

## Математика гармонии: Новое время – XIX век:

### Загадки Люка

Бегут минуты, месяцы, века,  
И в каждый миг рождаются загадки,  
Которые подобно красной тряпке  
Рождают драйв не только у быка.

Не в правилах моих играть с друзьями в прятки.  
Я назову кудесника, чья слава велика.  
Да, это, несомненно, Эдуард Люка,  
Его головоломки для умов так сладки.

Средь умников немало тех, что на игрушки падки,  
Для них в его трудах прописана строка,  
Которая полезна для юнца и старика.

Не просто вникнуть в хитроумные порядки  
Колес китайских, строй ханойской башни,  
В них шарм умнейших ошарашить.

### 1. Наука и математика XIX столетия

Темп общественного прогресса и научного развития в XIX в. заметно ускоряется. Под влиянием промышленного производства, запросов государства роль науки непрерывно возрастала. Если раньше математизации подвергалась прежде всего механика, то теперь математические методы охватывают практически всю физику и даже общественные науки: экономику, демографию, социологию, эстетику и даже лингвистику. Это была своего рода небольшая революция. Математика становится воистину междисциплинарной.

В методологическом отношении математика перешла на новую, более высокую ступень абстракции, предмет ее стал гораздо более общим и поэтому вширь и вглубь выросли возможности ее приложений. Вплоть до конца XVIII в. практически безраздельно господствовало мнение, что теоретическая математика есть учение о величинах, их порядке и мере. При этом два основных понятия – геометрической величины и отвлеченного количества – считали строго определенными однозначно в том смысле, что первая может принадлежать только евклидову пространству, содержащему не более трех измерений, а второе должно обладать свойствами элементов поля действительных чисел.

Революционный переворот в математике XIX века заключался прежде всего в том, что этим метафизическим представлениям был нанесен сокрушительный удар.

В области геометрии такой удар был нанесен открытием первой неевклидовой гиперболической геометрии, связанной с именами Н. И. Лобачевского (1229) и Я. Бояи (1831). К такой геометрии еще раньше пришел Гаусс. Но собственные мысли показались ему слишком смелыми, и он оставил их при себе. Это великое открытие опровергло догму о единственности геометрии и указало пути построения других геометрических систем. Методологическое значение открытия Лобачевского и Бояи, в частности, состояло в том, что априорное убеждение в евклидовости реального мира уступило место чисто научной проблеме геометрических свойств Вселенной – проблеме, решение которой принадлежит физике и астрономии, опирающихся как на опыт, так и на математику.

В области геометрии и алгебры первый удар по традиционным представлениям о количестве был нанесен открытием кватернионов Гамильтона и чисел со многими единицами Гроссмана. Работы в этом направлении сыграли огромную роль в создании векторного и тензорного исчисления. Последнее вместе с теорией матриц и теорией групп широко применяется в различных разделах современной физики.

Другим событием величайшей значимости в алгебре явилась разработка теории групп Галуа (1830–1832), подготовленная работами Лагранжа, Гаусса и Абеля по проблеме решения в радикалах уравнений выше четвертой степени. С помощью своей теории Галуа сумел установить условие, которому удовлетворяют уравнения данной степени, разрешимые в радикалах. Но важность этой теории определялась не только решением труднейшей задачи, для которого она была первоначально создана. Галуа выделил и общее понятие поля. Теория целых алгебраических чисел, с одной стороны, и многочленов – с другой, образующих частные случаи общего понятия кольца, привели Р. Дедекинда к выделению и этого важнейшего понятия новейшей математики. Алгебры, о которых мы только что говорили, развивались на первых порах независимо от общей теории колец, примерами которых они являются. Начиная с 70-х гг. XIX в. влияние теоретико-групповых идей со все большей силой сказывается на развитии математики в целом, включая геометрию и анализ (Ф. Клейн, С. Ли и др.), а затем оно распространилось и на теоретическую физику.

Несколько раньше, чем в геометрии и алгебре, важные сдвиги произошли и в области математического анализа. Реформа оснований исчисления бесконечно малых, начатая с Больцано и Коши, привела к разработке теории функций действительного переменного, а в 70–80-е гг. – к теории множеств Г. Кантора. Как и теория групп, теория множеств позволила рассмотреть и развить с новой точки зрения новые разделы математики, в том числе (уже в XX в) теорию вероятностей.

## 2. Эстетика Нового времени

В начале XIX в. произошло важное переключение эстетических акцентов. На передний край выдвинулось поколение 70-х предыдущего столетия – поколение, воспитанное на эстетических принципах Гете и его современников. Но младоэстетам было тесно в рамках гетевской размеренности и величия. Ценности были переоценены. Возникла романтическая эстетика, – поэтика, которой была свойственна юношеская порывистость, утонченная чувствительность, искренность, непосредственность. Поэты-романтики были очень далеки от практической жизни, их мир – это мир искусства, мир поэтических грез, замещающий мораль и философию.

Вот, например, кредо главного идеолога романтизма – Новалиса (псевдоним Фридриха фон Гарденберга, 1772–1801): «Поэзия на деле есть абсолютное реальное. Это средоточие моей философии. Чем больше поэзии, тем ближе к действительности» (Литературная теория немецкого романтизма, 1935, с. 121). Поэзия Новалиса идентична с его философией. Они воссоздают внутренний космос человека. «Разобщение поэта и мыслителя – только видимость, и оно в ущерб обоим», – говорит Новалис (там же, с. 121). Романтики в своем экстатическом вдохновении стерли грань между чувством и интеллектом. В представлении романтика не только интеллект есть поэзия, поэзией является и мораль, и практическая деятельность. Так, по Новалису, даже хозяйственная жизнь должна осуществляться поэтически. «Естественным результатом таких взглядов явилось утверждение поэзии как космической силы. Мир действительный и мир воображаемый, слившись, создали царство грез» (Гилберт, Кун, 1960, с. 393).

В эстетике романтизма сложилось весьма своеобразное отношение к музыке и интерпретации гармонии.

С точки зрения типичного музыканта эпох Рационализма и Просвещения поэзии трудно достичь порядка и симметричности, которые царят в музыке и архитектуре. В эстетике романтизма ориентация сменяется на противоположную. Музыка для поэзии становится образцом беспорядка. Ее сущность все чаще связывается не с понятием симметрии, соразмерности, а с представлением о деструктурированном потоке. Именно в таком понимании музыка становится образцом для поэзии. Еще один идеолог романтизма Ж. Жубер утверждал, что речь не нуждается в какой-либо упорядоченности: «меняйте в ней расположение мыслей; ставьте следствия перед причинами, конец перед началом; разрушайте, ломайте сколь угодно: в этом беспорядке всегда найдется нечто, способное увлечь и пленить слушателя» (Эстетика французского романтизма, 1982, с. 310).

Таким образом, «анархические» тенденции романтизма, его стихийность, стремление к неограниченной свободе вступили в резкое противоречие с традиционными эстетическими представлениями о гармонии, восходящими к греческому искусству как вечному образцу.

Друг Новалиса Фридрих Шлегель (1772–1828) рассматривал греческое искусство как результат благоприятных природных условий, которые, по мнению Шлегеля, были весьма естественными. Разум и чувства греков находились в полной гармонии. «Греки породили красоту потому, что в процессе эволюции жизни человечества являли собой возраст, которому свойственна красота юности. Но если искусство должно соответствовать конкретной эпохе, то будет несправедливо по отношению к современному искусству применять мерилу, заимствованное у древних. «Прежняя гармония исчезает, уступая место долгим, мучительным исканиям, которые будут продолжаться до тех пор, пока не будет достигнут греческий идеал совершенства, но на новом, рациональном уровне» – так излагают взгляды Шлегеля Герберт и Кун (Герберт, Кун, 1960, с. 399–400).

Система, предложенная Георгом Фридрихом Вильгельмом Гегелем (1770–1831), представляет собой великий акт единения двух противоположных начал. Эти начала представляют собой части всеобъемлющего целого, которые не исключают друг друга, а взаимодействуют в рамках единого гармонического процесса. Гегель твердо стоял на классических позициях, но и не отвергал некоторые не слишком радикальные установки романтизма. Идея противопоставления греческого и современного искусства в трудах Гегеля заменяется диалектикой – вечно живой, непрерывно развивающейся мыслью.

Гегель определяет искусство как проявление идеала. Идеал – это абсолют, каким он воплощается в искусстве – начало, одушевляющее предметы, воспринимаемыми нашими чувствами. При этом идеал нужно искать в искусстве, а не в природе. Ведь искусство, как считает Гегель, – это дважды природа, природа, возрожденная в творениях гения. Преломляясь в разуме поэта, обыденность действительности и жестокость грубого естества приобретают пластичность и гармонию духа.

Таким образом, природа представляет собой начало, устремляющееся к красоте, но красоты не достигающее. Аналогичным способом Гегель показывает, что *формальные атрибуты красоты – симметрия и равновесие – только определяют, а не составляют красоту* (Гегель, 1938, с. 119–156). Гегель считает, что *все формальные принципы красоты представляют собой варианты единства в разнообразии*. Но это свойство имеет разные степени сложности. Первая степень связана с *обыкновенным повторением*, воспроизведением одного и того же. Воспроизведение, связанное с *симметрией* частей целого представляет больший интерес. *Воспроизведение по определенным правилам*, которое подразумевает соединение воедино разнородных частей – следующая ступень разнообразия. Над правилами возвышается *гармония*, связующая неоднородные понятия, такие, как цвет и форма, звук и движение, запах и прикосновение. Гегель считает, что это единство – самое прочное, потому что в нем больше оснований для возникновения противоречий.

Еще одним мыслителем, в творчестве которого активно затрагивается проблема гармонии, был Фридрих Вильгельм Ницше (1844–1900), который с

одной стороны, пытался примирить романтизм Новалиса с идеализмом Гегеля, а с другой, построил свою собственную эстетическую систему.

Прежде всего, Ницше упорно отрицал всякое проявление потусторонности. Он считал, что Вселенная «естественна», самодостаточна, не нуждается ни в каком трансцендентальном вмешательстве и сама по себе совершенна и вечна. В эту вечную и бесконечную Вселенную Ницше встраивает человека, наделенного «волей к власти», жаждущего вечного в своем движении без какой-либо разумной цели.

Ницше впервые в эстетике со всей остротой ставит вопрос о соотношении прекрасного и безобразного. В контексте нашего изложения это крайне важно, так как понятие гармонии обычно соотносится с категорией прекрасного, а иногда и просто отождествляется с ней.

«Красота сама по себе, – пишет Ницше, – это пустые слова, это даже не понятие. В красоте человек делает себя мерилom совершенства; в исключительных случаях он даже признает себя единственным творцом ее. Только в своем изображении человеческий род может подтвердить и возвысить себя» (Ницше, 2008, с. 85). И далее: «Человек думает, что весь мир усеян красотою, он забывает, что он сам их причина. Он сам наделяет природу красотой... В сущности, человек любит себя лишь собою в окружающем мире, он считает прекрасным все то, в чем отражается его образ: в приговоре над «красотой» звучит его тщеславие рода» (там же).

Но Ницше идет дальше. Он говорит, что на идее, согласно которой нет ничего прекраснее человека, стоит, вся эстетика. Но есть и вторая истина: «нет ничего безобразнее вырождающегося человека» (там же, с. 86). И это тоже является важным для искусства. Ницше говорит о том, что предметы, изображаемые Золя, братьями Гонкур безобразны «и все-таки они изображают их, потому что наслаждаются безобразным» (цит. по: Гильберт, Кун, 1960, с. 542).

«Всякий предвестник истощения, тяжести, ветхости, усталости, всякого рода стеснения, как спазмы, поражение параличом, но более всего запах краски, формы разложения и растрепанности... – все это вызывает ... приговор: «безобразное» (Ницше, там же).

Ницше проповедует активную позицию искусства. Красота по Ницше достигается только благодаря акту самоутверждения, который видоизменяет, формирует действительность. Суждение о красоте или безобразном наделяет объект качествами, чуждыми его природе, т. е. человек воспринимает объект ложно. Деятельная позиция художника, преобразующая действительность в красоту, предполагает жесткую самодисциплину и отвращения от собственных пристрастий. Ницше мечтает о классическом, величественном стиле, который характеризуется «холодностью, ясностью и четкостью». «Этот стиль, говорит Ницше, – сродни великой страсти, потому что он презирает удовольствие и пренебрегает убеждением. ... Овладеть хаосом, которым является мир, заставить этот хаос принять определенные формы, стать началом логическим,

простым, конкретным, математически точным, превратиться в закон – таково дерзкое устремление этого стиля» (там же, с. 544).

Поскольку по Ницше суждение о красоте не имеет прямого отношения к сущности объекта, для того, чтобы подняться выше разумной рациональной, деловой оценки, необходимо состояние экзальтации, некое опьянение, священное охмеление. Это такое состояние духа, которое заставляет реальную жизнь возвышаться над самой собой, оставаясь одновременно в своих пределах. Исторически эстетическая экзальтация может рассматриваться как теория катарсиса, развиваемая в трудах античных авторов Платона, Плотина, Аристотеля и др.

Эстетическое возвышение духа у Ницше основано на противопоставлении дионисийского и аполлоновского начал (Ницше, 2007).

Дионисийское начало – первая стадия творческого процесса. Художник, движимый мощным толчком творческой энергии, впадает в дионисийское безумие, его охватывает «страсть к становлению». Сознание, «охваченное одновременно ужасом и восторгом, погружается в вечный поток явлений, струи которого несут с собой и созидание и разрушение» (Гилберт, Кун, 1960, с. 545). Затем наступает вторая стадия творческого процесса, содержание которого заключается в том, что возникает аполлоновское видение жизни, которое освобождается от пут дионисийского сладострастного возбуждения, утихает боль дионисийского экстаза, и явления переводятся в стройный порядок согласно вечным законам.

Эстетика Ницше оказала огромное влияние на искусство конца XIX – начала XX вв., в частности на Ф. М. Достоевского. У него мы находим своеобразное толкование гармонии, которые, как нам кажется, соотносятся с выдвиганием на передний план идеи экстаза, которая станет позднее невероятно популярной у символистов.

Вот как описывает состояние героя, типичного для романов Достоевского, В. В. Вересаев (Вересаев, 1991, с. 45):

«В душе человека – угрюмый, непроглядный хаос. Бессильно крутятся во мраке разъединенные обрывки чувств и настроений. В темных вихрях вспыхивают слабые огоньки жизни, от которых мрак еще ужаснее.

Но бывают миги, когда разделенные огоньки эти сбиваются вихрем в одно место. Тогда темнота вдруг прорезывается ослепительно ярким светом. Разрозненные элементы жизни, сжатые в одно, дают впечатление неслыханного напряжения, близкого к взрыву. И как раньше невозможно было жить от угрюмого мрака, от скудости жизненных сил, так теперь жизнь становится невозможной вследствие чудовищного избытка сил и света». И далее происходит то, о чем говорит Кириллов Шатову в романе Достоевского «Бесы»: «... Поймите, бывают с вами, Шатов, минуты *вечной гармонии*? Есть секунды, их всего зараз приходит пять или шесть, и вы вдруг чувствуете присутствие вечной гармонии, совершенно достигнутой. Это не земное, я не про то, что оно небесное, а про то, что человек в земном виде не может перенести. Надо перемениться физически или умереть. Это чувство ясное и неоспоримое. Как будто вдруг ощущаете всю природу и вдруг говорите: да, это

правда! Это ... это не умиление, а только так, радость. Вы не прощаете ничего, потому что прощать уже нечего. Вы не то, что любите – тут выше любви. Всего страшнее, что так ужасно ясно и такая радость. Если более пяти секунд, то душа не выдержит и должна исчезнуть. Чтобы выдержать десять секунд, надо перемениться физически». Те же ощущения переживает и князь Мышкин. Вот такая *болезненная гармония*. За силу жизни принимается судорожно обострившиеся, глубоко болезненные процессы души, *за вечную гармонию – высочайшая дисгармония*

Но «высочайшая минута» проходит. Возвращается ненавистное время. Вечность превращается в пять секунд, высшая гармония жизни исчезает, мир снова темнеет и разваливается на разъединенные частички. Наступает другая вечность – холодная, унылая вечность на пяточке пространства.

### 3. Математико-гармонические изыскания

На фоне этих будоражащих воображение математических и эстетических достижений XIX в. математико-гармонические изыскания выглядят довольно скромно.

Их можно разделить на две группы.

К первой можно отнести собственно математические исследования.

Здесь нужно в первую очередь упомянуть два имени: Эдуарда Люка (1842–1891) и Жака Бине (1786–1856).

Эдуард Люка – плодовитый автор многочисленных математических развлечений и серьезных математических исследований.

Отметим некоторые из них.

1. В 1878 г. он дал критерий для определения того, простым или составным являются числа Мерсена  $M_p = 2^p - 1$ , ныне известный как тест Люка-Лемера. Применяя свой метод, Люка установил, что  $M_{127} = 2^{127} - 1$  – простое число. В течение 75 лет это число оставалось наибольшим числом, известным науке.

2. Описал свойства рекуррентных последовательностей, удовлетворяющих уравнениям второго порядка. Частным случаем этих последовательностей являются числа Фибоначчи, а также вновь открытая последовательность, вошедшую в историю как последовательность Люка.

3. Люка показал, что в счетных устройствах удобнее пользоваться двоичной, чем десятичной системой счисления.

Бине мы обязаны тем, что он открыл бета-функцию и дал ей имя. Он показал также, что бета-функцию можно выразить через другие специальные функции, например, через гамма-функцию Лежандра:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Подобно тому, как гамма-функция для целых чисел является обобщением факториала, бета-функция является обобщением биномиальных коэффициентов, напрямую через треугольник Паскаля связанных с числами

Фибоначчи. Значительно позднее один из вариантов бета-функция, связанный с числами Фибоначчи, был использован для описания социальных систем (Мартыненко, 2010).

Французскому ученому математика гармонии обязана знаменитой формулой, связывающей числа Фибоначчи и числа Люка. Формула такова:

$$\varphi^n = \frac{L_n + F_n \sqrt{5}}{2},$$

где  $F_n$  и  $L_n$  — числа Люка и Фибоначчи порядка  $n$ , а  $\varphi$  — золотое число.

Большинство исследователей считают, что термин «золотое сечение» появился только в середине XIX. Терминологическое авторство (goldener Schnitt) приписывают Мартину Ому (1835 г.). Но сам он отрицал свое авторство. Как бы то ни было, этот термин скорее всего появился в первой трети XIX в. До этого использовался термин «божественная пропорция», предложенный Лукой Пачоли.

#### **4. Прикладная математика в гуманитарных науках**

Отличительной чертой XIX в. является расцвет экспериментальных исследований с использованием математических методов. Причем эти методы переключивались из естественно-научной сферы в гуманитарную. Освоение гуманитарного пространства осуществлялось по нескольким направлениям:

1. Неоренессансный подход в измерении эстетических достоинств произведений искусства и гармонии мира на основе золотого сечения;
2. Активное вовлечение в научный оборот идей и методов математической статистики и перенос ее основных понятий на общественные отношения;
3. Развитие классификационных представлений, в частности методов идентификации и опознания объектов с учетом переменных разной природы;
4. Разработка методов количественной оценки эстетичности произведений искусства на основании субъективных оценок информантов;
5. Формирование предпосылок для изучения сообществ (общей теории ценозов);
6. Освоение методологии достижений наук о живом: теории эволюции, теории наследственности, проблем таксономии.

Именно в XIX в. в гуманитарной сфере началось формирование измеряющих дисциплин: антропометрии, биометрии, психометрии, социометрии, искусствометрии, стилеметрии, эконометрики и др.

Рассмотрим, придерживаясь хронологического порядка, особенности возникновения и становления этих дисциплин, а также мыслителей, участвующих в этих процессах.

Все началось с работ выдающегося бельгийского математика, астронома, социолога, искусствоведа и родоначальника научной статистики Адольфа Кетле (1796–1874).



Предшественники Кетле рассматривали статистические закономерности как проявление божественного порядка. В отличие от них, Кетле считал, что такие закономерности, как и физические законы, подчинены закону причинности. Эти законы, как полагал Кетле, должны изучаться новой научной дисциплиной, которую он назвал социальной физикой (Кетле, 1835).

Основное место в социальной физике Кетле занимает теория среднего человека. В его представлении каждый человек от природы наделен постоянными качествами, которые формируют в данных условиях тип человека, о сохранении которого заботится природа. «Относительно нравственных качеств, а равно и физических, – писал Кетле, человек подчинен большим или меньшим отклонениям от среднего состояния, и колебания его около этой средней величины совершаются по общему закону, управляющими всеми колебаниями, которым подлежит ряд явлений, находящимися под влиянием случайных причин» (Кетле, 1911, с. 311). Средний человек по Кетле – это человек среднего роста, веса, силы, средней емкости легких, средней остроты зрения. Но среднего человека формируют не только антропометрические характеристики. Кетле распространял идею среднего человека на моральную, интеллектуальную и психическую сферы. Более того, эта идея он сделал столь всеобъемлющей, что распространил ее на эстетическую составляющую бытия человека. Так, Кетле принадлежит гипотеза, согласно которой идеальный эстетический тип – это средний человек, в котором находятся в равновесии антропологические, социально-психологические, моральные и прочие характеристики эпохи.

Как бы то ни было, работы Кетле дали мощный толчок для развития гуманитарных наук через внедрение в них естественнонаучной методологии.

В 1854 г. была опубликована книга немецкого поэта, философа, психолога и искусствоведа Адольфа Цейзинга (1810–1876) «Новое учение о пропорциях человеческого тела» (Zeizing, 1854). В этой работе Цейзинг возвращает в эстетику золотое сечение, которое со времен Кеплера было основательно забыто. Его основная мысль заключается в том, что золотое сечение есть «вообще основной принцип всякого созидания, стремящегося к красоте и цельности, как в царстве природы, так и в области искусства. Оно изначально представлялось высшей целью и идеалом всякого образования форм и отношений, как космических, так и индивидуальных, как органических, так и неорганических, как звуковых, так и световых, но лишь в человеческом теле нашло свое полнейшее осуществление» (Цейзинг, 1854; цт. по: Тимердинг, 2005, с. 57). Появление книги Цейзинга можно объяснить, с одной стороны, и лавинообразным увеличением количества обмерных чертежей (Петров, Прянишников, 1979). Следует учитывать и то обстоятельство, что в XIX в. чрезвычайно популярной была идея целостности, и желание восстановить утраченные фрагменты античных статуй на основе того, что уцелело. Возникла задача реконструкции, а вместе с ней и необходимость разработки инструментария, обеспечивающего ее решение. Именно в это время из запасников научного и художественного знания на свет божий были извлечены

воспоминания о пропорционировании и разнообразных пропорциях, в том числе и золотом сечении. Что касается собственно исследований Цейзинга, то всеобщность закона золотого сечения не была строго доказана ни самим Цейзингом, ни позднее его многочисленными последователями, например, Францем К. Пфейфером. Тимердинг (Тимердинг, с. 56–57) высказывает сомнения в корректности, достоверности и единообразия проведения измерений, хотя и не отрицает, что в определенных обстоятельствах такое сечение возникает. Позиция Тимердинга естественна, поскольку во времена Цейзинга еще не было строгих методик статистического наблюдения и обработки данных.

Экспериментально–эстетические исследования через некоторое время продолжены Густавом Теодором Фехнером (1801–1887) – один из основателей экспериментальной психологии (психофизики, психометрии).

Одна из задач, которые решал Фехнер, непосредственно связана с золотым сечением (Fechner, 1876). Она заключалась в том, что информантам предъявлялись прямоугольные предметы с разным соотношением сторон. Испытуемые должны были высказать степень своего предпочтения конкретной фигуре в определенной шкале. После этого результаты подвергались статистической обработке. Фехнером было установлено, что наибольшей «симпатией» у испытуемых пользовался прямоугольник с соотношением сторон 21:34, равным золотому сечению, т. е. 0,618. Любопытно, что делимое и делитель являются «соседями» в классической последовательности Фибоначчи. Исследования Фехнера имели множество продолжений и остаются популярными вплоть до настоящего времени в перцептивной эстетике, математике гармонии и искусствометрии. Но и у такого подхода очень много оппонентов и нескончаемой критики. Но сама идея редко подвергается сомнению. Благодаря работам Фехнера математика гармонии внедрилась в пространство психологии.

Фехнеру принадлежит еще одно достижение, связанное, как нам кажется, с гармонией. Речь идет о законе Вебера-Фехнера, согласно которому интенсивность ощущения пропорциональна логарифму интенсивности стимула. Этому закону можно поставить в параллель концепцию гармонии, идущую из античности и популярную в последующее эпохи (Аристотель, Декарт). Это гармония между произведением искусства и впечатлении (например, удовольствием), испытываемым реципиентом. Представляется, что математическая интерпретация гармонии такого рода еще ждет своего исследователя.

Эксперименты Фехнера вызвали интерес во всем мире. Два американца – Лайтнер Уитмер (Witmer, 1893, с. 209) и Эдгар Пирс (Pears, 1893) – усовершенствовали его методику и использовали ее на более представительном материале. Аналогичные исследования в области цветовых впечатлений были произведены Д. Р. Мейджером (Meurger), Ионасом Коном (Cohn) и др.

Были предприняты и качественной интерпретации результатов Фехнера через категории более высокого порядка.

Так, Вильгельм Вундт (1832–1920) считал, что, испытывая удовлетворение при виде образца золотого сечения, мы при этом фактически сознаем выражаемую им золотую пропорцию. Соотношение, в котором целое относится к большей части, как большая часть к меньшей, воспринимается нами как средство унификации максимального разнообразия с помощью минимальных усилий. Таким образом, эстетическое удовлетворение выступает у Вундта как результат экономии мышления (Гильберт, Кун, 1960, с. 558).

Освальд Кюльпе (1862–1915) в 1893 г. пытался подкрепить эту точку зрения ссылкой на закон Вебера (цит. по: Гилберт, Кун, 1960, с. 558).

Уитмер утверждал, что в зеркальной симметрии преобладает единство (эстетическое равновесие), тогда как в золотом сечении ведущую роль играет многообразие (эстетический контраст). Поэтому золотое сечение является истинной средней величиной между избытком и недостатком разнообразия (Witmer, там же, с. 261 и далее).

К этому же времени относится и зарождение антропометрии, основоположником которой является французский исследователь Альфонс Бертильон (1853–1914).

Бертильон работал писарем в одной из полицейских префектур Парижа. Его задачей было заполнение карточек описания личности преступников. В них то и дело повторялись признаки: «высокого», «низкого», «среднего» роста, «лицо обычное», «никаких особых примет». Все эти описания подходили к тысячам людей. Бертильон, видя бессмысленность и бесполезность своей работы, он обратился к трудам Кетле, в которых излагалась идея среднего человека, основанная на многопараметрических измерениях. Эти измерения вели к синтезу типа личности. Измеряя рост, длину и объём головы, длину рук, пальцев, стоп, Бертильон убедился, что размеры отдельных частей разных лиц могут совпадать, но размеры четырёх, пяти частей тела одновременно не бывают одинаковыми.

Метод Бертильона стал работать, его взяли на вооружение во многих странах. И только с появлением дактилоскопии, метод Бертильона ушел в тень, сохранив свое теоретическое значение, как предвестник многомерного статистического анализа. Прикладное значение этого позднее стало очевидным: сначала в биометрии, а затем — практически во всех описательных дисциплинах, прежде всего в задачах диагностики: от диагностики неисправностей в технических объектах, до идентификации говорящих по данным речи.

Несколькими годами позднее после первого успешного эксперимента Бертильона вышла книга австрийского специалиста в области классической филологии В. Диттенбергера (Dittenberger, 1988) который решал задачу определения авторства фрагментов диалогов Платона по стилистическим признакам, с использованием статистических методов. Диттенбергер основывался на гипотезе о том, что частоты служебных слов (предлогов, союзов, частиц) в текстах одного и того же автора относительно постоянны, не завися от тематики текста, но частоты тех же слов в текстах разных авторов

имеют существенные различия. Такой подход позволил фрагменты текста диалогов приписать Платону и не-Платону, а затем уже осуществить более дробную идентификацию. Сам Диттебергер назвал свой метод стилеметрией, распространив его также и на датировку текстов. Диттенбергер имел много последователей, в том числе и в России. Среди них следует прежде всего упомянуть Н. А. Морозова, который для отличения плагиата от подлинного произведения использовал частотные распределения служебных слов (Морозов, 1915). Познавательные принципы стилеметрии и ее задачи были отрефлексированы уже в конце XX в. (Мартыненко, 1989).

К перечисленным выше измеряющим дисциплинам примыкает биометрия, которая сложилась в XIX веке, главным образом, благодаря трудам Фрэнсиса Гальтона (1822–1911), а затем Карла Пирсона (1857–1936). В книге Гальтона, посвященной наследственности, изданной в 1889 г. им впервые было введено в употребление слово «*biometry*». В этой книге им были изложены также основы корреляционного анализа. Содержание биометрии составляют статистические методы, применяемые в биологии, медицине, сельском хозяйстве, экологии. В стройную научную дисциплину превратил её математик Карл Пирсон (1857–1936). Но это уже случилось в начале XX в.

Отметим также, что существенной чертой творчества Гальтона является то, что при исследовании корреляции он имел в виду не только установившиеся пропорции между явлениями, а процесс совместных изменений явлений, т. е. пропорционирование рассматривалось в динамике (Дружинин, 1979, с. 177).

Завершает череду метрических дисциплин XX в. эконометрика, у истоков которой стоял итальянский инженер, экономист и социолог Вильфредо Парето (1848–1923) – один из основоположников теории элит. По мысли Парето, общество имеет пирамидальную структуру, на вершине которой находится элита – социальный слой, руководящий и направляющий жизнь всего общества. При построении этой теории Парето использовал, по-видимому, идеи своей диссертации «Принципы равновесия в твердых телах».

Он является автором Закона Парето (Принципа Парето, Принципа 20/80) – эмпирического правила, введенное социологом Вильфредо Парето (Pareto, 1897–1988). Этот принцип часто соблюдается в самых разных областях. Например, в том, что 20 % людей обладают 80 % капитала, или 80 % пользователей посещают 20 % сайтов, 20 % покупателей или клиентов (постоянных) приносят 80 % прибыли. Этот принцип находит широкое применение в экономике и в других научных дисциплинах. Весьма популярно также статистическое распределение, носящее его имя.

К идеям Парето органично примыкают исследования выдающегося русского мыслителя Владимира Ильича Ульянова-Ленина, который построил теорию классового расслоения общества, опираясь на массовое наблюдение. Эта теория строилась на многопараметрическом анализе хозяйств (городских и сельских) и построении их группировок по системе признаков, отражающих степень их экономической значимости. Ленин осознал чрезмерную растянутость вариации значений такого рода признаков и отказывается от

общих (огульных) средних, переходя к групповым средним, которые вычисляются для относительно однородных в классовом отношении групп. Первые серьезные шаги в этом научном направлении Ленин сделал в 1897 г. в книге «Развитие капитализма в России», а в последующих работах на материале хозяйств европейских стран и США развил эту теорию. Серьезным достижением Ленина является и применение метода пропорционирования в массовом анализе экономических систем. Так, по материалам переписи населения Петербурга 1890 г. Ленин определил, что все торгово-промышленное население разбивается по социальному положению так: крупная буржуазия – около 7%, зажиточная мелкая – 10%, беднейшие мелкие хозяева – 22%, *пролетариат* – 61% (не золотое ли здесь сечение?). Аналогичные пропорции Ленин получил и для крестьянских хозяйств (Ленин, с. 61–180; Рябушкин, 1978, с. 161–162).

## 5. Математико-гармонические итоги Нового времени

1. Если раньше математизации подвергалась прежде всего механика, то теперь математические методы охватили практически всю физику и проникли даже в общественные науки: экономику, демографию, социологию, эстетику и даже лингвистику. Это была своего рода небольшая революция. Математика становится воистину междисциплинарной.

В методологическом отношении математика перешла на новую, более высокую ступень абстракции, предмет ее стал гораздо более общим и поэтому вширь и вглубь выросли возможности ее приложений.

2. Сложная эстетическая жизнь столетия породила ряд интересных эстетико-гармонических концепций, среди которых были рассмотрены взгляды Новалиса, Гегеля и Ницше.

3. На фоне этих будоражащих воображение математических и эстетических собственно достижений XIX в. теоретические математико-гармонические изыскания выглядят довольно скромно.

Однако, два достижения – последовательность Люка и формула Бине заняли прочное место в истории математико-гармонических изысканий.

4. Недостаток теоретических изысканий с лихвой компенсируется обилием экспериментальных исследований, которые стали откровенно математико-гармоническими уже в данную эпоху, а некоторые стали таковыми уже в XX в.

Особую важность имеют измерения Цейзинга, который придал всеобщую значимость (не без преувеличения) закону золотого сечения, а также работы Фехнера, который также поддержал значимость золотого сечения, но уже в рамках экспериментально-психологической теории. Существенные предпосылки для развития математико-гармонических представлений в будущем были заложены Бертильоном и Кетле (антропометрия), Гальтоном (биометрия), Кетле (искусствометрия), Парето, Ульяновым-Лениным (эконометрия) и Диттебергером (стилеметрия).

## Литература

*Вересаев В. В.* Живая жизнь: О Достоевском и Л. Толстом: Аполлон и Дионис (о Ницше). М.: Политиздат, 1991.

*Гилберт К., Кун Г.* История эстетики. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

*Дружинин Н. К.* Развитие основных идей статистической науки. М.: Статистика, 1979.

*Кетле А.* Социальная система и законы, ею управляющие. СПб, 1866.

*Кетле А.* Социальная физика или опыт исследования о развитии человеческих способностей. Киев, 1911.

*Литературная теория немецкого романтизма* // Л.: Изд. Писателей, 1935.

*Петров В. М., Прянишников Н. Е.* Формулы прекрасных пропорций // Число и мысль. Вып. 2. М.: Знание. М., 1979. С. 72–92.

*Ленин В. И.* Полн. собр. соч., т. 3. М.: 1965.

*Локар Э.* Руководство по криминалистике. Москва, Юридическое издательство НКЮ СССР, 1941. С. 544.

*Мартыненко Г. Я.* Основы стилеметрии. Л.: Издательство ЛГУ, 1988.

*Мартыненко Г. Я.* Модель гармонии сложных социальных систем. Труды VII Всероссийской конференции по финансово-актуарной математике и смежным вопросам. Т. 1, Красноярск, СФУ, 2008, С. 148–173.

*Тимердинг Г. Е.* Золотое сечение. Перевод с нем. М.: Комкнига, 2005.

*Торвальд Ю.* Сто лет криминалистики. М.: Издательство «Прогресс», 1974. С. 440.

*Ницше Ф.* Падение кумиров: Сборник. Перевод с нем. СПб: Азбука-классика, 2008.

*Ницше Ф.* Рождение трагедии из духа музыки. Перевод с нем. СПб: «Азбука классика», 2007.

*Рябушкин Е. В.* Ленинское наследие и статистика. М.: Наука, 1978.

*Эстетика раннего французского романтизма.* М., 1982.

---

*Dittenberger W.* Sprachliche Kriterien für Chronologie der Platonische Dialoge. Hermes 16. Berlin, 1881. S. 321–345.

*Fechner G. T.* Vorschule der Ästhetik, 2 Bände, Leipzig, 1876.

*Pierce, E.* Aesthetics of simple forms. Psychological Review, 1894, 1, 483–495.

*Cohn J.* Experimentelle Untersuchungen über die Gefühlsbetonung der Farben, Heiligkeiten und ihrer Combinationen // Philos. Studien 10, 562–603 (1894).

*Mager D.* On the Affective Tone of Simple Sense-Impressions // The American Journal of Psychology, 1895, VII, p. 270–295.

*Witmer L.* Zur experimentellen Ästhetik einfacher? Raumlichen Formverhältnisse // Philosophische Studien, 1893.

---

*Zeising A.* Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers.  
Leipzig, 1854.

*Pareto W.* Cours d'économie politique. v. 1–2, Lausanne, 1896–1897.

---