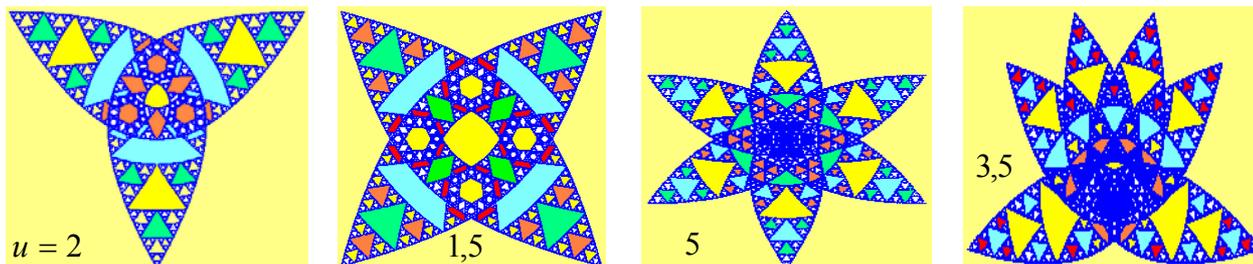
Рис. 7. Реализации фрактальных многоугольников в программной среде MathCad

## Приложение

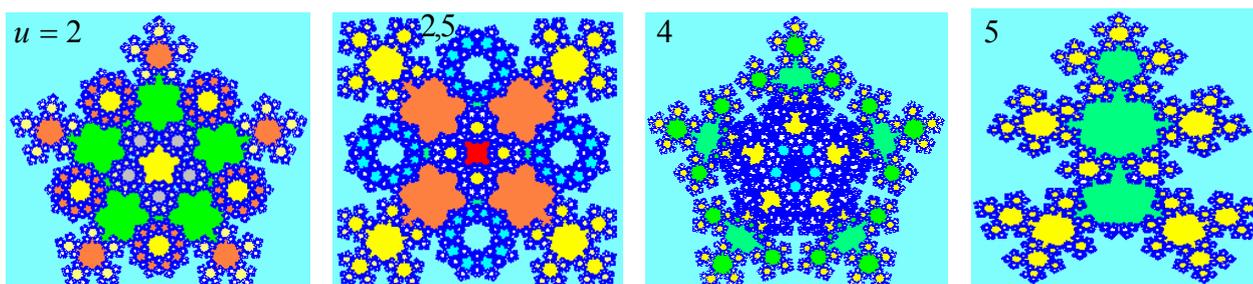


Наложение двух фракталов, симметричных относительно действительной числовой оси

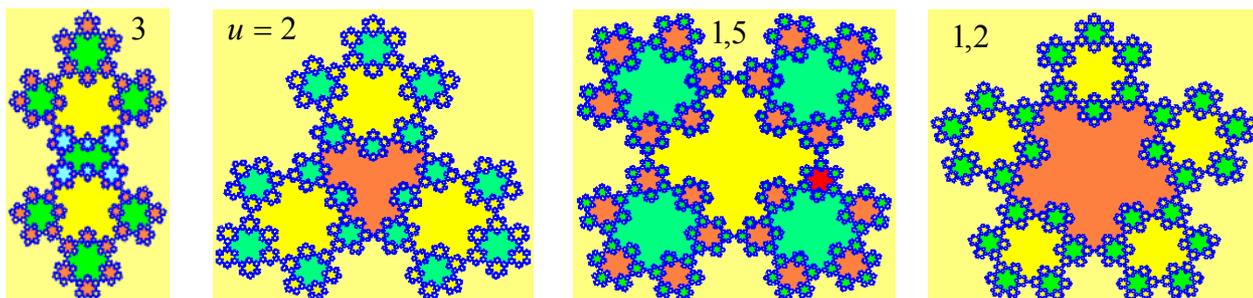
### Фрактальные фигуры с дополнительным преобразованием $z_n = z_n^u$



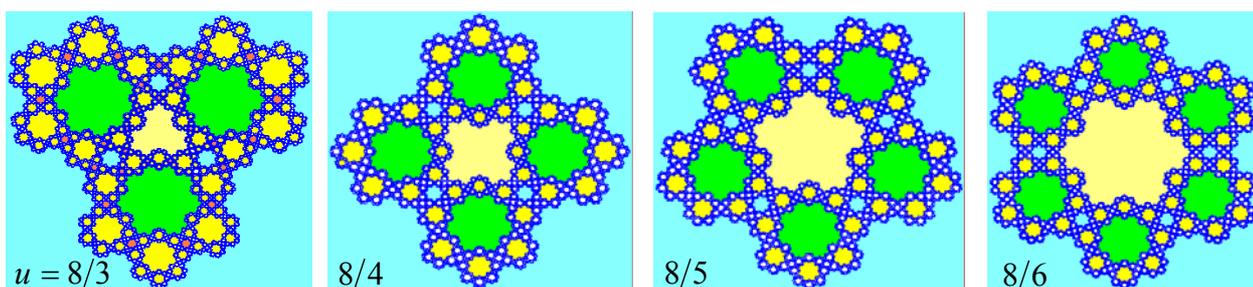
Треугольник Серпинского



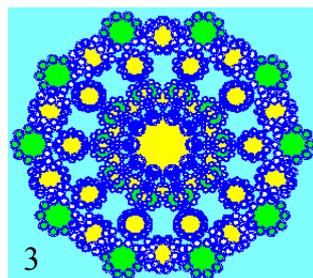
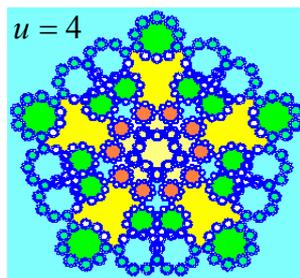
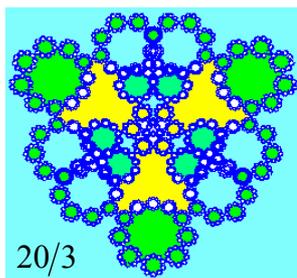
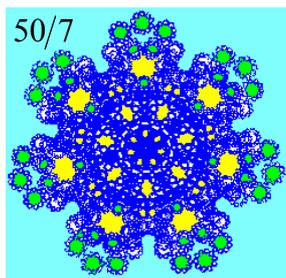
5-угольник



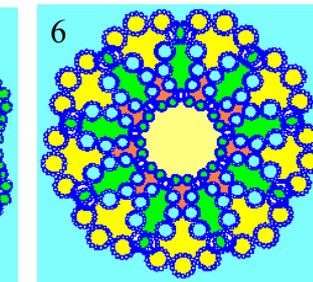
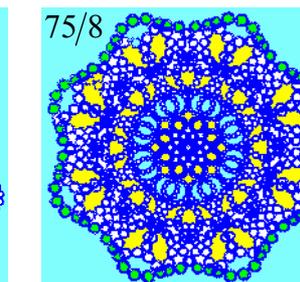
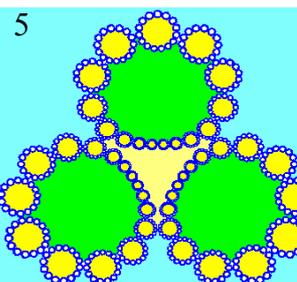
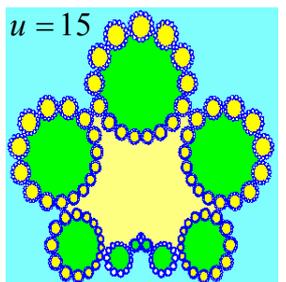
6-угольник



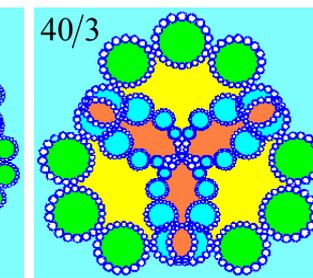
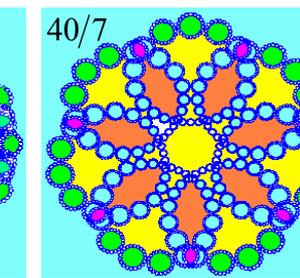
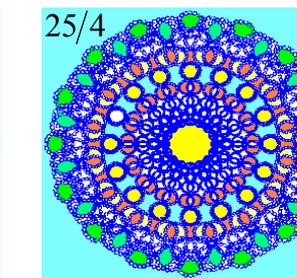
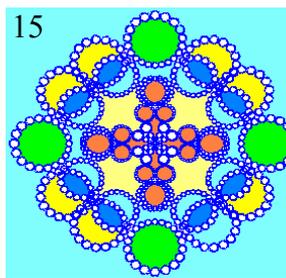
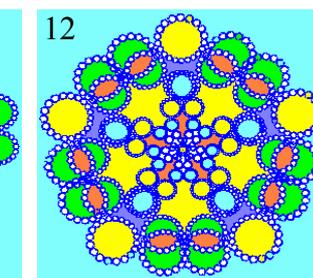
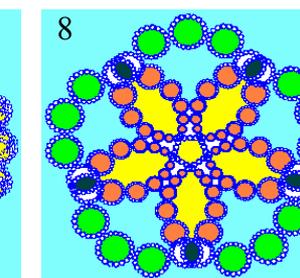
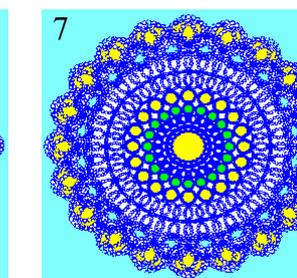
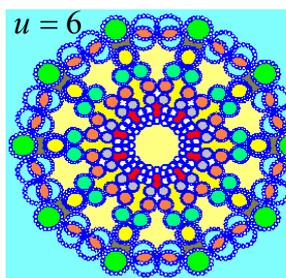
8-угольник



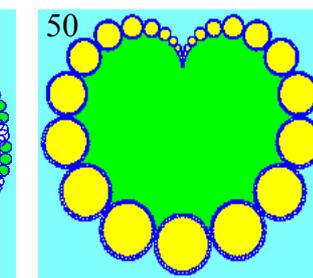
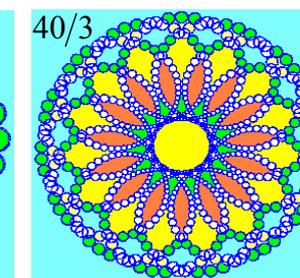
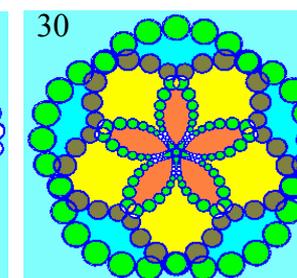
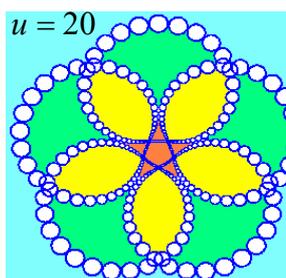
10-угольник



15-угольник



20-угольник



50-угольник