А.П. Стахов

Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и «Математика Гармонии» как альтернативное направление в развитии математической науки

(статья опубликована в философском сборнике Академии наук Украины «Totallogy. Постнекласичні дослідження», №17/18, 2007, с. 273-323)

От автора. В связи с развернувшейся на сайте АТ бурной дискуссии по поводу «Математики Гармонии» я считаю целесообразным ознакомить читателей с содержанием моей статьи «**Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и «Математика Гармонии» как альтернативное направление в развитии математической науки»,** опубликованной в 2007 г. в философском сборнике Академии наук Украины «Totallogy. Постнекласичні дослідження», №17/18, 2007, с. 273-323). Я надеюсь, что эта статья дает полный ответ на вопрос о том, что автор понимает под «Математикой Гармонии» и каковы перспективы ее применения в современной науке.

От редакции сборника «Totallogy». Понятие сизигии (взаимоотношение части целого к целому) является одним из фундаментальных в метафизике тотальности. Оно фиксирует универсальную архитектонику бытия, субстанционное стремление сущего к взаимной организации вплоть до оптимального сизигийного состояния, которое характеризуется числовыми параметрами универсума. Об этом шла речь, в чаксности, в №15/16 «Totallogy» и материалах, посвященных В.И. Акунову. Там многократно упоминались и работы А.П. Стахова, современного, известного в Украине, России и на Западе математика, который изучает эволюцию этого вопроса в истории математики. Он также сделал существенный вклад в развитие современной математики, дополнив ее традиционные разделы еще одним, который плучил название «Математика гармонии». На этом пути А.П. Стахов обобщил задачу о «золотом сечении» (розработал концепцию золотых *p*-сечений), открыл гиперболические функции Фибоначчи и Люка, сформулировал концепцию принципиально новых компьютеров – «компьютеров Фибоначчи. Кроме большого значения работ А.П. Стахова для математики, они виводят на новые представления о Мироздании и приобретают принципиальное метафизическое значение, особенно если рассматривать их в контексте метафизики тотальности. В настоящей статье изложены принципиальные положения «Математики гармонии», разработанной А.П. Стаховым. Кроме интресного содержания, статья важна большой библиографией рассаматриваемого вопроса (134 наименования). Для заинтресованного читателя будет полезной и точка зрения известного ученого, академика Нацинальной академии наук України Ю.А. Митропольского относительно вклада А.П. Стахова в развитие математики, которую мы также подаем в этой рубрике (статья Митропольского «Математика Гармонии» профессора Стахова опубликована на сайте АТ http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322020.htm).

Аннотация

На этапе зарождения математики ее развитие стимулировалось тремя «ключевыми» проблемами – *счета, измерения и гармонии*. Первые две проблемы привели к обоснованию двух фундаментальных математических понятий – *натуральных чисел и иррациональных чисел,* которые и были положены в основу «Классической Математики». «Проблема гармонии», связанная с «золотым сечением», лежит в основе «Математики Гармонии», альтернативного направления в развитии математической науки. В статье рассматриваются различные «золотые»

проекты как приложения Математики Гармонии в современной математике, теоретичской физике, генетике, ботанике, информатике и т.д.

1. Введение

Что такое математика? Каково ее происхождение и история? В чем состоит отличие математики от других наук? Что является предметом математики в настоящее время? Как математика влияет на развитие других наук? Для ответа на этот вопрос обратимся к книге «Математика в ее историческом развитии» [1], написанной выдающимся российским математиком академиком А.Н. Колмогоровым. Согласно Колмогорову математика - это *«наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира»*.

Колмогоров отмечает, что *«ясное понимание самостоятельного положения математики как особой науки, имеющей собственный предмет и метод, стало возможным только после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в 6-5 вв. до н.э.»*.

Колмогоров выделяет следующие этапы в развитии математики:

(1) **Период зарождения математики**, предшествующий греческой математике.

(2) **Период элементарной математики**. Начало этого периода Колмогоров относит к 6-5 вв. до н.э., а его завершение к 17 в. Запас знаний, которые имела математика до начала 17 в., составляет и до настоящего времени основу «элементарной математики», преподаваемой в начальной и средней школе.

(3) **Период математики переменных величин**, который можно условно назвать **периодом «высшей математики».** Этот период начинается с употребления переменных величин в аналитической геометрии Р. Декарта и создания *дифференциального и интегрального исчисления*.

(4) Период современной математики. Началом этого периода Колмогоров считает создание Н.И. Лобачевским так называемой «воображаемой геометрии», которая положила начало расширению круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой. Развитие подобного рода исследований внесло в строение математики столь важные новые черты, что математику 19 и 20 веков естественно отнести к особому *периоду современной математики*.

Обсуждая причины возникновения математики, Колмогоров выделяет две практические проблемы, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения, *счет* и *измерение*. Эти «ключевые» проблемы привели к обоснованию двух фундаментальных математических концепций, *натурального числа* и *иррационального числа*, и к созданию двух фундаментальных математических теорий, *теории чисел* и *теории измерения*, которые лежат в основе «классической математики».

Однако, в античной науке существовала еще одна фундаментальная проблема, которая влияла на развитие античной науки и математики. Речь идет о *проблеме гармонии*, связанной с *золотым сеченинем*. К сожалению, эта проблема всячески игнорировалась «материалистической» наукой и «классической математикой». Тем не менее, начиная с «Начал» Евклида, это направление успешно развивалось как в эпоху Возрождения, так и в последующие периоды, в частности, в 19-м и 20-м веках. Это доказывается достаточно впечатлительным перечнем книг по проблеме «золотого сечения», чисел Фибоначчи и смежным вопросам [2-51]. Необходимо напомнить, что это научное направление развивалось в течение более чем двух тысячелетий выдающимися мыслителями и математиками Пифагором, Платоном, Евклидом, Фибоначчи, Леонардо да Винчи, Лукой Пачоли, Иоганном Кеплером, Цейзингом, Люка, Бине, Феликсом Клейном, а в 20-м и 21-м столетии такими выдающимися исследователями как Гримм, Гика, Мартин Гарднер, Николай Воробьев, Коксетер, Вернер Хоггатт, Алан Тьюринг, Джордж Пойа, Алфред Реньи, Стефанг Вайда, Эдуард Сороко, Ян Гржездельский, Олег Боднар, Николай Васютинский, Виктор Коробко, Иосиф Шевелев, Сергей Петухов, Роджер Герц-Фишлер, Джей Капраф, Мидхат Газале, Вера Шпинадель, Дунлап, Скотт Олсен, Мохаммед Ель Нашие и многие другие.

Таким образом, мы должны включить «проблему гармонии» в перечень «ключевых» проблем математики на этапе ее зарождения. Такой подход приводит к новому взгляду на историю математики. Эта идея лежит в основе настоящей статьи. Основная цель статьи – развить историю математики с новой точки зрения, то есть, с точки зрения трех «ключевых» проблем математики, *счета*, *измерения* и *гармонии*. Другая цель состоит в том, чтобы дать краткий обзор основных математических результатов «Математики Гармонии» и ее приложений в современной математике, теоретической физике и компьютерной науке.

2. Проблема счета – первая «ключевая» проблема античной математики

Как упоминалось, на этапе зарождения математики Колмогоров выделяет несколько «ключевых» проблем, которые стимулировали развитие математики и возникновение ее фундаментальных понятий. Первая из них – это **проблема счета.** Как подчеркивается в [1], *«счет предметов на самых ранних ступенях развития культуры привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над натуральными числами четырех арифметических действий»*.

На этапе зарождения математики было сделано одно из крупнейших, то есть, «ключевых» математических открытий. Речь идет о *позиционном принципе представления чисел.* Как подчеркивается в статье [52], *«первой известной нам системой счисления, основанной на поместном или позиционном принципе, является шестидесятеричная система древних вавилонян, возникшая примерно за 2000 лет до н.э.»*. Именно это открытие лежит в основе всех ранних систем счисления, которые были созданы на этапе зарождения математики и в период элементарной математики (включая Вавилонскую 60-ричную систему, десятичную и двоичную и другие системы счисления).

Каждый человек на земном шаре, окончивший хотя бы четыре класса начальной или «церковно-приходской» школы, знает, по меньшей мере, две полезные вещи: он умеет писать и читать и использовать *десятичную систему счисления* для выполнения простейших арифметических операций. И эта система кажется нам настолько простой и элементарной, что многие из нас с большим недоверием отнесутся к утверждению, что десятичная система является одним из *крупнейших математических открытий за всю историю математики.* И чтобы убедить читателя в этом, обратимся к мнению «авторитетов».

Пьер Симон Лаплас (1749-1827), французский математик, член Парижской академии наук, почетный иностранный член Петербургской академии наук:

«Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой».

М.В. Остроградский (1801-1862), русский математик, член Петербургской академии наук и многих иностранных академий:

«Нам кажется, что после изобретения письменности самым большим открытием было использование так называемой десятичной системы счисления. Мы хотим сказать, что соглашение, с помощью которого мы можем выразить все полезные числа двенадцатью

словами и их окончаниями, является одним из самых замечательных созданий человеческого гения …»

Жюль Таннери (1848-1910), французский математик, член Парижской академии наук:

«Что касается до нынешней системы письменной нумерации, в которой употребляется девять значащих цифр и ноль, и относительное значение цифр определяется особым правилом, то эта система была введена в Индии в эпоху, которая не определена точно, но, по-видимому, после христианской эры. Изобретение этой системы есть одно из самых важных событий в истории науки, и несмотря на привычку пользоваться десятичной нумерацией, мы не можем не изумляться чудной простоте ее механизма».

Следует отметить, что позиционный принцип представления чисел и вытекающие из них позиционные системы счисления (в частности, двоичная система), созданные на этапе зарождения математики, стали одной из «ключевых» идей современных компьютеров. В этой связи стоит также напомнить, что алгоритмы умножения и деления чисел, лежащие в основе современных компьютеров, созданы древними египтянами («метод удвоения») [14]. Однако, главным итогом развития арифметики на этапе зарождения математики является формирование понятия **натурального числа,** которое является одним из важнейших и фундаментальных понятий математики, без которого немыслимо существование самой математики. Для изучения свойств натуральных чисел еще в античный период возникает **теория чисел,** одна из фундаментальных теорий математической науки.

3. Проблема измерения – вторая «ключевая» проблема античной математики

Вторая «ключевая» проблема, стимулировавшая развитие математики на стадии ее зарождения – это **проблема измерения.** Как подчеркивает Колмогоров, *«потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т.д.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и к разработке приемов выполнения арифметических действий над дробями ... Измерение площадей и объемов, потребности строительной техники, а несколько позднее – астрономии, вызывают развитие начатков геометрии»*.

«Ключевым» математическим открытием в этой области по праву считается открытие ***«несоизмеримых отрезков».*** Считается, что это открытие было сделано в 5-м веке до н.э. в научной школе Пифагора при исследовании отношения диагонали к стороне квадрата. Методом от противного пифагорейцам удалось доказать, что рассматриваемое отношение, равное $\sqrt{2}$, не может быть выражено в виде отношения двух натуральных чисел, и такие отрезки были названы *несоизмеримыми*, а числа, выражающие подобные отношения, были названы *иррациональными*.

Открытие «несоизмеримых отрезков» стало поворотным пунктом в развитии математики. Благодаря этому открытию в математику вошло понятие **иррационального числа,** второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики. Для преодоления первого кризиса в основаниях математики, вызванного открытием «несоизмеримых отрезков», выдающийся геометр Евдокс разработал **теорию величин,** которая позже трансформировалась в **математическую теорию измерения** [53, 54]**,** еще одну фундаментальную теорию математической науки. К этой теории, основным результатом которой является формирование понятие **иррационального числа,** в конечном итоге, восходит вся **непрерывная математика**, включая дифференциальное и интегральное исчисление.

Влияние «проблемы измерения» на развитие математики настолько велико, что это дало право болгарскому математику академику Илиеву заявить, что *«на протяжении первой эпохи своего развития – от античности и вплоть до открытия дифференциального и интегрального исчисления – математика, исследуя в первую очередь проблемы измерения величин, создала геометрию Евклида и учение о числах»* [55].

Таким образом, две «ключевые» идеи античной математики – *проблема счета и проблема измерения* – привели к формированию двух фундаментальных понятий математики – понятия *натурального числа* и понятия *иррационального числа,* которые вместе с *теорией чисел, позиционными системами счисления и теорией измерения* и стали тем фундаментом, на котором позже была построена вся «классическая математика», а затем «классическая теоретическая физика» и «классическая информатика».

4. Математика. Потеря определенности

Книга *«Математика. Утрата определености”,* написанная выдающимся американским математиком Морисом Клайном [56] произвела огромное впечатление на автора и стала источником размышлений о природе и роли математики в современной науке. И автору доставляет удовольствие пересказать тезисно основные идеи книги Мориса Клайна.

С самого зарождения математической науки как самостоятельной отрасли знания (греческий период) и на протяжении более чем двух тысячелетий математики занимались поиском истины и добились на этом пути выдающихся успехов. Необозримое количество теорем о числах и геометрических фигурах, казалось, служило неисчерпаемым источником абсолютного знания, которое никогда и никем не может быть поколеблено.

Для получения своих удивительных мощных результатов математика использовала особый метод – метод дедукции, позволяющий из небольшого числа самоочевидных принципов, называемых аксиомами, получать новые математические результаты (теоремы). Природа дедуктивного метода такова, что он гарантирует истинность заключения, если только истинны исходные аксиомы. «Начала» Евклида стали первым великим математическим сочинением, которое является примером торжества дедуктивного метода

Евклидова геометрия была наиболее почитаемым разделом математики не только потому, что именно с нее началось дедуктивное построение математических дисциплин, но и по той причине, что ее теоремы полностью соответствовали результатам физических исследований. Однако, созданные в начале 19-го века необычные геометрии, названные не-Евклидовыми, стали первым ударом по стройному зданию математической науки. Эти необычные геометрии вынудили математиков осознать, что математические теории и теоремы не есть абсолютные истины в применении к Природе. Было доказано, что все эти геометрии являются математически корректными, то есть, они вполне могли быть геометрическими моделями реального мира подобно Евклидовой геометрии. Но тогда сразу же возник вопрос: какая геометрия является истинной моделью реального мира?

Обнаружение противоречий в Кнторовской теории бесконечных множеств стало еще одним ударом по математике. Осознание того, что сверкающая своим великолепием «царица наук» далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, шокировало математиков.

Реакция математиков на все эти события была неоднозначной. Большинство математиков как бы отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах, возникавших внутри самой математики, то есть, математики по существу порвали связи с естествознанием.

Что представляла собой математика в течение нескольких тысячелетий? Для предыдущих поколений она была прежде всего и главным образом тончайшим творением человеческого разума, предназначенным для исследования природы. Естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками. Математики охотно сотрудничали с физиками, астрономами, химиками и инженерами в решении различных научно-технических проблем. Более того, многие великие математики прошлого часто являлись выдающимися физиками, механиками и астрономами. Математика была «Царицей» и одновременно «Служанкой» естественных наук.

«Чистая» математика, полностью оторванная от запросов естествознания, никогда не находилась в центре забот и интересов математиков. Ей отводилась роль своего рода «забавы», отдохновения от гораздо более важных и увлекательных проблем, выдвигаемых естественными науками. В 18-м веке столь абстрактная наука, как теория чисел, привлекала лишь очень немногих математиков. Например, Эйлер, научные интересы которого были связаны с теорией чисел, считался признанным авторитетом в математической физике. Великий Гаусс не считал теорию чисел важнейшим разделом математики. Ему нередко предлагали заняться доказтельством *Великой теоремы Ферма*. В одном из писем он отметил, что гипотеза Ферма – это изолированная, ни с чем не связанная теорема и поэтому не представляет особого интереса.

Морис Клайн указывает различные причины, которые побудили математиков отойти от изучения реального мира. Широкий размах математических и естественнонаучных исследований не позволял ученым чувствовать себя одинаково свободно и в математике, и в естественных науках. Стоящие перед естствознаннием проблемы, в решении которых активное участие принимали великие математики прошлого, ныне становились все более сложными. И математики решили ограничить свою деятельность рамками чистой математики. *Абстракция, обобщения и специализация* и *аксимоматизация* – вот основные направления деятельности, выбранные «чистыми» математиками. Это привело к тому, что ныне математика и естественные науки идут разными путями. Новые математические понятия вводятся без всякой попытки найти им приложения. Более того, математики и представители естественных наук перестали понимать друг друга, а вследствие чрезмерной специализации и сами математики перестали понимать друг друга.

Какой же выход из создавшейся ситуации? Как подчеркивает Морис Клайн, выход стстоит в том, чтобы вновь обратиться к Природе и естственным наукам, которые на всех этапах развития математики были ее подлинным предметом исследования и источником ее развития. В конечном итоге, должен победить здравый смысл. Математический мир должен проводить различие не между чистой и прикладной математикой, а между математикой, ставящей своей целью решение разумных проблем, и математикой, потакающей чьим-то личным вкусам и прихотям, математикой целенаправленной и математикой бесцельной, математикой содержательной и бессодержательной, живой и бескровной.

Как известно, возвращение к прошлому – плодотворный источник познания настоящего. Возвращение к истокам математики, к ее истории является одним важных направлений преодоления того кризиса, в котором находится современная математика.

4. «Математика Гармонии» в ее историческом развитии

Деление в крайнем и среднем отношении. Таким образом, вместе с проблемами *счета* и *измерения* в античной науке существовала еще одна «ключевая» проблема, о которой не упоминает Колмогоров [1]. Эта проблема оказывала существенное влияние на развитие античной науки, в том числе, математики. Речь идет о «проблеме гармонии», которую, начиная с античного периода, постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль [19]. С этим периодом человеческой культуры связывают также разработку первых математических способов выражения пропорций в строении естественных систем.

Из «Элементов» Евклида к нам пришла следующая геометрическая задача о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении» [34]. Эта задача была сформулирована в Книге 2 «Начал» Евклида следующим образом.

Теорема II,11. Разделить отрезок *AB* на два отрзка, больший отрезок *AC* и меньший отрезок *CB* так чтобы было:

$$S(AC) = R(AB,BC). \quad (1)$$

Напомним, что $S(AC)$ означает площадь квадрата со стороной AC и $R(AB,BC)$ означает площадь прямоугольника со сторонами AB и BC.

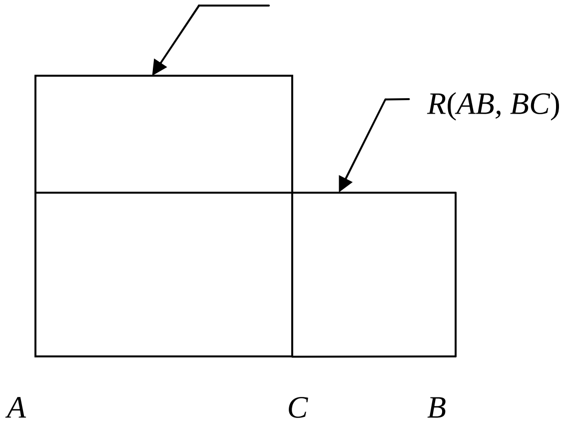

Рисунок 1. Геометрическая интерпретация Теоремы II, 11 (“Начала” Евклида)

Мы можем переписать выражение (1) следующим образом:

$$(AC)^2 = AB\times BC \quad (2)$$

Разделим теперь обе части выражения (2) на AC и затем на BC. Тогда выражение (2) принимает следующую форму:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}. \quad (3)$$

Пропорцию (3) можно интерпретировать геометрически: разделить отрезок AB точкой C на два отрезка, больший AC и меньший BC так, чтобы отношение большего отрезка AC к меньшему BC было равно отношению отрезка AB к большему отрезку AC. Заметим, что такая интерпретация известна в современной науке как «золотое сечение».

«Золотой» треугольник, пентагон и додекаэдр. Евклид использовал Теорему II,11 для геометрического построения *«золотого» равнобедренного треугольника* с углами 72°, 72° и 36° и затем для построения *правильного пятиугольника (пентагона)* и *додекаэдра* (Рис. 2).

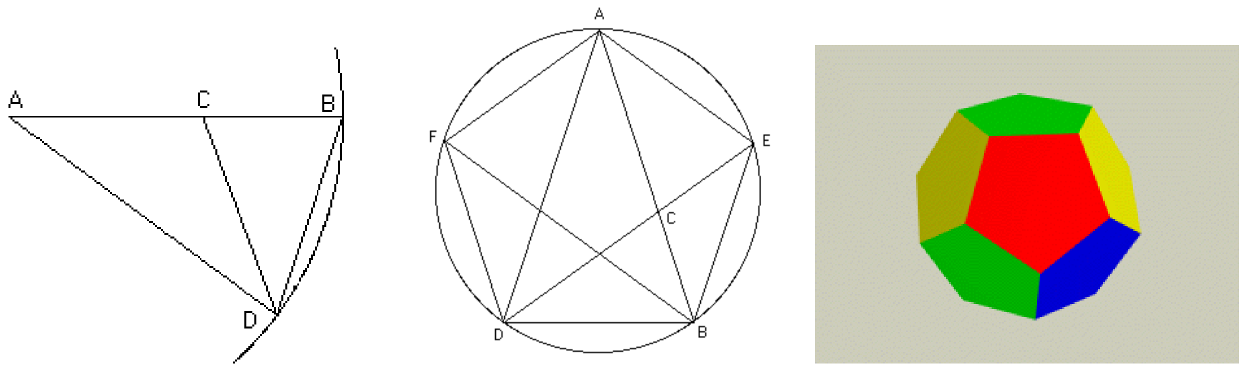

Рисунок 2. «Золотой» равнобедренный треуугольник, пентагон и додекаэдр

Золотое сечение. Обозначим пропорцию (3) через x. Тогда, учитывая, что $AB = AC +$

CB, мы можем представить пропорцию (3) в следующем виде:

$$x = \frac{AB}{CB} = \frac{AC+CB}{CB} = \frac{AC}{CB} + 1 = \frac{1}{\frac{CB}{AC}} + 1 = \frac{1}{x} + 1,$$

откуда вытекает следующее алгебраическое уравнение:

$$x^2 = x + 1 \qquad (4)$$

Уравнение (4) имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \qquad (5)$$

Положительный корень «золотого» алгебраического уравненеия (4) называется *золотым сечением, золотым отношением, золотым числом, золотой пропорцией*. Если мы обозначим «золотое сечение» через τ, мы можем записать следующеее выражение для «золотого сечения»:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (6)$$

Золотое сечение обладает следующими замечательными свойствами:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2} = \tau \times \tau^{n-1} \qquad (7)$$

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}} \qquad (8)$$

$$\tau = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+\ldots}}}} \qquad (9)$$

«Элементы»Евклида как первая «Математическая теория гармонии». Можна рассмотреть «Начала» Евклида с точки зрения «проблемы гармонии». Как известно [34], 13-я, то есть, заключительная Книга «Начал» Евклида, посвящена изложению теории Платоновых Тел, которые выражали «Гармонию Мироздания» в «Космологии» Платона. Этот факт породил весьма распространенную гипотезу («гипотезу Прокла») о том, что главная цель, которую преследовал Евклид при написании своих «Начал», было изложение теории Платоновых Тел, то есть, основных «гармонических» фигур мироздания. Но чтобы дать полную геометрическую теорию Платоновых тел, в частности, додекаэдра, Евклид свормулировал в Книге 2 **задачу «деления в крайнем и среднем отношении»** (Теорема II, 11), которая может рассматриваться как **"ключевое" математическое открытие в этой области.** Эта задача, которая была названа позже «золотым сечением», как упоминалось, была использована Евклидом для геометрического построения равнобедренного треугольника с углами 72°, 72° и 36° (*«золотого» равнобедренного треугольника*), *пентагона* и *додекаэдра,* основанного на золотом сечении [34]. Таким образом, нет никаких сомнений в том, что хорошо известная **"Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания»** была воплощена в величайшем математическом сочинении греческой математики, «Началах» Евклида. С этой точки зрения **мы можем рассматривать «Начала» Евклида как первую попытку создать “Математическую теорию Гармонии», что было главной идеей греческой науки.**

Таким образом, формулировка задачи о «делении в крайнем и среднем отношении» («золотого сечения») является «ключевым» математическим открытием в области «гармонии систем». Гениальный русский философ Алексей Лосев оценил основные достижения древних греков в этой области в следующих словах [19]: *"С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения... Их (древних греков) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».*

В процессе своего исторического развития «классическая математика» потеряла «гармоническую идею» Пифагора и Платона, воплощенную Евклидом в своих «Началах». В результате математика оказалась разделенной на ряд математических теорий (геометрия, теория чисел, алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление и т.д.). **К сожалению, значение «золотого сечения» было незаслуженно принижено в современной математике и теоретической физике. Для многих современных математиков «золотое сечение» напоминает «красивую сказку», которая не имеет никакого отношения к серьезной математике.**

Числа Фибоначчи. Тем не менее, несмотря на негативное отношение «материалистической» математики к «золотому сечению», ее теория продолжала развиваться. В 13 в. в математику были введены знаменитые *числа Фибоначчи* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 32, … , открытые итальянским математиком Леонардо из Пизы (Фибоначчи) при решении *задачи о размножении кроликов.* Числа Фибоначчи задаются следующим рекуррентным соотношением

$$F(n) = F(n\text{-}1) + F(n\text{-}2) \tag{10}$$

при начальных условиях

$$F(1) = F(2) = 1. \tag{11}$$

Следует отметить, что *рекуррентное соотношение Фибоначчи* (10) считается первой в истории математики рекуррентной формулой, то есть, Фибоначчи своим открытием предвосхитил *метод рекуррентных соотношений,* один из наиболее мощных методов комбинаторного анализа. Позже числа Фибоначчи были обнаружены во многих природных объектах и явлениях, в частности, в ботаническом явлении *филлотаксиса.*

Первая в истории науки книга по золотому сечению. В эпоху Итальянского Возрождения интерес к «золотому сечению», как одному из важных геометрических открытий, возникает с новой силой. Универсальный гений Возрождения Леонардо да Винчи никак не мог пройти мимо «деления отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение»). Существует мнение [19], что именно Леонардо ввел в культуру Возрождения сам термин «золотое сечение». Под непосредственным влиянием Леонардо выдающийся итальянский математик Лука Пачиоли опубликовал в 1509 г. книгу “Divina Proportione”, первую в мировой истории специальную книгу по золотому сечению.

Кеплер о золотом сечении. В 17 в. гениальный астроном и математик Иоганн Кеплер создал оригинальную геометрическую модель Солнечной системы, основанную на Платоновых телах. Создавая эту модель, он полностью следовал «гипотезе Прокла» [19]. Считается, что именно Кеплер впервые установил, что отношение соседних чисел Фибоначчи стремится к «золотому сечению», то есть,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(n)}{F(n-1)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,. \tag{12}$$

Свое восхищение «золотым сечением» он выразил в следующих словах: «*В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем*».

Числа Люка. После смерти Кеплера о «золотом сечении», одном из двух «сокровищ геометрии», забывают. И такое странное забвение продолжается в течение двух столетий. Активный интерес к «золотому сечению» вновь возрождается в математике только в 19-м столетии. В этот период математические работы, посвященные числам Фибоначчи и золотому сечению, по меткому выражению одного математика, *«начинают размножаться, как кролики Фибоначчи»*. Французские математики Люка и Бине становятся лидерами этих исследований в 19-м веке. Люка вводит в математику сам термин **«Числа Фибоначчи»,** а также **числа Люка** 1, 3, 4, 7, 11, 18, ..., которые задаются следующим рекуррентным соотношением

$$L(n) = L(n-1) + L(n-2) \tag{13}$$

при начальных условиях

$$L(1) = 1;\ L(2) = 3. \tag{14}$$

Ниже в Таблице 1 мы видим так называемые «расширенные» числа Фибоначчи и Люка.

Таблица 1. «Расширенные» числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$F(-n)$	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55
$L(n)$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$L(-n)$	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

Как вытекает из Табл. 1, члены «расширенных» рядов $F(n)$ и $L(n)$ имеет ряд чудесных математических свойств. Например, для нечетных $n = 2k + 1$ члены $F(n)$ и $F(-n)$ совпадают, то есть, $F(2k+1)= F(-2k-1)$, а для четных $n = 2k$ – противоположны по знаку, то есть, $F(2k)= - F(-2k)$, Что касается чисел Люка $L(n)$, то здесь все наоборот, то есть, $L(2k)= L(-2k)$, $L(2k+1) = - L(-2k-1)$.

Формула Кассини. В 17-м столетии знаменитый французский астроном Джованни Кассини (1625-1712) вывел наиболее известное тождество, связыающее любые три соседних числа Фибоначчи:

$$F^2(n)-F(n-1)F(n+1)=(-1)^{n+1} \tag{15}$$

Формулы Бине. В 19-м веке известный французский математик Бине выводит знаменитые *формулы Бине,* которые связывают золотое сечение с числами Фибоначчи и Люка:

$$F(n)=\begin{cases}\dfrac{\tau^n+\tau^{-n}}{\sqrt{5}} & for\quad n=2k+1;\\[2ex] \dfrac{\tau^n-\tau^{-n}}{\sqrt{5}} & for\quad n=2k\end{cases} \tag{16}$$

$$L(n)=\begin{cases}\tau^n+\tau^{-n} & for\quad n=2k;\\ \tau^n-\tau^{-n} & for\quad n=2k+1\end{cases} \tag{17}$$

где дискретная переменная n принимает свои значения из множества: 0, ±1, ±2, ±3, ...

Феликс Клейн о роли икосаэдра в математике. В 19-м веке выдающийся немецкий математик Феликс Клейн попытался объединить все ветви математики на основе икосаэдра, Платонового тела, дуального додекаэдру. **Клейн трактует икосаэдр, основанный на золотом сечении, как геометрический объект, из которого вытекают ветви пяти математических теорий:** ***геометрии, теории Галуа, теории групп, теории инвариантов и дифференциальные уравнения.*** **Главная идея Клейна предельно проста:** ***"Каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра».*** К сожалению, эта замечательная идея не получила должного развития в современной математике.

Золотое сечение и числа Фибоначчи в математике 20-го века. Во второй половине 20-го века интерес к числам Фибоначчи и золотому сечению в математике возрождается с новой силой. Выдающиеся математики Гарднер [6], Воробьев [7], Коксетер [8], Хоггатт [10] были первыми исследователями, почувствовавшими новые тенденции в математике. Брошюра Николая Воробьева «Числа Фибоначчи» [7], опубликованная в 1961 г., стала научным бестселлером 20-го века и была переведена на многие языки. В 1963 г. группа американских математиков во главе с Вернером Хоггаттом организовала **Фибоначчи-Ассоциацию** и начала издавать математический журнал "The Fibonacci Quarterly". Благодаря деятельности Фибоначчи-Ассоциации и книгам Воробьева [7], Хоггатта [10], Вайды [22], Дунлапа [32] и других математиков в современной математике сформировалось новое научное направление, которое получило название **«теории чисел Фибоначчи».**

В 1992 г. группа славянских ученых из России, Украины, Беларуси и Польши организовали так называемую **"Славянскую «Золотую» Группу».** По инициативе этой группы были проведены **Международные симпозиумы «Золотое Сечение и Проблемы Гармонии Систем»** сначала в Киеве (Украина, 1992, 1993), а затем в Ставрополе (Россия, 1994, 1995, 1996). В последние десятилетия западными и славянскими учеными было опубликовано ряд интересных книг [7-51] и статей [59-131] в области золотого сечения, чисел Фибоначчи и смежным вопросам. Сам факт публикации обширного перечня книг по проблеме золотого сечения является достаточно симптоматичным и свидетельствует об актуальности проблемы золотого сечения в современной науке

Современные научные открытия, основанные на золотом сечении и Платоновых телах. Золотое сечение, пентаграмма и Платоновы тела широко использовались астрологией и эзотерическими науками, что стало одной из причин негативного отношения классической «материалистической» науки к золотому сечению и Платоновым телам. Однако, все попытки «материалистической» науки и математики забыть «золотое сечение» и Платоновы тела и выбросить их вместе с астрологией и эзотерическими науками на «свалку сомнительных научных концепций», закончились полным провалом. Уже Иоганн Кеплер нашел «фибоначчиевые» спирали на поверхности филлотаксисных объектов. «Геометрия Боднара» [31, 46] стала блестящим доказательством того факта, что именно золотое сечение и числа Фибоначчи лежат в основе геометрии живой Природы. «Закон структурной гармонии систем», сформулированный Эдуардом Сороко [19], подтвердил всеобщий характер процессов самоорганизации систем любой природы и показал, что все самоорганизующиеся системы основаны на «золотых *p*-пропорциях». Квази-кристаллы Шехтмана и фуллерены (Нобелевская Премия 1996 г.) подтвердили гениальное предсказание Феликса Клейна о фундаментальной роли икосаэдра в науке и математике. Наконец, «золотые» геноматрицы Сергея Петухова [94] завершают перечень выдающихся современных научных открытий, основанных на «золотом сечении» и Платоновых телах.

Возможно, что возрастание интереса к золотому сечению и числам Фибоначчи в современной теоретической физике является одной из важнейших особенностей науки 21-го века. Выдающийся физик-теоретик Мохаммед Ель Нашие является мировым лидером в этой области [98-110]. Сделанное Ель Нашие открытие золотого сечения в знаменитом физическом эксперименте о прохождении света через две щели, которое лежит в основе квантовой физики, стало источником многих интересных идей в этой области, в частности, привело к соданию теории «*E*-infinity». В этой связи мы должны упомянуть о работах многочисленных последователей Ель Нашие, работаюших в области теоретической физики [111-118]. Необходимо отметить также вклад Славянских исследователей в эту важную область. Книга [47], написанная белорусским физиком Василием Петруненко, посвящена приложениям золотого сечения в квантовой физике и астрономии. В 2006 г. Издательство «БИНОМ» опубликовало книгу «Метафизика. Век XXI” [51], выпущенную под научной редакцией известного российского физика-теоретика Юрия Владимрова. Книга [51] состоит из трех частей и последняя часть посвящена приложениям золотого сечения в современной науке. Эта часть начинается двумя важными статьями [90, 94]. Статья Стахова [90] посвящена обоснованию «Математики Гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки. Статья Петухова [94] посвящена описанию важного научного открытия, «золотым» геоматрицам, которые свидетельствует о глубокой математической связи между золотым сечением и генетическим кодом. Профессор Владимиров (Московский университет) заканчивает свою книгу «Метафизика» [132] весьма примечательной фразой: *«Таким образом, можно утверждать, что в теории электрослабых взаимодействий возникают отношения, приближенно совпадающие с «золотым сечением», играющим важную роль в различных областях науки и искусства».*

Эти примеры показывают, что много фантастических «гармонических» моделей, созданных Пифагором, Платоном и Евклидом, на самом деле значительно ближе к реальному физическому миру, чем математические модели, создаваемые современными специалистами в области «чистой» математики.

Золотое сечение в науке 21-го века. Начало 21-го века отмечено рядом интересных научных событий, которые имеют прямое отношение к числам Фибоначчи и золотому сечению. Прежде всего, необходимо отметить проведение **Международных конференций по числам Фибоначчи и их приложениям**, организованных Фибоначчи-Ассоциацией в 2002 г. (штат Аризона, США), в 2004 г. (Брауншвейг, Германия) и в 2006 г. (Сан Франциско, Калифорния, США). В 2003 г. на Украине (Винница) была проведена **Международная конференция «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве».** Конференция была проведена по инициативе Славянской «Золотой» Группы, которая на Конференции была преобразована в **Международный Клуб Золотого Сечения**. В 2005 г. Академия Тринитаризма (Россия) организовала **Институт Золотого Сечения**, который является официальным органом Международного Клуба Золотого Сечения.

На рубеже 20-го и 21-го столетий западными и славянскими авторами было опубликовано ряд научных книг в области золотого сечения и его приложений. Наиболее интересными из них являются следующие:

(1) Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaons to Fractals. 1999 (русский перевод, 2002) [26].

(2) Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition, 2001 [28].

(3) Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number. Singapore, Second edition, 2002 [29].

(4) Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. Москва: Воскресение, 2000 [27].

(5) Vera W. de Spinadel, From the Golden Mean to Chaos, Nueva Libreria, Second edition, Nobuko, 2004 [23].

(6) Петруненко В.В. Золотое сечение в квантовых состояниях и своих астрономических и физических проявлениях. Минск: Право и экономика, 2005 [32].

(7) Боднар О.Я. Золотий переріз і невклідова геометрія в нвуці та мисецтві. Львів: Українські технології, 2005 [33]

(8) Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: Изд-во "URSS", 2006 [8].

(9) Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006 [34].

(10) Olsen Scott. The Golden Section: Nature's Greatest Secret, 2006 [35].

Этот перечень подтверждает огромный интерес к золотому сечению в науке 21-го века.

Лекция "The Golden Section and Modern Harmony Mathematics". К концу 20-го века предмет «теории чисел Фибоначчи» значительно расширился. Было получено огромное количество обобщений чисел Фибоначчи и золотого сечения [14, 36, 39], а также получено много неожиданных приложений чисел Фибоначчи и золотого сечения в теоретической физике (гиперболические функции Фибоначчи и Люка [70, 78]), в компьютерной науке (коды Фибоначчи и золотой пропорции [14, 18, 59-66]), в ботанике (закон преобразования спиральных биосимметрий [31, 46]) и даже в философии (закон структурной гармонии систем [19, 50]) и т.д. Стало ясно, что новые результаты в этой области далеко выходят за рамки традиционной «Теории чисел Фибоначчи» [7, 10, 22]. Более того, стало ясно, что само название «теория чисел Фибоначчи» значительно суживает содержание этого научного направления, которое направлено на изучение математических моделей гармонии систем. Поэтому возникла идея объединить новые результаты в теории золотого сечения и чисел Фибоначчи и их приложения под флагом нового междисциплинарного направления современной науки, получившего название «Математика Гармонии». Именно такая идея была изложена автором в лекции **"The Golden Section and Modern Harmony Mathematics",** прочитанной на 7-й Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям (Грац, Австрия, июль 1996 г.). Лекция была опубликована в научном сборнике "Applications of Fibonacci Numbers" [72], что является свидетельством положительного отношения американских математиков-фибоначчистов к «Математикеи Гармонии».

После 1996 г. автор продолжал развивать и углублять эту идею в статьях [69-92]. Однако, создание «Математики Гармонии» является итогом коллективного творчества, поскольку работы выдающихся исследователей в области чисел Фибоначчи и золотого сечения Николая Воробьева [7], Gardner Martin [6], H. S. M. Coxeter [8], George Polya [11], Verner Hoggat [10], Alfred Renyi [17], Stephen Vaida [22], Эдуарда Сороко [19, 50], Jan Grzedzielski [20], Олега Боднара [31, 46], Николая Васютинского [25], Виктора Коробко [37], Иосифа Шевелева [40], Сергея Петухова [94], Roger Herz-Fishler [34], Jay Kappraff [41, 44], Midhat Gazale [39], Vera W. de Spinadel [36], R.A. Dunlap [32], Scott Olsen [48], Александра Татаренко [97], Mohammed S. El Nashie [98-110] и других исследователей оказали непосредственное влияние на исследования автора в области Математики Гармонии.

«Математика Гармонии» в своих истоках восходит к Евклидовой проблеме о «делении в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение») [34] и является дальнейшим развитием традиционной «Теории чисел Фибоначчи» [7, 10, 22]. Какие же цели ставит перед собой эта новая математическая теория? Подобно «классической математике», которую иногда определяют как «науку о моделях» [55], «Математику Гармонии» следует рассматривать как «науку о моделях гармонических процессов и структур», реально существующих в окружающем нас мире. А более конкретно, как науку о рекуррентных соотношениях, алгебраических уравнениях и математических константах, с которыми связаны представления о гармонии процессов и явлений живой и неживой Природы (золотая пропорция, числа Фибоначчи, уравнения золотой пропорции и их обобщения: золотая *p*-пропорция, металлические пропорции, *p*-числа Фибоначчи, матрицы Фибоначчи, «золотые» матрицы), и их многочисленных приложениях в современной науке.

Два исторических пути развития математики. Возвращаясь назад к периоду зарождения математики, мы можем указать на два пути развития математики, которые возникли в античной науке. Первый путь был основан на **«проблеме счета»** и **«проблеме измерения»** [1]. В этот период в математике было сделано два «ключевых» открытия. **Позиционный принцип представления чисел** [52], открытый в Вавилонской математике, был использован во всех известных системах счисления, включая Вавилонскую 60-ричную, десятичную и двоичную системы счисления. В конечном итоге, развитие этого направления привело к формированию концепции **натурального числа** и созданию **теории чисел,** первой фундаментальной теории математики. **Несоизмеримые отрезки,** открытые пифагорейцами, привели к открытию **иррациональных чисел** и созданию **теории измерения** [53, 54], второй фундаментальной теории математики. В конечном итоге, *натуральные* и *иррациональные* числа и стали теми фундаментальными понятиями, которые были положены в основу всех математических теорий «классической математики», включая теорию чисел, алгебру, геометрию, дифференциальное и интегральное исчисление. Теоретическая физика и информатика являются наиболее важными приложениями «классической математики» (см. Рис. 1).

Однако, параллельно с «классической математикой» в античной науке начала развиваться еще одна математическая теория, «Математика Гармонии», которая берет свое начало в трудах Евклида. В основе «Математики Гармонии» лежит «проблема гармонии», еще одна «ключевая» проблема античной науки.

«Деление в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение») является «ключевым» математическим открытием в этой области [34]. Развитие этого направления привело к созданию **«теории чисел Фибоначчи»** [7, 10, 22] в современной математике. Однако, расширение теории чисел Фибоначчи и ее приложений, а также обобщения чисел Фибоначчи и задачи о «золотом сечении» привело к возникновени концепции **«Математики Гармонии»** [72] как нового междисциплинарного направления современной науки и математики. Это направление может привести к **«золотой» теоретической физике,** основанной на «золотых» гиперболических моделях Природы [45, 70, 78. 89], а также к **«золотой» информатике,** основанной на новых компьтерных арифметиках [14, 17, 74, 76] и новой теории кодирования и криптографии [38, 86, 87].

Рисунок 1. «Ключевые» проблемы античной математики и новые направления в математике, теоетической физике и информатике

6. Теория обобщенных *p*-чисел Фибоначчи и обобщенных золотых *p*-пропорций, вытекающая из треугольника Паскаля

Обобщенные *p*-числа Фибоначчи. Во второй половине 20-го столетия много известных математиков (Martin Gardner [6], George Polya [11], Alred Renyi [17] и другие) независимо друг от друга обнаружили связь чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля. В 1970 г. украинские математики Игорь Витенько и Алексей Стахов при решении задачи синтеза оптимальных алгоритмов измерения ввели понятие *p-чисел Фибоначчи*. В начале 70-х годов 20-го столетия Алексей Стахов в своей докторской диссертации (1972) [13] и затем в книге [14] ввел в развил теорию ***p*-чисел Фибоначчи,** задаваемых следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n\text{-}1)+F_p(n\text{-}p\text{-}1) \quad \text{for} \quad n>p+1 \qquad (18)$$

$$F_p(0) = 0,\ F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p) = 1 \qquad (19)$$

где p=0, 1, 2, 3, … и n=0, ±1, ±2, ±3, …

Заметим, что для случая p=1 рекуррентное соотношение (18) сводится к рекуррентному соотношению Фибоначчи (10).

Исследуя треугольник Паскаля, Алексей Стахов вывел в [14] общую формулу, позволяющую представить обобщенные *p*-числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + C_{n-4p}^4 + \ldots \qquad (20)$$

Если мы рассмотрим отношение сосодних *p*-чисел Фибоначчи $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ и устремим число *n* в бесконечность, мы получим **обобщенное «золотое» алгебраическое уравнение**:

$$x^{p+1} = x^p + 1. \qquad (21)$$

Положительные корни τ_p уравнения (21) называются **обобщенными золотыми *p*-пропорциями** [14]. Для случая $p > 0$ они образуют новый класс иррациональных чисел, которые выражают новые свойства треугольника Паскаля. Обобщенные «золотые» пропорции τ_p обладают следующим замечательным свойством:

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} = \tau_p \times \tau_p^{n-1} \qquad (22)$$

Обобщение задачи о «золотом сечении». Алексей Стахов обобщил Евклидову задачу о «делении в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение») следующим образом [14]. Зададимся целым числом *p*=0, 1, 2, 3, ... и разделим отрезок *AB* точкой *C* в следующем отношении:

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p \qquad (23)$$

Будем называть деление отрезка в соотношении (23) **задачей о золотом *p*-сечении отрезка** *AB* точкой *C* на том основании, что при *p*=1 эта задача сводится к классическому «золотому сечению» (3).

Как показано в [14], решение задачи (23) сводится к поиску положительных корней τ_p обобщенного «золотого» алгебраического уравнения (21). Если мы рассмотрим частные случаи задачи (23), то мы обнаружим, что при *p*=0 золотое *p*-сечение (23) сводится к классической «дихотомии» (*AC*=*CB*), а при *p* = 1 – к классическому «золотому сечению».

Обобщение Евклидовой Теоремы II, 11. Для заданного целого *p*=0, 1, 2, 3, ... разделить отрезок *AB* = *a* точкой *C* на два отрезка, больший отрезок *AC*=*b* и меньший отрезок *CB*=*c*, таким образом, чтобы было:

$$a^p \times c = b^{p+1}. \qquad (24)$$

Заметим, что для случая *p*=0 мы имеем «дихотомию» *c*=*b*, а для случая *p*=1 – классическую задачу Евклида о «делении в крайнем и среднем отношении»: $a \times c = b^2$.

Обобщенный принцип Золотого Сечения. Если разделить все члены тождества (22) на τ_p^n, мы получим следующее тождество:

$$1 = \tau_p^0 = \tau_p^{-1} + \tau_p^{-p-1}. \qquad (25)$$

Используя (22), (25), мы можем найти некоторый общий принцип представления «Единицы» через золотые *p*-пропорции [71]:

$$1 = \tau_p^{-1} + \tau_p^{-(p+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_p^{-(i-1)(p+1)-1}, \qquad (26)$$

где τ_p – золотая *p*-пропорция, $p \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Ясно, что этот «обобщенный принцип золотого сечения» включает в себя в качестве частных случаев «Принцип дихотомии» (*p*=0):

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots \quad (27)$$

и классический «Принцип золотого сечения» (p=1):

$$1 = \tau^0 = \tau^{-1} + \tau^{-3} + \tau^{-5} + \dots \quad (28)$$

Обобщенные формулы Бине для *p*-чисел Фибоначчи и Люка. Алексей Стахов и Борис Розин вывели в [75] следующую **обобщенную формулу Бине для *p*-чисел Фибоначчи:**

$$F_p\,(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^n, \quad (29)$$

где x_1, x_2, …, x_{p+1} – корни обобщенного «золотого» алгебраического уравнения (21) и k_1, k_2, … , k_{p+1} – некоторые постоянные коэффициенты, являющиеся решениями следующей системы алгебраических уравнений:

$$F_p\,(0) = k_1 + k_2 + \dots + k_{p+1} = 0$$
$$F_p\,(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_{p+1}x_{p+1} = 1$$
$$F_p\,(2) = k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^3 = 1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_p\,(p) = k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \dots + k_{p+1}(x_{p+1})^p = 1$$

В [75] выведена следующая **обобщенная формула Бине для *p*-чисел Люка:**

$$L_p\,(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \dots + (x_{p+1})^n \quad (30)$$

где x_1, x_2, …, x_{p+1} корни обобщенного «золотого» алгебраического уравнения (21).

Для заданного целого p=0, 1, 2, 3, … формула (30) задает бесконечное число рекуррентных числовых рядов, задаваемых следующей рекуррентной формулой:

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1) \quad \text{for} \quad n>p+1; \quad (31)$$

при начальных условиях

$$L_p(0) = p+1,\ \ L_p(1) = L_p(2) = \dots = L_p(p) = 1 \quad (32)$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, …. Числовые ряды $L_p(n)$ названы в [75] **обобщенными *p*-числами Люка.**

Обобщенные матрицы Фибоначчи. Американский математик Verner Hoggat в книге [10] развил теорию ***Q*-матрицы Фибоначчи**:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$Q^n = \begin{pmatrix} F(n+1 & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix} \quad (34)$$

$$\text{Det}\ Q^n = F(n-1)F(n+1) - F^2(n) = (-1)^n. \quad (35)$$

Алексей Стахов развил в [75] теорию **обобщенных Q_p-матриц Фибоначчи**:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots) \quad (36)$$

Заметим, что для случая p=1 Q_p-матрица (36) сводится к классической Q-матрице (33). Заметим также, что Q_p-матрицы обладают исключительными свойствами. Например, Q_{p-1}-матрица (p=1, 2, 3, …) можеь быть получена из Q_p-матрицы путем вычеркивания последнего столбца и предпоследней строки. Это означает, что каждая Q_p-матрица как бы включает в себя все предыдущие Q_p-матрицы и содержится во всех следующих Q_p-матрицах.

Алексей Стахов доказал в [75] следующую теорему:

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}, \quad (37)$$

где элементы матрицы (37) являются обобщенными p-числами Фибоначчи.

В статье [75] доказано следующеее тождество для детерминанта матрицы (38):

$$\mathrm{Det}\ Q_p^n = (-1)^{np}. \quad (38)$$

7. Теория обобщенных чисел Фибоначчи и Люка и обобщенных золотых сечений порядка *m*.

Обобщенные числа Фибоначчи и Люка порядка *m*. Spinadel, Gazale, Kappraff и Татаренко независимо друг от друга ввели в [36, 39, 44, 97] следующие обобщенные числа Фибоначчи и Люка порядка m:

$$F_m(n) = mF_m(n\text{-}1) + F_m(n\text{-}2) \quad (39)$$

$$F_m(0) = 0,\ F_m(1) = 1, \quad (40)$$

$$L_m(n) = mL_m(n-1) + L_m(n-2) \quad (41)$$

$$L_m(0) = 2,\ L_m(0) = m \quad (42)$$

где m – положительное действительное число, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Для случая m=1 обобщенные числа Фибоначчи и Люка $F_m(n)$ и $L_m(n)$ сводятся к классическим числам Фибоначчи и Люка. Формула Кассини для обобщенных чисел Фибоначчи $F_m(n)$ выглядит следующим образом:

$$F_m^2(n) - F_m(n-1)F_m(n+1) = (-1)^{n+1} \quad (43)$$

«Золотое» алгебраическое уравнение порядка *m* имеет следующий вид:

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad (44)$$

где m – положительное действительное число. «Золотое» алгебраическое уравнение (44) имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2} \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{4+m^2}+m}{2} \quad (45)$$

Обобщенная золотая пропорция порядка *m* выглядит следующим образом:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2} \quad (46)$$

Обобщенная золотая пропорция (46) имеет следующие свойства:

$$m = \Phi_m - \frac{1}{\Phi_m}; \qquad \Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} = \sqrt{4+m^2}; \qquad \Phi_m^n = m\Phi_m^{n-1} + \Phi_m^{n-2}$$

$$\Phi_m = \sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{\ldots}}}} \qquad \Phi_m = m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m+\ldots}}}$$

Таким образом, обобщенные золотые пропорции порядка m («металлические пропорции» [36]), задаваемые (46), является широким обобщением классической золотой пропорции (6), частного случая (46) для m=1. Формула (46) порождает бесконечное число новых математических констант – *металлических пропорций* [36], поскольку каждое положительное действтительное число m порождает свое собственную «металлическую пропорцию» типа (46).

Формулы Газале для обобщенных чисел Фибоначчи и Люка порядка *m*:

$$F_m(n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^n \Phi_m^{-n}}{\sqrt{4+m^2}} \qquad L_m(n) = \Phi_m^n + (-1)^n \Phi_m^{-n} \tag{47}$$

где Φ_m – “металлическая пропорция» (46); n=0, ±1, ±2, ±3, … . Ясно, что для m=1 формулы Газале (47) сводятся к формулам Бине (16), (17).

Анализ формул Газале (47) показывает, что эти формулы порождают бесконечное число рекуррентных числовых последовательностей, подобных числам Фибоначчи и Люка, поскольку каждое положительное действительное число m (порядок последовательности) порождает свою собственную последовательность. Заметим, что при p=1 формулы (47) генерируют числа Фибоначчи и Люка, а при p=2 – числовые последовательности, известные как числа Пелли и числа Люка-Пелли [39].

Обобщенные G_m-матрицы Фибоначчи. Алексей Стахов ввел в [91] квадратную матрицу следующего типа:

$$G_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$G_m^n = \begin{pmatrix} F_m(n+1) & F_m(n) \\ F_m(n) & F_m(n-1) \end{pmatrix}, \tag{49}$$

где m положительное действительное число, n=0, ±1, ±2, ±3, …

Матрицы (48), (49) названы **обобщенными G_m-матрицами порядка *m*.**

Матрица (49) имеет следующие свойства:

$$\mathrm{Det}\ G_m^n = F_m(n+1)\times F_m(n-1) - F_m^2(n) = (-1)^n. \tag{50}$$

$$G_m^n = mG_m^{n-1} + G_m^{n-2} \tag{51}$$

Таким образом, матрицы (48), (49) являются широким обобщением классической Q-матрицы Фибоначчи, задаваемой формулами (33), (34). Для случая m=1 матрицы (48), (49) совпадают с матрицами (33), (34). Формулы (48), (49) порождают бесконечное число **обобщенных G_m – матриц Фибоначчи порядка *m*,** поскольку каждое положительное действительное число m порождает свою собственнуб обобщенную G_m-матрицу Фибоначчи порядка m.

8. Новые гиперболические модели Природы

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка были впервые введены Алексеем Стаховым и Иваном Ткаченко в статье [70]:

Гиперболические синус и косинус Фибоначчи

$$sF(x) = \frac{\tau^{2x} - \tau^{-2x}}{\sqrt{5}}; \qquad cF(x) = \frac{\tau^{2x+1} + \tau^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}} \tag{52}$$

Гиперболические синус и косинус Люка

$$sL(x)=\tau^{2k+1}-\tau^{-(2k+1)}; \qquad cL(x)=\tau^{2k}+\tau^{-2k} \tag{53}$$

где $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция»).

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка (52), (53) связаны с числами Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$sF(k) = F(2k); \quad cF(k) = F(2k+1); \quad sL(k) = L(2k+1); \quad cL(k) = L(2k) \tag{54}$$

Симметричнве гиперболические функции Фибоначчи и Люка были введены Алексеем Стаховым и Борисом Розиным в статье [78]:

Симметричные гиперболические синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\tau^x - \tau^{-x}}{\sqrt{5}} \qquad cFs(x) = \frac{\tau^x + \tau^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{55}$$

Симметричные гиперболические синус и косинус Люка

$$sLs(x) = \tau^x - \tau^{-x} \qquad cLs(x) = \tau^x + \tau^{-x} \tag{56}$$

где $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция»).

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка (55), (56) связаны с числами Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F(n) = \begin{cases} sFs(n), & for \quad n=2k \\ cFs(n), & for \quad n=2k+1 \end{cases}; \qquad L(n) = \begin{cases} cLs(n), & for \quad n=2k \\ sLs(n), & for \quad n=2k+1 \end{cases} \tag{57}$$

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка порядка *m* были введены Алексеем Стаховым в статье [91] и независмо Sergio Falcon и Angela Plaza в статье [124]:

Гиперболический синус Фибоначчи порядка m

$$sF_m(x)=\frac{\Phi_m^x-\Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+m^2}}\left[\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x}\right] \tag{58}$$

Гиперболический косинус Фибоначчи поряка m

$$cF_m(x)=\frac{\Phi_m^x+\Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+m^2}}\left[\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x}\right] \tag{59}$$

Гиперболический синус Люка порядка m

$$sL_m(x)=\Phi_m^x-\Phi_m^{-x}=\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x} \tag{60}$$

Гиперболический косинус Люка порядка m

$$cL_m(x)=\Phi_m^x+\Phi_m^{-x}=\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x} \tag{61}$$

где m – положительное действительное число, Φ_m – обобщенное золотое сечение порядка m.

Заметим, однако, что статья Алексея Стахова [91] была опубликована в 2006 г., а статья Sergio Falcon и Angela Plaza [124] – в 2007 г. Сам факт открытия разными авторами одного и того же класса новых гиперболических функций, задаваемых (58)-(61), практически в одно и то же время и независимо друго от друга является свидетельством того, что это открытие «созрело» в современной науке.

9. «Золотые» матрицы

«Золотые» матрицы, основанные на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи. Алексей Стахов ввел в [87] новый класс квадратных матриц, названных **«золотыми» матрицами**:

$$Q_0(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix} \tag{63}$$

В [87] доказаны следующие тождества для детерминантов «золотых» матриц (63), (64):

$$\det Q_0(x)=cFs(2x+1)\times cFs(2x-1)-\left[sFs(2x)\right]^2=1 \tag{64}$$

$$\det Q_1(x)=sFs(2x+1)\times sFs(2x-1)-\left[cFs(2x)\right]^2=-1 \tag{65}$$

Обобщенные «золотые» матрицы, основанные на гиперболических функциях Фибоначчи порядка *m*. Алексей Стахов ввел в [91] новый класс обобщенных «золотых» матриц, основанных на гиперболических функциях Фибоначчи порядка m:

$$G_{m,0}(x)=\begin{pmatrix} cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \\ sF_m(2x) & cF_m(2x-1) \end{pmatrix} \tag{66}$$

$$G_{m,1}(x)=\begin{pmatrix} sF_m(2x+2) & cF_m(2x+1) \\ cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \end{pmatrix} \tag{67}$$

В [91] доказаны следующие тождества для детерминантов «золотых» матриц (67), (68):

$$\det Q_{m,0}(x)=cF_m(2x+1)\times cF_m(2x-1)-\left[sF_m(2x)\right]^2=1 \tag{68}$$

$$\det Q_{m,1}(x)=sF_m(2x+1)\times sF_m(2x-1)-\left[cF_m(2x)\right]^2=-1 \tag{69}$$

Заметим, что «золотые» матрицы (66), (67) являются обобщением матриц (62), (63), которые являются частными случаями матриц (66), (67) для m=1.

Новое геометрическое определение действительного числа, основанное на обобщенных золотых *p*-пропорциях. Алексей Стахов развил в [77] следующий подход к конструктивному определению действительного числа. Рассмотрим бесконечное множество отрезков, длины которых являются золотыми p-пропорциями:

$$B = \{ \tau_p^n \}, \tag{70}$$

где n = 0, ±1, ±2, ±3, ….

Мы можем использовать множество (70) для конструирования следующей позиционной системы счисления:

$$A=\sum_i a_i\tau_p^i , \tag{71}$$

где A – некоторое действительное число, a_i – двоичная цифра (0 или 1) i-го разряда, $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3$, τ_p^n - вес i-го разряда, τ_p (золотая p-пропорция) – основание системы счисления (71).

Заметим, что впервые система счисления (71), названная “кодом золотой p-пропорции”, была введена Алексеем Стаховым в 1980 в статье [65] и затем в книге [18].

Рассмотрим теперь частные случаи системы счисления (71). Заметим, что для случая p=0 код золотой p-пропорции (71) сводится к двоичной системе счисления:

$$A = \sum_i a_i 2^i , \qquad (72)$$

лежащей в основе современных компьютеров.

Заметим, что для случая p=1 система счления (71) сводится к системе счисления Бергмана [93]:

$$A = \sum_i a_i \tau^i , \qquad (73)$$

где τ («золотая пропорция») – основание системы счисления (73).

Заметим, что система Бергмана (73) является исторически первой *системой счисления с иррациональным основанием.*

Поскольку при p>0 все основания τ_p системы (71) являются иррациональными числами, это означает, что сумма (71) представляет собой новый класс систем счисления с иррациональными основаниями. Системы счисления с иррациональными основаниями (71), (73) представляют большой интрес для развитии «конструктивной» теории действительных чисел. Возможно, что системы счисления (71), (73) являются наиболее важным математическим открытием в области систем счисления после открытия позиционного принципа представления чисел (Вавилон, 2-е тысячелетие до н.э.) и десятичной системы счисления (Индия, 5-й век н. э.).

Определение (71) разделяет все действительные числа на два непересесекающихся подмножества, *конструктивные* и *неконструктивные* действительные числа. Все действительные числа, которые могут быть представлены в виде суммы (71), называются *конструктивными* действительными числами. Все остальные действительные числа, которые не могут быть представлены в виде суммы (71), являются *неконструктивными* действительными числами. Заметим, что такой подход к действительным числам отличается от традиционного подхода, когда действительные числа делятся на *рациональные* и *иррациональные*.

Связь трех важнейщих констант: постоянной тонкой структуры (α), числа (π) и золотого сечения (τ). Недавно украинский ученый Николай Косинов доказал [125], что широко известная постоянная тонкой структуры α может быть выражена через число π и золотую пропорцию $\boldsymbol{\tau}$ следующим образом:

$$\alpha^{20} = \sqrt[13]{\pi\tau^{14}} \times 10^{-43} \qquad (74)$$

Используя формулу (74), Косинов получил следующее уточненое значение постоянной тонкой структуры: **α = 1/137,0360098237546836753075012013 48**.

Полученный результат, подтверждающий связь постояной тонкой структуры α, одного из основных безразмерных параметров микрокосмоса и Вселенной, с числом π и золотым сечением $\boldsymbol{\tau}$, указывает на прямую связь константы α с законами гармонии Природы.

Открытие Сергея Петухова [94]. Пусть A (аденин), C (цитозин), G (гуанин) и U (урацил) – азотистые основания («буквы») генетического алфавита, образующие исходную символьную матрицу $P = \begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix}$. Тогда каждой символьной геноматрице типа $P^{(n)}$, которая образуется из исходной символьной матрицы путем тензорного (кронекерового) произведения исходной символьной матрицы P и членами которой являются полиплеты, составленные из «букв» генетического алфавита *A, C, G и U,* соответствует некоторая числовая геноматрица типа $P^{(n)}_{мульт}$, каждый член которой представляет собой произведение чисел водородных связей соответствующих азотистых оснований данного полиплета, а каждой числовой геноматрице $P^{(n)}_{мульт}$, в свою очередь, соответствует некоторая «золотая» геноматрица $\Phi^{(n)}$, которая образуется из символьной геноматрицы $P^{(n)}$ путем замены каждого полиплета произведением следующих числовых значений для его «букв»: $C=G=\tau$, $A=U=\tau^{-1}$. При этом «золотая» геноматрица $\Phi^{(n)}$ связана с числовой геноматрицей $P^{(n)}_{мульт}$ следующим фундаментальным соотношением:

$$(\Phi^{(n)})^2 = P^{(n)}_{мульт}.$$

Это открытие является свидетельством того, что «золотое сечение» лежит в основе живой природы! В настоящее время трудно переоценить в полной мере революционный характер открытия Петухова для развития современной науки. Возможно, что это открытие является научным результатом того же ранга, что и открытие самого генетического кода!

10. Заключение: «золотые» проекты

Таким образом, основной результат проведенного исследования может быть неожиданным для многих математиков. В течение более чем двух тысячелетий, начиная с древних греков, математика развивалась в двух направлениях. Основные идеи этих направлений были сформулированы в «Началах» Евклида. Первое направление было основано на Евклидовом определении натурального числа (N=1+1+1+...+1) и «теории величин» Евдокса, изложенной в «Началах» Евклида. Второе направление было основано на задаче о «делении в крайнем и среднем отношении» («золотом сечении»), пентагоне и Платоновых телах, теория которых изложено в Книге 13 «Начал» Евклида. Однако после Евклида эти направления разделились и развивались независимо друг от друга. Первое направление привело к созданию «классической математики», которая лежит в основе «классической теоретической физики», «классической информатики» и других областей приложения математики (Рис.1). Второе направление было направлено на создание моделей «гармонических» процессов и структур, наблюдающихся в реальном мире. Это математическое направление завершилось в 20-м веке созданием «Математики Гармонии» [81, 90], которая имеет ряд важных достижений и приложений в современной науке. «Математика Гармонии» может повлиять на различные области современной культуры и стать источником новых проектов в области науки и культуры:

1. Теория вероятностей. Невозможно переоценить методологическое значение глубокой математической связи обобщенных p-чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами, задаваемой формулой (20). Ясно, что эта связь может стать началом переосмысливания многих разделов современной математики и теоретической физики, в которых комбинаторные отношения играют важную роль, в частности, теории вероятностей и статитических законов.

2. **Теория чисел.** Новое «конструктивное» определение действительного числа, задавемое (71), имеет «стратегическое» значение для развития теории чисел. Согласно (71) существует бесконечное число «конструктивных» определений действительного числа, основанных на золотых p-пропорциях. Каждое из определений (71) соответствует заданному целому числу p=0, 1, 2, 3, ... и порождает некоторую оригинальную теорию действительных чисел.

3. Теория измерения. Как известно, теория измерения [53, 54], основанная на аксиомах Евдокса-Архимеда и Кантора, является одной из фундаментальных теорий математики. С этой точки зрения «алгоритмическая теория измерения» [14, 15] представляет фундаментальный интрес для развития математики.

4. Теория элементарных функций. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка [70, 78, 91] являются новым классом «элементарных функций» и значительно расширяет теорию гиперболических функций. Тот факт, что число гиперболичиских функций теоретически бесконечно и что каждая из новых гиперболических функций порождает рекуррентную последовательнось, подобную числам Фибоначчи, Люка или Пелли, представляет «стратегический» интерес для математики и теоретической физики.

5. Теория чисел Фибоначчи. «Математика Гармонии» создает новые стимулы для развития «теории чисел Фибоначчи» [7, 10, 22]. Прежде всего рекуррентные формулы для обобщенных *p*-чисел Фибоначчи и Люка расширяют область «фибоначчиевых» исследований. С другой стороны, гиперболические функции Фибоначчи и Люка [70, 78, 91] превращают «теорию чисел Фибоначчи» в «непрерывную» теорию, что позволяет применить к «теории чисел Фибоначчи» математический аппарат «непрерывной» математики, в частности, дифференцирование и и нтегрирование.

6. Теория матриц. Матрицы Фибоначчи (33, 34, 36, 37) и “золотые» матрицы (62), (63), (66), (67) обладают уникальными математическими свойствами (37), (38), (64), (65), (68), (69) и могут быть выделены в особый класс матриц с детерминантом, равным +1 или -1. Изучение таких матриц представляет интерес для теории матриц. Поиск приложений этих матриц в теоретической физике является одним из важных направлений физических исследований.

7. Теоретическая физика. Мы можем указать на ряд важных приложений «Математики Гармонии» в современной теоретической и экспериментальной физике. Прежде всего, это «квазикристаллы Шехтмана», основанные на «Платоновом икосаэдре», и «фуллерены» (Нобелевская премия 1996 г.), основанные на «Архимедовом усеченном икосаэдре». Разработанная египетским ученым Ель Нашие теория «*E*-infinity» [98-114], основанная на «золотом сечении», является плодотворным источником важных идей и приложений в квантовой физике. Общая теория гиперболических функций [91, 124] может привести к пересмысливанию таких важных космологических теорий как «геометрия Лобачевского» и «геометрия Минковского» (гиперболическая интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна). Исследования Николая Косинова [125-128] могут привести к открытию связей фундаментальных физических констант с «золотым сечением» и его обобщениями.

8. Философия. «Закон структурной гармонии систем» Эдуарда Сороко [19], возможно, является одним из наиболее выдающихся достижений современной философии. Этот закон является блестящим подтверждением эффективности применения «Обобщенного Принципа Золотого Сечения» к самоорганизующимся системам.

9. Ботаника. Новая геометрическая теория ботанического явления филллотаксиса, развитая украинским ученым Одегом Боднаром [31], является блестящим подтверждением того факта, что геометрия филлотаксисных объектов основана на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка.

10. Биология. Рост биологических клеток является одной из фундаментальных проблем биологии. В статье [131] доказано, что деление биологических клеток является асимметричным и основано на обобщенных *p*-числах Фибоначчи.

11. Медицина. Российский биолог Виктор Цветков доказал в своей книге «Сердце, Золотое Сечение и Симметия [33], что сердечная деятельность млекопитающих основана на «принципе золотого сечения». По мнению Цветкова организация «золотого» кардиологического цикла является результатом длительной эволюции млекопитающих в направлении оптимизации их структуры и функций.

12. Генетика. Открытие «золотых» геноматриц, сделанное российским ученым Сергеем Петуховым [94], имеет оргромное значение для современной генетики. Это открытие показывает глубокую связь генетического кода с «золотым сечением», которое может рассматриваться как некоторый «универсальный код Природы» и основа живых организмов.
13. Компьютеры. «Фибоначчиевые» и «золотые» компьютерные арифметики, которые были описаны в работах [14, 18, 59, 61, 64, 66, 68, 74, 76], могут стать источником новых компьютерных проектов («помехоустойчивый процессор Фибоначчи» [24], «золотой» отказоусточивый зеркально-симметричный процессор [76] и т.д.).
14. Измерительные системы. «Золотые» резистивные делители являются электрической основой «золотых» самокорректирующихся аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей [14, 18, 24, 63, 67] и могут привести к новым проектам в области измерительных систем.
15. Телекоммуникационные системы. Матрицы Фибоначчи (33, 34, 36, 37) являются математической основой новой теории кодирования [38, 86], которая может эффективно использована для обнаружения и исправления ошибок в телекоммуникационных системах. «Золотые» матрицы (62), (63), (66), (67) привели к созданию «золотой» криптографии [87, 91], которая может быть использована для криптографической защиты информационных систем, работающих в реальном масштабе времени.
16. Музей Гармонии и Золотого Сечения [133, 134] является уникальным историческим, естественно-научным и художественным музеем, которому нет аналогов в мировой культуре. Музей является коллекцией всех произведений Природы, Науки и Искусства, основанных на «золотом сечении», числах Фибоначчи и Платоновых телах.
17. Реформа математического образования. Основу программы «математического образования», используемой в средней школе, составляет «Элементарная математика», созданная в античной науке. Однако, как было показано выше, параллельно с классической «Элементарной математикой», начиная с древних греков, развивалась «Математика Гармонии». Каждый студент хорошо знает «Теорему Пифагора», которая является первым «сокровищем» геометрии и выступает в роли некоторого символа «Элементарной математики». Но иногда многие так называемые «образованные люди» имеют весьма смутное представление о «золотом сечении», втором «сокровище» геометрии (Кеплер). «Математика Гармонии» является развитием и дополнением «Элементарной математики» и может стать основой для реформы математического образования, основанной на «золотом сечении». «Математика Гармонии» может превратить процесс изучения математики в захватывающий процесс поиска гармонических процессов в Природе, которая нас окружает.
18. Наука о Гармонии Систем. «Математика Гармонии» может стать основой «Науки о Гармонии Систем» [69], важного междисциплинарного направления современной науки.

Таким образом, мы имеем полное право заявить, что в отличие от «чистой» математики, то есть, «математики ради математики», являющейся некоторой современной «пародией» на математику как *«Царицу наук»* и *«науку о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира»* (Колмогоров), «Математика Гармонии» имеет тесные связи с современным естествознанием, в частности, с теоретичнеской физикой, ботаникой, генетикой, биологией, а также информатикой, и может стать источником плодотворных идей и концепций развития современной науки и культуры.

Литература

[1] Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1961.
[2] Pacioli Luca. De Divina Proportione, 1509.

[3] Timerding H.E. Der Golden Shnitt. Leipzig and Berlin: Verlag und Druck B.G. Teubner, 1918 (Russian translation, 1924).
[4] Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Лениград-Москва: ОНТИ, 1935.
[5] Гика Матила. Эстетика пропорций в Природе и Искусстве (пер. с фр.). Москва: Издательство Академии Архитектуры, 1936.
[6] Gardner Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York: Publishing House “Dover”, 1952.
[7] Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва: Наука, 1961
[8] Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.
[9] Brother Alfred Brousseauю An Introduction to Fibonacci Discovery. San Jose, California: Fibonacci Association, 1965.
[10] Hoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
[11] Пойя Г. Математическое открытие (пер. с англ.). Москва, Наука, 1970.
[12] Huntley H. E. The Divine Proportion: a Study in Mathematical Beauty. Dover Publications, 1970.
[13] Стахов А.П. Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Докторская диссертация. Киевский институт инженеров гражданской авиации, 1972.
[14] Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва: Советское радио, 1977.
[15] Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва: Знание, 1979.
[16] Ghyka Matila. The Geometry of Art and Life. Dover Publications, 1977.
[17] Реньи А. Трилогия математики (пер. с венг.). Москва: Мир, 1980.
[18] Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва: Радио и связь, 1984.
[19] Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
[20] Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa: Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen).
[21] Garland T.H. Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers. Dale Seymour, 1987.
[22] Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
[23] Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Выща школа, 1989.
[24] Помехоустойчивые коды. Компьютер Фибоначчи. Москва: Знание, 1989
[25] Васютинский Н. Золотая пропорция. Москва,Молодая Гвардия, 1990.
[26] Шевелев И.Ш. Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое Сечение. Три взгляда на природу гармонии. Москва: Стройиздат, 1990.
[27] Runion G.E. The Golden Section. Dale Seymour, 1990.
[28] Fisher Robert, Fibonacci Applications and Strategies for Traders. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
[29] Bondarenko, Boris A., Generalized Pascal Triangles and Pyramids: Their Fractals, Graphs, and Applications, Fibonacci Association, 1993.
[30] Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. Минск: РИТС, 1993.
[31] Боднар О.Я. Золотое Сечение и неевклидова геометрия в Природе и Искусстве. Львов: Свит, 1994.
[32] Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific Publishing, 1997.
[33] Цветков В.Д. Сердце, Золотое Сечение и Симметрия. Пущино: ОНТИ РАН, 1997.
[34] Roger Herz-Fishler. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998.
[35] Prechter, Robert R. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. Gainseville, Georgia: New Classics Library, 1999.
[36] Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).

[37] Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Ассоциация строительных институтов, 1998.
[38] Stakhov A, Massingue V, Sluchenkova A. Introduction into Fibonacci coding and cryptography. Харьков: Основа, 1999.
[39] Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (пер. с англ. 2002).
[40] Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. Москва: Воскресение, 2000.
[41] Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.
[42] Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
[43] Livio, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.
[44] Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
[45] Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: A New Mathematics for the Living Nature. Vinnitsa: Publishing House "ITI", 2003.
[46] Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідрова геометрія в науці та мистецтві. Львів: Українські технлогії, 2005
[47] Петруненко В.В. Золотое сечение в квантовых состояниях и своих астрономических и физических проявлениях. Минск: Право и экономика, 2005.
[48] Olsen Scott. The Golden Section: Nature's Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006.
[49] Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006
[50] Сороко Э.М. Золотое сечение, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение вобщую теорию гармонии систем. Москва: URSS, 2006.
[51] Владимиров Ю.С. (редактор). Метафизика. Век XXI. Москва: Бином, 2006.
[52] Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Происхождение систем счисления. - Энциклопедия Элементарной Математики, том 1 «Арифметика». Москва: Гостехидат, 1951.
[53] Лебег А. Об измерении величин. Москва: Учпедгиз, 1960.
[54] Дубнов И.С. Измерение отрезков. Москва: Физматгиз, 1960.
[55] Илиев Л. Математика как наука о моделях. Успехи математических наук , 1972, том 27, выпуск 2.
[56] Kline Morris. Mathematics. The Loss of Certainty. New York: Oxford University Press, 1980 (русский перевод, Москва: Мир, 1984).
[57] Лосев А.Ф. История философии как школа мысли. Коммунист, 1981, №11.
[59] Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. A.P. Redundant binary positional number systems". В сборнике «Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры». Таганрог: Изд-во Тагарогского радиотенического института, 1974, вып. 2, с. 3-40.
[60] Стахов А.П. Измерение и поиск. Проблемы случайного поиска, вып. 3, 1974. Рига: Зинатне, с. 5-15.
[61] Стахов А.П. Использование естественной избыточности «фибоначчиевых» систем счисления для контроля вычислительных систем. Автоматика и вычислительная техника, 1975, №6, 69-77.
[62] Стахов А.П. Фибоначчиевые двоичные позиционные системы счислния. Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи. Москва: Наука, 1976, с. 155-179.

[63] Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. Современные проблемы метрологии. Москва: Издание Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978, с. 51-65.
[64] Stakhov A.P. Fibonacci and “Golden” Ratio Codes. Fault-tolerant Systems and Diagnostic FTSD-78, Gdansk, 1978, 276-285.
[65] Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника , 1980, No 1, с. 27-33.
[66] Стахов А.П. Алгоритмичесекая теория измерения и основания компьютерной арифметики. Измерение. Контрол. Автоматизация, 1988, № 2, с. 3-21.
[67] Stakhov A.P. The Golden Section in the Measurement Theory. An International Journal "Computers & Mathematics with Applications", Volume 17, No 4-6, 1989, 613-638.
[68] Стахов А.П. Принцип золоой пропорции: перспективный путь развития компьютеров. Вестник Академии наук Украины, 1990, № 1-2, с. 31-48.
[69] Стахов А.П. Золотое Сечение и наука о гармонии ситем. Вестник Академии наук Украины, 1991, № 12, с. 31-37.
[70] Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии науку Украины, 1993, том 208, No 7, 1993, с. 9-14.
[71] Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения: общий подход к теории систем счисления и компьютерной арифметике. Управляющие и вычислительные системы, № 4-5, 1994, с. 10-31.
[72] Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998, 393-399.
[73] Stakhov A.P. Matrix Arithmetic based on Fibonacci Matrices. Компьютерная оптика, №21, 2001, с. 12-22.
[74] Stakhov A.P. Ternary Mirror-Symmetrical Arithmetic and its Applications to Digital Signal Processing. Компьютерная оптика, №21, 2001, с. 23-43.
[75] Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
[76] Stakhov AP. Brousentsov’s ternary principle, Bergman’s number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal, 2002, Vol. 45, No. 2, 221-236.
[77] Стахов А.П. Обобщенные золотые пропорции и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал. 2004, том 56, №. 8, с. 1143-1150.
[78] Stakhov A., Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, Volume 23, Issue 2, 379-389.

[79] Stakhov A.P. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, Volume 26, Issue 2, 263-289.

[80] Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, Volume 26, Issue 3, 677-684.

[81] Stakhov A.P. Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals 2006, Volume 27, Issue 5, 1124-1146.

[82] Stakhov A., Rozin B. The “golden” algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2006, Volume 27, Issue 5, 1415-1421.

[84] Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 27, Issue 5, 1162-1177.

[85] Stakhov A., Rozin B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 28, Issue 4, 1014-1025.

[86] Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
[87] Stakhov A. The "golden" matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.

[88] Stakhov AP. The generalized golden proportions, a new theory of real numbers, and ternary mirror-symmetrical arithmetic. Chaos, Solitons & Fractals (in Press).

[89] Stakhov AP, Rozin BN. The "golden" hyperbolic models of Universe. Chaos, Solitons & Fractals, (In Press).

[90] Стахов А.П. Золоое сечение, священная геометрия и математика гармонии. Метафизика. Век XXI. Москва: БИНОМ, 2006, с. 174-215.
[91] Stakhov A.P. Gazale formulas, a new class of the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions, and the improved method of the "golden" cryptography. Москва: Академия Тринитаризма, № 77-6567, публикация 14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
[92] Stakhov A.P., Rozin B.N. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of nature. Visual Mathematics, Volume 8, No 3, 2006
http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/stakhov/index.html
[93] Bergman G. A number system with an irrational base. Mathematics Magazine, 1957, 31, 98-110.
[94] Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кода и золотое сечение. Метафизика. Век XXI. Москва: БИНОМ, 2006, с. 216-250.
[95] Kappraff J. and Adamson G.W. The Relationship of the Cotangent Function to Special Relativity Theory, Silver Means, p-cycles, and Chaos Theory. FORMA, Vol 18, No. 4, 2004, 249-262.
[96] Kappraff J., Adamson G.W. Generalized Binet Formulas, Lucas Polynomials, and Cyclic Constants. Forma. Special Issue "Golden Mean", Volume 19, Number 4. Tokyo: Publishing House "SCIPRESS", 2004, 355-366.
[97] Татаренко А.А. T_m –принцип как Универсальный Закон Гармонии. Москва: Академия Тринитаризма. Электронная публикация № 77-6567, 10 ноября, 2005
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm
[98] El Naschie M.S. On dimensions of Cantor set related systems. Chaos, Solitons & Fractals 1993; 3: 675-685.
[99] El Nashie M.S. Quantum mechanics and the possibility of a Cantorian space-time. Chaos, Solitons & Fractals 1992; 1: 485-487.
[100] El Nashie M.S. Is Quantum Space a Random Cantor Set with a Golden Mean Dimension at the Core? Chaos, Solitons & Fractals, 1994; 4(2); 177-179.
[101] El Naschie M.S. Fredholm Operators and the Wave-Particle Duality in Cantorian Space. Chaos, Solitons & Fractals1998; 9(6): 975-978.
[102] El Naschie M.S. On a class of general theories for high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals 2002; 14: 649-668.
[103] El Naschie M.S. Complex vacuum fluctuation an a chaotic "limit" set of any Kleinian group transformation and the mass spectrum of high energy particle physics via spontaneous self-organization. Chaos, Solitons & Fractals, 2003; 17:631-638.
[104] El Nashie MS. On two new fuzzy Kahler manifolds, Klein modular space and "t Hooft holographic principles. Chaos, Solitons & Fractals, 2006; 29: 876-881.
[105] El Naschie M.S. From symmetry to particles. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 427-430.
[106] El Naschie M.S. SU(5) grand unification in a grand form. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 370-374.
[107] El Naschie M.S. Estimation the experimental value of the electromagnetic fine structure constant α_0 = 1/137.036 using the Leech lattice in conjunction with the monster group and Spher's kissing

number in 24 dimensions. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 383-387.
[108] El Naschie M.S. On the topologic ground state of *E*-infinity spacetime and super string connection. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 468-470.
[109] El Naschie M.S. Feigenbaum scenario for turbulence and Cantorian E-infinity theory of high energy particle physics **.** Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 32 (3), 911-915.
[110] El Naschie M.S. Hilbert space, Poincaré dodecahedron and golden mean transfiniteness. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31 (4), 787-793.
[111] Agop M. and Murgulet C. El Naschie's $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\infty)}$ space–time and scale relativity theory in the topological dimension $\boldsymbol{D} = 4$. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 32 (3), 1231-1240.
[112] Marek-Crnjac L. On the mass spectrum of the elementary particles of the standard model using El Naschie's golden field theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 15(4), 611-618.
[113] Marek-Crnjac L. The mass spectrum of high energy elementary particles via El Naschie's $\mathcal{E}^{(\infty)}$ golden mean nested oscillators, the Dunkerly–Southwell eigenvalue theorems and KAM. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 18 (1), 125-133.
[114] Marek-Crnjac L. The golden mean in the topology of four-manifolds, in conformal field theory, in the mathematical probability theory and in Cantorian space-time. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 28 (5), 1113-1118.
[115] Iovane Gerardo and Giordano Paola. Wavelets and multiresolution analysis: Nature of $\boldsymbol{\varepsilon}^{(\infty)}$ Cantorian space–time. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 32 (3), 896-910.
[116] Ji-Huan He. Application of ***E***-infinity theory to biology**.** Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 28 (2), 285-289
[117] Ji-Huan He. ***E***-Infinity theory and the Higgs field. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31(4), 782-786.
[118] Ji-Huan He**.** Application of ***E***-infinity theory to turbulence**.** Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 30 (2), 506-511.
[119] Dhurjati Prasad Datta. The golden mean, scale free extension of real number system, fuzzy sets and 1/***f*** spectrum in physics and biology. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 17 (4), 781-788.
[120] Dhurjati Prasad Datta. A new class of scale free solutions to linear ordinary differential equations and the universality of the golden mean $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.618033\ldots$ Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 17 (4), 621-630.
[121] Stan Cristina, Cristescu C.P. and Agop M. Golden mean relevance for chaos inhibition in a system of two coupled modified van der Pol oscillators. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31 (4), 1035-1040.
[122] Falcon S., Plaza A. On the *k*-Fibonacci numbers. Chaos, Solitons & Fractals, in press, doi: 10-1016/j.chaos.2006. 09.022.
[123] Falcon S., Plaza A. The *k*-Fibonacci sequence and the Pascal 2-Triangle. Chaos, Solitons & Fractals, in press, doi: 10-1016/j.chaos.2006. 10.022.
[124] Falcon S., Plaza A. The *k*-Fibonacci hyperbolic functions. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, doi: 10-1016/j.chaos.2007. 01.02.
[125] Косинов Н.В. Связь трех наиболее важнейших констант: постоянной тонкой структуры (α), числа (π) и золотого сечения (Φ) http://piramyd.express.ru/disput/kosinov/const3/text.htm
[126] Косинов Н.В. Константы гармонических последовательностей http://filosof.net/disput/kosinov/kgp.htm
[127] Косинов Н.В. Золотые инварианты гармонических последовательностей http://filosof.net/disput/kosinov/garm/text.htm
[128] Косинов Н.В. Золотая проопрция, золотые константы и золтые теоремы http://filosof.net/disput/kosinov/gold/text.htm
[129] Chernov, V.M., Pershina M.V. Fivonacci-Mersenne and Fibonacci-Fermat discrete transforms. The Journal "Boletin de Informatica". Special issue "The Golden Section: Theory and Applications",

No 9/10, 1999.
[130] Stankovic R.S., Stankovic M., Astola, J.T., Egizarian K. Fibonacci Decision Diagram, Tampere International Center for Signal Processing, 2000.
[131] Spears Colin Paul, Bicknell-Jonson Marjorie. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998, 377-391.
[132] Владимиров Ю.С. Метафизика. Москва: БИНОМ, 2002
[133] Стахов А.П., Слученкова А.А. Музей Гармонии и Золотого Сечения Web-site www.goldenmuseum.com , 2001.
[134] Stakhov A.P., Sluchenkova A.A. Museum of Harmony and the Golden Section: Mathematical connections in Nature, Science and Art. Vinnitsa, ITI, 2003.