А.П. Стахов, И.Г. Райлян

«Золотая» научная парадигма: этапы большого пути от Пифагора, Платона и Евклида до «Математики Гармонии»

Математика владеет не только истиной, но и высокой красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства.

Бертран Рассел

Оглавление

Предисловие

Как известно, термин *«парадигма»* происходит от греческого «paradeigma» — пример, образец и означает совокупность явных и неявных (и часто не осознаваемых) предпосылок, определяющих научные исследования и признанных на данном этапе развития науки. Это понятие, в современном смысле слова, введено американским физиком и историком науки **Томасом Куном** [1922-1996] в книге *«Структура научных революций»* (1962). Согласно Т. Куну, парадигма — это то, что объединяет членов научного сообщества и, наоборот, научное сообщество состоит из людей, признающих определенную парадигму. Как правило, парадигма фиксируется в учебниках, трудах ученых и на многие годы определяет круг проблем и методов их решения в той или иной области науки, научной школе. К парадигме Т. Кун относит, например, взгляды Аристотеля, ньютоновскую механику и т. п.

Одной из таких парадигм в современной науке является «золотая» парадигма древних греков. Это подтверждается огромным количеством современных научных открытий, основанных на Платоновых телах, золотом сечении, числах Фибоначчи. Что же такое «золотая» парадигма? Для ответа на этот вопрос обратимся к высказыванию гения российской науки, исследователя эстетики Античной Греции и эпохи Возрождения **Алексея Лосева** (1893 - 1988):

"С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - Золотого Сечения... Их (древних греков – А.С. и И.Р.) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

В этом высказывании **Алексей Лосев** в очень отчетливой форме сформулировал «золотую» парадигму античной космологии. В ее основе лежат важнейшии идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «*курьезный результат безудержной и дикой фантазии*». Прежде всего – это *пифагорейская идея о числовой гармонии мироздания* и *космология Платона,* основанная на *Платоновых телах*. Обратившись к геометрической структуре мироздания и арифметическим отношениям, выражающим гармонию, пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания является бессмертной.

Настоящая статья написана в развитие статей [1, 2]. Ее главная цель – осветить основные исторические этапы в развитии «золотой» парадигмы - от Пифагора, Платона и Евклида до «Математики Гармонии» - и показать, что в современной науке созданы все предпосылки для возрождения «золотой» парадигмы древних греков, внедрение которой в современную науку и образование может привести к «Золотой» Научной Революции, которая затронет основание всех наук и математическое образование и приведет к новым научным открытиям.

1. Древняя Греция

1.2. *«Золотая» парадигма в трудах Пифагора и Платона*

Основы «золотой» парадигмы были заложены в трудах Пифагора и пифагорейцев. Пифагор, достигший вершин герметической мудрости, озарил своими знаниями Древнюю Грецию и передал этот импульс последующим поколениям. Как подчеркивает Александр Волошинов [3], Космос для пифагорейцев – это гармоничное, пропорциональное строение мира. Согласно представлениям пифагорейцев, планеты располагаются на небесных сферах и совершают вместе с ними круговые вращения. Вследствие трения об эфир они издают звуки, которые соединяются в музыкальные созвучия. Это и есть – «мировая музыка» или «музыка сфер». Первое письменное изложение «музыки сфер» появилось в сочинении пифагорейца Филолая «О природе», датированным примерно 420 г. до н.э. Наиболее характерным для пифагорейского учения – это то, что гармония у них имеет *числовое выражение*, она органически связана с понятием числа. Пифагорейцы считали математические элементы "элементами всего сущего" и уподобляли все вещи числам. Аристотель в "Метафизике" отмечает именно эту особенность пифагорейского учения. *"Так называемые пифагорейцы, занявшись математическими науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их началами всех вещей... Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную [признали] гармонией и числом"*.

Особое внимание пифагорейцы уделяли *пентаграмме* - пятиконечной звезде, образованной диагоналями *правильного пятиугольника* или *пентагона*. Этот древний символ планеты Сириус, заимствованный Пифагором во время обучения в храмах Египта, означает, согласно положению герметизма, совершенного человека.

Пентаграмма вызывала восхищение у пифагорейцев и была их главным опознавательным знаком. В пентагоне и пентаграмме пифагорейцы обнаружили знаменитое *«золотое сечение»*, которое в те времена называлось *«делением отрезка в крайнем и среднем отношении»*.

Дальнейшее развитие пифагорейское учение о гармонии сфер получило в трудах Платона. Платон также развил оригинальное учение о строении материи. Это - знаменитое учение Платона о *четырех стихиях* - основных компонентах мира и их атомах, которые имеют форму *Платоновых тел*. Эта оригинальная мысль вытекала из всей философии Платона. Напомним, что, согласно Платону, существует два мира: *материальный* несовершенный мир вещей и *идеальный* совершенный мир идей. У Платона «идеальный мир» основан на математике. А.В. Волошинов подчеркивает [5]: *«Таким образом, Платон ясно сознавал значение математизации науки, и это именно тот путь, по которому пошло развитие науки в античности и по которому оно продолжает идти и сегодня. В наш век стремительной математизации и широчайшего применения компьютеров, когда стало возможным физический эксперимент заменить вычислительным и буквально «увидеть» на экране дисплея то или иное физическое явление, мысли*

Платона об идеальных (читай – математических) структурах и их воплощении в реальном мире обретают свое второе рождение».

1.2. *«Золотая» парадигма в «Началах» Евклида*

Идеи Пифагора и Платона о числовой гармонии мироздания были воплощены в *«Началах»* Евклида - величайшем математическом сочинении греческой науки. Согласно *гипотезе Прокла* [6], создание геометрической теории *Платоновых тел* стало главной целью Евклида при написании своих *Начал*. Для построения геометрической теории *Платоновых тел*, в частности, *додекаэдра*, Евклид ввел в рассмотрение Теорему II.11, в которой описал *задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении*, известную в современной науке как *золотое сечение.*

Впервые описание задачи о *«делении отрезка в крайнем и среднем отношении»* встречается в «Началах» Евклида и звучит следующим образом.

Предложение II. 11. *Данную прямую AD разделить на две неравные части AF и FD так, чтобы площадь квадрата, построенного на большем отрезке AF, равнялась бы площади прямоугольника, построенного на отрезке AD и меньшем отрезке FD.*

Вникнем в суть этой задачи. Для этого изобразим эту задачу геометрически (Рис. 1).

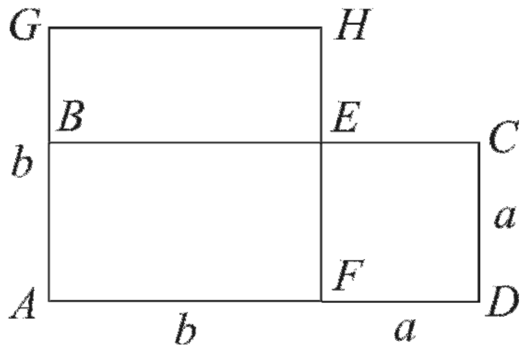


Рисунок 1. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении

Таким образом, согласно Предложению II. 11 площадь квадрата *AGHF* должна быть равна площади прямоугольника *ABCD.* Если обозначить длину большего отрезка *AF* через *b* (она равна стороне квадрата *AGHE*), а сторону меньшего отрезка через *a* (она равна вертикальной стороне прямоугольника *ABCD*), то условие Предложения II. 11 можно записать в виде:

$$b^2 = a \times (a+b) \tag{1}$$

Если теперь разделить оба члена выражения (1) вначале на *a*, а затем на *b*, то мы получим следующую пропорцию:

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} \tag{2}$$

Пропорция (2) имеет следующую геометрическую трактовку: разделить заданный отрезок на две неравные части в такой пропорции, чтобы отношение большей части к меньшей равнялась бы отношению исходного отрезка к большей части. Это и есть определение «золотого сечения», используемое в современной науке.

Обозначив искомое отношение $\frac{b}{a}$ через x и представив пропорцию (2) в виде:

$$x=\frac{b}{a}=1+\frac{1}{\frac{b}{a}}=1+\frac{1}{x},$$

мы приходим к следующему алгебраическому уравнению:

$$x^2=x+1. \tag{3}$$

Положительный корень этого уравнения

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{4}$$

и есть то знаменитое иррациональное число, которое имеет в современной науке много замечательных названий: *золотое число, золотое сечение, золотая пропорция, божественная пропорция*.

Древнейшие сведения о «золотой пропорции» относятся ко времени расцвета античной культуры. Большинство исследователей сходятся во мнении, что Пифагор и Платон знали о золотом сечении, не говоря уже о Евклиде, который описал эту задачу в своих «Началах». «Золотая пропорция» отвечает гармоническому соединению, широко используемому в античной скульптуре и архитектуре. К математическому выражению (4), задающему «золотую пропорцию», в наибольшей степени подходит определение «формула красоты». Эта пропорция является как бы вершиной эстетических исследований, неким символом гармонии природы. Эта пропорция присутствует не только в искусстве, но она определяет закономерности развития многих организмов, ее присутствие отмечают почвоведы, химики, геологи, астрономы.

Как известно, «закон золотого сечения» широко использовался древними греками в их искусстве, в частности, в архитектурных памятниках (*Парфенон*), в скульптурах Фидия, Поликлета, Мирона, Праксителя.

Таким образом, в науке и искусстве Древней Греции «закон золотого сечения» был возведен в ранг главного научного принципа, который охватывал весь Космос и всю науку и искусство в целом. В этом и состоит суть «золотой» парадигмы греческой культуры!

2. Эпоха Возрождения

2.1. *Книга «Divina Proportione» (Божественная пропорция) Луки Пачиоли*

В процессе дальнейшего развития науки отношение к «золотой» парадигме древних греков колебалось. Оно либо подвергалась резкой критике, либо вновь возводилась в ранг главного канона. Впервые после Древней Греции всплеск интереса к этой удивительной парадигме наблюдается в эпоху Возрождения. Идея гармонии оказалась в ряду тех концептуальных построений античной культуры, к которым церковь отнеслась с большой заинтересованностью. Согласно христианской доктрине Вселенная была творением Бога и беспрекословно подчинялась его воле. И христианский Бог при сотворении мира руководствовался математическими принципами. Эта католическая доктрина в науке и искусстве Возрождения приобрела форму поиска математического плана, по которому Бог создал Вселенную.

По мнению современного американского историка математики **Мориса Клайна** [7], именно тесное слияние религиозной доктрины о Боге как творце Вселенной и античной идеи о числовой гармонии Мироздания, стало одной из важнейших причин огромного всплеска культуры в эпоху Возрождения. Наиболее ярко главная цель науки эпохи Возрождения изложена в следующем высказывании знаменитого астронома этой эпохи **Иоганна Кеплера**:

«Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики».

Как известно, именно в эпоху итальянского Возрождения появляется первая в истории науки книга, посвященная исключительно *золотому сечению*. Речь идет о книге с необычным названием *Divina Proportione*, написанной знаменитым итальянским математиком и ученым монахом, профессором многих итальянских университетов **Лукой Пачиоли**. Книга написана под непосредственным влиянием **Леонардо да Винчи**, который был художником-иллюстратором этой замечательной книги. Эта книга была одним из первых прекрасных образцов книгопечатного искусства эпохи Возрождения и оказала огромное влияние на современников. Появление этой книги в этот период не является случайным. Она отражала основную идею этой эпохи - возрождение интереса к античному искусству, науке и философии, в частности, к «*Пифагорейской доктрине о числовой гармонии Мироздания*» и «*Космологии Платона*», основанной на «*Платоновых телах*» и «*Золотом Сечении*», которое, согласно Лосеву, является главной гармонической пропорцией античной космологии. Не только **Лука Пачиоли** и **Леонардо да Винчи**, но и многие их современники восхищались «золотым сечением». Известно, что идею своей книги Пачиоли позаимствовал у своего учителя - художника **Пьеро делла Франческо** (ок. 1415/1420—1492), слава которого гремела по всей Италии. Пьеро делла Франческо был художником и математиком, но только вторая ипостась учителя нашла отзвук в сердце ученика. Юный Лука, математик от Бога, был влюблен в мир чисел, число представлялось ему некоторым универсальным ключом, одновременно открывающим доступ к истине и красоте. Вторым великим человеком, встретившимся на жизненном пути Луки Пачиоли, был **Леон Баттиста Альберти** (1404 -1472)– архитектор, ученый, писатель, музыкант. Глубоко западут в сознание Пачиоли слова Альберти:

«Красота есть некое согласие и созвучие частей в том, частями чего они являются, - отвечающие строгому числу, ограничению и размещению, которых требует гармония, то есть абсолютное и первичное начало природы».

Влюбленный в мир чисел, Пачиоли повторит за Пифагором мысль о том, что число лежит в основе вселенной.

Когда в 1496 году в Милане – крупнейшем городе и государстве Италии - в университете открыли кафедру математики, занять ее был приглашен Лука Пачиоли, на то время уже известный математик, автор книги *«Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях»* (1494). В то время Милан был центром науки и искусства, в нем жили и творили выдающиеся ученые и художники – и одним из них был **Леонардо да Винчи**, который стал третьим великим человеком, встретившимся на жизненном пути **Луки Пачиоли**. Они подружились и Пачиоли начал обучать Леонардо геометрии. И именно по рекомендации Леонардода Винчи и под его непосредственным влиянием Пачиоли начинает писать свою вторую великую книгу *Divine Proportione* (Божественная пропорция).

Не только наука, но и все искусство эпохи Возрождения пронизано «золотым сечением». Примером эталонной модели гармонически развитого человеческого тела является знаменитая статуя *Давида* **Микеланджело.** И подобно *Дорифору* **Поликлета**, который в античную эпоху стал «Каноном» красоты мужского тела, *Давид* **Микеланджело** можно считать «Каноном» эпохи Возрождения. Сравнение статуи *Давида* со статуями *Дорифора* и *Венеры Милосской* не оставляет никаких сомнений в том, что все пропорции *Давида* основаны на золотом сечении! Художники Возрождения (Микеланджело, Рафаэль, Леонардо да Винчи, Пьеро делла Франческа) широко используют пропорции золотого сечения в своих картинах.

2.2. *«Золотая» парадигма в трудах Кеплера*

На завершающем этапе эпохи Возрождения огромный вклад в развитие «золотой» парадигмы внес **Иоганн Кеплер**. Он использовал *Платоновы тела* в своей удивительной модели Солнечной системы, получившей название *«Космической чаши»*. С особым пиететом он относился к задаче о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение»). Широко известно следующее высказывание Иоганна Кеплера: *«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем»*. Таким образом, в этом высказывании Кеплер ставит на один уровень два знаменитых математических открытия – *теорему Пифагора* и *золотое сечение.*

2.3. *Отношение к «золотому сечению» в философии 17-го и 18-го веков*

К сожалению, после Кеплера «золотая» парадигма древних греков была предана забвению, и около 200 лет о ней никто не вспоминал. Чем это можно объяснить? Для ответа на этот вопрос проведем анализ науки 17-18-го веков. Как известно, для науки 17-го века характерным является возникновение экспериментально-математического естествознания, которое как раз в 17-м веке переживает период своего становления: не случайно этот век обычно называют эпохой научной революции. Для философии Нового времени основным направлением становится *эмпиризм* - направление в теории познания, которое признает чувственный опыт как единственный источник знаний. Наиболее яркими представителями *эмпиризма* являются английские философы **Френсис Бэкон** (1561-1626), **Томас Гоббс** (1588-1679) и **Джон Локк** (1632-1704). Представители эмпиризма были уверены в том, что цель научного познания состоит не в созерцании природы, как это было в Античности, и не в постижении Бога, согласно Средневековой традиции, а в принесении пользы и выгоды человечеству. В частности, Бэкон считал теологию прямым виновником разрыва единства между теоретической и практической деятельностью, между философией и естествознанием. Разрыв науки с теологией – вот главная задача, решению которой Бэкон посвятил свою философскую деятельность. Он считал, что только решительное освобождение научного познания от оков теологии сможет вернуть наукам их действительную силу, вдохнуть в них жизнь, разжечь огонь творческого воодушевления. Наука - средство, а не цель сама по себе. Человек же - властелин природы, таков лейтмотив философии Бекона. "Природа побеждается только подчинением ей, и то, что в созерцании представляется причиной, в действии является правилом". Иными словами, чтобы подчинить себе природу, человек должен изучить ее законы и научиться использовать свое знание в реальной практике. Именно Бэкону принадлежит знаменитый афоризм "ЗНАНИЕ - СИЛА!". **Томас Гоббс** и **Джон Локк** являются продолжателями идей Бэкона.

Ясно, что в философии **Фрэнсиса Бэкона, Томаса Гоббса** и **Джона Локка** не нашлось места «золотой» или, тем более, «божественной» пропорции, в которой Лука Пачиоли усматривает свойства Самого Бога. Эта понятие было исключено из философии эмпиризма как «теологическая концепция» вместе с «идеализмом» Платона.

3. 19-й век

3.1. *Люка и Бине*

В 19-м веке к *«золотому сечению»* и *Платоновым телам* вновь проявляется определенный интерес, прежде всего, в математике. У истоков этого интереса стояли два известных французских математика - **Франсуа Эдуард Анатоль Люка** (1842 – 1891) и **Жак Филлип Мари Бине** (1786-1856). Главным математическим достижением Люка являются его исследования в области «теории чисел Фибоначчи». Он первым ввел в рассмотрение само название «числа Фибоначчи». Кроме того, он ввел так называемые *«обобщенные числа Фибоначчи»*, которые формируются по тем же правилам, что и числа Фибоначчи, но при других начальных условиях. Он показал, что среди «обобщенных чисел Фибоначчи», кроме чисел Фибоначчи, особую роль играет еще одна числовая последовательность, названная *числами Люка* L_n: 1,3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, ...

Бине вошел в «теорию чисел Фибоначчи» как автор знаменитых математических формул, известных в математике под названием *формул Бине*:

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{5}$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k \end{cases} \tag{6}$$

Эти формулы связывают числа Фибоначчи и Люка с золотой пропорцией. Если учесть, что эти формулы связывают целые числа F_n и L_n с иррациональным числом $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, то нельзя не восхититься математической красотой этих формул, которые, несомненно, принадлежат к разряду выдающихся математических формул, когда-либо полученных в математике. И согласно Дираку, эти формулы должны были проявить себя в математическом естествознании, что и произошло во второй половине 20-го века, когда вновь возник интерес к «золотой» парадигме древних греков.

3.2. *Феликс Клейн*

Знаменитый немецкий математик 19-го века и 20-го веков **Феликс Клейн** (1849—1925) прославился многими математическими открытиями. В 1884 г. он опубликовал книгу «*Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*» [8], посвященную геометрической теории икосаэдра и ее приложениям в математике. Согласно Клейну, ткань математики широко и свободно разбегается листами отдельных теорий. Но есть объекты, в которых сходятся несколько листов, - своеобразные точки ветвления. Их геометрия связывает листы и позволяет охватить общематематический смысл разных теорий. Именно таким математическим объектом, по мнению Клейна, является *икосаэдр*. Клейн трактует икосаэдр как математический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий: *геометрия, теория Галуа, теория групп, теория инвариантов и дифференциальные уравнения*. Таким образом, главная идея Клейна чрезвычайно проста: «*каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра*».

Заметим, что исследования Люка, Бине и Клейна не были связаны с какими-либо приложениями в теоретическом естествознании. Но, тем не менее, они сыграли большую роль в развитии этого направления в 20-м веке. Во-первых, исследования Люка и Бине привлекли внимание научного сообщества к числам Фибоначчи и золотому сечению и стали той стартовой площадкой, с которой во второй половине 20-го века начала свое победное шествие Фибоначчи Ассоциация, организованная группой американских математиков в 1963 г. Как остроумно заметил один из математиков, после Люка и Бине работы по числам Фибоначчи «начали размножаться как фибоначчиевые кролики». С другой стороны, исследования Клейна, посвященные икосаэдру, сыграли большую прогностическую роль в будущем развитии науки, так как более чем 100 лет назад Клейн сумел предсказать пояаление Платоновых тел, в частности, икосаэдра, в новых научных открытия, в частности, в *квазикристаллах* и *фуллеренах*.

3.3. *Адольф Цейзинг*

В 19-м веке мы встречаем еще одного исследователя, который пытается возродить «золотую» парадигму древних греков. Речь идет об исследованиях немецкого поэта **Адольфа Цейзинга** (род. в 1810 г.). В 1854 г. он опубликовал книгу *«Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers aus einem bisher unerkannt gebliebenen, die ganze Natur und Kunst durchdringenden morphologischen Grundgesetze entwickelt»*. Это сочинение упрочило за Цейзингом место в истории эстетических теорий. Основная мысль сочинения — развитие закона пропорциональности деления. Ежели целое приходится делить на неравные по объёму и значению части, то эстетическое впечатление получится в том случае, когда меньшая часть деления относится к большей, как большая относится к целому. Этот закон, по мнению Цейзинга, был известен в древности под именем «золотого сечения». Цейзинг иллюстрирует его на примерах, заимствованных из рассмотрения частей человеческого тела и частей растения. Исходя из того положения, что пропорциональность есть отношение двух неравных частей между собой и к целому в наиболее совершенном их сочетании, Цейзинг формулирует закон пропорциональности следующим образом: *"Деление целого на неравные части пропорционально, когда отношение частей целого между собой то же, что и отношение их к целому, т.е. то отношение, которое дает золотое сечение"*. Пытаясь доказать, что все мироздание подчиняется этому закону, Цейзинг старается проследить его как в органическом, так и в неорганическом мире. В подтверждение этого он приводит данные об отношениях взаимных расстояний между собой небесных светил, отвечающих золотому сечению, устанавливает такие же отношения в строении человеческой фигуры, в конфигурации минералов, растений, в звуковых аккордах музыки в архитектурных произведениях.

4. Первая половина 20-го века

4.1. *Этюды Шопена в освещении «золотого сечения»*

В первой половине 20-го века интерес к «золотому сечению» поддерживается, прежде всего, в эстетической и искусствоведческой среде. Здесь в первую очередь следует упомянуть об исследованиях русского музыковеда **Л. Сабанеева.** В статье *«Этюды Шопена в освещении Золотого Сечения»* (1925 г.) [9] он показывает, что отдельные временные интервалы музыкального произведения, соединяемые «кульминационным событием», как правило, находятся в отношении золотого сечения. Сабанеев пишет:

«Все такие события инстинктом автора приурочиваются к таким пунктам длины целого, что они собою делят временные протяжения на отдельные части, находящиеся в отношениях «Золотого Сечения». Как показывают наблюдения, приурочение подобных эстетических «вех» к пунктам деления общего или частичного протяжения в «золотом» отношении выполняется нередко с огромной точностью, что тем более удивительно, что при отсутствии у поэтов и у авторов музыки всякого знания о подобных вещах, это все является исключительно следствием внутреннего чувства стройности».

По наблюдениям Сабанеева, в музыкальных произведениях различных композиторов обычно констатируется не одно золотое сечение, сопряженное с происходящим возле него «эстетическим событием», а целая серия подобных сечений. Каждое такое сечение отражает свое музыкальное событие, качественный скачок в развитии музыкальной темы. В изученных им 1770 сочинениях 42 композиторов наблюдалось 3275 золотых сечений; количество произведений, в которых наблюдалось хотя бы одно Золотое Сечение, составило 1338. Наибольшее количество произведений, в которых имеется Золотое Сечение, у Аренского (95%), Бетховена (97%), Гайдна (97%), Моцарта (91%), Скрябина (90%), Шопена (92%0, Шуберта (91%).

4.2. *Эстетика пропорций в природе и искусстве*

В первой половине 20-го века большой интерес в эстетической литературе вызвала книга *«Эстетика пропорций в природе и искусстве»*, написанная французским исследователем **Матилой Гика**. На русском языке книга опубликована в 1936 г. [10]. В этой книге Гика исследует свойства «божественной пропорции» и основанных на ней геометрических фигур. В качестве эпиграфа к главе 1 «О пропорции» взята цитата из «Тимея» Платона: *«Но невозможно сочетать две вещи без наличия третьей: между ними необходим связующий элемент. Нет лучше связи, чем та, которая образует из самой себя и связуемых ею вещей одно и неделимое целое. И такова природа пропорции ...»*. По мнению Гика, в этом высказывании Платон четко указывает на «золотую пропорцию», хотя и не использует это название. Он обращает внимание на то, что эта пропорция названа Пачиоли «божественной». Кеплер, первым упоминающий о значении этой пропорции в ботанике, говорит о ней, как о «бесценном сокровище, как об одном из двух сокровищ геометрии» и именует ее «Sectio divina" (божественное сечение). Леонардо да Винчи именует ее «Sectio aurea", откуда и происходит название «золотое сечение» или «золотое число». Гика выводит ряд замечательных тождеств для «золотой пропорции» и приводит примеры использования «золотой пропорции» в работах Цейзинга, Кука и Тимердинга. В книге также обсуждается связь «золотой пропорции» с числами Фибоначчи.

4.3. *Пропорциональность в архитектуре*

В теории архитектуры хорошо известна книга *"Пропорциональность в архитектуре"*, опубликованная русским архитектором проф. Г.Д. Гриммом в 1935 г. [11]. Цель книги сформулирована во "Введении" следующим образом: *"Ввиду исключительного значения Золотого Сечения в смысле такого пропорционального деления, которое устанавливает постоянную связь между целым и его частями, и дает постоянное между ними соотношение, недостигаемое никаким другим делением, схема, основанная на нем, выдвигается как нормативная на первое место и принята нами в дальнейшем как при проверке основ пропорциональности исторических памятников, так и современных сооружений... Считаясь с этим общим значением Золотого Сечения во всех проявлениях архитектурной мысли, теорию пропорциональности, основанную на делении целого на пропорциональные* *части, отвечающие членам геометрической прогрессии Золотого Сечения, следует признать основой архитектурной пропорциональности вообще"*. Хотя по поводу гармонических воззрений проф. Гримма не существует единого мнения, тем не менее, как сказано в предисловии редактора, *"сама попытка общей формулировки принципа "Золотого Сечения" как основы пропорциональности архитектурных стилей, проверенная на материале античной и европейской архитектуры, заслуживает внимания, чтобы быть опубликованной, тем более, что в книге дается исторический очерк развития теории пропорциональности, а также развернутое математическое положение принципа "Золотого Сечения"*.

4.4. *«Золотая» парадигма в трудах Павла Флоренского*

В 20-х годах прошлого века к «золотому сечению» обращается выдающийся русский ученый и богослов **Павел Флоренский** (1882 - 1937), которого называют «Леонардо да Винчи 20-го века». В этот период Флоренский пишет работу *«У водоразделов мысли»*. Третья глава этой книги посвящена «золотому сечению». Вот ее краткий набросок: *«Форма и организация (Понятие формы. Целое. Divina section. Золотое сечение. Целое во времени. Циклы развития. Signatura rerum. Формула формы)”)*. Эдуард Сороко в книге [4] обращает внимание на тот факт, что в этой работе Флоренского, *«а также в других работах заострено внимание на ряде моментов постановки проблемы развития систем, что в последующем на основе измерения количества информации, содержащейся в организации этих систем, и в связи с геометризацией их структурных моделей стало оформляться в самостоятельную ветвь знания»*. Эти идеи Флоренского, связанные с развитием систем на основе золотого сечения, по существу, можно рассматривать *«как попытку осветить золотое сечение в той его субстанциональной основе, которая обнаруживает себя не только в сериях экспериментальных наблюдений природы, но и на более глубоких уровнях ее познания, в условиях проникновения в диалектику движения, в самую сущность вещей»* [4]. Таким образом, мы можем констатировать, что в работах Флоренского впервые возрождается «золотая» парадигма древних греков применительно к естествознанию, а его представления о золотом сечении («проникновение в диалектику движения, в самую сущность вещей») стали прологом к новым современным открытиям в области квантовой физики, кристаллографии, химии, генетики, которые продемонстрировали фундаментальную роль «золотого сечения» в современном естествознании.

4.5. *Отношение к «золотому сечению» в теоретической физике в первой половине 20-го века*

Хотя в начале 20-го века теоретическая физика претерпела радикальные изменения в связи с созданием теории относительности Эйнштейна и квантовой физики, но «золотому сечению» не нашлось места в этих физических теориях. В этой связи весьма характерным является замечание, сделанное известным российским физиком **Юрием Владимировым**. В Предисловии редактора к книге «Метафизика. Век XXI» [12] он пишет: *«Однако, как это ни парадоксально, в современной теоретической физике «золотая пропорция» никак не отражена.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно пролистать 10-томник теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Назрело время заполнить этот пробел в физике ...».

5. Золотое сечение и числа Фибоначчи в современной математике

5.1. *Система счисления Бергмана*

Вторая половина 20-го века характеризуется всплеском интереса к «золотому сечению» и числам Фибоначчи, как в математике, так и в теоретическом естествознании. Но началось все с математики. В 1957 г. 12-летний американский математик **Джордж Бергман** сделал совершенно неожиданное открытие в области теории чисел. В статье [13], он предложил необычный способ позиционного представления чисел, который он назвал «системой счисления с иррациональным основанием»:

$$A=\sum_i a_i \Phi^i, \tag{7}$$

где A – действительное число, a_i – двоичная цифра {0,1} i-го разряда, i=0,±1,±2,±3,…, Φ^i - вес i-го разряда, $\Phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$ (золотая пропорция) - основание системы счисления (7).

Основная отличительная особенность «системы Бергмана» состояла в том, что ее основанием является «золотая пропорция» (4) то есть, то число, которое широко использует Природа в своих созданиях. «Система Бергмана» представляет собой принципиально новую систему счисления, которая переворачивает наши представления о позиционных системах счисления, более того, исторически сложившееся соотношение между рациональными и иррациональными числами. До открытия Бергмана считалось, что основанием позиционной системы счисления может быть только целое число (10 – для десятичной системы, 2 – для двоичной, 60 – для Вавилонской 60-ричной системы). В «системе Бергмана» основанием системы, то есть, началом исчисления является иррациональное число $\Phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, с помощью которого можно представить все действительные числа, включая натуральные и рациональные. То есть, с открытием Бергмана число «золотая пропорция» приобретает как бы главенствующую роль в математике, поскольку все остальные действительные числа через «формулу Бергмана» сводятся к «золотой пропорции». Именно поэтому мы имеем полное право утверждать, что «система Бергмана» является одним из наиболее важных математических открытий в области систем счисления и теории чисел после открытия позиционного принципа представления чисел (Вавилон, 2000 г. до н.э.) и десятичной системы (Индия, 5-8 столетие нашей эры). К сожалению, «система Бергмана» в тот период не была замечена ни математиками, ни инженерами и только спустя 15-20 лет после открытия Бергмана интерес к этой удивительной системе счисления появляется в компьютерной науке благодаря, прежде всего, исследованиям **Алексея Стахова** [26].

5.2. ***Николай Воробьев и Вернер Хоггатт. Фибоначчи Ассоциация***

Огромное влияние на развитие «теории чисел Фибоначчи» во второй половине 20-го века оказали работы двух выдающихся математиков, которые первыми «почувствовали» приближение эры «глобальной фибоначчизации» современной науки. Прежде всего, речь идет о брошюре советского математика **Николая Воробьева** *«Числа Фибоначчи»* [14], которая впервые была опубликована в 1961 г. и затем выдержала много изданий и переведена на многие языки мира. Еще одной важной книгой в этой области является книга американского математика **Вернера Хоггата (Hoggat V.E. Jr.)** *Fibonacci and Lucas Numbers* [15], опубликованная в 1969 г. Другими математическими книгами в этой области, опубликованными во второй половине 20-го века и в начале 21-го века, являются книги английского математика **Вайды (Vaida)** [16], канадского геометра **Коксетера (Coxeter)** [17], канадского физика **Дунлапа (Dunlap)** [18], канадского историка математика **Роджера Герц-Фишлера (Roger Herz-Fischler)** [19], аргентинского математика Веры Шпинадель **(Vera W. de Spinadel)** [20], французского математика и инженера **Мидхата Газале (Midhat Gazale)** [21], американского математика **Джея Каппрафа (Jay Kappraff)** [22], американского математика **Коши (Koshy)** [23], а также книги **Алексея Стахова** [24-31]. Этот перечень является достаточно убедительным свидетельством большого интереса к «золотой» парадигме в современной математике. Кроме того, список авторов показывает, что в современной науке проблема «золотого сечения» и чисел Фибоначчи приобрела интернациональный характер.

Важнейшим событием 20-го века в истории «теории чисел Фибоначчи» явилось создание в 1963 г. математической *Фибоначчи Ассоциации*, которая с 1963 г. начала издавать ежеквартальный математический журнал *The Fibonacci Quarterly*. Основателями Фибоначчи Ассоциации были два американских ученых: математик **Вернер Хоггат (Verner Emil Hoggatt)** (1921-1981) и ученый монах **Альфред Бруссау (Alfred Brousseau)** (1907-1988). Вернер Хоггат, вместе с Альфредом Бруссау, опубликовали в 1963 г. первый том *The Fibonacci Quarterly* и затем учредили Фибоначчи Ассоциацию.

5.3. ***Алгоритмическая теория измерения, р-числа Фибоначчи и золотые р-сечения***

Во второй половине 20-го века создается ряд оригинальных математических теорий, связанных с числами Фибоначчи и золотым сечением, и обнаруживаются их глубокие математические связи с другими разделами математики. В 1970 г. **Игорь Витенько** и **Алексей Стахов** разработали *теорию оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования* [32], которая в дальнейшем получила название *алгоритмической теории измерения* [24, 25]. Одним из неожиданных результатов этой теории являются *фибоначчиевые алгоритмы измерения*, основанные на *p-числах Фибоначчи* [24], которые при заданном p=0, 1, 2, 3, ... задаются рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1)+F_p(n-p-1) \quad \text{для} \quad n>p+1 \qquad (8)$$

при следующих начальных условиях:

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1. \tag{9}$$

Заметим, что формулы (8), (9) задают бесконечное количество новых рекуррентных числовых последовательностей, частными случаями которых являются *двоичные числа* (p=0) и *классические числа Фибоначчи* (p=1).

Важным математическим результатом в области «теории чисел Фибоначчи» явилось обнаружение связи чисел Фибоначчи с *треугольником Паскаля* и *биномиальными коэффициентами,* что было сделано несколькими математиками независимо друг от друга, в частности, **Пойя** и **Гарднером**. В книге [24] показано, что p-числа Фибоначчи также связаны с треугольником Паскаля и могут быть вычислены как «диагональные суммы треугольника Паскаля». В [24] выведена математическая формула, выражающая p-числа Фибоначчи (p=0, 1, 2, 3, ...) через биномиальные коэффициенты. Еще один результат, полученный в работе [24], - это обобщение задачи о золотом сечении и введение нового класса математических констант *золотых p-сечений,* которые являются положительными корнями следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} = x^p + 1. \tag{10}$$

Связь p-чисел Фибоначчи и золотых p-сечений с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами показывает, что эта математическая теория *p-чисел Фибоначчи* является частью комбинаторного анализа.

5.4. *Коды золотой пропорции и новые свойства натуральных чисел*

В книге [26] введен новый класс позиционных представлений, основанных на *золотых p-сечениях*:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i , \tag{11}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (11), i = 0, ±1, ±2, ±3, … , Φ_p - золотая p-пропорция, основание позиционного представления (11).

Эти системы счисления были названы *кодами золотой p-пропорции*. Коды золотой p-пропорции являются обобщением *системы Бергмана* (7), которая является их частным случаем для p=1. В статье [32] предложен новый подход к геометрическому определению числа, основанный на кодах золотой p-пропорции и описаны новые свойства натуральных чисел. Одно из них называется Z_p-свойство натуральных чисел. Его суть состоит в том, что если в коде золотой p-пропорции (11), представляющим некоторое натуральное число N, каждую степень золотой p-пропорции типа Φ_p^i (p=1, 2, 3, ...; $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$) заменить p-числом Фибоначчи $F_p(i)$, то возникающая при этом сумма тождественно равна 0 независимо от исходного натурального числа N. По существу статья [32] является началом «золотой» теории чисел, основанной на кодах золотой p-пропорции как новых способах позиционного представления действительных чисел.

5.5. *Гиперболические функции Фибоначчи и Люка*

Анализ формул Бине для чисел Фибоначчи и Люка (5) и (6), введенных Бине в 19-м веке, показал, что по своей математической структуре они подобны *гиперболическим функциям*, использованным Лобачевским в своей *гиперболической геометрии*. Это наблюдение лежит в основе нового класса гиперболических функций, введенных **Алексеем Стаховым** и **Иваном Ткаченко** в работе [34]. Эти функции были названы *гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*. В отличие от классических гиперболических функций, основанием которых является число e (основание натуральных логарифмов), основанием гиперболических функций Фибоначчи и Люка является «золотая пропорция». Теория этих функций была развита в работах **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [35, 36], которые ввели так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*:

Симметричные гиперболические синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^{x} - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \quad cFs(x) = \frac{\Phi^{x} + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{12}$$

Симметричные гиперболические синус и косинус Люка

$$sLs(x) = \Phi^{x} - \Phi^{-x}; \quad cLs(x) = \Phi^{x} + \Phi^{-x} \tag{13}$$

Основная особенность гиперболических функций Фибоначчи и Люка состоит в том, что они являются *огибающими функциями* для рядов Фибоначчи (F_n) и Люка (L_n), расширенных в сторону отрицательных значений индекса n, то есть, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. При этом каждому «дискретному» тождеству для чисел Фибоначчи и Люка соответствует некоторое «непрерывное» тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка и наоборот. Это означает, что все тождества для чисел Фибоначчи и Люка могут быть получены из соответствующих тождеств для гиперболических функций Фибоначчи и Люка, то есть, сама «теория чисел Фибоначчи» как бы «вырождается» и сводится к теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка имеют прямое отношение к теоретическому естествознанию. Как показано в работах украинского исследователя Олега Боднара [37], гиперболические функции Фибоначчи лежат в основе новой геометрической теории ботанического явления *филлотаксиса*, которое известно в науке еще со времен Кеплера.

5.6. *Матрицы Фибоначчи и «золотые» матрицы*

В последние десятилетия «теория чисел Фибоначчи» дополнилась теорией так называемой *Q-матрицы Фибоначчи* [15]. Это - простейшая квадратная матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

которая является «генерирующей» матрицей для чисел Фибоначчи. Если возвести Q-*матрицу* в n-ю степень, то возникает квадратная матрица, элементами которой являются числа Фибоначчи:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Детерминант этой матрицы совпадает со знаменитой *формулой Кассини* и равен $\det Q^n = (-1)^n$. Теория Q-*матрицы Фибоначчи* обобщена в работе [38], в которой введены Q_p-матрицы размером $(p+1)\times(p+1)$, где p – заданное неотрицательное целое число. В работе [38] показано, что Q_p-матрицы являются «генерирующими» матрицами для p-чисел Фибоначчи $F_p(n)$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$. При возведении Q_p-матрицы в n-ю степень возникает специальная квадратная матрица размером $(p+1)\times(p+1)$, элементами которой являются p-числа Фибоначчи $F_p(n)$. Особенность такой матрицы состоит в том, что ее детерминант задается очень простым выражением: $\det Q_p^n = (-1)^{pn}$. Теория Q_p-матриц, изложенная в [38], значительно расширяет объем фибоначчиевых исследований и позволяет получить *обобщенную формулу Кассини* для p-чисел Фибоначчи.

Заметим, что в работах [28, 39] Q- и Q_p-матрицы Фибоначчи были использованы для создания новой теории кодирования.

В работе [40] введены две необычные квадратные матрицы, названные *«золотыми» матрицами*:

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \quad Q_1(x) = \begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Эти матрицы являются функциями непрерывной переменной x и обладают необычными математическими свойствами. Их первая особенность состоит в том, что элементами матриц (16) являются симметричные гиперболические функции Фибоначчи (12), введенные в [35]. Вторая особенность состоит в том, что детерминанты этих матриц не зависят от значения переменной x и для любого x соответственно равны:

$$\det Q_0(x) = 1\ ; \qquad \det Q_1(x) = -1. \tag{17}$$

Заметим, что в работе [40] «золотые» матрицы использованы для создания нового метода криптографии – *«золотой» криптографии.*

5.7. ***Обобщение формул Бине и p-числа Люка – новый класс рекуррентных последовательностей***

В статье **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [41] *p*-числа Фибоначчи $F_p(n)$ удалось выразить в аналитической форме через корни $x_1, x_2, ..., x_{p+1}$ алгебраического уравнения $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$. Полученные формулы являются обобщением формул Бине для чисел Фибоначчи. В этой же статье введен новый класс рекуррентных последовательностей, названных *p-числами Люка* $L_p(n)$. Числа $L_p(n)$ могут быть заданы как в аналитический форме

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + ... + (x_{p+1})^n,$$

так и в рекуррентной форме:

$$L_p(n)= L_p(n-1)+L_p(n-p-1);\ \ L_p(0)=p+1,\ L_p(1)=L_p(2)=\ldots=L_p(p)=1.$$

Заметим, что при $p=1$ *p-числа Люка* $L_p(n)$ сводятся к классическим числам Люка. Таким образом, в работе [41] введен новый класс рекуррентных числовых последовательностей, количество которых бесконечно, так как каждое целое число $p \geq 0$ порождает свой ряд *p*-чисел Люка $L_p(n)$.

5.8. ***«Золотые» алгебраические уравнения высоких степеней***

«Золотые» алгебраические уравнения типа $x^2 - x - 1 = 0$ и $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ допускают следующее расширение на область алгебраических уравнений более высоких степеней. Как показано в работе **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [42], уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ порождает следующий класс «золотых» алгебраических уравнений степени больше 2:

$$x^n - F_n x^2 + F_{n-2} = 0;\quad x^n - F_n x - F_{n-1} = 0,$$

где F_n, F_{n-1}, F_{n-2} - числа Фибоначчи.

Заметим, что в работе [42] из уравнения золотой *p*-пропорции типа $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ выведены уравнения золотой *p*-пропорции степени больше, чем $p+1$.

Основная особенность всех этих алгебраических уравнений состоит в том, что все они имеют общий корень - «золотую пропорцию» или «золотую *p*-пропорцию». Например, при $n=4$ «золотое» алгебраическое уравнение типа $x^n - F_n x - F_{n-1} = 0$ принимают вид: $x^4 - 3x - 2 = 0$. Анализ этого «золотого» уравнения приводит нас к неожиданному результату. Оказывается, что это уравнение описывает энергетическое состояние молекулы бутадиена – ценного химического вещества, которое используется при производстве каучука. Известный американский физик, Лауреат Нобелевской Премии **Ричард Фейнман** выразил свое восхищение по поводу этого уравнения в следующих словах: *«Какие чудеса существуют в математике! Согласно моей теории золотая пропорция древних греков дает минимальное энергетическое состояние молекулы бутадиена»*.

Это замечание Фейнмана сразу же повышает интерес к уравнениям золотой пропорции высших степеней, которые, возможно, описывают энергетические состояния молекул других физических веществ. Эта идея может привести к новым научным открытиям в области химии. Вполне возможно, что энергетические состояния не только бутадиена, но и других химических веществ описываются алгебраическими уравнениями золотой пропорции или золотой p-пропорции. Это может привести к доказательству того факта, что «золотая пропорция» и «золотые p-пропорции» значительно более широко распространены в природе, чем это считалось ранее.

5.9. *Металлические пропорции и формулы Газале*

В конце 20-го века и начале 21-го века сразу 4 исследователя - аргентинский математик **Вера Шпинадель** [20], французский математик и инженер **Мидхат Газале** [20], американский математик **Джей Каппраф** [22] и российский инженер **Александр Татаренко** [43] – независимо друг от друга пришли к новому классу математических констант, названных Верой Шпинадель *металлическими пропорциями*:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}, \tag{18}$$

где $\lambda > 0$ - заданное действительное число. Формула (18) задает бесконечное количество новых математических констант, так каждое действительное число $\lambda > 0$ задает свою константу. Заметим, что при $\lambda = 1$ «металлическая пропорция» (18) сводится к классической «золотой пропорции» (4). «Металлические пропорции» или «золотые λ-пропорции» обладают рядом замечательных свойств. Одним из таких свойств являются *«формулы Газале»* для λ-чисел Фибоначчи и λ-чисел Люка. Эти формулы выведены в книге **Мидхата Газале** [21] и статье **Алексея Стахова** [43]:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\ ; \qquad L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n} \tag{19}$$

Заметим, что при p=1 «формулы Газале» (19) сводятся к «формулам Бине». Заметим, что при $\lambda = 1,2,3,...$ числа $F_\lambda(n)$ и $L_\lambda(n)$ являются целыми. Это означает, что формулы (19) связывают целые числа $F_\lambda(n)$ и $L_\lambda(n)$ с иррациональными числами типа Φ_λ (18). Нельзя не восхищаться математической красотой этих формул, которые, несомненно, принадлежат к разряду выдающихся математических формул, когда-либо полученных в математике. И согласно Дираку, эти формулы должны были проявить себя в современной науке, что и произошло в 21-м веке, когда на их основе была разработана так называемая *«золотая» фибоначчиевая гониометрия*, которая привела к решению *4-й Проблемы Гильберта* [44-46].

5.10. *«Золотая» фибоначчиевая гониометрия и решение 4-й проблемы Гильберта*

Формулы Газале (19) являются исходными для введения нового класса гиперболических функций – *гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка* [44]. Рассмотрим эти функции.

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \qquad cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}. \tag{20}$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}, \qquad cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}, \tag{21}$$

где x – непрерывная переменная, $\lambda>0$ - заданное положительное действительное число, Φ_λ - «золотая λ-пропорция», задаваемая (18).

Важно подчеркнуть, что формулы (20) и (21) задают бесконечное множество различных гиперболических λ-функций, поскольку каждое число $\lambda>0$ генерирует свой собственный вариант гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка типа (20) и (21).

Рассмотрим характерные случаи гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка (20) и (21), соответствующих различным значениям λ. Для случая $\lambda=1$ *золотая пропорция* (4) является основанием гиперболических 1-функций Фибоначчи и Люка, которые для этого случая совпадают с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (12) и (13). В дальнейшем мы будем называть функции (12) и (13) *«золотыми» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка.*

Для случая $\lambda=2$ *серебряная пропорция* $\Phi_2=1+\sqrt{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть *«серебряными» гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка*:

$$sF_2(x)=\frac{\Phi_2^x-\Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}}, \qquad cF_2(x)=\frac{\Phi_2^x+\Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} \tag{22}$$

$$sL_2(x)=\Phi_2^x-\Phi_2^{-x}, \qquad cL_2(x)=\Phi_2^x+\Phi_2^{-x}. \tag{23}$$

Таким образом, *гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка,* введенные в [44], по существу представляют собой общую теорию гиперболических функций, основанных на «металлических пропорциях» (18). Эта общая теория была названа в [45, 46], *«золотой» фибоначчиевой гониометрией.*

Заметим, что в работах [45, 46] **Алексей Стахов** и **Самуил Арансон**, основываясь на *«золотой» фибоначчиевой гониометрии* [44], существенно продвинулись в решении одной из фундаментальных математических задач, сформулированных **Давидом Гильбертом** еще в 1900 г. Речь идет о решении **4-й Проблемы Гильберта,** касающейся гиперболической геометрии.

5.11. *Гипотеза Прокла – новый взгляд на «Начала» Евклида*

В статье [7] **Алексей Стахов** развил новый взгляд на «Начала» Евклида, основанный на так называемой *«гипотезе Прокла»*. Суть гипотезы состоит в том, что главной целью, которую ставил Евклид при написании своих «Начал», была разработка полной геометрической теории *Платоновых тел*, которые в космологии Платона выражали гармонию мироздания. Этот подход естественным образом водит «идею гармонии» в математику и математическое образование и переворачивает наши взгляды на историю математики на этапе ее зарождения

Таким образом, завершая этот раздел, мы должны констатировать, что «золотая» парадигма древних греков применительно к современной математике не только значительно расширила область фибоначчиевых исследований (*p*-числа Фибоначчи, золотые *p*-сечения, металлические пропорции, «золотые» алгебраические уравнения высоких степеней, гиперболические функции Фибоначчи и Люка, «золотая» фибоначчиевая гониометрия и др.), но и поставила ряд фундаментальных проблем, касающихся основания математики и ее истории на этапе зарождения (*«гипотеза Прокла, «4-я Проблема Гильберта»* и др.).

6. «Золотая» информационная технология

6.1. *Кризис «Неймановских принципов»*

Рассуждая об истоках современных компьютеров, мы всегда вспоминаем о так называемых *Неймановских принципах,* названных так в честь выдающегося американского математика и физика Джона фон Неймана. Эти принципы конструирования электронных компьютеров определили развитие компьютерной техники на многие десятилетия вперед. Одним из главных в перечне *Неймановских принципов* считается следующий: *машины на электронных элементах должны работать не в десятичной, а в двоичной системе счисления.* Основными преимуществами *двоичной системы* являются следующие: *двухпозиционный характер работы электронных элементов, высокая экономичность двоичной системы и простота выполнения арифметических операций с двоичными числами.*

К сожалению, этот важнейший принцип – использование двоичной системы как основы современных компьютеров – таит в себе одну «ловушку», в которую попала вся компьютерная техника и основанная на ней информационная технология. Дело в том, что двоичная система обладает **«нулевой избыточностью».** Что это означает и к чему это приводит? Это означает, что в классической двоичной системе отсутствует механизм обнаружения ошибок в процессоре и компьютере, которые неизбежно (с большей или меньшей вероятностью) могут возникнуть под влиянием различных внешних и внутренних факторов (прежде всего разнообразных внешних воздействий и помех, действующих в шинах питания и каналах связи). То есть, никакая ошибка не может быть обнаружена в рамках двоичной системы счисления без введения дополнительных контрольных средств. Это приводит к тому, что «Неймановские машины», основанные на двоичной системе, являются **принципиально ненадежными.** Это означает, что сбой всего лишь одного электронного элемента в процессоре может привести к грандиозной технологической катастрофе. Всем хорошо известны катастрофы при запуске ракет, которые в результате сбоя компьютерной программы приводили к отклонению ракеты от заданного курса и, в коечном итоге, к катастрофе. Из этих рассуждений мы приходим к следующему выводу:

Человечество становится заложником современной компьютерной технологии, основанной на «Неймановских принципах». «Неймановские компьютеры», использующие двоичную систему, являются принципиально ненадежными и не могут эффективно использоваться во многих важных приложениях, в частности, для управления сложными технологическими объектами, где проблема надежности компьютеров выступает на передний план.

Нам не совсем понятно, почему этот, казалось бы, очевидный вывод до сих пор не стал предметом серьезного обсуждения всех компьютерных специалистов, которые, по-видимому, давно должны были забить тревогу по поводу «ловушки», в которую попали современные компьютерные технологии, встав на рельсы «неймановских принципов».

6.2. ***Коды Фибоначчи, арифметика Фибоначчи, компьютеры Фибоначчи***

С начала 70-х годов научные интересы **Алексея Стахова** были направлены на создание новых позиционных представлений и новых компьютерных арифметик, которые позволили бы создать компьютеры принципиально нового типа – *компьютеры Фибоначчи* и *«золотые» компьютеры* и другие устройства информационной техники. Первой работой Стахова в этом направлении была статья *«Избыточные двоичные позиционные системы счисления»* [48], опубликованная в 1974 г. В этой статье впервые были введен новый класс позиционных представлений натуральных чисел, названных *p-кодами Фибоначчи*:

$$N = a_nF_p(n) + a_{n-1}F_p(n\text{-}1) + ... + a_iF_p(i) + ... + a_1F_p(1), \qquad (24)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда кода (24); n – разрядность кода (24); $F_p(i)$ – вес i-го разряда, равный p-числу Фибоначчи, вычисляемому в соответствии с рекуррентным соотношением (8) при начальных условиях (9).

Заметим, что понятие p-кода Фибоначчи включает в себя бесконечное число различных методов позиционного представления, потому что каждое p

«порождает» свой собственный p-код Фибоначчи (p = 0, 1, 2, 3, ...). В частности, при p=0 p-код Фибоначчи сводится к классическому двоичному коду. При p=1 – к позиционному представлению

$$N = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-2} + \ldots + a_i F_i + \ldots + a_1 F_1, \tag{25}$$

в котором весами разрядов являются классические числа Фибоначчи.

Интересно подчеркнуть, что представление (25) в теории чисел Фибоначчи известно под названием *«суммы Цекендорфа»* в честь бельгийского исследователя **Эдуарда Цекендорфа** (1901-1983), который, используя (25), доказал еще в 1939 г. ряд важных теорем.

В статье [48] также разработана *арифметика Фибоначчи,* которая позже была положена в основу *компьютеров Фибоначчи.*

6.3. *«Золотая» арифметика*

В работах [49-51] описана так называемая *«золотая» арифметика*, которая была положена в основу инженерных разработок по *«компьютерам Фибоначчи»*, выполненных под руководством **Алексея Стахова** в Винницком политехническом институте. В такой арифметике используется два позиционных представления: *код Фибоначчи* типа (25) и *система Бергмана* (7). Арифметические операции сводятся к выполнению четырех *«базовых микроопераций»*, с возможностью их оперативного контроля и обнаружения ошибок в электронных элементах в момент их возникновения. Это резко повышает информационную надежность процессоров и компьютеров.

6.4. *«Золотые» аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи*

В работах [52, 53] **Алексеем Стаховым** разработана теория «золотых» резистивных делителей, основанных на золотых p-пропорциях. Эти делители были положены в основу так называемых «золотых» самоконтролирующихся и самокорретирующихся аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей (АЦП и ЦАП), обладающих повышенной метрологической стабильностью и нечувствительных к температурным изменениям и старению элементов [49].

6.5. *Троичная зеркально-симметричная арифметика*

В статье **Алексея Стахова** [54] введено следующее троичное позиционное представление целых чисел:

$$N = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c_i \left(\Phi^2\right)^i, \tag{26}$$

где c_i – троичная цифра $\left(\bar{1},0,1\right)$ i-го разряда, $\left(\Phi^2\right)^i$ – вес i-го разряда позиционного представления (26), $\Phi^2 = \left(3+\sqrt{5}\right)/2$ - основание системы счисления (26). Это представление, названное *троичным* Φ*-кодом* [54], является синтезом системы Бергмана (7) и троичной системы счисления, использованной **Николаем**

Брусенцовым при создании троичного компьютера «Сетунь» [55]. Троичное позиционное представление, описанное в [54], обладает уникальным математическим свойством *«зеркальной симметрии»*. Его суть состоит в том, что в любом троичном Φ-коде (26) нулевой разряд разбивает троичную кодовую комбинацию на две зеркально-симметричных части. В [54] разработана *троичная зеркально-симметричная арифметика*, в которой вычитание *A-B* сводится к сложению $A+(-B)$, если к вычитаемому применить правило *троичной инверсии* ($1 \to \bar{1}, \bar{1} \to 1, 0 \to 0$). Но самым главным свойством системы счисления (26) является инвариантность свойства зеркальной симметрии относительно арифметических операций, то есть, результат выполнения любой арифметической операции сохраняет зеркально-симметричную форму. Это означает, что зеркально-симметричная арифметика [54] обладает важным контрольным признаком, основанным на свойстве «зеркальной симметрии», что может быть использовано для создания процессоров и компьютеров повышенной информационной надежности.

6.6. *Новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи*

В книге [28] и статье [56] разработан новый метод кодирования, основанный на матрицах Фибоначчи типа (15). Процесс кодирования-декодирования состоит в следующем:

Кодирование	Декодирование
$M \times Q^n = E$	$E \times Q^{-n} = M$

(27)

Таким образом, *кодирование* состоит в умножении исходной информационной матрицы *M* на *кодирующую матрицу* Q^n; в результате мы получаем *кодовую матрицу E*. *Декодирование* состоит в умножении кодовой матрицы *E* на *декодирующую матрицу* Q^{-n}. Но если теперь вычислить детерминант кодовой матрицы *E*

$$\det E = \det\left(M \times Q^n\right) = \det M \times \det Q^n \tag{28}$$

и затем использовать выражение $\det Q^n = (-1)^n$, мы можем записать:

$$\det E = \det M \times (-1)^n \tag{29}$$

Это и есть *основное контрольное соотношение* для нового метода кодирования информации, задаваемого таблицей (27). В этом методе детерминант информационной матрицы $\det M$, который направляется в канал связи вслед за кодовой матицыей *E*, выступает в качестве основного контрольного сообщения. В работах [28, 56] показано, что контрольное соотношение (29) и ряд других соотношений между элементами кодовой матрицы могут быть эффективно использованы для восстановления разрушенных элементов кодовой матрицы, при этом объектами восстановления являются не биты или их сочетания, а элементы матрицы, которые могут быть числами большой величины. Корректирующая способность этого метода в сотни тысяч и даже миллионы раз превышает корректирующую способность классических корректирующих кодов.

Описанные выше научные результаты могут положены в основу «Золотой» Информационной Технологии, изложенной Алексеем Стаховым в статье [57, 58]. Таким образом, новые математические результаты в этой области (*p-числа Фибоначчи, золотые p-сечения, матрицы Фибоначчи, «золотые» матрицы, система Бергмана, коды золотой пропорции* и др.) стали теоретической основой для новых идей и концепций в области информатики (*«золотая» арифметика, компьютеры Фибоначчи, «золотые» компьютеры, «золотые» аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи, новая теория кодирования* и др.).

7. «Золотая» парадигма в экономике и менеджменте

7.1. *«Золотое сечение» и проблема выбора*

Мы очень привыкли к мысли, что, подбрасывая многократно монету, неизбежно получим в 50% случаях «герб», а в 50% - «решку». Американский психолог **Владимир Лефевр** задумался: а можно ли эту уверенность переносить в психологию? Для этого он провел следующий эксперимент. Испытуемым предлагалось разделить кучу фасолей на две кучи, в первой из которых находятся «хорошие» фасоли, а в другой - «плохие», причем все фасоли очень похожи друг на друга и никаких объективных критериев для разделения вроде бы нет. Казалось бы, в этой ситуации испытуемые должны были бы разделить фасоли примерно поровну. Реальный результат разрушил все ожидания: число «хороших» фасолей устойчиво составляет 62% (0,62) от общего числа фасолей. Но ведь 62% – это Золотое Сечение от 100%! То есть результат психологического эксперимента весьма удивительный: испытуемые делили фасоли на две кучи с числом фасолей, которые находятся в золотой пропорции! Владимир Лефевр задумался над результатом эксперимента и предложил оригинальную теорию для его логического объяснения.

Проведя анализ этого эксперимента с использованием законов алгебры логики и логических методов рефлексии, Лефевр доказал, что в каждом человеке существует некоторый «рефлексивный компьютер», который автоматически (то есть без участия нашего сознания) принимает решения на основе принципа «золотого сечения». Этот парадоксальный вывод может иметь весьма неожиданные приложения к так называемым «бихевиористским», то есть, «поведенческим» наукам и теориям. Одной из таких теорий является *«Теория волн Элиота»*, активно развиваемая в американской науке [59].

7.2. *Волны Элиота*

Ральф Нельсон Элиот (1871-1948) был одним из ярких представителей «Американского Ренессанса». Бухгалтер по образованию, он специализировался в реорганизации и оздоровлении больших компаний типа экспортно-импортных фирм и железных дорог в США и Центральной Америке. К началу 40-х годов Ральф Элиот завершил разработку концепции, в которой взлеты и падения человеческих эмоций и результаты человеческой деятельности следуют естественной последовательности событий, управляемой законом природы. Он соединил модели поведения человеческого общества с соотношением Фибоначчи или золотой пропорцией - математическим объектам, известным в течение тысячелетий математикам, естествоиспытателям, художникам, зодчим и философам в качестве вездесущего закона природы, которому подчиняется форма и движение. Элиот писал: *«Законы Природы» охватывают наиболее важный из всех элементов, синхронизацию. Законы Природы - не система, или метод игры рынка, но это - явление, которое появляется, чтобы отметить прогресс всей человеческой деятельности. Его приложение к прогнозированию носит революционный характер»*.

Открытие Элиота основывается на Законе Природы. Он замечает: *«Этот закон за пределами рынка может быть обнаружен только тогда, когда рынок просматривается в его подходящем освещении и затем анализируется на основе этого подхода. Выражаясь просто, фондовый рынок - создание человека и поэтому он отражает все странности человеческого поведения»*.

И еще одно его замечательное высказывание: *«Все человеческие действия имеют три особенности, модель, время и отношение, все они подчиняются числам Фибоначчи»*.

Наиболее последовательным продолжателем идей Элиота в современной науке является американский исследователь **Роберт Пректер (Robert Prechter)**, который опубликовал в 1999 г. книгу *"The Wawe Principle of Social Behaviour and the New Science of Socionomics"* [59], посвященную развитию идей Элиота. Как видим уже из названия книги Пректера, он претендует на создание новой науки, названной им *социономика*.

Роберт Пректер в своей книге делает следующее весьма сильное заявление: *«Волновой Принцип Элиотта для социологии есть то же самое, что и «Законы Ньютона» для физики»*.

Время, однако, покажет: прав ли Пректер, сравнивая «Волновой Принцип Элиота» с «Законами Ньютона»? Можно соглашаться или опровергать указанное выше заявление Пректера, однако одно несомненно. Благодаря работам Элиота и его последователей теория современной социологии и рыночной экономики пополнились весьма глубокой научной концепцией. Ее суть состоит в том, что «золотое сечение» определяет не только «Законы Природы», но и законы человеческого поведения, а через них законы развития фондового рынка! И этот вывод является примером использования «золотой» парадигмы в такой области как экономика.

7.3. *Гармоничный менеджмент*

Идеи гармоничного менеджмента, основанного на числах Фибоначчи и «золотом сечении», развиты в работах российского ученого **А.И. Ивануса**, автора книги *«Код да Винчи или гармоничный менеджмент по Фибоначчи»* [60]. В книге рассматривается задача представления бизнес-процессов в условиях рыночной экономики в виде некоторой целостной системы, все компоненты которой согласованы между собой в соответствии с логикой устойчивых гармоничных пропорций, лежащих в основе мироздания, и широко известных как числа Фибоначчи или золотое сечение.

Александр Иванус в статье *«О ключевой роли Золотого Сечения в концепции общества, основанного на знаниях»* [61] рассматривает проблему создания общества, основного на знаниях. Иванус утверждает: *«Без преувеличения можно утверждать, что система знаний и ее технологическое ядро – база знаний (БЗ) – это есть тот проект века, который экономически и технически может быть под силу только всему мировому сообществу. Поэтому сейчас за создание системы знаний выступают под эгидой ООН (ЮНЕСКО) страны, которые в состоянии возглавить и реализовать значительную часть работы»*.

По мнению Ивануса, *«сложнейшая по масштабному замыслу БЗ не может не содержать диктуемых внутренней логикой перманентного развития противоборствующих и противоречащих друг другу тенденций, как в алгоритмах своего построения, так и в реализуемых решениях. Поэтому в основу методов функционирования системы должен быть положен как понятный по сути, так и универсальный по применимости такой стержневой принцип, который позволял бы взаимно согласовать и увязывать эти жесткие, но необходимые требования. Таким понятным и универсальным стержневым принципом построения БЗ является известный с древних времен принцип золотого сечения»*. Таким образом, в этом высказывании мы видим указание на четкое использование «золотой» парадигмы при разработке такой сложнейшей проблемы как разработка *«концепции общества, основанного на знаниях»*.

Все перечисленные выше факты свидетельствуют, что современная экономика и менеджмент не остались в стороне от влияния «золотой» парадигмы древних греков. Золотое сечение и числа Фибоначчи становятся важными элементами современной экономики и могут способствовать созданию «гармоничной экономики» и даже «гармоничного общества, основанного на знаниях».

8. «Золотая» парадигма в современном естествознании

8.1. *Резонансная теория Солнечной системы*

Истории науки еще предстоит ответить на вопрос, почему именно последняя четверть 20-го столетия стала тем историческим периодом, когда в особенно концентрированном виде проявился интерес к «золотой» парадигме древних греков. Именно в этот период представители современного естествознания выдвинули гипотезы, связанные с использованием Платоновых тел, золотой пропорции и чисел Фибоначчи в объектах периоды, и сделали открытия, которые имеют фундаментальное значение для развития всего современного теоретического естествознания.

Возмутителем спокойствия в области приложения «золотой» парадигмы в теоретическом естествознании стал советский астроном **К.П. Бутусов**. В 1978 г. он опубликовал сенсационную статью *«Золотое сечение в Солнечной системе»* [62], которая привлекла внимание научной общественности. Он сопоставил минимальные, средние и максимальные периоды обращений планет и периоды биений (разности частот обращений) для смежных планет со средним периодом обращения Земли, равным T_3 = 1,00004, умноженным на число золотой пропорции в степени n, где n=0, ±1, ±2, ±3, ... При этом он получил ряд довольно точных совпадений. Например, средний период обращения Меркурия составляет 0,24084 года. Сопоставление со средним периодом обращения T_3, умноженным на (-3)-ю степени золотой пропорции Φ^{-3} дает число 0,23608, что с высокой степенью точности совпадает с числом 0,24084. Аналогичное сопоставление максимального периода обращения Венеры, равного 0,61929 года, с числом T_3 = 1,00004, умноженным на число золотой пропорции в степени (-1), дает число 0,61806, что также дает хорошее совпадение. Подобные сопоставления с другими планетами Солнечной системы также привело к хорошим совпадениям, откуда Бутусов заключил, что *«частоты обращения планет и разности частот обращений образуют спектр с интервалом, равным золотой пропорции»*! То есть, **экспериментальные данные подтвердили, что золотая пропорция, действительно, является фундаментальной физической константой Солнечной системы.**

Эти необычное исследование привело также Бутусова к заключению о том, что *«спектр гравитационных и акустических возмущений, создаваемых планетами, представляют собой консонантный аккорд, наиболее совершенный с эстетической точки зрения»*. Таким образом, в работе Бутусова идеи пифагорейцев и Кеплера о «музыке сфер» приобретают новое звучание и весьма реальное содержание. В заключение своей уникальной работы Бутусов обращает внимание на то, что, видимо, только случайность не позволила Кеплеру, хорошо знакомому с золотым сечением и знавшему наизусть все параметры планетных орбит, открыть эту закономерность.

Одна из идей Бутусова удивительно согласуется с расчетами Пифагора и положением герметической философии о наличии в нашей Солнечной системе 12 планет. Возможно, что со временем, появятся новые астрономические данные и эта идея Бутусова также получит подтверждение.

8.2. *Квазикристаллы*

12 ноября 1984 г. в небольшой статье, опубликованной в авторитетном журнале «Physical Review Letters" израильским физиком **Даном Шехтманом**, было предъявлено экспериментальное доказательство существования металлического сплава с исключительными свойствами. При исследовании методами электронной дифракции этот сплав проявил все признаки кристалла. Его дифракционная картина составлена из ярких и регулярно расположенных точек, совсем как у кристалла. Однако эта картина характеризуется наличием «икосаэдрической» или «пентангональной» симметрии, строго запрещенной в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы *квазикристаллами*.

Как подчеркивается в статье «Квазикристаллы» известного физика **Д. Гратиа** [63], *«это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь* *открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике».*

В чем же состоит методологическое значение открытия квазикристаллов? Прежде всего, открытие квазикристаллов является моментом великого торжества для «золотой» научной парадигмы, которая пронизывает всю историю естествознания и является источником глубоких и полезных научных идей. Во-вторых, квазикристаллы являются революционным открытием в области кристаллографии, которое разрушило традиционное представление о непреодолимом водоразделе между миром минералов, в котором «пентагональная» симметрия была запрещена, и миром живой природы, где «пентагональная» симметрия является одной из наиболее распространенных. И не следует забывать, что главной пропорцией икосаэдра является «золотая пропорция». **Поэтому открытие квазикристаллов является еще одним научным подтверждением, что, возможно, именно «золотая пропорция», проявляющая себя как в мире живой природы, так и в мире минералов, является главной пропорцией Мироздания.**

8.3. *Плитки Пенроуза*

Когда **Дан Шехтман** привел экспериментальное доказательство существования квазикристаллов, обладающих *икосаэдрическиой симметрией*, физики в поисках теоретического объяснения феномена квазикристаллов, обратили внимание на математическое открытие, сделанное на 10 лет раньше английским математиком **Роджером Пенроузом**.

Рассмотрим еще раз внимательно пентагон на Рис. 2.

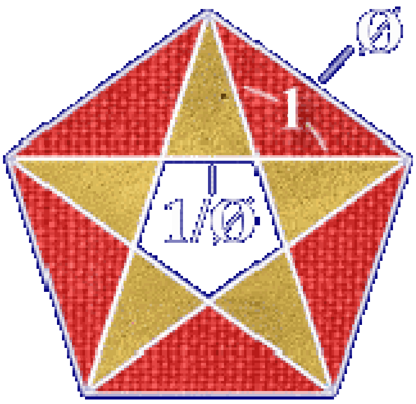
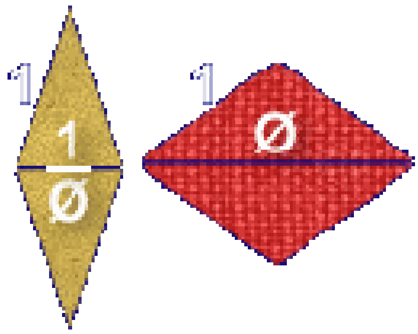


Рисунок 2. Пентагон

После проведения в нем диагоналей исходный пентагон может быть представлен как совокупность трех типов геометрических фигур. В центре находится новый пентагон, образуемый точками пересечения диагоналей. Кроме того пентагон на Рис. 2 включает в себя пять равнобедренных треугольников, окрашенных в желтый цвет, и пять равнобедренных треугольников, окрашенных в красный цвет. Желтые треугольники являются «золотыми», так как отношение бедра к основанию равно золотой пропорции; они имеют острые углы в 36° при вершине и острые углы в 72° при основании. Красные треугольники также являются «золотыми», так как отношение бедра к основанию равно золотой пропорции; они имеют тупой угол в 108° при вершине и острые углы в 36° при основании.

А теперь соединим два желтых треугольника и два красных треугольника их основаниями. В результате мы получим два *«золотых» ромба*. Первый из них (желтый) имеет острый угол в 36° и тупой угол в 144° (Рис. 3).



(а) б)

Рисунок 3. «Золотые» ромбы: а) «тонкий» ромб; (б) «толстый» ромб

Ромб на Рис. 2-а будем называть *тонким ромбом*, а ромб на Рис. 2-б – *толстым ромбом*.

Английский математик и физик Роджерс Пенроуз использовал «золотые» ромбы на Рис. 3 для конструирования «золотого» паркета, названного *плитками Пенроуза*. Плитки Пенроуза представляют собой комбинацию толстых и тонких ромбов, показанную на Рис. 4.

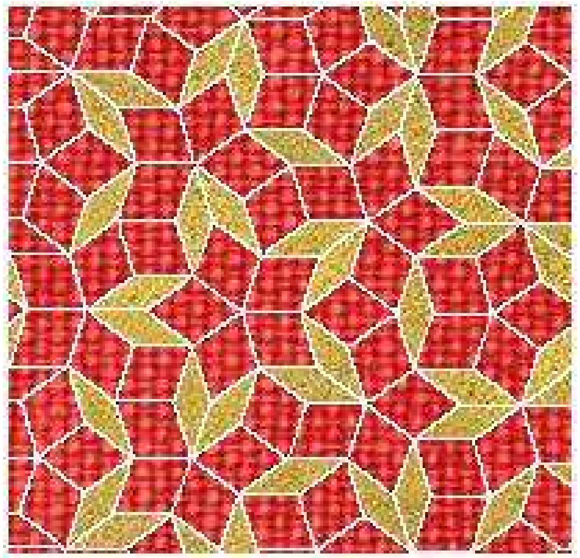


Рисунок 4. Плитки Пенроуза

Важно подчеркнуть, что *плитки Пенроуза* имеют «пентагональную» симметрию или симметрию 5-го порядка, а отношение числа толстых ромбов к тонким стремится к золотой пропорции!

В качестве «плоского аналога» квазикристаллов были выбраны *плитки Пенроуза*, представляющие собой апериодические регулярные структуры, образованные «толстыми» и «тонкими» ромбами, подчиняющиеся пропорции «золотого сечения». Именно *плитки Пенроуза* были взяты на вооружение кристаллографами для объяснения феномена *квазикристаллов*. При этом роль *ромбов Пенроуза* в пространстве трех измерений начали играть *икосаэдры*, с помощью которых и осуществляется плотное заполнение трехмерного пространства.

8.4. *Фуллерены*

В 1985 году группа исследователей — **Роберт Керл, Харолд Крото, Ричард Смолли,** — открыли совершенно новый тип молекулярной формы углерода, получившие название *фуллеренов*. Первой был открыта молекула с магическим числом атомов C_{60}. Чтобы понять, как выглядит эта молекула, достаточно взять в руки футбольный мяч - он состоит из заплаток 5 и 6 угольной формы. Эта молекула углерода оказалась наиболее устойчивой и наиболее распространённой и получила название *бакминстерфуллерена*, по имени американского архитектора Бакминстера Фуллера, применявшего для постройки куполов своих зданий пяти- и шестиугольники, являющиеся основными структурными элементами молекулярных каркасов всех фуллеренов. Фуллерены обладают рядом специфических физических и химических свойств, что не удивительно, так как являются новой структурой. Авторы этого открытия в 1996 г. были удостоены Нобелевской Премии по химии.

В своей Нобелевской лекции **Ричард Смолли,** один из авторов экспериментального открытия фуллеренов, говорит об **Архимеде** (287-212 гг. до н.э.) как о первом исследователе усеченных многогранников, в частности, *усеченного икосаэдра*, правда, оговариваясь, что возможно Архимед присвоил себе эту заслугу и, возможно, икосаэдры усекали задолго до него. Достаточно упомянуть найденные в Шотландии и датированные около 2000 г. до н.э. сотни каменных предметов (по всей видимости, ритуального назначения) в форме сфер и различных *многогранников* (тел, ограниченных со всех сторон плоскими *гранями*), включая икосаэдры и додекаэдры. Оригинальная работа Архимеда, к сожалению, не сохранилась, и ее результаты дошли до нас, что называется, «из вторых рук». Во времена Возрождения все *Архимедовы тела* одно за другим были «открыты» заново. В конце концов, Кеплер в 1619 г. в своей книге «Мировая гармония» («Harmonice Mundi») дал исчерпывающее описание всего набора архимедовых тел — многогранников, каждая грань которых представляет собой *правильный многоугольник*, а все *вершины* находятся в эквивалентном положении (как атомы углерода в молекуле C_{60}). Архимедовы тела состоят не менее, чем из двух различных типов многоугольников, в отличие от 5 *Платоновых тел*, все грани которых одинаковы (как в молекуле C_{20}, например).

Российские ученые А.В. Елецкий и Б.М. Смирнов в своей статье «Фуллерены» [64] отмечают, что *«фуллерены, существование которых было установлено в середине 80-х, а эффективная технология выделения которых была разработана в 1990 г., в настоящее время стали предметом интенсивных исследований десятков научных групп. За результатами этих исследований пристально наблюдают прикладные фирмы. Поскольку эта модификация углерода преподнесла ученым целый ряд сюрпризов, было бы неразумным обсуждать прогнозы и возможные последствия изучения фуллеренов в ближайшее десятилетие, но следует быть готовым к новым неожиданностям»*.

8.5. *Платоновы тела и элементарные частицы*

В последние годы удивительные симметрии Платоновых тел привлекли пристальное внимание физиков-теоретиков, специалистов в теории элементарных частиц [65]. Крупнейший российский специалист по физике высоких энергий академик **Л.Б. Окунь** писал: *«Физиков можно назвать охотниками за симметриями: в некотором смысле они отличаются от остальных людей тем, что отыскивают в природе все более скрытые и все более фундаментальные типы симметрий»*.

В настоящее время считается, что все элементарные частицы относятся к одному из классов: *бозоны* и *фермионы*. Примерами бозонов являются: *фотон, мезоны, ядра с четным числом нуклонов*. Примерами фермионов являются: *электрон, мюон, нейтрино, кварки, протон, нейтрон, ядра с нечетным числом нуклонов*. В настоящей статье мы не имеем возможности углубляться в эту проблему. Приведем только окончательные результаты сопоставления бозонов и фермионов с с Платоновыми телами, приведенными в [65]. В настоящее время установлено, что всего существует 24 бозона, что совпадает с порядком группы вращения куба и октаэдра. В работе [65] утверждается , что *фермионы* имеют прямое отношение к икосаэдру и додекаэдру. Как обнаружили **Джорджи** и **Глэшоу**, в множестве этих частиц проявляют себя пентагональная симметрия, а это характерный признак икосаэдра и додекаэдра. Хотя общее количество фермионов пока неизвестно, но есть надежда, что дальнейшее исследование в таком направлении может привести к решению этой задачи.

Характерно, что статья [65] заканчивается разделом «Вперед, к Платону», который мы воспроизведем здесь дословно:

«Конечно, все вышеизложенное – не столько решение, сколько постановка проблемы. Фермионы и бозоны не независимы, поэтому оба класса частиц должны быть увязаны между собой. Кроме того, нужно согласовать эти соображения с современной теорией поля. И все же трудно отделаться от впечатления, что правильные многогранники действительно способны пролить свет на структуру материи.

Среди Платоновых тел наиболее интересен икосаэдр, и с ним сталкиваются, порой совершенно неожиданно, в самых разных разделах математики. Этот факт должен послужить эвристикой при работе над единой теорией элементарных частиц – ведь в природе наверняка воплощена самая изощренная абстрактная структура. Ее нахождение – прометеева задача наших дней.

Как писал Вернер Гейзенберг, «развитие физики выглядит так, словно в конце концов будут найдены очень простые законы природы – такие, какими их надеялся увидеть Платон». Не исключено, что эти законы окажутся связанными с правильными многогранниками. Даже когда знания о физической реальности были еще очень скудны, находились мыслители (Платон, Кеплер), видевшие в этих фигурах ключ к ее пониманию. Наверное, они составляют, тот арьергард, который всегда впереди».

Таким образом, главное методологическое значение статьи [65] состоит в том, что при создании современной теории элементарных частиц физики вынуждены были обратиться к *Платоновым телам,* а это и есть внедрение *«золотой» парадигмы* древних греков в теоретическую физику.

8.6. *Теория элементарных частиц Ильи Болдова*

А теперь рассмотрим еще одно необычное направление в области теории элементарных частиц, которое также выполнено под девизом «Вперед к Платону». Существующие теории строения элементарных частиц, как правило, не рассматривают частицы как протяженные объекты, имеющие какую-либо внутреннюю структуру. Между тем, логично было бы предположить, что масса частицы зависит от ее пространственной протяженности, а точнее, объема. Эти простые соображения и были положены российским исследователем **Ильей Болдовым** в основу следующей весьма необычной гипотезы, к которой, как оказалось, он пришел много лет назад, еще будучи учеником средней школы. В статье [66] выдвинута следующая необычная гипотеза.

Гипотеза Ильи Болдова:

Элементарные частицы представляют собой правильные и полуправильные многогранники. Масса частицы (в покое) определяется объемом соответствующего многогранника и зависит от длины ребра. Проявления различных законов сохранения нефизических зарядов (лептонных, барионных, странность и пр.) - следствия закона сохранения структуры многогранника, выраженной в его осях симметрии.

Далее в статье [66] Болдов подбирает следующее соответствие между «элементарными» частицами и правильными и полуправильными многогранниками. В основу такого подбора он кладет следующие рассуждения. Он начинает с *Платоновых тел.* Как известно, среди *Платоновых тел* можно выделить две группы так называемых «дуальных» многогранников, которые трансформируются друг в друга, если центры граней одного принять за вершины другого и которые имеют одинаковые группы симметрий. «Дуальными» правильными многогранниками являются следующие пары: *гексаэдр* и *октаэдр, додекаэдр* и *икосаэдр.* У каждой из этих пар одинаковое количество ребер, а количество вершин и граней меняются местами. Болдов предполагает, что эти пары связаны лептонными зарядами, тогда первая пара это *электрон,* которому Болдов приписывает форму *гексаэдра* или *куба,* и *электронное нейтрино,* которому приписывается форма *октаэдра.* При этом вторая пара – это *мюон,* которому приписывается форма *додекаэдра,* и *мюонное нейтрино,* которому приписывается форма *икосаэдра.*

Кроме того, существует также правильный многогранник, *тетраэдр,* который дуален сам себе. Его форму приписывается *фотону.*

Возникает вопрос, каковы существуют основания для приписывания элементарной частице формы того или иного многогранника. Этим основанием является гипотеза Болдова о том, что «*масса частицы (в покое) определяется объемом соответствующего многогранника и зависит от длины ребра*». На примере 9 типов «элементарных частиц» (*фотон* γ*, лептоны:* ν_e *(электронное нейтрино),* ν_μ *(мюонное нейтрино),* ν_τ *(тау-нейтрино),* e^-*(электрон),* μ^-*(мюон),* τ^- *(тау-мезон), мезоны:* π^0 *(Пи-0 мезон)* и $\pi^{+/-}$*(Пи+/-мезон)* Болдов доказывает плодотворность такого подхода.

Например, масса *мюона* (в электронных массах), как известно, равна **206,7**; с другой стороны, если принять длину стороны додекаэдра равной 3, то его объем становится равным **206,9.** Отсюда вытекает, что погрешность определения массы *мюона* по новой теории составляет менее семи сотых процента, что является очень хорошим совпадением с экспериментальными данными. И этот факт нельзя считать случайным совпадением, то есть, *мюон,* действительно, имеет форму *додекаэдра.* Подобным же образом Болдов обосновывает выбор других *Платоновых тел* в качестве формы еще четырех «элементарных частиц».

Но *Платоновых тел* всего пять, а число «элементарных частиц», по Болдову, девять. Поэтому Болдов обращается к другим широко известным многогранникам, в частности, к *Архимедовым телам* и *выпуклым параллелоэдрам (телам Федорова).* По мнению Болдова, форму *усеченного тетраэдра* имеет такая «элементарная частица» как *Пи-0 мезон,* а форму *усеченного куба – Пи+/-мезон.*

8.7. *Кварковый икосаэдр Юрия Владимирова*

Конечно, проще всего было бы отнести теорию Ильи Болдова к разряду «лженаучных идиом» и не ломать себе голову над «фантазиями» какого-то малоизвестного в физических кругах **Ильи Болдова** из Самары, если бы не некоторые обстоятельства. Ну, во-первых, теория Болдова очень уж напоминает «Платонову космологию». Ведь Платон тоже считал, что атомы четырех «элементов» - *огня, воздуха, земли и воды,* лежащие в основе Мироздания, имеют соответственно форму *тетраэдра, октаэдра, куба* и *икосаэдра.* Конечно, никто всерьез сейчас не воспринимает «Платонову космологию», то есть, вряд ли это может стать серьезным аргументом в пользу теории Болдова. Но ведь упомянутая выше статья «*Платоновы тела и элементарные частицы»* [65], хотя и является научно-популярной, но написана вполне респектабельным представителем современной теоретической физики, которого вряд ли можно обвинить в создании «лженаучных идиом» (хотя это вполне возможно, если поставить такую задачу перед некоторыми «писателями» и «квазиучеными» из Академии Тринитаризма).

А вот еще одна «свежая» информация в поддержку теории Болдова. В 2003 г. в Виннице (Украина) состоялась международная конференция *«Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве»*. На пленарном заседании этой конференции с большим интересом была заслушана лекция проф. **Юрия Владимирова** *«Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга»* [67]. Аннотация к статье [67] гласит: *«Показано, что понятие поколений кварков и значения зарядов взаимодействий кварков связаны с дискретными симметриями икосаэдра, в 12 вершинах которого помещены левые и правые компоненты кварков шести ароматов. При описании икосаэдра в цилиндрических координатах имеются три варианта выбора оси симметрии: (1) через середины противоположных ребер, (2) через середины противоположных граней и (3) через противоположные вершины. Первый вариант позволяет определить три поколения кварков, второй – ввести четыре заряда, описывающих Z-взаимодействия кварков и вычислить угол Вайнберга, третий – определить квазиэлектрические заряды и ввести понятие квазипространств»*.

Итак – вновь *Платонов икосаэдр* применительно к теории «элементарных частиц». И автором статьи является весьма известный в физических кругах ученый доктор физико-математических наук **Юрий Владимиров**, профессор кафедры теоретической физики Московского университета. Вряд ли кто-либо из представителей «Комиссии по лженаукам» РАН возьмет на себя смелость обвинить проф. Владимирова в создании «лженаучной» теории. Но тогда, как же быть с «геометрической теорией элементарных частиц» Ильи Болдова [66]? А вдруг она правильная? И может быть, стоит более внимательно разобраться с «теорией Болдова» и выдвинуть ее на Нобелевскую премию, если она, конечно, того заслуживает?

Главный вывод из работ [65-67] состоит в том, что «золотая» парадигма древних греков входит в современную теоретическую физику и завоевывает умы современных физиков-теоретиков, которые видят в *Платоновых телах* основу теории современных элементарных частиц! Вперед к Платону!

8.8. *«Золотая» парадигма в работах Ель-Нашие*

В последние годы внимание физической науки привлечено к научному открытию английского физика египетского происхождения **Мохаммеда Ель Нашие**. В журнале *«Chaos, Solitons and Fractals»* он опубликовал много статей, посвященных изложению этого открытия [68-80]. Суть открытия основана на обнаружении «золотого сечения» в знаменитом двух-щелевом эксперименте, который лежит в основе квантовой физики. Заметим, что проф. Ель-Нашие уже дважды номинировался на Нобелевскую Премию по физике, что свидетельствует о том, что его теория уже признана мировым научным сообществом.

8.9. *«Золотая» парадигма в работах Василия Петруненко*

В 2005 г. белорусский физик **Василий Петруненко** опубликовал книгу *«Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления»* [81]. В книге дается эмпирическое обоснование и теоретическое объяснение явления декалогарфмичской периодичности, обнаруженной автором в динамически равновесных системах разного уровня организации. Поражает диапазон проблем, рассмотренных в книге, - от объектов мегамира (Солнечной системы, галактик и метагалактик) до объектов микромира (атомов, их ядер и электронов). Но главная идея книги изложена в *Части 3. Физическая теория золотого сечения*, которая состоит из двух глав. В основу главы 9 «Волновая микросистема» положен принцип золотого сечения, который приводит Петруненко к заключению, что в ядерных и атомных системах *«существуют простейшие оболочки, обладающие особой устойчивостью. При этом наибольшая прочность и устойчивость оболочек достигается тогда, когда в основу их организации положены волновые кратности золотого сечения»*. В главе 10 «Волновая мегасистема» принцип золотого сечения распространяется на область мгасистем. При этом *«теоретические исследования, проведенные в рамках волновой релятивисткой теории, показали, что особая устойчивость оболочек достигается тогда, когда в основу их реализации положены волновые кратности золотого сечения»*. Таким образом, основное открытие Петруненко состоит в следующем: *«Создана общая релятивистская квантово-волновая теория, в рамках которой и было установлено, что явление (дека)логарифмической периодичности является внешним проявлением внутреннего устройства квантовых состояний: квантовые состояния наиболее устойчивы (стабильны) тогда, когда они организованы в рамках волновых кратностей золотого сечения»*.

Таким образом, в работах Петруненко доказано, что в основе организации материи, как на уровне микромира, так и на уровне мегамира, лежит один и тот же принцип - принцип волновых кратностей золотого сечения.

К сожалению, судьба Петруненко сложилась трагически. Его научные идеи были отвергнуты чиновниками белорусской науки, а «Комиссия по лженаукам» Белорусской академии наук (оказывается, что таковая имеется не только в РАН) признала его научное направление «лженаучным». Ему не дали возможность защитить даже кандидатскую диссертацию, хотя его книга [81] вполне заслуживает присуждения его автору докторской степени. Один из наиболее талантливых представителей белорусской физической науки **Василий Васильевич Петруненко** не выдержал тягот борьбы с «квазиучеными» и ушел из жизни 8-го июня 2009 г непризнанным и оклеветанным после тяжелой и продолжительной болезни. И вечная ему память.

8.10. *Преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна*

Алексей Стахов и Самуил Арансон получили в работах [45, 46] еще один фундаментальный результат, - это «золотая» интерпретация специальной теории относительности и вытекающая отсюда «золотая» интерпретация развития Вселенной. Опуская математические выкладки, остановимся на основных гипотезах исследования [45, 46]:

1. Допускается, что *скорость света* c в вакууме в процессе эволюции, как для нашей *материальной Вселенной,* так и для гипотетической *антиматериальной Вселенной,* **не является постоянной величиной и не равна** *эйнштейновской скорости света в вакууме,* что согласуется с современными представлениями .

2. В основе «золотой» интерпретации специальной теории относительности используются так называемые *«золотые» матрицы* (16), введенные в [40]. Эти матрицы использованы в [45, 46] для введения нового класса преобразований, названных *преобразованиями Фибоначчи-Лоренца,* которые являются обобщением классических *преобразований Лоренца,* используемых в специальной теории относительности.

На основе этого подхода в статьях [45, 46] предложена *«золотая»* космологическая модель эволюции Мироздания с момента сингулярности пространства-времени - «*Большого Взрыва*» (время T равно нулю) как в положительную сторону увеличения времени, так и с *поворотом стрелы времени* - увеличению времени T в отрицательную сторону (рождение «*чёрной дыры*», являющейся временной противоположностью «белой дыры», при этом внутри «чёрной дыры» начала развиваться *Вселенная,* состоящая из *антиматерии*). Все выводы, вытекающие из такого подхода, согласуются с современными представлениями, но при этом возникает ряд новых эффектов, отсутствующих при классическом подходе.

8.11. ***«Золотая» парадигма в работах Олега Боднара***

Ботаническое явление филлотаксиса известно со времен Иоганна Кеплера. Его суть состоит в том, что на поверхности филлотаксисных объектов (сосновых шишек, кактусов, ананасов, головок подсолнечников и т.д.) всегда наблюдаются фибоначчиевые спирали. Однако при этом всегда остается неясным вопрос, как «спирали Фибоначчи» формируются на поверхности «филлотаксисных объектов» в процессе их роста. Экспериментальные наблюдения за ростом «филлотаксисных объектов» показало, что в процессе роста «филлотаксисного объекта» на его поверхности происходит изменение картины филлотаксиса согласно следующему математическому закону:

$$\frac{2}{1} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{3} \to \frac{8}{5} \to \frac{13}{8} \to \frac{21}{13} \to \ldots \tag{30}$$

Возникает вопрос, как объяснить модификацию (30) картины филлотаксиса на поверхности филлотаксисного объекта в процессе его роста? Вот на этот далеко не простой научный вопрос и попытался ответить **Олег Боднар**. И надо отдать ему должное – сделал он это блестяще [37]. Он предположил, что «геометрия филлотаксиса» является неевклидовой, то есть, в ее основе лежат соотношения, основанные на гиперболических функциях. Но применение классических гиперболических функций не дает ответа на вопрос, почему на поверхности «филлотаксисного объекта» появляются фибоначчиевые спирали. И здесь Боднар пришел к неожиданному заключению, что проблема решается очень просто, если ввести в рассмотрение так называемые «золотые» гиперболические функции, основанные на «золотой пропорции». Такое решение сразу же привело к созданию новой геометрии филлотаксиса, называемой «геометрией Боднара» [37]. «Геометрия Боднара» является фундаментальным открытием современной науки, так как она раскрывает механизм роста «филлотаксисных объектов», то есть сосновых шишек, кактусов, ананасов, подсолнечников и т.д.

Таким образом, открытие Олега Боднара является подтверждением «золотой» научной парадигмы применительно к ботанике.

8.12. *Фибоначчиевы резонансы генетического кода*

В 1990 г. французский исследователь Jean-Claude Perez, работавший в тот период научным сотрудником фирмы IBM, сделал весьма неожиданное открытие в области генетического кодирования. Он открыл математический закон, управляющий самоорганизацией оснований *T, C, A, G* внутри ДНК. Он обнаружил, что последовательные множества нуклеотидов ДНК организованы в структуры дальнего порядка, называемые *РЕЗОНАНСАМИ*. *Резонанс* представляет собой особую пропорцию, обеспечивающую разделение ДНК в соответствии с числами Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …) и названную *SUPRA-кодом ДНК*.

Начиная с 1990 г., указанная закономерность была многократно проверена и подтверждена многими выдающимися биологами, в частности, профессорами Montagnier and Chermann, исследовавшими ДНК вируса СПИДа.

Несомненно, что рассматриваемое открытие относится к разряду выдающихся научных результатов, определяющих развитие генной инженерии. По мнению автора открытия Jean-Clode Perez **SUPRA-код ДНК является универсальным био-математическим законом, который указывает на высочайший уровень самоорганизации нуклеотидов в ДНК согласно принципу «Золотого Сечения».**

8.11. *«Золотые» геноматрицы Сергея Петухова*

Как известно, открытие генетического кода, общего для всех живых организмов – от бактерии до человека – привело к развитию информационной точки зрения на живые организмы. Основы языка наследственной информации поразительно просты. Для записи генетической информации в рибонуклеиновых кислотах (РНК) любых организмов используется «алфавит», состоящий из четырех «букв» или азотистых оснований: аденин (*A*), цитозин (*C*), гуанин (*G*), урацил (*U*) (в ДНК вместо урацила используется родственный ему тимин (*T*)).

В последние годы российский исследователь Сергей Петухов предложил оригинальный взгляд на генетический код [82]. Основная идея Петухова состоит в том, чтобы представлять генетические полиплеты в матричном виде. Простейшей является квадратная матрица второго порядка *P*, которая используется для представления системы из четырех азотистых оснований («букв») генетического алфавита. Для представления так называемых «триплетов» используется более сложная матрица, производная из матрицы *P*. Вводя понятия «символьных геноматриц» и «числовых геноматриц», Петухов затем показывает их связь с «золотым сечением» путем введения понятия «золотых геноматриц».

Открытие Петухова показывает фундаментальную роль, которую играет «золотое сечение» в генетическом кодировании. Открытие Петухова свидетельствует о том, что **ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ ЖИВОЙ ПРИРОДЫ!** Сейчас еще трудно оценить в полной мере революционный характер «открытия Петухова» для развития современной науки. Ясно одно, что для теории генетического кодирования – это результат такой же значимости, как и открытие самого генетического кода!

8.13. *«Золотая» парадигма в работах Виктора Цветкова*

В конце 20-го века и начале 21-го века российским биологом В.Д. Цветковым ыполнено ряд фундаментальных исследований, касающихся связи деятельности сердца с золотым сечением. Результаты этих исследований изложены в книге [53]. Книга знакомит читателей с гармонией сердца - одного из самых удивительных творений Природы. На основе системного анализа экспериментальных данных отечественных и зарубежных исследователей автором установлен теоретический критерий гармонии сердца человека и млекопитающих **– принцип оптимального вхождения**. Согласно этому принципу любая из сердечных систем, совместно образующих сложную кардиосистему, включается в последнюю оптимальным образом, вследствие чего сложная система исполняет свою функцию **с минимальными затратами энергии и строительного материала**. Таким образом, основа гармонии любой системы сердца независимо от уровня ее сложности **–** это **энергооптимальное** сопряжение множества входящих в нее «простых» систем. Энергооптимальность сопряжения сердечных систем обеспечивается уникальными свойствами золотого сечения и чисел Фибоначчи. З**олотая гармония выступает как своего рода «знак качества» сердечных систем и сердца в целом.**

8.14. *Фибоначчиева интерпретация Периодической Системы Менделеева*

В статье **Н.А.Шило** и **А.В.Динкова** *«Фенотипическая система атомов в развитие идей Д.И.Менделеева»* [84] приводятся интересные факты, указывающие на связь Периодической Системы Д.И.Менделеева с числами Фибоначчи. Авторы обращают внимание на тот факт, что уже в первой статье о периодическом законе Менделеев предложил идею спиральной формы таблицы химических элементов. Это было гениальное предвидение Менделеева. Позднее в итоговой статье «Периодическая законность химических элементов» он писал: *«В сущности же все распределение элементов представляет непрерывность и отвечает до* *некоторой степени спиральной функции»...* Теперь очевидно, что все интуитивные и пророческие идеи Д.И.Менделеева можно совместить в пространственной спиральной форме периодического закона.

Итак, согласно мнению авторов, *«пространственная кривая (спираль), на которой находятся элементы, расположена внутри конуса или в псевдосфере Н.И.Лобаческого. Элементы на этой спирали представлены дискретными точками (или «шариками»). Проекции элементов на горизонтальную плоскость, т.е. плоскость основания конуса, дают фибоначчиевые спирали, т.е. такие спирали, на любой из которых разности между атомными номерами любых двух последовательных элементов дают числа ряда Фибоначчи».*

Эта идея авторов по существу сводится к утверждению о гиперболическом характере процессов, лежащих в основе образования Периодической системы элементов. А возникновение при этом чисел Фибоначчи в Периодической системе свидетельствует о «фибоначчиевой» гиперболичности Периодической системы. То есть, Периодическая система химических элементов основана на «гиперболических функциях Фибоначчи и Люка».

8.14. *Метаязык живой природы*

Такое название имеет книга [85], написанная известным российским архитектором и исследователем гармонии **Иосифом Шевелевым.** Книга посвящена *«вечной проблеме философии, науки и художественного творчества – проблеме Истока и алгоритмов формоообразования в живой природе и в искусстве».* В книге сформулирован следующий *«Алгоритм Целостности»* (АЦ), позволяющий выражать основополагающие образы живой природы:
- Первоструктура рождает закон дихотомии;
- Закон дихотомии рождает дочернюю структуру (закон золотого сечения);
- Закон золотого сечения рождает комплементарность (закон симметрии пар);
- Закон золотого сечения порождает закон воспроизведения себе подобных и комплементарных структур (идея генетики).

Книга основана на принципе золотого сечения. В заключительной части книги Шевелев утверждает, что Алгоритм Целостности – *«это свернутая с немыслимой емкостью в Символ Идея о Бытии тварного мира, - метафизическая «Точка Начала», физическое ничто, в потенции содержащее в себе все. Это идея гармонии, которую вульгарный материализм отрицает, а великие провидцы, создатели новых парадигм науки, Ньютон, Эйнштейн, Вернадский и Шарден полагали феноменом высшего Мирового разума. Религиозное сознание включает ее в представление о Едином Боге, воссоединяя в Одно и Идею и ее воплощение».*

8.15. *Книга американского ученого Скотта Олсена “The Golden Section. Nature’s Greatest Secret”*

Наш обзор выдающихся открытий современной науки, основанных на «Золотом Сечении», был бы неполным без упоминания об уникальной книге **“The Golden Section. Nature’s Greatest Secret”,** написанной известным американским философом Олсеном Скоттом [86]. Эта небольшая по объему книгу содержит много оригинальных идей в области Золотого Сечения и его приложений. В ней показано, что Золотое Сечение пронизывает всю природу – от генетического кода и пропорций человеческого тела до искусства и архитектуры, музыки, философии, науки и математики, то есть основу книги составляет «золотая» научная парадигма.

Таким образом, приведенные выше факты являются достаточным свидетельством того, что современное естествознание широко использует «золотую» парадигму древних греков. Платоновы тела, золотое сечение и числа Фибоначчи становятся важными элементами современного естествознания, а его главным девизом не только в теории элементарных частиц, но и в других областях становится лозунг «Вперед к Платону!».

Но в современной науке обнаруживается еще одна важная особенность. Речь идет об углублении «золотой» научной парадигмы, которое продемонстрировано в работах белорусского философа **Эдуарда Сороко**.

9. Нужны ли современной науке *p*-числа Фибоначчи и золотые *p*-пропорции?

Вопрос не праздный, потому что на страницах сайта Академия Тринитаризма со стороны некоторых «квазиученых» развернута настоящая травля этих новых научных понятий.

9.1. *Золотые p-сечения и углубление «золотой» научной парадигмы в работах Эдуарда Сороко*

Как упоминалось выше, в статье [32] были введены обобщенные числа Фибоначчи, названные *p-числами Фибоначчи*, а в книге [32] - обобщенные золотые пропорции, названные *золотыми p-пропорциями*. Первым ученым, который показал фундаментальный характер *p*-чисел Фибоначчи и золотых *p*-пропорций, выражающих неизвестные ранее математические свойства *треугольника Паскаля,* стал белорусский философ **Эдуард Сороко.** В его книге *«Структурная гармония систем»* [4] сделано важное научное открытие, показывающее большую роль, которую *золотые p-пропорции* могут сыграть в процессах самоорганизации систем.

Главная идея Сороко состоит в том, чтобы рассмотреть реальные системы с "диалектической точки зрения". Как известно, всякий объект природы может быть представлен как диалектическое единство двух противоположных сторон A и B. Это диалектическая связь может быть выражена в следующем виде:

$$A + B = U \text{ (universum)}. \tag{31}$$

Равенство (31) является наиболее общей формой выражения так называемого *закона сохранения*. Здесь A и B различия внутри единства, логически непересекающиеся классы или состояния субстрата некоторого целого. Единственное условие: A и B должны измеряться одной и той же мерой, быть членами отношения, лежащего внутри единства. Примерами (31) могут быть вероятность и невероятность событий, масса и энергия, ядро атома и его оболочка, вещество и поле, анод и катод, животные и растения, духовное и материальное начала в системе ценностей, доход и расход и т.д.

Частным случаем (31) является "закон сохранения информации":

$$I + H = \log N, \tag{32}$$

где I - количество информации и H - энтропия системы, имеющей N состояний. Если разделить все члены равенства (32) на $\log N$, то получим закон (32) в нормализованной форме:

$$R + \overline{H} = 1, \tag{32}$$

где $R = I / \log N$ - относительная информация и $\overline{H} = H / \log N$ - относительная энтропия.

Рассмотрим процесс самоорганизации системы. Он сводится к переходу системы в состояние *"гармонического равновесия"*. Очевидно, что существует некоторая пропорция между R и $\overline{H}$ в равенстве (32) в состоянии «гармонического равновесия». Это соотношение имеет строго регулярный характер и является причиной стабильности системы. Используя «принцип кратных соотношений», Сороко выдвигает гипотезу, что в соответствии с «принципом кратных соотношений» R и $\overline{H}$ должны быть связаны одним из следующих соотношений:

$$R = \left(\overline{H}\right)^{p+1}; \quad \overline{H} = R^{p+1} \tag{33}$$

где целое число p=0, 1, 2, 3, ... называется рангом кратности.

Если теперь подставить одно из выражений (33) в равенство (32), то мы придем к следующему алгебраическому уравнению

$$y^{p+1} + y - 1 = 0, \tag{34}$$

которое, по мнению Сороко, и является *уравнением гармонии* самоорганизующейся системы. Обозначим через β_p - положительный корень уравнения (34). Это и есть та гармоническая пропорция, которая связывает диалектические противоречивые части системы в состоянии «гармонического равновесия».

Если теперь представить переменную y в уравнении (34) в виде $y = 1/x$, то после подстановки этого выражения в (34) и несложных преобразований мы получим алгебраическое уравнение

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0\,, \qquad (34)$$

которое к полной неожиданности **Эдуарда Сороко** и **Алексея Стахова** оказалось алгебраическим уравнением золотой p-пропорции, корнем которого являются обобщенные золотые пропорции или золотые p-пропорция Φ_p, введенные **Алексеем Стаховым** в [24]. В результате таких рассуждений между *алгоритмической теорией измерения* **Алексея Стахова** [24] и *структурной гармонией систем* **Эдуарда Сороко** [4] была установлена неожиданная связь.

Именно поэтому Сороко назвал корни β_p уравнения (34) обобщенными золотыми пропорциями. Таким образом, *обобщенные золотые пропорции Сороко* связаны с *обобщенными золотыми пропорциями Стахова* обратно-пропорциональной зависимостью:

$$\beta_p = 1 / \Phi_p \qquad (35)$$

Главным итогом исследований Сороко [4] является формулировка *«закона структурной гармонии систем»*, сущность которого Эдуард Сороко сформулировал следующим образом:

«Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, стуктурно-функциональную... устойчивость».

Значения обобщенных золотых пропорций β_p приведены в таблице 1.

Таблица 1. Обобщенные золотые пропорции

p	0	1	2	3	4	5	6	7
β_p	0.5	0.618	0.6823	0.7549	0.7549	0.7781	0.7965	0.8117

Рассмотрим приложение закона Сороко для термодинамических и информационных систем. Состояние термодинамической и информационной системы выражается с помощью понятия энтропии, которое является важнейшим понятием в термодинамике и теории информации. Выражение для энтропии источника информации с алфавитом $A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ имеет следующий вид:

$$H = -\sum_{k=1}^{N} p_k \log p_k\,, \qquad (36)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ - вероятности букв или состояний системы $a_1, a_2, ..., a_N$; N - число букв в алфавите или число состояний в системе.

Как известно, энтропия (36) достигает своего максимального значения $H_{\max} = \log N$ для случая, когда вероятности букв равны между собой. Используя понятие относительной энтропии $\overline{H} = H / \log N$, мы можем записать следующее очевидное равенство:

$$\overline{H} \log N = H = -\sum_{k=1}^{N} p_k \log p_k \tag{37}$$

В соответствии с "законом структурной гармонии систем", которое выражается «уравнением гармонии» (34), каждая самоорганизующаяся система переходит в свое "гармоничное" состояние в случае, когда ее относительная энтропия $\overline{H} = H / \log N$ равна одному из инвариантов β_p, то есть $\overline{H} = \beta_p$. Из этих рассуждений вытекает следующее выражение для энтропии "гармоничной" системы:

$$H = -\sum_{k=1}^{N} p_k \log p_k = \beta_p \log N\ . \tag{38}$$

Ясно, что для заданного параметра p проблема получения множества значений p_i (i = 1, 2, ... , n), дающих оптимальное значение энтропии, имеет много решений. Однако, тем не менее, соотношение (38) играет роль некоторой "целевой" функции для решения различных научных и технических проблем, потому что оно указывает путь поиска "оптимальных" вариантов.

Сороко приводит в своей книге [4] ряд интересных примеров из различных областей науки, демонстрирующих действие своего закона. Например, рассмотрим такой объект как сухой воздух, который является основой жизни на земле. Является ли структура воздуха оптимальной? Теория Сороко дает положительный ответ на это вопрос. Действительно, химический состав сухого воздуха таков: азот 78,084%; кислород - 20,948%; аргон - 0,934%; углекислый газ - 0,031%; неон - 0,002%; гелий - 0,001%. Если теперь рассчитать энтропию воздуха в соответствии с формулой (36) и вычислить его приведенную энтропию, разделив энтропию H на $\log N = \log 6$, то полученное значение приведенной энтропии будет равно 0,683, что с высокой точностью соответствует инварианту $\beta_2 = 0.682$. Это означает, что в процессе самоорганизации сухой воздух приобрел оптимальную, то есть, "гармоничную" структуру. Этот пример является весьма показательным в том отношении, что "теория Сороко" может быть уже сейчас использована для контроля за состоянием биосферы, в частности, воздушного и водного бассейна.

Ясно, что практическое использование "закона структурной гармонии систем" может принести существенный выигрыш при решении многих технологических, экономических, экологических и других задач, в частности, совершенствовать технологию изготовления структурно-сложных продуктов, контролировать биосферу и т.д.

В чем же принципиальная особенность «Закона Сороко»? В своей книге Сороко делает следующий важный вывод:

«Структурная гармония систем природы, т. е. гармония их внутреннего строения, подчиняется четкому математическому закону. Подобно тому, как это мы имеем в квантовой теории, гармоничным (устойчивым, стационарным) состояниям систем объективного мира соответствуют особые числа, называемые обобщенными золотыми сечениями».

В этом высказывании отражена новая концепция «золотой» научной парадигмы. Начиная с Пифагора, ученые связывали понятие гармонии с единственной золотой пропорцией, которая и лежала в основе «золотой» парадигмы древних греков. «Закон структурной гармонии систем» Эдуарда Сороко утверждает, что гармоничное состояние системы, соответствующее классической золотой пропорции, не является единственным и что для одной и той же системы может существовать теоретически бесконечное количество новых «гармоничных» состояний, соответствующих золотым *p*-пропорциям, введенным в [24]. И это открывает новые перспективы перед теоретическим естествознанием при поиске «гармоничных» структур.

9.2. *Фибоначчиево деление биологических клеток*

Способность к делению - важнейшее свойство биологических клеток. Без деления невозможно представить себе увеличение числа одноклеточных существ, развитие сложного многоклеточного организма из одной оплодотворенной яйцеклетки, возобновление клеток, тканей и даже органов, утраченных в процессе жизнедеятельности организма. Общепринятым является представление о симметричном делении биологической клетки на две идентичные клетки, однако в последние годы появились работы, опровергающие такие представления [87-89]. Впервые гипотеза об асимметричном делении биологических клеток (*F*-деление) выдвинута в работе [87], дальнейшее развитие эта идея получила в работе [88]. В соответствии с этой гипотезой каждая клетка на каждом такте делится на две клетки, одна из которых пропускает следующий такт деления. В результате F-деления число биологических клеток, возникающих от исходной клетки на каждом шаге деления, подчиняется «фибоначчиевой» закономерности: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Гипотеза *F*-деления получила неожиданное развитие в работе [89], в которой показано, что процесс *F*-деления подчиняется закономерности обобщенных *p*-чисел Фибоначчи; при этом рассматриваются биологические объекты, в которых деление подчиняются не только классическим числам Фибоначчи, но также 2-числам Фибоначчи: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, ... и 3-числам Фибоначчи: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, ...

Таким образом, работа [89] важна в том отношении, что в ней по существу показано использование «закона структурной гармонии систем» (или новой «золотой» парадигмы) в биологии.

9.3. *Исследования М.С. Радюка*

В связи с использованием золотых *p*-сечений в природных структурах значительный интерес представляет статья белорусского исследователя **М.С. Радюка** *«Второе золотое сечение (1,465...) в природе»* [90]. Радюк исходит из предположения, что *«золотые пропорции, следующие за классической (по крайней мере, первая из них) находят свое отражение в природе»*.

О чем идет речь в статье [90]? Для ответа на этот вопрос приведем рассуждения Радюка: *«Рассмотрим пропорцию 0,682.../0б318... При этой пропорции отношение целого к его большей части равно 1,465..., а целого к меньшей – 3, 147...=1,465^3... Золотому сечению 1,465... соответствует свой рекуррентный ряд, каждый член которого за исключением первых трех единиц равен сумме предыдущего с отстоящим от последнего на однк позицию ... 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872 .... Обращает на себя внимание близость отношения 1/0,318… = 1,465^3...=3,147... к значению* $\pi(3{,}1415...)$. *Случайно ли такое совпадение? Трудно сказать. Полное совпадение этих величин невозможно, поскольку число* $3{,}147 = 1{,}465^3...$ *является корнем алгебраического уравнения, а число* π, *его корни и степени не могут быть корнями какого-либо уравнения. Так или иначе, но близость этих величин наводит на мысль, искать золотое сечение 1,465... в структуре объектов, форма и движение которых являются функциями радиуса»*.

Уже рассмотрение движения Луны вокруг Земли привело Радюка к совершенно неожиданным результатам. Действительно, период обращения Луны вокруг Земли близок к 28 суткам; в году около 13 лунных месяцев. Перигей лунной орбиты совершает один оборот за период около 9 лет, а восходящий узел орбиты - за период около 19 лет. Но ведь числа (9, 13, 19, 28) представляют собой фрагмент рекуррентного ряда, соответствующего золотому сечению 1,465... Радюк обращает внимание еще на некоторые факты, связанные с движением Луны. Скорость движения Луны наряду с минимумом, обусловленным его прохождением через афелий, имеет минимум, повторяющийся через каждые 248 суток. Отношение продолжительности года в сутках к этому периоду равно 1,465... (365/248 ≈1,465…). Отметим, что 365-248=117 суток. Полный оборот перигей лунной орбиты совершает за 117 витков Луны вокруг Земли; узлы лунной орбиты совершают полный оборот по эклиптике за 248 витков. Умножив эти числа на на продолжительность сидерического месяца, получим уже упоминавшиеся периоды в 9 и 19 лет. Сравнивая полученные числа и отношения, характеризующие некоторые элементы орбит Земли и Луны, нельзя не отметить их близость к величинам золотого сечения 1,465... и к числам соответствующего ему рекуррентного ряда.

Не менее поразительные открытия, основанные на использовании золотого сечения 1,465..., сделаны Радюком при исследовании обращения Земли вокруг Солнца. Период обращения включает 365 оборотов Земли вокруг своей оси (суток). Если мы расположим число 365 между двумя меньшим и большим его числами рекуррентного 2-ряда Фибоначчи: (...19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, ***365***, 406, 595, ...), то заметим, что разность между ними (365-277 и 406-365) равна числам этого же ряда 88 и 41. Следовательно, число 365 делит промежуток между числами 277 и 406 в пропорции золотого сечения 1,465 (0,682.../0,318...).

В статье Радюка [90] рассматривается применение золотого сечения 1,465... к анализу дискретности рельефа земной поверхности, обнаруженной недавно В. Пиотровским [91].

Приведенные выше результаты М.С. Радюка, полученные при анализе золотого сечения 1,465..., является ярким примером эффективного использования современной «золотой» научной парадигмы (или «закона структурной гармонии систем») в природных явлениях. Самое удивительное, что открытие новых закономерностей в движении Луны и Земли, сделанные М.С. Радюком [90], совершены в области, которая, казалось бы, исследована настолько досконально, что просто невозможно было ожидать каких-либо открытий. И все это сделано благодаря использованию новой «золотой» парадигмы!

9.4. *Кумулятивный рост и уменьшение, основанные на р-числах Фибоначчи*

В заключение этого раздела хотелось бы привлечь внимание к двум статьям турецких исследователей **F. Büyükkılıç** и **D. Demirhan** [92, 93], опубликованных в весьма престижных международных журналах *Chaos, Solitons and Fractals* (статья [92]) и *International Journal of Theoretical Physics* (статья [93]). Эти статьи написаны с использованием статей Алексея Стахова [94-96], опубликованных в журнале *Chaos, Solitons and Fractals*. На статьи [94-96] имеются ссылки в работах [92, 93].

Суть статей [92, 93] состоит в использовании *р-чисел Фибоначчи* и *золотых р-сечений* для моделирования механизмов кумулятивного роста и уменьшения, которые наблюдаются в реальных системах природы. Статья является подтверждением эффективности использования новой «золотой» парадигмы ("закона структурной гармонии систем") в современном теоретическом естествознании.

Таким образом, заключая этот раздел, мы должны отметить, что не только классические числа Фибоначчи и золотое сечение, но и обобщенные числа Фибоначчи и обобщенные золотые сечения начинают использоваться в современном теоретическом естествознании.

9.5. *«Золотая» математика С.А. Ясинского*

Недавно на сайте Академии Тринитаризма опубликована интересная книга российского исследователя **С.А. Ясинского** «*Основы динамических аналогий в исследовательской деятельности*» [97]. Главная идея книги состоит в использовании так называемой «золотой» математики при моделировании явленней и систем различной природы, включая моделирование законов движения элементарных частиц в квантовой физике, моделирование уровней энергии для химических веществ (бутадиен) и установление их связи с «золотой» и «серебряной» пропорциями, уточнение общей закономерности строения электронного облака атомов, выяснение роли симметрии 5-го порядка в формировании условий для жизненных процессов и выяснение ее взаимосвязи с «золотой пропорцией» и т.д. Интересные результаты получены при исследовании иерархии уровней – одного из главных принципов структурного подобия. Все исследования проведены с широким привлечением различных рекуррентных последовательностей типа чисел Фибоначчи или Люка. Значительная часть книги посвящена изложению «золотой» математики, в состав которой Ясинский включает не только классическую «теорию чисел Фибоначчи», но и новые результаты в этой области, полученные в последние годы и представленные в докладах международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве» (Винница, 22-25 октября 2003 г.). К числу этих результатов Ясинский относит различные обобщения чисел Фибоначчи и «золотой пропорции», включая *p*-числа Фибоначчи, золотые *p*-сечение, металлические пропорции, матрицы Фибоначчи и Люка и др. Автор приводит приложения «золотой» математики для построения надежных систем из ненадежных элементов. Главный вывод проведенного исследованиясостоит в следующем:

«Единый и универсальный закон развития природы должен быть универсальным, проявляться повсеместно, быть простым в познании и реализации, масштабируемым и подчиняться условиям евклидовой и конформной симметрий. Повсеместность и универсальность проявления этого закона должна распространяться и на систему «человек-машина-среда», компонентный анализ которой позволяет обнаружить особую значимость наиболее часто встречающихся моделей в виде «золотых» пропорций, последовательностей Фибоначчи-Люка и другого математического аппарата из унифицированной элементарной и прикладной «золотой» математик».

Сравнивая этот вывод, касающийся роли «золотой» математики для моделирования систем различной природы и создания новой междисциплинарной дисциплины «Наука о Гармонии Систем», с целями и задачами «Математики Гармонии», изложенной в книге Алексея Стахова [98], трудно отказаться от мысли, что «золотая» математика Сергея Ясинского [97] и «Математика Гармония» Алексея Стахова [98] по своим целям и задачам – это одна и та же математика, основанная на золотом сечении, числах Фибоначчи и их обобщениях – *p*-числах Фибоначчи, золотых *p*-сечениях, металлических пропорциях, матрицах Фибоначчи и Люка, гиперболических функциях Фибоначчи и Люка. Это означает, что книга Сергея Ясинского [97] по своим идеям и результатам очень близка к книге Алексея Стахова [98].

9.6. *О критической массе «золотоискателей»*

Выше авторами проанализированы исследования известных ученых 20-го века, которые внесли большой вклад в развитие теории золотого сечения и ее приложения в различных областях науки и культуры: **Сабанеева, Гика, Гримма, Воробьева, Хоггатта, Вайды, Коксетера, Дунлапа, Шпинадель, Газале, Капрафа, Татаренко, Коши, Бутусова, Шевелева, Сороко, Боднара, Петухова, Цветкова, Петруненко, Ясинского, Олсена, Эль Нашие, Пректера, Радюка, Ивануса, Ткаченко, Розина, Динкова.** Но было бы несправедливо в этой статье не упомянуть об исследованиях других выдающихся ученых, внесших существенный вклад в развитие этого направления. Это, прежде всего, **Наталья**

Померанцева, автор книги, посвященной эстетическим основам египетского искусства [99], **Федор Ковалев**, автор учебного пособия «*Золотое сечение в живописи*» [100], **Николай Васютинский**, автор замечательной книги «*Золотая пропорция*» [101], которая стала бестселлером 1990 г. В 1990 г. была опубликована книга известных исследователей **Иосифа Шевелева, Михаила Марутаева, Игоря Шмелева** «*Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы*» [102], которая вызвала большой интерес в научном мире. В 1996 г. опубликована книга доктора медицинских наук проф. **Субботы** *"Золотое сечение" ("Sectio Aurea") в медицине* [103], свидетельствующая о проникновении «золотой» парадигмы в медицину, в 1998 г. - книга **Виктора Коробко** «*Золотая пропорция и проблемы гармонии систем*» [104], рекомендованная Ассоциацией строительных вузов стран СНГ в качестве учебного пособия для студентов технических специальностей высших учебных заведений. В 2004 г. опубликована книга российского исследователя **Анатолия Харитонова** «*Симметрия хаоса и порядка в круговороте энергии*» [105], в которая предлагается новая парадигма природы, человека и общества, основанная на «золотом сечении». В течение многих лет развивает свое оригинальное направление российский исследователь **Олег Черепанов** [106, 107]. Свой вариант «Математики Гармонии» (Русский проект), основанный на триалектике, развивает российский исследователь **Петр Сергиенко** [108].

Создание Института Золотого Сечения Академии Тринитаризма в 2005 г. значительно интенсифицировало исследования в области «золотого сечения» и привело к появлению новых самобытных авторов в этой области. Среди них, в первую очередь, необходимо назвать доктора филологических наук проф. **Григория Мартыненко**, автора многих оригинальных публикаций в области «золотого сечения» на сайте «Академия Тринитаризма» [109-111]. На этом же сайте были опубликованы некоторые сенсационные статьи. Одной из них является статьи **Алексея Корнеева**. «*Структурные тайны золотого ряда*» [112]. В статье дано описание нового свойства рядов Фибоначчи - **скрытая периодичность ряда Фибоначчи** длительность в 24 члена, которая возникает при вычислении нумерологических значений чисел Фибоначчи: 1123 5843 7189 8876 4156 2819. Необходимо также отметить оригинальные публикации **Сергея Алферова** [113, 114], **Риммы Ведом** [115, 116], **Александра Постолаки** [117], **Юрия Черепахина** [118], **Сергея Абачиева** [119] и многих других исследователей. В последние годы к исследованиям в этой области подключилось выдающиеся ученые. Одним из них является доктор физико-математических наук, профессор **Самуил Арансон**. Благодаря Арансону «Математика Гармония» вышла на новый, фундаментальный уровень, который затрагивает не только основания математики (решение 4-й проблемы Гильберта), но и основания теоретической физики (преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна) [45, 46].

Что объединяет всех этих исследователей, представителей различных наук, стран и континентов. Здесь уместно вспомнить высказывание Альберта Эйнштейна: «*Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии*». Именно эта глубокая вера в числовую гармонию мироздания и «золотое сечение», которое и составляло суть «золотой» парадигмы древних греков, объединяет всех этих исследователей. То есть, в современном научном сообществе уже сформировалась критическая масса «золотоискателей», что является необходимым условием «Золотой» Научной Революции, основанной на «золотой» парадигме древних греков.

Огромную роль в распространении знаний о «золотом сечении» играет Интернет. Поисковая система GOOGLE дает следующие результаты поиска по «ключевым словам», касающимся золотого сечения, чисел Фибоначчи и Платоновых тел:

"Golden section" – 295 000 откликов

«Золотое сечение» - 407 000 откликов

"Fibonacci numbers" – 243 000 откликов

«Числа Фибоначчи» - 111 000 откликов

"Platonic solids" – 93 900 откликов

«Платоновы тела» - 525 000

На Интернете созданы великолепные сайты по теме «золотой» парадигмы. Лучшими из них являются:

1. **The Golden Section by Gary B. Meisner**. http://goldennumber.net/
2. **Fibonacci Numbers and The Golden Section in Art, Architecture and Music by R.Knott** http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html
3. **Museum of Harmony and Golden Section by Alexey Stakhov and Anna Sluchenkova** http://www.goldenmuseum.com/
4. **Golden Section in Art and Architecture** http://britton.disted.camosun.bc.ca/goldslide/jbgoldslide.htm
5. **Mathematics in Art and Architecture** http://www.math.nus.edu.sg/aslaksen/teaching/math-art-arch.html
6. **Golden Ratio. From Wolfram MathWorld.** http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html
7. **The Fibonacci series** http://library.thinkquest.org/27890/mainIndex.html
8. **Golden Section and Photography** http://photoinf.com/Golden_Mean/Eugene_Ilchenko/GoldenSection.html
9. **The Golden Section and the Golden Rectangle by Michael Lahanas.** http://www.mlahanas.de/Greeks/GoldenSection.htm
10. **Fibonacci numbers by Rasko Jovanovic** http://milan.milanovic.org/math/
11. **Fibonacci Numbers and the Golden Section in Art, Architecture and Music** http://www.shoshone.k12.id.us/greek/fibo1.htm

Все эти факты являются отражением огромного интереса современного научного сообщества к «золотой» парадигме древних греков а также дополнительными свидетельством в пользу «Золотой» Научной Революции.

10. Реформа математического образования, основанная на «золотой» парадигме

У каждого человека, прочитавшего эту статью, возникает вполне естественный вопрос: почему с такой интересной информацией, касающейся золотого сечения, чисел Фибоначчи, правильных многогранников, меня не ознакомили в средней школе или хотя бы в университете? Ведь эти знания существуют в науке, по крайней мере, две с половиной тысячи лет. И ясно, что эти знания, несомненно, обогатили бы каждого из нас. И вряд ли кто-либо из признанных ученых в области педагогики, увенчанных лаврами и почетными научными званиями за создание программ математической подготовки, сможет дать вразумительный ответ на этот вопрос. Скорее всего, причина в традиции. Традиционно классическая наука, а, следовательно, и классическая педагогика, относилась к золотому сечению с некоторым предубеждением в связи с тем, что оно широко использовалось в астрологии и так называемых «эзотерических науках» (пентаграмма, Платоновы тела, Куб Метатрона и т.д.). И, по-видимому, «материалистическое образование» не нашло ничего более разумного, как выбросить золотое сечение на свалку «сомнительных научных концепций» вместе с астрологией, «эзотерическими» науками и всякими фантазиями Пифагора, Платона и Кеплера.

Анализ современных программ математического образования в таких странах, как США, Канада, Россия и Украина, показывает, что в большинстве из них нет даже упоминания о Золотом Сечении, то есть, имеет место полное игнорирование одного из важнейших математических открытий античной математики.

По мнению Кеплера (и не только Кеплера) изучению уникальных свойств и применений золотого сечения в окружающем нас мире надо уделять в образовании не меньшее внимание, чем теореме Пифагора. И тогда вполне возможно, что изучение математики, которую в своем большинстве ученики рассматривают как сухую и неинтересную дисциплину, неожиданно могло бы превратиться в увлекательный поиск математических закономерностей окружающего нас мира. То есть, введение золотого сечения в математическое образование поднимает интерес учащихся к изучению математики!

По-видимому, реформу математического образования необходимо осуществлять как на уровне средней школы, так и на университетском уровне. В программы университетского образования всех специальностей должен быть включен курс «Математика Гармонии». Настоящая статья, по существу, является расширенной программой этого курса. Естественно, что программа должна быть адаптирована к профилю той или иной специальности.

Нам представляется, что первым шагом в реформе школьного образования, основанной на золотом сечении, должно быть введение в школьную *Геометрию* раздела *«Золотое Сечение»*. В этом разделе школьникам будет интересно узнать о совершенных геометрических фигурах, основанных на Золотом Сечении, в частности, золотом прямоугольнике, пентаграмме, золотой спирали, Платоновых телах.

Переходим к *Алгебре*. Здесь школьники изучают алгебраические уравнения и методы их решения. Но для школьников будет интересно узнать о специальном классе алгебраических уравнений – *«золотых» алгебраических уравнениях*, отличительной особенностью которых является то, что все они имеют общий корень – золотую пропорцию. И это дает нам основание ввести в *Алгебру* небольшой раздел *«Золотые алгебраические уравнения»*. Далее. В той части школьного курса математики, который посвящен изложению основ теории чисел, нельзя не упомянуть о *числах Фибоначчи и Люка, формулах Бине* и др.

Переходим к наукам о Природе — физике, химии, астрономии, ботанике, биологии. В курсе *Физика* при изучении кристаллов желательно упомянуть и о таком новейшем физическом открытии как *квази-кристаллы*, основанных на «икосаэдрической» симметрии. Ведь наши школьники уже знают об икосаэдре из курса «Геометрия». В курсе *«Химия»* целесообразно обратить внимание на открытие молекул *фуллеренов*, тем более что это открытие отмечено Нобелевской Премией. А в курсе *«Астрономия»* обязательно необходимо рассказать школьникам о *резонансной теории Солнечной системы*, основанной на золотом сечении. Только таким путем можно объяснить школьникам причины устойчивости Солнечной системы.

Переходим к наукам о живой природе. Украшением курса *«Ботаника»* может стать раздел *«Закон филлотаксиса»*. Природа дает огромное количество подтверждений этого закона, и это обстоятельство является главным аргументом в пользу такого раздела. Подобные же разделы были бы желательны и в курсах *«Биология»* (фибоначчиево деление биологических клеток) или *«Анатомия»*. В последнем курсе уместно рассказать о пропорциях человеческого тела, основанных на золотом сечении. Можно себе представить, с каким упоением школьники производили бы исследование пропорций своего собственного тела, лица и других частей тела и их сравнения с фигурами Дорифора или Венеры Милосской. Большой интерес у школьников вызовет рассказ о том, что сердечная деятельность млекопитающихся полностью подчиняется «закону золотого сечения».

Рассмотрим теперь школьные курсы по искусству. Принципы использования золотого сечения в произведениях искусства (золотой прямоугольник, золотая спираль, «двойной» квадрат и т.д.) достаточно просты для понимания и примеры их использования в архитектуре, живописи и скульптуре интересны для школьников и навсегда отложились бы в их памяти.

Эти примеры можно было бы продолжить. Но радикальным решением в области школьного образования (и не только школьного) явилось бы введение специальной учебной дисциплины с условными названиями *«Математика Золотого Сечения»*. Эту дисциплину можно было бы рассматривать как завершающую дисциплину физико-математического и эстетического образования учащихся. В результате введения такой дисциплины в школьном образовании появляется цельная концепция — «Золотое Сечение», которая неразрывной цепью объединит все школьные дисциплины. Это будет способствовать осознанию глубокого единства Природы во всех ее проявлениях от атомного ядра и генетического кода до Галактики, и формированию нового научного мировоззрения, основанного на принципах Гармонии и Золотого Сечения. А «лабораторной базой» такого курса можно считать сайт «Музей Гармонии и Золотого Сечения» (www.goldenmuseum.com), созданный **Алексеем Стаховым** и **Анной Слученковой** на Интернете в 2001 г.

Своими соображениями по поводу реформы математического образования и введения курса «Математика Гармонии и Золотого Сечения» **Алексей Стахов** поделился с профессором **Аланом Роджерсоном**, который возглавляет

Международный Проект «Математическое образование в 21-м веке». Проф. Роджерсон прислал автору весьма обнадеживающее письмо следующего содержания:

«*Дорогой Профессор Стахов! Я восхищен Вашей статьей, наполненной интереснейшей информацией, часть из которой мне неизвестна. Ваши идеи настолько глубоки, что их внедрение в школах – это следующий шаг в математическом образовании. Имеются ли преподаватели в Украине или где-либо, которые начали использовать Ваши идеи и Вашу научную программу? В наибольшей степени я был бы заинтересован в информации об их преподавательском опыте. С наилучшими пожеланиями – Алан Роджерсон*».

Дарио Салас Соммер, чилийский философ, под впечатлением работ А. Стахова, в статье «*От Золотой Математики к Золотому Поведению*» [120], пишет следующее: «*...Бутусову, Гаряеву, Стахову, Цветкову, Буданову и, возможно, еще многим другим российским мыслителям, удалось увидеть и систематизировать природные явления, доказывающие существование законов, основанных на принципах Золотой Пропорции и лежащих в основе Мироздания. Их труды* ***способны стать весомыми научными фактами, подтверждающими необходимость эволюции человека и развития его высших этических ценностей*»**.

И разве не об этом же говорил Пифагор?

Заключение

Таким образом, главный итог настоящего исследования состоит в том, чтобы доказать, как неоспоримый факт, проникновение «золотой» парадигмы древних греков во все разделы современной науки, включая математику и математическое образование, компьютерную науку и все теоретическое естествознание. Эта парадигма состоит в том, чтобы осознать роль Платоновых тел, золотого сечения, чисел Фибоначчи и их обобщений – *p*-чисел Фибоначчи, золотых *p*-сечений, металлических пропорций и связанных с ними «золотых» алгебраических уравнений, гиперболических функций Фибоначчи и Люка, «золотой» фибоначчиевой гониометрии для моделирования физических, химических, биологических, ботанических, информационных, экономических и социальных процессов и систем.

Процесс внедрения «золотой» парадигмы в современную науку может привести к «Золотой» Научной Революции, которая всегда сопровождала каждую научную парадигму. Следует отметить, что в современном научном сообществе уже созрела та критическая масса интеллектуалов, которые подобно Пифагору, Платону, Евклиду, Леонардо да Винчи, Пачиоли, Кеплеру твердо верят в «золотую» парадигму. Созданию этой критической массы в значительной мере способствовала американская Фибоначчи-Ассоциация, созданная в 1963 г. и Славянская «Золотая» Группа, созданная в 1992 г. в Киеве. В период проведения Международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве» (Винница, Украина, 2003 г.) Славянская «Золотая» Группа была преобразована в Международный Клуб Золотого Сечения, который с 2005 г. объединился вокруг Института Золотого Сечения Академии Тринитаризма, который является первым в истории науки научным институтом с таким названием.

Главной задачей для завершения «Золотой» Научной Революции является внедрение «золотой» парадигмы в сознание молодого поколения, для чего необходимо внедрение «золотой» парадигмы в современное образование.

Литература

1. А.П. Стахов, И.Г. Райлян, «Идея Гармонии» как связующее звено между философией и математикой // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15396, 12.07.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321138.htm
2. А.П. Стахов, Математика Гармонии как «золотая» парадигма современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15599, 15.10.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321168.htm
3. Волошинов А.В. Математика и искусство. М., Просвещение, 2000
4. Сороко Э.М. «Структурная гармония систем». Минск: Наука и техника, 1984.
5. Волошинов А.В. Венок мудрости Эллады. М.: Дрофа, 2003
6. Стахов А.П. Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15195, 28.03.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322026.htm
7. Клайн М. Математика. Утрата определенности (пер. с англ.). М., Мир, 1984
8. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. Пер. с нем. М.: Наука, 1989.
9. Сабанеев Л. Этюды Шопена в освещении Золотого Сечения. Искусство, ГАХН. М., 1927, вып. 2-3
10. Гика М. Эстетика пропорций в природе и искусстве. Пер. с фр. М.: Изд-во Всесоюзной академии архитектуры, 1936
11. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Ленинград-Москва, ОНТИ, 1935
12. Метафизика. Век XXI. Сборник трудов. Состю и ред. Ю.С. Владимиров. М., БИНОМ, 2006
13. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
14. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
15. Hoggat V.E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
16. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited, 1989.
17. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.
18. Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific, 1997.
19. Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998.

20. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
21. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999
22. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.
23. Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
24. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
25. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979 г.
26. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
27. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations». Toronto, SKILLSET-Training, 1997.
28. Stakhov A.P., Massingua V., Sluchenkova A.A. Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography». Харьков, Изд-во «Основа» Харьковского университета, 1999 г.
29. Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: a New Mathematics for Living Nature. Vinnitsa, ITI, 2003.
30. Стахов А.П. Новая математика для живой природы: Гиперболические функции Фибоначчи и Люка». Винница, Изд-во «ITI», 2003.
31. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009
32. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. В кн.: Приборы и системы автоматики, вып.11. Харбков, изд-во Харьковского университета, 1970
33. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
34. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
35. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
36. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
37. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
38. Stakhov, AP. *A generalization of the Fibonacci Q-matrix*. Доклады Национальной Академии наук Украины, № 9 (1999), 46-49.
39. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.

40. Stakhov, A. The “golden” matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals, 32(3), (2007), 1138-1146.
41. Stakhov, A., Rozin, B. *Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers*. Chaos, Solitons & Fractals, 27(5) (2006), 1162-1177.
42. Stakhov, A., Rozin B. *The “golden” algebraic equations*. Chaos, Solitons & Fractals, 27(5) (2006), 1415-1421.
43. Татаренко А.А. На пороге первого тысячелетия эры полигармонии мира. Труды международной конференции "Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве". Винница, 2003.
44. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006
45. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm
46. Stakhov, A.P. Aranson, S.Kh. "Golden" Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert’s Fourth Problem. Congressus Numerantium, 193 (2008), 119-156
47. А.П. Стахов, Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15195, 28.03.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322026.htm
48. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
49. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.
50. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations». Toronto, SKILLSET-Training, 1997.
51. А.П. Стахов, «Золотая» арифметика как основа информационных технологий 21-го века и важный прикладной результат «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15352, 19.06.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321122.htm
52. Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. В сб. Современные проблемы метрологии. Москва, Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978 г.
53. Стахов А.П. Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №6, 1981 г.
54. Stakhov AP. Brousentsov’s ternary principle, Bergman’s number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.

55. Николай Петрович Брусенцов - творец первого и единственного в мире троичного компьютера "Сетунь" http://www.icfcst.kiev.ua/MUSEUM/Brusentsov_r.html
56. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
57. Стахов А.П. Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 1. Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14876, 16.09.2008
58. Стахов А.П. Тьюринг, филлотаксис, математика гармонии и «золотая» информационная технология. Часть 2. «Золотая» Информационная Технология // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14878, 19.09.2008
59. Prechter, Robert R. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. Gainseville, Georgia: New Classics Library, 1999.
60. Иванус А.И. Код да Винчи в бизнесе или гармоничный менеджмент по Фибоначчи. М., Комкнига, 2006.
61. Иванус А.И., О ключевой роли Золотого Сечения в концепции общества, основанного на знаниях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13854, 05.10.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321036.htm
62. Бутусов К.П. Золотое сечение в Солнечной системе. Астрономии и небесная механика. Серия «Проблемы исследования Вселенной», 1978, вып.7, 475-500
63. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2.
64. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
65. Верховский Л.И.. Платоновы тела и элементарные   частицы. Химия и жизнь, 2006, №6
66. Болдов И. А. Геометрическая теория строения элементарных частиц // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12445, 22.09.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001b/00160203.htm
67. Владимиров Ю.С. Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга. Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница – 2003
68. El Naschie M.S. On dimensions of Cantor set related systems. Chaos, Solitons & Fractals 1993; 3: 675-685.
69. El Nashie M.S. Quantum mechanics and the possibility of a Cantorian space-time. Chaos, Solitons & Fractals 1992; 1: 485-487.
70. El Nashie M.S. Is Quantum Space a Random Cantor Set with a Golden Mean Dimension at the Core? Chaos, Solitons & Fractals, 1994; 4(2); 177-179.
71. El Naschie M.S. Fredholm Operators and the Wave-Particle Duality in Cantorian Space. Chaos, Solitons & Fractals1998; 9(6): 975-978.
72. El Naschie M.S. On a class of general theories for high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals 2002; 14: 649-668.
73. El Naschie M.S. Complex vacuum fluctuation an a chaotic «limit» set of any Kleinian group transformation and the mass spectrum of high energy particle

physics via spontaneous self-organization. Chaos, Solitons & Fractals, 2003; 17:631-638.
74. El Nashie MS. On two new fuzzy Kahler manifolds, Klein modular space and «t Hooft holographic principles. Chaos, Solitons & Fractals, 2006; 29: 876-881.
75. El Naschie M.S. From symmetry to particles. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 427-430.
76. El Naschie M.S. SU(5) grand unification in a grand form. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 370-374.
77. El Naschie M.S. Estimation the experimental value of the electromagnetic fine structure constant a $_0$ = 1/137.036 using the Leech lattice in conjunction with the monster group and Spher's kissing number in 24 dimensions. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 383-387.
78. El Naschie M.S. On the topologic ground state of *E*-infinity spacetime and super string connection. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 468-470.
79. El Naschie M.S. Feigenbaum scenario for turbulence and Cantorian E-infinity theory of high energy particle physics**.** Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 32 (3), 911-915.
80. El Naschie M.S. Hilbert spac e, Poincarй dodecahedron and golden mean transfiniteness. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31 (4), 787-793.
81. Петруненко В.В. «Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления». Минск, Право и экономика, 2005
82. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Москва, Бином, 2006. — 216-250
83. Цветков В.Д. Сердце, золотая пропорция и симметрия. Пущино: ОНТИ РНЦ РАУ, 1997
84. Н.А. Шило, А.В. Динков, Фенотипическая система атомов в развитие идей Д.И.Менделеева // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14630, 09.11.2007
85. Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. М., Воскресение, 2000
86. Scott Olsen. The Golden Section. Nature's Greatest Secret. New York, Walker & Company, 2006
87. Соляниченко Н.А., Розин Б.Н. Тайна золотого сечения. Тезисы конференции «Фенид 90. Нетрадиционные идеи о природе и кк явлениях», том 3, Гомель, 1990.
88. Розин Б.Н. Золотое сечение - морфологический закон живой природы. Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница – 2003
89. Spears C.P., Bicknell-Johnson M. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees, Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 7, 1998, 377-391.
90. Радюк М.С. Второе золотое сечение (1,465...) в природе. Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии
91. Друянов В.А. Загадочная биография Земли. М., Недра, 1981, сю 49-53

92. F. Büyükkılıç and D. Demirhan. Cumulative growth with fibonacci approach, golden section and physics. Chaos, Solitons and Fractals, 2009 42 (1), 24-32
93. F. Büyükkılıç and D. Demirhan. Cumulative Diminuations with Fibonacci Approach, Golden Section and Physics, 2009, 47 (3)
94. Stakhov, A.P. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals, 26(2) (2005), 263-289.
95. Stakhov, A.P. Fundamentals of a new kind of mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals, 27(5) (2006), 1124-1146.
96. Stakhov, A., Rozin, B. *The continuous functions for the Fibonacci and Lucas p-numbers*. Chaos, Solitons & Fractals, 28(4) (2006), 1014-1025.
97. С.А. Ясинский, Основы динамических аналогий в исследовательской деятельности // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15608, 20.10.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161562.htm
98. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009
99. Померанцева Н.А. Эстетические основы искусства Древнего Египта. М., Искусство, 1985
100. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Высшая школа, 1989.
101. Васютинский Н. Золотая пропорция. М., Молодая гвардия, 1990
102. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы. Москва: Стойиздат, 1990.
103. Суббота А.Г. "Золотое сечение" ("Sectio Aurea") в медицине. Санкт-Петербург, Изд-во "Стройлеспечать", 1996.
104. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998.
105. Харитонов А.С. Симметрия хаоса и порядка в круговороте энергии (Холистическая парадигма природы, человека и общества). М., Издательско-аналитический центр «Энергия», 2004.
106. Олег Черепанов, Структуры «золотой» арифметики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15073, 07.02.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321092.htm
107. Олег Черепанов, Обоснование «золотой» арифметики: главная проблема Гильберта и парадокс Пифагора // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15363, 24.06.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321127.htm
108. Сергиенко П.Я., Триалектика. Начала математики гармоничного мира.(Русский проект) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15356, 21.06.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321124.htm
109. Мартыненко Г.Я., Золотое сечение в нумерологии текста // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13183, 05.04.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321035.htm
110. Мартыненко Г.Я., Язык последовательностей Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14934, 06.12.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321093.htm

111. Мартыненко Г.Я., Математика гармонии и статистика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15484, 21.08.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321149.htm
112. Алексей А. Корнеев, Структурные тайны золотого ряда // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14359, 21.04.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321047.htm
113. Алферов С.А. Золотая пропорция, треугольник Паскаля и принцип квадр // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12706, 13.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320004.htm
114. Сергей А. Алферов, Комплементарность и великая сила аналогии в пространстве ЗП // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15337, 12.06.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321115.htm
115. Римма Ведом, Золотая закономерность пульсаций в гидросфере?... // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14110, 27.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321040.htm
116. Римма Ведом, График Структурной Гармонии Гидросферы универсальная иллюстрация динамики всего // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15397, 13.07.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161516.htm
117. А.И. Постолаки, О проявлении «золотого сечения», «чисел Фибоначчи» и «закона филлотаксиса» в природе, в строении организма и зубочелюстной системы человека // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15452, 05.08.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321143.htm
118. Юрий Черепахин, Краткие заметки о роли Математики Гармонии в переходе на новую научную парадигму // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15551, 20.09.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321163.htm
119. С.К. Абачиев, Обильная жатва // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15570, 30.09.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321165.htm
120. Dario Salas Sommer. От Золотой Математики к Золотому Поведению http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/011a/02322004.htm