С.Л. Василенко

МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ «ЗОЛОТОГО» СЕЧЕНИЯ

В последние годы для «золотого» сечения предложен ряд обобщений [1–5].
Попытаемся их структурировать и привести к некоторому логическому завершению.

Алгебраическое квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$, характеризующее классическое «золотое» сечение, запишем в следующем виде

$$\frac{x^1(x^1-1)^1}{1} = \mathbf{1}.$$

Заменив единицы в левой части уравнения набором целочисленных переменных $\mathbf{и} = (p, u, k, m, q)$, получим числовые инварианты, которые по своим свойствам так или иначе сопоставимы (соразмерны) с «золотой» пропорцией и описываются таким соотношением

$$\frac{x^p(x^u-m)^k}{q} = \mathbf{1}. \qquad (1)$$

Данное выражение охватывает известные различные обобщения и модификации «золотых» сечений, в том числе:

$\mathbf{и} = (1, 1, 1, 1, 1)$ – обычное «золотое» сечение с числом $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$;

$\mathbf{и} = (p, 1, 1, 1, 1)$ – p-сечения А. Стахова [1], $x^p(x-1) = 1$;

$\mathbf{и} = (1, 1, 1, m, 1)$ – m-сечения или «металлические» пропорции [2–3], $x^2 - mx = 1$;

$\mathbf{и} = (p, 1, k, 1, 1)$ – pk-сечения [4], $x^p(x-1)^k = 1$;

$\mathbf{и} = (p, 1, k, 1, q)$ – pmq-сечения [5], $x^p(x-m) = q$;

Многофункциональное уравнение «золотых» пропорций (1), которое имеет $s = p + uk$ корней x_j, представим стандартным полиномом

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = x^p \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(x^u\right)^{k-i}(-m)^i - q =$$

$$= x^{p+uk} - C_k^1 x^{p+u(k-1)} m + C_k^2 x^{p+u(k-2)} m^2 - \ldots + C_k^k x^p(-m)^k - q = 0.$$

где $C_k^i = \binom{k}{i} = \dfrac{k!}{i!\,(k-i)!}$ – биномиальные коэффициенты, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ – факториал от k.

Второй слева ненулевой член полинома равен $\left(-kx^{p+uk-u}m\right)$, поэтому согласно теореме Виета сумма корней $(-a_{n-1}/a_n)$ определяется в зависимости от параметра u

$$\sum_{j=1}^{s} x_j = \begin{cases} km, & u = 1 \\ 0, & u > 1 \end{cases}. \qquad (2)$$

Аналогично произведение корней равно $(-1)^n a_0/a_n = (-1)^s(-q)/1 = (-1)^{s-1} q$, то есть

$$\prod_{j=1}^{s} x_j = (-1)^{s-1} q. \qquad (3)$$

$$\sum_{1\le i<j}^{s} x_i x_j = \sum_{i=1}^{s-1}\ \sum_{j=i+1}^{s} x_i x_j = \begin{cases} m^k &, \quad u=1 \\ -km &, \quad u=2 \\ 0 &, \quad u\ge 3 \end{cases}. \tag{4}$$

Возводя сумму корней в квадрат, куб и более высокую степень, после выполнения алгебраических преобразований с использованием указанных свойств, получим формулу для суммы степеней корней

$$\sum_{j=1}^{s}\left(x_j\right)^v = \begin{cases} kum^{v/u}, & w=0\,, \\ 0 &, \quad w\ne 0\,, \end{cases} \tag{5}$$

где $v=\overline{1,\, s-1}$; w – остаток от деления целых чисел: v на u.

Последовательность коэффициентов алгебраического многочлена $P_n(x)$:

$$1,\ -C_k^1 m,\ C_k^2 m^2,\ -C_k^3 m^3 \dots\ C_k^k(-m)^k,\ -q$$

имеет нечетное число $N=k+\xi$ перемен знаков ($\xi=0$, если k – нечетное; $\xi=1$, если k – четное, за счет $-q$), поэтому согласно правилу знаков Декарта [6, с. 40] количество положительных корней уравнения (1) либо равно N, либо меньше числа N на четное число.

То есть в любом случае существует хотя бы один действительный корень $x_s>0$.

Пусть $\phi=\phi(\mathbf{и})$ – положительный наибольший корень уравнения (1) – некоторое характеристическое число, в общем случае отличное от Φ (рис. 1) и являющееся иррациональным числом, отдельным для каждой группы параметров $\mathbf{и}=(p,\,u,\,k,\,m,\,q)$.

Подставим ϕ в уравнение (1). Извлекая далее корень k-й степени и умножая полученное уравнение на ϕ^{n-1}, получим математическое тождество, связывающее степени $n=0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$ «золотых» сечений (а д д и т и в н о е с в о й с т в о):

$$\phi^n = m\phi^{n-u} + q'\phi^{n-p'-u} = \phi^{n-u}\left(m+q'\phi^{-p'}\right), \tag{6}$$

где $p'=p/k$, $q'=\sqrt[k]{q}$.

Уравнение (6) обобщает замечательное свойство «золотой» пропорции:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1}+\Phi^{n-2}.$$

При $n=0$ следует другое тождество, фиксирующее единицу (м о д е л ь ц е л о г о)

$$\frac{\phi^u - q'\phi^{-p'}}{m} = \phi^{-u}\left(m+q'\phi^{-p'}\right) = \mathbf{1} \tag{7}$$

и расширяющее известную особенность числа Фидия: $\Phi-\Phi^{-1}=\Phi^{-1}\left(1+\Phi^{-1}\right)=\mathbf{1}$.

Применяя последовательно уравнения (6)–(7), можно сформировать следующую модель разложения «единицы» по степеням n многофункциональной (универсальной) «золотой» пропорции в виде сходящегося к нулю ряда с единичной суммой:

$$m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(q')^n\,\phi^{-n(u+p')-u} = \mathbf{1}. \tag{8}$$

Уравнение (1) для корня ϕ имеет вид $\phi^p(\phi^u-m)^k=q$.

Расписав бином Ньютона в виде суммы, выделив первое слагаемое и умножив это уравнение на ϕ^{n-s}, получим ($s=p+uk$):

$$\phi^n = q\phi^{n-s} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i \phi^{n-i\cdot u} . \tag{9}$$

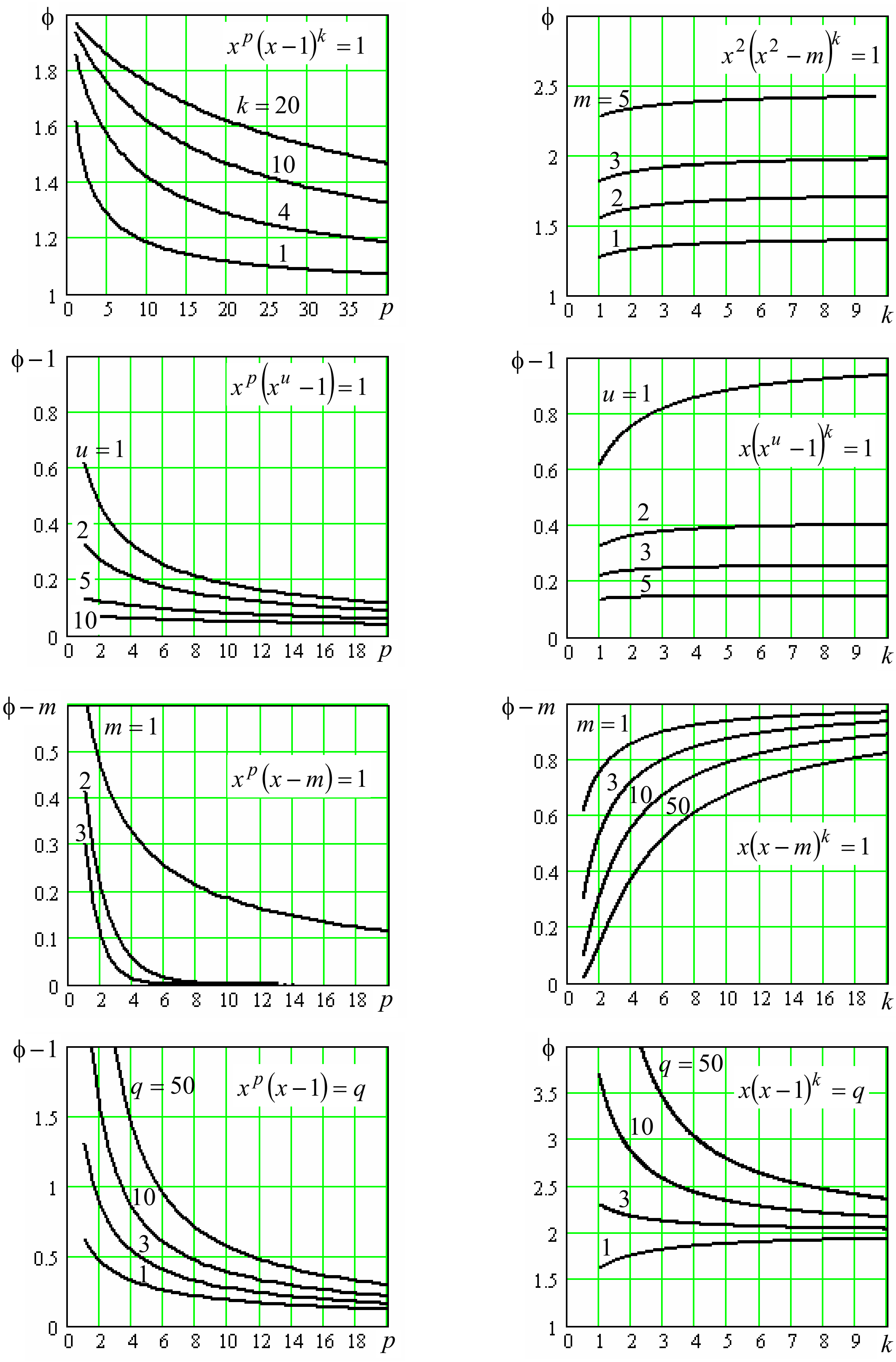


Рис. 1. Типовые зависимости многофункциональных «золотых» пропорций
с переменными $\theta = (p, u, k, m, q)$

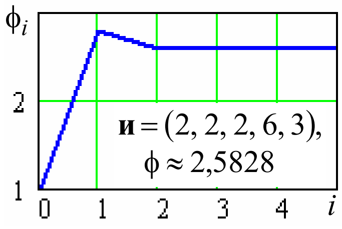


Рис. 2. Рекурсивный расчет параметра ϕ

Уравнение (1) можно также переписать в виде $\phi = \sqrt[u]{m + \sqrt[k]{q/\phi^{p}}}$, откуда следует формула $\phi_{i+1} = \sqrt[u]{m + \sqrt[k]{q/\phi_i^{p}}}$ для быстро сходящегося рекурсивного вычисления величины ϕ с точностью до желаемой значащей цифры.

Для этого необходимо выбрать некоторую начальную точку, например $\phi_0 = 1$, и выполнять последовательные итерации i, пока не получим два одинаковых значения ϕ заданной степени округления (рис. 1).

Интерпретация. В простых моделях достаточно наглядной является геометрическая интерпретация. В данном случае, ограничившись для иллюстрации параметром $u = 1$, наши рассуждения легче перенести на обычные числа, обобщая гармоническую пропорцию, средние члены которой (без возведения в степени) равны между собой.

Иначе говоря, для заданного числа $a > 0$ необходимо найти такое число $b > a$, чтобы они соотносились между собой в следующей пропорции:

$$\phi^{p} = \left(\frac{a+b}{b/m}\right)^{p} = \left(\frac{b/m}{a/q^{1/k}}\right)^{k} \Rightarrow \phi = \frac{a+b}{b/m} = \left(\frac{b/m}{a/q^{1/k}}\right)^{k/p}$$

или $$\phi = \frac{a+b}{b/m} = m + \frac{1}{\dfrac{b/m}{a/q^{1/k}}} \cdot q^{1/k} = m + \frac{q^{1/k}}{\phi^{p/k}} \Rightarrow \phi^{p}(\phi - m)^{k} - q = 0\,.$$

Поиск числа b сводится к нахождению корня ϕ уравнения (1), откуда $b = am/(\phi - m)$.

Трактовку задачи можно переформулировать и на языке разбиения целого (единицы), для чего следует положить $a + b = 1$, откуда следует $b = 1 - a = m/\phi$.

Обобщенные числа Фибоначчи и Люка.

Переходя от ϕ^{n} согласно (9) к аналогичным числовым рядам с учетом свойств корней уравнения (1) приходим к обобщенным последовательностям чисел Фибоначчи и Люка:

$$F_n = qF_{n-s} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i F_{n-i\cdot u}\,, \tag{10}$$

$$L_n = qL_{n-s} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i L_{n-i\cdot u}\,, \tag{11}$$

при начальных условиях

$$\begin{cases} F_{v-1} = 0, \quad F_{s-1} = 1, \\ L_0 = s, \quad L_v = kum^{\breve{v}} \cdot \delta(\lceil \breve{v} \rceil - \breve{v}), \end{cases} \tag{12}$$

где $v = \overline{1, s-1}$, $\delta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi = 0 \\ 0, & \xi \neq 0 \end{cases}$ – дельта-функция Кронекера, $\breve{v} = v/u$, $\lceil \breve{v} \rceil$ – целая часть от $\breve{v}$. В данном случае равенство $\delta(\xi) = 1$ означает, что v делится нацело на u: $v = 0 \bmod(u)$.

Числа ϕ являются числовыми инвариантами или константами этих последовательностей.

Явные формулы для рекуррентных последовательностей.

Рассмотрим производящую функцию (ПФ) для последовательности Люка в виде бесконечного степенного ряда $L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n$, где z – формальная переменная (символ) ряда, L_n – числа Люка как коэффициенты исследуемого ряда.

Отметим, что переменная $L(z)$ является сокращенной записью формального выражения в правой части и обозначает не сумму ряда для данного значения z, а сам перечисляемый ряд.

Выделим в ПФ первые $s = p + uk$ слагаемые, а в остальные подставим равенство (11).

После отбрасывания нулевых величин сумма этих слагаемых равна

$$\sum_{v=0}^{s-1} L(z) = sz^0 + \sum_{v=1}^{s-1} kum^{v/u} \cdot \delta([\breve{v}] - \breve{v}) \cdot z^v = s + ku \sum_{l=1}^{s'} m^l z^{l \cdot u},$$

где s' – целая часть выражения $s' = \lceil (s-1)/u \rceil = \lceil (p-1)/u + k \rceil$.

Изменяя порядок и индексы суммирования, находим

$$L(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n \right) = ku \sum_{l=1}^{s'} m^l z^{lu} - \sum_{n=s}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i L_{n-i \cdot u} + qL_{n-s} \right] z^n =$$

$$= s + ku \sum_{l=1}^{s'} m^l z^{lu} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu} \sum_{n=s}^{\infty} L_{n-i \cdot u} z^{n-i \cdot u} + qz^{p+uk} \sum_{n=s}^{\infty} L_{n-p-uk} z^{n-p-uk} =$$

$$= s \left(1 + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu} \right) + ku \sum_{l=1}^{s'} m^l z^{lu} + ku \sum_{i=1}^{k} (-1)^i C_k^i \sum_{l=i+1}^{s'} m^l z^{lu} -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu} \left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n \right) + qz^{p+uk} \left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n \right).$$

Полученное линейное уравнение относительно производящей функции $L(z)$ дает решение

$$L(z) = \frac{s \left(1 + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu} \right) + ku \left(\sum_{l=1}^{s'} m^l z^{lu} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i C_k^i \sum_{l=i+1}^{s'} m^l z^{lu} \right)}{1 + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu} - qz^{p+uk}}. \qquad (13)$$

Такая несколько громоздкая запись в основном вызвана наличием параметра k, но уже при $k = 1$ производящая функция приобретает простую форму

$$L(z) = \frac{s(1 - mz^u) + umz^u}{1 - mz^u - qz^{p+u}}, \quad k = 1$$

и содержит всю информацию о числах Люка, в чем просто убедиться, разделив многочлены (относительно z), стоящие в числителе и знаменателе.

Многочлен в знаменателе ПФ (13) равен

$$1+\sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu} - qz^s = z^s\left(z^{-s} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{-s+iu} - q \right) =$$

$$= z^s\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i (-m)^i z^{-p-u(k-i)} - q \right) = z^s\left[x^p \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-m)^i x^{u(k-i)} - q \right] = z^s\left[x^p\left(x^u - m\right) - q\right],$$

где $x = 1/z$, поэтому все его корни равны обратным значениям корней x_j, $j=\overline{1, s}$ исходного уравнения (1), а он сам раскладывается на множители $\prod_j \left(1 - x_j z\right)$.

С учетом свойств корней по теореме Виета, формулы для суммы $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии (со знаменателями r, равными $x_j z$, которые в виду формальности параметра z могут быть приняты <1) [6, с. 729], а также разложения на простейшие дроби, преобразуем ПФ (13):

$$L(z) = \frac{s\left(1+\sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu}\right) + ku\left(\sum_{l=1}^{s'} m^l z^{lu} + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i C_k^i \sum_{l=i+1}^{s'} m^l z^{lu}\right)}{\prod_{j=1}^{s}\left(1 - x_j z\right)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{\left(1 - x_j z\right)} = \sum_{j=1}^{s}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(x_j z\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{s} x_j^n\right) z^n .$$

Сравнивая итоговое выражение с исходной формой ПФ $L(z) = \sum_n (L_n) z^n$, находим решение рекуррентного уравнения (9) для чисел Люка в явном виде

$$L_n = \sum_{j=1}^{s} x_j^n . \qquad (14)$$

При всей «тяжеловесности» ПФ (13) явная форма (14) оказалась очень простой.

Для нахождения явной формулы для чисел Фибоначчи удобнее рассматривать последовательность $\overset{\omega}{F}_n = F_{n+s-1}$, которая начинается с единицы и повторяет ряд F_n, только на $s-1$ шагов раньше, то есть

$$\overset{\omega}{F}_0 = 1, \quad \overset{\omega}{F}_\nu = C_{k-1+\overset{)}{\nu}}^{\overset{)}{\nu}} \cdot m^{\overset{)}{\nu}} \cdot \delta(\lceil \overset{)}{\nu} \rceil - \overset{)}{\nu}), \quad \nu = \overline{1, s-1} .$$

С этим рядом легче оперировать, поскольку производящая функция для него определяется дробью с числителем, равным 1,

$$\overset{\omega}{F}(z) = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i z^{iu} - qz^s} . \qquad (15)$$

В частности, при $k=1$ производящая функция равна $\overset{\sigma}{F}(z) = \left(1 - mz^u - qz^{p+u}\right)^{-1}$, а когда все параметры уравнения (1) равны единице, то $\overset{\sigma}{F}(z) = \left(1 - z - z^2\right)^{-1}$, что соответствует ПФ для классического ряда Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Разложив ПФ (15) на простейшие дроби и выполнив преобразования, подобные приведенным выше, определяем числа Фибоначчи в явном виде через степени корней x_j уравнения (1)

$$\overset{\omega}{F}_{n-s+1} = F_n = \sum_{j=1}^{s} \frac{x_j^n}{\prod\limits_{i=1,\, i\neq j}^{s} \left(x_j - x_i\right)} \ . \tag{16}$$

Большие значения *n* и предельный случай $n \to \infty$.

Рассмотрим рекуррентные уравнения (10)–(11) и положим $\psi_n(l) = \mathrm{Z}_{n+l}/\mathrm{Z}_n$, где $\mathrm{Z}_n = \{F_n, L_n\}$.

Легко убедиться, что по мере увеличения номеров n отношение соседних членов последовательностей $\mathrm{Z}_n = \{F_n, F'_n, L_n\}$ конвенгирует к числу обобщенного «золотого» сечения $\phi = \phi(\mathbf{и})$.

Покажем это математически. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_{n+1}}{\mathrm{Z}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_n}{\mathrm{Z}_{n-1}} = \ldots \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_{n-s+1}}{\mathrm{Z}_{n-s}} = R \, .$$

Тогда согласно основным операциям с пределами [6, с. 103]

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\mathrm{Z}_n}{\mathrm{Z}_{n-1}} \frac{\mathrm{Z}_{n-1}}{\mathrm{Z}_{n-2}} \ldots \frac{\mathrm{Z}_{n-s+1}}{\mathrm{Z}_{n-s}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_n}{\mathrm{Z}_{n-s}} = R^s \, .$$

На основании уравнений (10)–(11) имеем

$$\Psi_n(1) = \frac{\mathrm{Z}_n}{\mathrm{Z}_{n-1}} = \frac{qZ_{n-s} - \sum\limits_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i Z_{n-i\cdot u}}{\mathrm{Z}_{n-1}} = q \frac{\mathrm{Z}_{n-s}}{\mathrm{Z}_{n-1}} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i \frac{\mathrm{Z}_{n-i\cdot u}}{\mathrm{Z}_{n-1}} \, .$$

Переходя к пределам, получаем уравнение относительно R

$$R - qR^{-s+1} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i R^{-iu+1} = 0 \, ,$$

которое после умножения на R^{s-1} преобразуется в виде

$$R^s - q + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i R^{s-iu} = R^{p+uk} + \sum_{i=1}^{k} C_k^i (-m)^i R^{p+u(k-i)} - q =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-m)^i R^{p+u(k-i)} - q = R^p \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-m)^i \left(R^u\right)^{k-i} - q = R^p \left(R^u - m\right)^k - q = 0.$$

Сравнение этого равенства с уравнением (1) дает действительное решение $R = \phi$.

Таким образом, если предел соседних членов последовательностей $\mathrm{Z}_n = \{F_n, L_n\}$ существует, то он равен числу $\phi = \phi(\mathbf{и})$, или для любого конечного целого l справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(l) = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_{n+l}}{Z_n} = \phi^l \, . \tag{17}$$

Для некоторых сочетаний параметров уравнения (1) такой предел может не существовать, что связано с наличием нулевых членов ряда. Например, комбинация чисел $\mathbf{и} = (p, u, k, m, q) = (2, 4, k, m, q)$ порождает нулевые значения для всех нечетных членов последовательностей Фибоначчи и Люка $Z_{2n+1} = 0$, и если отсутствует предел $\Psi_n(1)$, то есть предел $\lim \Psi_n(2) = \phi^2$ для четных значений ряда.

Аналогичным образом сочетание $\mathbf{и} = (3, 6, k, m, q)$ обусловливает отличность от нуля только членов ряда с номерами, которые делятся нацело на три, поэтому для них несет смысловую нагрузку лишь $\lim \Psi_n(3) = \phi^3$ и т.п.

Характерно, что уравнение может иметь в общем случае несколько действительных корней. Выбор именно максимального из них $R = \phi$ при назначении предела объясняется следующими обстоятельствами.

Во-первых, члены рядов $Z_n = \{F_n, L_n\}$ принимают неотрицательные целочисленные значения, поэтому $R > 0$.

Во-вторых, если положительных корней несколько, то согласно правилу знаков Декарта их количество нечетно, и при переходе через максимальное значение ϕ из них функция $f(x) = x^p\left(x^u - m\right)^k - q$ меняет знак с минуса на плюс, устремляясь далее в область положительных значений до бесконечности (рис. 3).

Именно эта часть функции $f(x)$ «отвечает» за формирование последовательностей $Z_n = \{F_n, L_n\}$, и поэтому в силу ее непрерывности на всей оси *x*, пределом R является как раз положительный максимальный корень $\phi = x_s$.

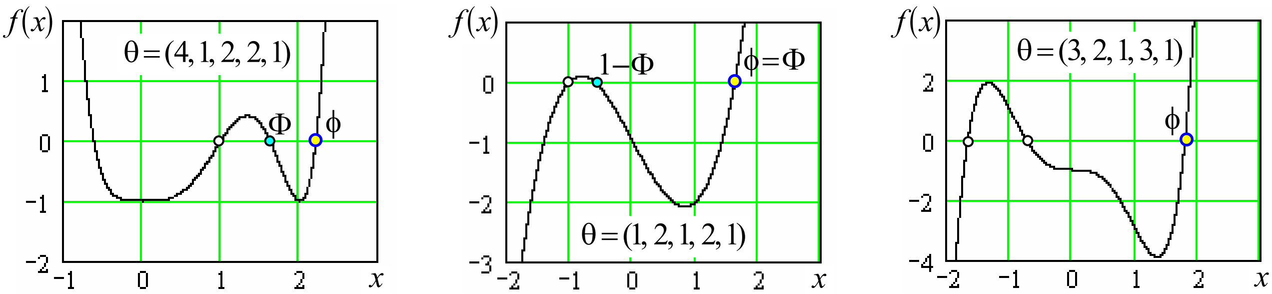
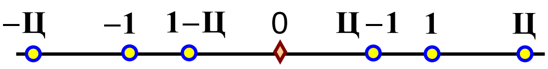


Рис. 3. Примеры распределения корней многофункционального уравнения «золотых» пропорций $f(x) = x^p\left(x^u - m\right)^k - q$

Частные случаи.

1) $\underline{\mathbf{и} = (2, 2, 2, 2, 1)}$. Уравнение (1) приводится к кубическому виду $z(z-2)^2 - 1 = 0$, $z = x^2$ и имеет шесть действительных корней, которые воспроизводят рекурсивную симметрию числа $\Phi = \left(\sqrt{5} + 1\right)/2$ (рис. 4).



$$\mathbf{x^2\left(x^2 - 2\right)^2 = 1}$$

Рис. 4. Рекурсивная симметрия числа Фидия

Числа Люка и Фибоначчи в явном виде соответственно равны ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$):

$$L_{2n+1} = 0,\ \ L_{2n} = 2 + 2\left[\Phi^{2n} + (\Phi - 1)^{2n}\right].$$

$$F_{2n+1} = 0,\ \ F_{2n} = \frac{\Phi^{2(n+2)}}{\Phi + 2} + \frac{\Phi^{-2(n+3)}}{7 - 4\Phi} - 1 .$$

2) $\underline{\mathbf{и} = (r, r, 1, m, q)}$. Уравнение (1) приводится к квадратному виду $z^2 - z - 1 = 0$, $z = x^r$ и дает решение $\phi = \sqrt[r]{\dfrac{m + \sqrt{m^2 + 4q}}{2}}$ – корень степени r обобщенного «золотого» числа, соответствующего квадратному уравнению общего вида.

При $\underline{m = q = 1}$ оно вырождается в значение $\phi = \sqrt[r]{\Phi}$.

3) $\underline{\mathbf{и} = (1, 1, k, 1, 2)}$. Это «дихотомический» набор параметров.

Ему соответствует сечение $\phi = 2$, и в интерпретации дробления на части, целое (единица) делится ровно пополам: $a + b = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$, $b = m/\phi$.

4) $\underline{\mathbf{и} = (1, 1, 1, 1, q)}$. Значение $q = q_1 = 1$ адекватно обычной «золотой» пропорции с числом Фидия Ф; цифра $q = q_2 = 2$ образует дихотомию ($\phi = 2$); ряд параметров $\overline{q} = q_{i+1} = q_i + 2i = i(i+1),\ i \ge 2$ конгруэнтен отсечению от целого ровно i-й части (i – числа натурального ряда), $\phi = i$.

То есть последовательность чисел $\overline{q} = \{1, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, \ ...\}$, начиная со второго, сообразна с выделением из целого соответственно половины, одной трети, одной четверти и т.д.

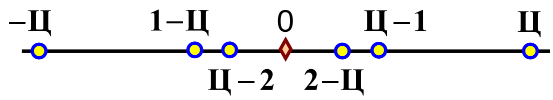
5) $\underline{\mathbf{и} = \left(p, 1, 1, m, i(m+i)^p\right)}$. Такие начальные условия обобщают предыдущий пример для целочисленных решений $\phi = m + i$ при $q = i(m+i)^p$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$.

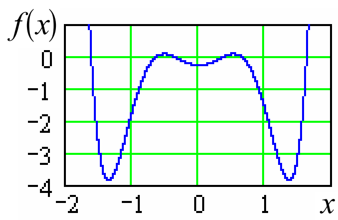
Подобные аналогии можно найти и в других вариантах параметров **и**, сводя задачу к решению диофантовых (неопределенных) уравнений в целых числах. Однако внутренние трудности данного предмета достаточно велики, чтобы говорить о его глубокой теории, за исключением уравнений специального вида (квадратичных форм и т.п.).

Поскольку обобщенное уравнение (1) «золотых» сечений образуется полиномом, оно должно иметь и частные целочисленные решения, что представляет отдельный практический интерес и самостоятельное направление в исследовании «золотых» пропорций, описываемых целыми числами.

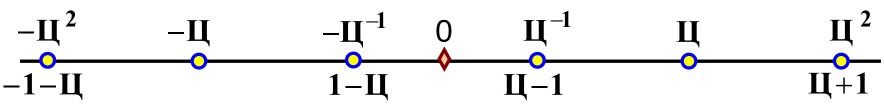
Например,

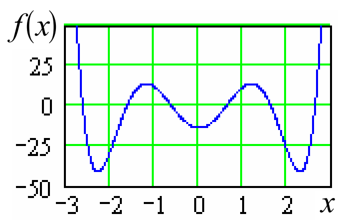
$$\mathbf{2x^6 - (13 - c)x^4 + (23 - 3c)x^2 - (7 - c) = 0,\ \ c = 3\sqrt{5}}$$





$$\mathbf{2x^6 - (13 + c)x^4 + (23 + 3c)x^2 - (7 + c) = 0,\ \ c = 3\sqrt{5}}$$





Выводы

1. Предложена многофункциональная целочисленная форма обобщенных «золотых» сечений. Она включает в себя существующие обобщения и дополнительно их расширяет за счет введения новых варьируемых параметров.

2. Получены математические тождества, связывающие целочисленные степени новых модификаций «золотого» сечения (аддитивное свойство) и фиксирующие единицу (модель целого).

3. Показано, что обобщенному «золотому» сечению соответствует положительный максимальный корень многофункционального алгебраического уравнения «золотой» пропорции.

4. Представлены соотношения для нахождения обобщенных последовательностей чисел Фибоначчи и Люка. На основе метода производящих функций выведены явные формулы для рекуррентных числовых последовательностей.

5. Дальнейшее расширение «золотых» сечений возможно за счет применения нецелочисленных переменных.

Литература

1. *Стахов А.П.* Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа // Украинский математический журнал, 2004. – Т. 56. – № 8. – С. 1143–1150.

2. *Vera W. de Spinadel*. On characterization of the onset to chaos // Chaos, Solitons and Fractals. – 1997. – V. 8, № 10. – P. 1631–1643.

3. *Vera W. de Spinadel*. The metallic means family and multifractal spectra // Nonlinear Analysis. – 1999. – V. 36. – P. 721–745.

4. *Василенко С.Л.* Обобщенные «золотые» *pk*-пропорции // Академия Тринитаризма. – М., эл. № 77-6567, публ. 14756 от 27.03.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321080.htm.

5. *Василенко С.Л.* Развитие задачи о «золотом» сечении и связанных с ним числах Фибоначчи и Люка // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14833 от 05.07.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321086.htm.

6. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.