

Математика гармонии: Эпоха Просвещения — XVIII в.

Де Муавр и Ньютон

На бреге крутом океана
Стоял молодой гугенот,
Его волновал непрерывный
Бушующих гребней полет.

Вдали, за туманом пролива
Ждал Ньютон-мудрец паренька.
Он знал, как легко и игриво
Тот в алгебре всех обскакал.

И вскоре, на шхуне из Гавра,
Талантом и славой звеня,
Тот прибыл в седой Альбион,

И Ньютон сказал: «Вот и он.
Джентльмены, идите к Муавру,
Он в алгебре крепче меня»

XVIII век в Европе был эпохой дальнейшего укрепления капиталистических отношений, еще более бурного, чем в предшествующую эпохи, развития науки и техники, расцвета искусства.

«Просвещение» – идейное движение в Европе XVIII в., отразившее борьбу буржуазной демократии против феодализма, абсолютистской монархии, церкви, религии. Апелляция к разуму, как и веком раньше, не утратила силы и энергии, но гимн разуму стал менее категоричным, менее настырным, фанатичным, более просветленным, вариативным и демократичным.

В целом XVIII столетие продолжало без существенных перемен линию развития эпохи Декарта, Ферма, Ньютона и Лейбница. Но в это же столетие, особенно к концу его, наметились тенденции, которые привели к новым коренным изменениям в предмете и методах математических исследований. На европейском континенте буржуазия, экономическая мощь которой также непрерывно возрастала, еще не получила политической власти. В отличие от Англии, где власть практически принадлежала парламенту, страны континентальной Европы представляли собой абсолютные дворянские монархии. Наиболее крупными из них были Франция, Австро-Венгрия и Россия. Сильнее всего была буржуазия во Франции, где в течение многих лет вызревала, а в 1789 г. произошла Великая Французская Революция. Идеологической подготовкой революции была деятельность французских просветителей Вольтера, Руссо, Дидро и др. Крупнейшим событием духовной

жизни страны было издание «Энциклопедии или Толкового словаря наук, искусств и ремесел» (1751–1772) в 28 томах.

Влияние французских идеологов эпохи Просвещения в той или иной мере сказывалось на всех странах континента. Абсолютизм во многих странах принимал форму «просвещенной монархии», а такие монархи, как прусский король Фридрих II и русская императрица Екатерина II, поддерживали образование, науку и искусство.

1. Эстетика Просвещения

В эстетике Просвещения по мере приближения к концу столетия наблюдается постепенный отход от жестких норм классицизма и концентрация внимания на разнообразии, богатстве и разноликости жизни.

Примечательно, что именно в этот период эстетика приобрела статус самостоятельной науки благодаря Готлибу Баумгартену (1714–1762). Именно он дал определение эстетики как науки и стал основателем школы немецкой эстетики. Это явилось выдающимся событием в истории человеческого духа. Подтверждая это, Баумгартен говорит: Нашу науку могут упрекнуть в том, что она недостойна внимания философа, что изображение человеческих свойств, грез, преданий и страстей принижает философский кругозор. Мой ответ таков: «Философ – тоже человек». И он просто не смеет отгораживаться от столь обширной области человеческого познания» (Baumgarten, 1750; цит. по: Гилберт, Кун, с. 308). Тщательно продуманная система Баумгартена предвосхитила появление «Критики способности суждения» Канта, увенчавшей XVIII в.

В основе эстетики Баумгартена лежит понятие «всесторонней ясности», под которым он понимает *количественное богатство образов*, разнообразие и богатство деталей. По Баумгартену искусство не руководствуется логической ясностью, рациональностью логических схем, в искусстве царствует другая ясность – ясность, достигаемая и богатством деталей, свойственных реальной жизни и богатством ассоциаций, возникающих в поэтическом мировосприятии, и широтой воображения поэта, изощренностью его вымысла. Но такое богатство элементов целого и их смешение должно быть гармоничным, пропорциональным и именно это определяет совершенство художественного произведения. А под совершенством он понимал *единство в многообразии*, которое не доказывается аналитически, оно схватывается и кристаллизуется художником в виде метафоры, в виде изящной словесной формулы.

Иногда в интерпретации разнообразия авторы достигали казуистической изощренности, распространяя это качество на все явления природы и духа. Так, английский теоретик искусства Фрэнсис Хетчесон утверждает (1725), что: «Подлинная красота – это восприятие, вызванное у нас приятным сочетанием форм и в первую очередь наличием единообразия на фоне разнообразия. Эта прекрасная пропорция присуща всем видам геометрических фигур и животным, а также теоремам, метафизическим аксиомам и общим истинам» (Hutcheson, 1725; цт. по: Гилберт, Кун, 1960, с. 259). Хетчесон без тени сомнения

утверждает, что он нашел математический закон красоты, гласящий: «Там где тела единообразны, красота проявляется в виде разнообразия» (Там же). И далее Хетчесон приводит наглядный пример. В многоугольниках, где единообразию достигается равенством сторон, красота возрастает по мере увеличения числа сторон, т. е. благодаря разнообразию. Таким образом, по Хетчесону, например, шестиугольник красивей треугольника. И наоборот, Хетчесон считает грубыми те фигуры, которые, в которых нет единства или сходства между частями. Единообразие характерно для цилиндра, призмы, пирамиды. Любопытно, что ярким примером прекрасной теоремы, основанном на упомянутом соотношении, он считает 47-ю теорему из первой книги геометрии Эвклида, а образцовой философской истиной – закон всемирного тяготения Ньютона.

Приведем еще одно радикальное толкование красоты через разнообразие, принадлежащее автору «Анализа красоты» Уильяму Хагарту (1697–1764).

Хагарт утверждает, что он раскрыл секрет, с помощью которого грекам удалось превзойти в искусствах другие народы. Этот секрет, переданный им Пифагором, назывался «аналогией» и имел определенный математический смысл. В наше время этот термин с древнегреческого переводит как «симметрия». Хагарт ставит перед собой задачу раскрыть секрет греков с точки зрения формы и движения. Этот секрет заключается в следовании разнообразию *змеевидной линии*, т. е. красота и изящество во многом зависят от того, насколько последовательно она подчиняется траектории волнообразной, змееподобной или спиралевидной линии. Линия красоты, говорит Хагарт, состоит из двух изгибов, направленных в разные стороны в форме буквы «S». Хагарт дает классификацию таких линий, но самой прекрасной считает линию, которая вьется по поверхности конуса, имея вид конусообразного движения пламени. Но Хагарту и этого было мало. Он идет дальше и истолковывает свою линию через осуществление принципа максимального линейного разнообразия. Те линии, которые отвечают максимальному разнообразию, создают условия для проявления красоты. Перечисляя такие отвлеченные признаки красоты как соответствие, разнообразие, сложность, симметрия, четкость, величие и др., он отдает предпочтение разнообразию.

Завершая этот парад разнообразия разнообразий, обратим внимание на то, что И. И. Винкельман в своей «Истории искусства древности» (Винкельман, 1935) наивысшее проявление красоты, как и многие его предшественники, видел в теле человека. По Винкельману «эта красота заключается в гармонии частей тела человека, а также во взаимосвязи между ними, выраженной в виде функциональной эллиптической линии» (Юшкевич, 1960, с. 319). Итак, и у Винкельмана мы также попадаем во владения геометрии и разнообразия. Но Винкельман, в отличие от Хагарта, спиралевидной форме предпочитает эллиптическую. Уж нет ли здесь переключки со спиралью Архимеда и коническими сечениями Аполлония? И не будут ли цепочки «конических» спиралевидных сечений еще более совершенной линией? (Винкельман, 1935, с. 209). И не прав ли Мидхад Газале, говоря: «Мы не только живем в спиралевидной раковине», подобно самым заурядным брюхоногим, спирали

нас окружают повсюду на земле, и, по всей видимости, практически не одна форма жизни без них не обходится?» (Газале, 2002, с. 14).

А теперь остановимся на эстетических представлениях эпохи на рубеже XIX в. – на эстетике великих мыслителей Германии: *Эммануила Канта* (1724–1804), *Йоганна Вольфганга Гете* (1749–1832) и *Фридриха Шиллера* (1759–1805).

Кант не сомневался в том, что эстетику можно превратить в столь же основательную и стройную систему, подобную теории познания. Эстетика Канта входит в его философию не как наука об особой области предметов или об особых свойствах предметов, которые принадлежали бы им объективно, – она вводится как исследование специфической особенности нашего суждения, обусловленные чувством удовольствия и неудовольствия. Чувство удовольствия основывается не на понятии (или, как говорит Кант, детерминантном суждении), а связано с представлением о предмете (рефлексивном суждении). В этом случае основанием удовольствия является форма предмета, рассматриваемого безотносительно к понятию, а суждение о нем – суждением вкуса. Область эстетики – это сфера, принадлежащая суждению рефлексивного типа (Кант, 1898).

Учение Канта о вкусе имело целью отграничить эстетическое от познавательного и нравственного и оградить искусство от утилитарного подхода. Кант характеризует суждение вкуса следующими чертами (Марцина, 1966, с. 367):

По качеству: суждение вкуса свободно от практического интереса к предмету, оно абсолютно бескорыстно.

По количеству: прекрасно то, что нравится *всем* независимо от понятия. Эстетическое суждение обладает субъективной всеобщностью. Оставаясь достоянием чувства одного индивида, оно притязает на общезначимость. Однако эта всеобщность основана не на понятии (познании): ее основа – душевное состояние *свободной игры* познавательных сил (воображения и рассудка). При этом свободная игра мыслится Кантом как *гармония* познавательных сил в процессе эстетического суждения.

По отношению: «прекрасное есть форма целесообразности предмета, воспринимаемая в нем без представления о цели». Такую красоту Кант называет чистой. Кантовское определение на первый взгляд кажется парадоксальным. С одной стороны, красота должна быть бесцельной. Но с другой, все, что мы считаем красивым, представляется нам таким, будто некто, достигший красоты, преследовал какую-то цель, т. е. форма, возникающая в результате таких действий представляется нам целесообразной. Предмет вне зависимости от какой-либо объективной (в нем самом) или субъективной (для нас) цели доставляет нам удовольствие, приводит познавательные силы в *свободную гармоническую игру*. Положение Канта «о целесообразности без цели» резко отграничивает эстетическое от чувственного и сохраняет за ним интеллектуальный характер. Но в отличие от рационалистической эстетики Кант исключает из условий суждения вкуса рационалистическое представление

цели. Эстетическое чувство Канта свободно, непосредственно. Положение о «целесообразности без цели» было направлено против утилитарных и рационалистических взглядов на искусство, требующих от него морализации и тенденциозности.

Удовольствие, связанное с чувственностью, является животным и поэтому корыстным.

Удовольствие, связанное с созерцанием ритмики и пластики прекрасного тела, будет свободным, чистым, бескорыстным.

Кант говорит, что бескорыстное удовольствие безразлично к действительному существованию предмета, в то время как корыстное желание жаждет обладания и удовлетворения. Наслаждение, доставляемое нам, например, формой греческой вазы, должно вызываться не желанием приобрести эту вазу, а умственным процессом, игрой чувств, возбуждающих и радующих нас при виде вазы. Ощущая красоту, мы не испытываем давления извне или со стороны побуждений нашей собственной натуры, т. е. мы свободны как от воздействия внешних, так и от воздействия внутренних факторов. Мы стараемся продлить эстетическое удовлетворение, чтобы продлить гармоническое воздействие на нас.

Бескорытность эстетического удовольствия позволяет считать, что удовольствие относится в равной степени к любому из нас. Кант утверждает, что понятие, не относящееся ни к кому в отдельности, относится ко всем вообще. Кант считает себя вправе рассматривать эстетическое суждение как всеобщее и необходимое. Если мы восхищаемся каким-либо прекрасным предметом, мы требуем, чтобы всякий разделял наше восхищение.

Если рассматривать категорию прекрасного по Канту с точки зрения гармонии, то можно констатировать, что рефлекторное суждение, связанное с этой категорией в той же степени, как и детерминантное суждение, предполагает наличие гармонии. Впечатление гармонии возникает и в умозрительных схемах, и в рефлекторных суждениях. В суждениях второго типа гармония видимого и слышимого объясняется благодатным ощущением счастливого сочетания всех элементов созерцаемого объекта.

Кант считал, что гармония является универсальным феноменом, хотя у представителей науки и религии могут возникать различные опасения в ее толковании. Кант пишет: «Защитник религии опасается, что гармония, которую можно объяснить естественными свойствами материи, может доказать независимость природы от божественного провидения. Он открыто признает, что если можно найти естественные причины всего порядка мироздания, то нет надобности ссылаться на верховное миропонимание. У натуралиста свои соображения, по которым он не хочет оспаривать это предположение... Он осмысливает примеры, доказывающие плодотворность всеобщих законов природы по их совершенно гармоническим результатам» (Кант, с. 119).

Что касается положительных черт, характеризующих гармонию, то Кант считал, что «чем больше связей, тем больше гармонии и согласованности в мире» (Кант, с. 72).

А теперь рассмотрим эстетические взгляды Гете. В творчестве Гете собственно эстетическая проблематика занимает не такое уж большое место в сравнении с его художественным творчеством и естественно-научными изысканиями. Причем, в эстетическом наследии Гете проблема гармонии как таковая почти не рассматривается, а основное внимание Гете уделил проблеме стиля. Более того, Гете является основоположником теории стиля, но эта сторона его творчества заслуживает особого обсуждения.

Но личность Гете столь значительна и уникальна, что сам он рассматривался многими современниками и почитателями как некий образец и источник эстетических концепций.

Приведем пример.

Крупный вклад в теорию эстетики был сделан Карлом Филиппом Морицем (1757–1793), другом Гете, который сопровождал великого мыслителя во время его путешествия по Италии. Впечатления от этой поездки явились поводом для написания книги под названием «О художественном подражании прекрасному» (цит. по: Гилберт, 1888). В сущности его книга представляет собой портрет Гете, не только художественной, но и в известной мере метафизический, сконструированный на основе абстрактной терминологии. Книга представляет собой синтез художественного воображения, физиологические представления и пифагорейской космологии. Человек, согласно Морицу, – это микрокосмос, целая вселенная, но малых размеров. Сходство человека со вселенной поддерживается двумя движущими силами; силой воссоздания (*Bildungskraft*) и силой ощущения (*Empfindungskraft*), причем первое относится ко второму, как активное, мужское начало относится к пассивному женскому (Гилберт, Кун, 1960, с. 338). Оба этих начала восходят к *гармоническому* устройству вселенной. В воображении художника эти силы уравновешены. «Благодаря гармоничности своей натуры художник, подражающий отдельным прекрасным предметам, запечатлевает в своем творении образ вселенной (Там же, с. 339). Это означает, что, по Морицу, каждое произведение искусства указывает на то, что человек является гражданином вселенной. Таким образом, в упомянутом выше произведении Морица не только был поставлен вопрос о *гармонической личности*, но и акцентировано внимание на том, что эта личность образует микрокосмос, вписывающийся и во многом повторяющий гармонию макрокосмоса. Казалось, сама природа соединила в Гете эстетическое и чувственное начала, создав образцовую гармоническую личность.

А вот характеристика, данная Гете столетие спустя еще одним великим немецким мыслителем Фридрихом Вильгельмом Ницше (1844–1900): «Гете – явление не немецкое, а европейское. Он окружил себя исключительно замкнутыми горизонтами; он не отделялся от жизни, он входил в нее; он не был робок и брал столько, сколько возможно, на себя, сверх себя и в себя. Чего он хотел, так это *цельности*: он боролся с разрозненностью разума, чувственности, чувства, воли, он дисциплинировал себя в нечто цельное, он *создал* себя. Гете был среди нереалистично настроенного века убежденным реалистом: он говорил «да» всему, что было ему родственно в нем. Гете создал сильного,

высокообразованного, во всех отношениях физически ловкого, держащего себя на узде, самого себя уважающего человека, который может отважиться разрешить себе всю полноту власти и все богатства естественности, который достаточно силен для этой свободы; человека, для которого нет более ничего запрещенного, разве что слабость, все равно, называется она пороком или добродетелью» (цит. по: Вересаев, 1991, с. 260).

Из приведенных высказываний видно, что значение Гете состоит в том, что в истории эстетики он сыграл двойную роль, выступая одновременно и субъектом и фактором развития этой науки. Следует также иметь в виду, что Гете весьма сдержанно относился к формалистическим представлениям в искусстве, например к классицизму. «Того, кто должен брать у античности пропорции (измеримое), не следовало бы нам ненавидеть, оттого что мы желаем брать у античности неизмеримое» (Гете, 1936, с. 347).

Как отмечал Вильгельм Дильтей, основной инструмент, которым пользовался Гете – «созерцательное мышление, постоянно питаемое ощущением целостности вселенной» (Дильтей, 1919: цит. по: Гилберт, Кун, 1960, с. 365). При этом Гете полагал, что чистого созерцания не существует, оно всегда пропитано повседневной жизнью, в которой проявляется бытие как таковое.

Природа для Гете была источником и выражением вечного и видимого порядка, и познание ее тайн может осуществляться не только путем ученых занятий, но и с помощью художественного творчества. При этом Гете считал, что художник (например, Гете) в не меньшей степени, чем метеоролог или ботаник (а Гете был и тем, и другим) может быть исследователем природы. Он также стремится открыть истину, недоступную разумению поверхностного наблюдателя. Более того, Гете высказывался порой в том смысле, что поэзия порой опережает рациональное знание и предвосхищает его.

Фридриху Шиллеру (1759–1805) удалось соединить интуицию Гете с философской эстетикой Канта.

Большое место в эстетике Шиллера занимает идея «прекрасной души». Человеку, достойному так называться, свойственна *гармония разума и воображения, гармония слова и дела*. Именно такое совершенство нашло воплощение в искусстве и гармоничном человеке древней Греции. Например, такое видение присуще Платону, который в своем диалоге «Лакхет», представляя добродетельного мужа, говорит, что он является «совершенным мастером музыки, создавшим прекрасную гармонию не лиры и не другого какого-то инструмента, годного для забавы, а истинную гармонию жизни, ибо он сам настроил свою жизнь как гармоническое созвучие слов и дел» (цит. по: Махов, с. 49). Такая гармония была укоренена в личности и творчестве Гете. На эту гармонию ориентировался и Шиллер.

Истинные поэты, говорит Шиллер, либо сами представляют собой природу, либо стремятся к ней. Их поэзия наивна, чиста, бесхитростна. Они непосредственны, черпая свое вдохновение в самой природе. В их творчестве нет искусственности, нарочитости. Именно такое отношение к миру было присуще древним. Однако по мере развития цивилизации такая гармония

подвергается постепенной эрозии. Шиллер, говоря о наивности поэзии, прежде всего имел в виду греков. Он пишет: «Они суть то, чем мы были; они суть то, чем мы вновь должны стать...Мы вечно в них видим то, что уходит от нас, но за что мы призваны бороться, к чему в бесконечном прогрессе надеемся приблизиться, хотя и никогда не сможем его достичь» (цит. по: Гилберт, Кун: с.382). Идею наивности Шиллер распространяет и на гениальность. Истинный гений, говорит Шиллер, руководствуется только природой и собственным инстинктом. Поэт обязательно наивен, иначе он не гений (Шиллер, с. 396).

Идея красоты как посредницы между формой и материей, разумом и чувством была высказана ранее Кантом в его «Критике способности суждения». При этом у Канта форма доминирует над содержанием. Такое верховенство формы противоречило интуиции Шиллера, который придерживался идеи равновесия формы и содержания.

Принципиальным арбитром, создающим это равновесие, Шиллер считал идею игры.

В «Письмах об эстетическом воспитании человека» Шиллер пишет о том, что в человеке сплетены два побуждения: чувственное побуждение (*Stofftrieb*) и побуждение к форме (*Formbetrieb*). Оба побуждения связаны между собой таким образом, что каждое из них обнаруживает себя потому, что действует другое.

Первое побуждение направляет поведение человека как смертного существа, действующего в определенных рамках времени и пространства. Второе побуждение стремится привести в стройный порядок те разнообразные ощущения, который нам приносит чувственный инстинкт. Задача художника в данной ситуации заключается в том, чтобы примирить, согласовать, гармонизировать оба начала. Примиряющим началом по Шиллеру является еще одно побуждение – *побуждение к игре*. Игра, полагает Шиллер, раскрывает двойственную природу человека. Жизнь делает человека серьезным, а с красотой он играет. Поэтому, считает Шиллер, человек играет, когда является человеком и является человеком только тогда, когда он играет. Оба побуждения, соединенные в игре, делают одновременно случайным как формальную, так и материальную стороны нашего существования. Поэтому человека можно считать игрой случая. Это позволяет сделать один сопутствующий вывод: для Шиллера искусство – это не только согласование побуждения чувства и побуждения к форме (порядку), но и согласование необходимого (постоянного) со случайным (преходящим), свободы воли и закона, ибо в каждой игре существуют более или менее жесткие правила и вечно меняющееся течение жизни.

2. Математико-гармонические изыскания

2.1. Рекуррентные последовательности и исчисление конечных разностей

В «Замечаниях о рекуррентных последовательностях» Д. Бернулли впервые (1728) дает название классу последовательностей, которые следуют

определению: последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ называется рекуррентной, если ее общий член выражается рекуррентной формулой

$$a_n = m_1 \cdot a_{n-1} + m_2 \cdot a_{n-2} + \dots + m_k \cdot a_{n-k}$$

Рекуррентные последовательности несколько ранее рассматривал и де Муавр (1722).

В качестве рекуррентных последовательностей де Муавр рассматривал арифметическую и геометрическую прогрессии, а также последовательность Фибоначчи. В последней общий член вычисляется с помощью равенства

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Выше мы говорили о том, что еще Кеплер обратил внимание на то, что отношение $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ в этой последовательности стремится к корню $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Эту последовательность использовал и Николай I Бернулли при решении квадратных уравнений (Юшкевич, с. 79). Позднее де Муавр, а за ним и Эйлер связали последовательность Фибоначчи с характеристическим уравнением.

Алгоритм образования последовательности Фибоначчи очень простой. Однако, несмотря на это, долгое время не было явной формулы для n -го члена. Такая формула была открыта лишь спустя 500 лет (1730) де Муавром. Для этого де Муавр использовал метод производящих функций, который играет большую роль в комбинаторике, теории вероятностей и теории чисел.

Формула де Муавра имеет вид:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

из которой при различных целочисленных значениях n мы получаем целочисленные значения последовательности Фибоначчи, несмотря на то, что $\sqrt{5}$ - число иррациональное, т.е эта формула связывает целочисленные значения последовательности Фибоначчи с иррациональным числом ϕ , являющегося одним из корней квадратного уравнения.

Формула де Муавра определяет последовательность Фибоначчи на основании последовательности в целом и ее поведения в бесконечности. В этой формуле определение F_n становится явным (не рекурсивным), будучи выраженным через $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (Стилвел, с. 183–184). Иными словами, в данном случае мы имеем пример того, как алгебраические иррациональные числа помогают пролить свет на поведение целых чисел.

Исследование функций при прерывном изменении аргумента велось издавна, но в отдельную математическую дисциплину исчисление конечных разностей, в котором специально изучаются функции с дискретно меняющимся аргументом, выделилось только в XVIII в. В этом исчислении оперируют приращениями функций, которые соответствуют конечным приращениям аргумента, а роль дифференциалов играют конечные разности функции $f(x)$, как-либо заданной в точках x_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$): разности первого порядка

$\Delta f(x) = f_{k+1} - f_k$, разности второго порядка $\Delta^2 f(x) = \Delta^2(f_{k+1} - f_k)$ и т. д. Алгоритм вычисления конечных разностей аналогичен алгоритму дифференцирования, интегрированию соответствует суммирование разностей.

Суммирование рекуррентных последовательностей, подобных последовательностям Фибоначчи, является одной из простых задач исчисления конечных разностей. Однако это исчисление приобрело статус самостоятельной математической дисциплины только в начале XVIII в. в трудах Ньютона («Метод разностей», 1711) и особенно его последователей и младших современников: Тэйлора, де Муавра и Стирлинга.

Сказанное означает, что *теория рекуррентных последовательностей, в частности, последовательности Фибоначчи, является частью исчисления конечных разностей, которая в свою очередь является разделом математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений и дифференциальных уравнений) для целочисленных аргументов.* Таким образом, математика гармонии с ее сочетанием целых и иррациональных чисел, органически влилась в новейшие математические теории эпохи.

2.2. На пути к топологии

Хотя в античной геометрии изучение многогранников занимало одно из центральных мест, а после греков эта проблема перекочевала в исследования Луки Пачоли, а затем и Кеплера, только Декарту и Эйлеру было суждено открыть универсальное фундаментальное соотношение, касающееся многогранников. Пусть V – число вершин простого многогранника, E – число ребер, F – число граней, тогда:

$$V - E + F = 2.$$

Под многогранником при этом понимается тело, поверхность которого состоит из конечного числа граней, имеющих форму многоугольников. В случае *правильных* многоугольников все они конгруэнтны, и все плоские углы при вершинах равны между собой. Многоугольник называется простым, если в нем нет «дыр», так что посредством непрерывной деформации его поверхность может быть преобразована в поверхность сферы.

В книге (Курант, 2001, с. 267) утверждается, что формула Эйлера имеет смысл и в других более общих случаях: вместо многогранников с прямыми ребрами и плоскими гранями можно взять простые «многогранники», у которых «гранями» будут кривые поверхности, а «ребрами» – кривые линии. Можно поступить наоборот, нарисовав на поверхности шара «ребра» и «границ». Более того вообразим, что поверхность многогранника или шара сделана из тонкого слоя резины. Тогда формула сохранится, как бы ни была деформирована рассматриваемая поверхность – путем изгибаний, сжатий, растяжений и т. д. – лишь бы резиновый слой не был порван. Действительно, формула Эйлера относится только к *числу* ребер, вершин и граней. Длины же, площади, кривизна и др. характеристики, относящиеся к элементарной и проективной геометрии, в данном случае никакой роли не играют.

Этот и многие аналогичные многие аналогичные случаи – варианты более общих *топологических* преобразований (Курант, там же, с. 267 и далее).

Таким образом, благодаря Эйлеру «линия жизни» платоновых тел была существенно продлена. Более того она получила ответвление в сторону теории симметрии (благодаря Кеплеру), в теорию уравнений (а затем теорию групп Галуа) и топологии. Математику гармонии в этих фундаментальных областях в ближайшее время ждут серьезные открытия. Возможно, они уже есть, но автору данного текста они неизвестны.

2.3. Теория вероятностей

Новый этап в теории вероятностей начался с Якова Бернулли (1654–1705).

В своем «Искусстве предположений» (1711 г.) он формулирует свою знаменитую теорему, лежащую в основе всех последующих теоретико-вероятностных и статистических исследований. На основании открытого им нормального закона, Бернулли говорит о стремлении частоты события к вероятности в длинной серии испытаний. Теорема Бернулли явилась первой и простейшей в цепи предложений, образующих закон больших чисел. Этот термин предложил в 1835 г. французский математик Пуассон.

В 1733 г., основываясь на суммах разложения членов бинома $(a + b)^n$, де Муавр доказал теоремы, которые сейчас называются локальной и интегральной теоремами Муавра-Лапласа. *Эти теоремы явились замечательным продлением неисчерпаемых свойств бинома Ньютона и треугольника Паскаля, дальнейшим развитием закона больших чисел Я. Бернулли.*

Доказывая свои теоремы, де Муавр, а вслед за ним и Лаплас, преследовали не только математические цели. Они хотели с помощью вероятностных критериев отделить необходимое (предначертанного провидением) от случайного (преходящего, нерегулярного).

2.4. Математико-гармонические итоги эпохи Просвещения

1. В эстетике Просвещения по мере приближения к концу столетия наблюдается постепенный отход от жестких норм классицизма и концентрация внимания на разнообразии, богатстве и разноликости жизни.

Именно в эпоху Просвещения эстетика приобрела статус самостоятельной науки благодаря Готлибу Баумгартену (1714–1762). Именно он *дал определение эстетики как науки и стал основателем школы немецкой эстетики.* Под эстетическим совершенством он понимал *единство в многообразии*, которое не доказывается аналитически, оно схватывается и кристаллизуется художником в виде метафоры, в виде изящной словесной формулы.

2. В эстетике этого периода были популярны геометрические идеи, поиски «линий красоты». В качестве такой идеальной гармонической формы

Хагарт предлагает кривую, состоящую из двух изгибов, направленных в разные стороны в форме буквы «S», а Винкельман спиралевидной форме предпочитает эллиптическую.

3. Учение Канта о вкусе имело целью отграничить эстетическое от познавательного и нравственного и оградить искусство от утилитарного подхода. По Канту «прекрасное есть форма целесообразности предмета, воспринимаемая в нем без представления о цели». Такую красоту Кант называет чистой.

4. Значение Гете состоит в том, что в истории эстетики он сыграл двойную роль, выступая одновременно и субъектом и фактором развития этой науки.

Природа для Гете была источником и выражением вечного и видимого порядка, и познание ее тайн может осуществляться не только путем ученых занятий, но и с помощью художественного творчества. При этом Гете считал, что художник в не меньшей степени, чем метеоролог или ботаник может быть исследователем природы. Гете считал, что поэзия порой опережает рациональное знание и предвосхищает его.

5. В эстетике Шиллера Человеку, достойному так называться, свойственна *гармония разума и воображения, гармония слова и дела*. Именно такое совершенство нашло воплощение в искусстве и гармоничном человеке древней Греции. Такая гармония была укоренена в личности и творчестве Гете. На эту гармонию ориентировался и Шиллер.

6. В трудах Д. Бернулли и де Муавра впервые появляется термин «рекуррентная последовательность» и дается его толкование.

В качестве рекуррентных последовательностей Муавр рассматривал арифметическую и геометрическую прогрессии, а также последовательность Фибоначчи. Де Муавр предложил формулу для вычисления любого члена последовательности Фибоначчи, основанную на методе производящих функций, который играет большую роль в комбинаторике, теории вероятностей и теории чисел.

Формула де Муавра определяет последовательность Фибоначчи на основании последовательности в целом и ее поведения в бесконечности, т. е. здесь мы имеем пример того, как алгебраические иррациональные числа помогают пролить свет на поведение целых чисел.

7. В данный период было установлено, что теория рекуррентных последовательностей, в частности, последовательности Фибоначчи, является частью исчисления конечных разностей, которая в свою очередь есть раздел математического анализа (дифференциального и интегрального исчислений и дифференциальных уравнений) для целочисленных аргументов. Таким образом, математика гармонии с ее сочетанием целых и иррациональных чисел, органически влилась в новейшие математические теории эпохи.

8. Эйлеру было суждено открыть универсальную формулу для многогранников, которая сохраняет силу и для деформированных многогранников при условии сохранения числа вершин, ребер и граней.

Благодаря Эйлеру «линия жизни» платоновых тел была существенно продлена. Более того она получила ответвление в сторону теории симметрии (благодаря Кеплеру), в теорию уравнений (а затем теорию групп Галуа) и топологии. Математику гармонии в этих фундаментальных областях в ближайшее время ждут серьезные открытия.

9. Основываясь на суммах разложения членов бинома $(a + b)^n$ де Муавр доказал теоремы, которые сейчас называются локальной и интегральной теоремами Муавра-Лапласа. Эти теоремы явились замечательным продлением неисчерпаемых свойств бинома Ньютона и треугольника Паскаля, дальнейшим развитием закона больших чисел Я. Бернулли.

Литература

Вересаев В. Живая жизнь: О Достоевском и Л. Толстом: Аполлон и Дионис (о Ницше). М.: Политиздат, 1991.

Винкельман И. И. Избранные произведения и письма. М.-Л.: Academia, 1935.

Газале М. Гномон. От фараонов до фракталов / Перевод с англ.. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

Гете И. Статьи и мысли об искусстве. М.-Л., «Искусство», 1936.

Гилберт К., Кун Г. История эстетики. Перев. с англ.. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

Кант И. Критика способности суждения. СПб, 1898.

Кант И. Сочинения. М.: 1963–1966. Т. 1– 6.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? М.: МЦИОМ, 2001.

Махов А. Е. Musica literaria. Идея словесной музыки в европейской поэтике. М.: Intruda, 2005.

Стилвел Д. Математика и ее история. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

Шиллер Ф. Собр. соч., т. VI. М.: Гослитиздат, 1957.

Юшкевич А. П. История математики. Математика XVIII столетия. М.: АН СССР. Институт естествознания и математики. Под ред. А. П. Юшкевича. М.: 1972.