А.П. Стахов

Взгляд на «Математику Гармонии» сквозь призму «Элементарной Математики»

Возникает вопрос, какое место в общей теории математики занимает созданная Стаховым Математика Гармонии? Мне представляется, что в последние столетия, как выразился когда-то Н.И. Лобачевский, «*математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою*». В результате между «элементарной математикой», лежащей в основе современного математического образования, и «высшей математикой» образовался разрыв. И этот разрыв, как мне кажется, и заполняет Математика Гармонии, разработанная А.П. Стаховым. То есть «Математика Гармонии» - это большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «Математики Гармонии» для математического образования.

Академик Ю.А. Митропольский

Мы делим ноль на ноль. И делим бесконечность
На бесконечное число ненулевых частей.
И, между прочим, всё уходит в вечность
Под звон бокалов и разгул страстей.

Юрий Цымбалист

Оглавление

1. Введение

Первый эпиграф к данной статье взят из отзыва академика Митропольского, опубликованного на сайте «АкадемияТринитаризма» [1]. Ключевая идея эпиграфа:

«Математика Гармонии - это большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «Математики Гармонии» для математического образования».

Что имеет в виду Ю.А. Митропольский? Для ответа на этот вопрос попытаемся вначале ответить на вопрос: что такое «элементарная математика»? Оказывается, что слово «элементарный» в различных словарях имеет неоднозначное толкование. В русскоязычных словарях (например, в Толковом словаре под ред. С.И. Ожегова и Н.Ю. Шведовой и Толковом словаре русского языка под ред. Д.Н. Ушакова) основной акцент при толковании этого слова состоит в том, что под «элементарным» понимается нечто простейшее, известное каждому, поверхностное, упрощенное (элементарные правила вежливости, элементарные истины, элементарный взгляд на вещи и т.д.)

Однако, в Словарях иностранных слов смысл этого понятия трактуется по-другому. **Элементарный** [лат. elementarily] – это первоначальный, основной, фундаментальный. Такой смысл этого слова наиболее ярко проявляется в таком физическом понятии как «элементарные частицы», под которыми понимаются физически мельчайшие известные нам частицы материи с постоянными массами покоя и зарядами, характеризующими различные взаимодействия (слабые, сильные, электромагнитные и гравитационные), в которых участвуют частицы; к элементарным частицам относятся фотон, электрон, позитрон, протон, нейтрон и др.; каждой элементарной частице соответствует так называемая античастица, при столкновении с которой происходит аннигиляция частиц и т.д. Вряд ли кто-либо осмелится назвать «элементарные частицы» чем-то поверхностным, упрощенным, простейшим, известным каждому. Наоборот, теория «элементарных частиц» - это одна из наиболее сложных теорий современной физики, от которой зависит наше представление об окружающем нас физическом мире.

Имеются ли подобные понятия в математике? Безусловно, имеются. Например, понятие «иррационального числа» может быть отнесено к разряду таких «элементарных», то есть, фундаментальных понятий математики. Это же относится и к понятию «натурального числа». Эти два «элементарных» понятия и являются тем фундаментом, на котором стоит вся математика, как высшая, так и элементарная. Этот же глубокий смысл мы вкладываем в понятие «элементарный», когда мы говорим о «Началах» или «Элементах» Евклида или «Математических началах натуральной философии» Ньютона.

В связи с указанными выше диаметрально противоположными смыслами понятия «элементарный» мы можем по-разному трактовать и само понятие «элементарная математика». В русскоязычной литературе наиболее распространенным является следующая трактовка этого термина. Обычно под «элементарной математикой» (в отличие от высшей) понимают ту часть математики, которую преподают в начальной и средней школе. То есть, элементарной математике противопоставляется высшая математика, которая обладает высшей математической значимостью. Элементарная математика трактуется как нечто «школьное», упрощенное, недостойное внимания «чистого математика». Несмотря на распространенность термина, четко очерченных границ того, что входит в элементарную математику, не существует. Обычно в элементарную математику включают элементарную геометрию, начала алгебры и тригонометрию.

Но из проведенных рассуждений вытекает, что имеет право на существование и другая точка зрения на «элементарную математику», которой мы придерживаемся в настоящей статье. Согласно этой точке зрения, **«элементарная математика» - это та часть математики, которая содержит первоначальные, основные, фундаментальные понятия, лежащие в основе высшей математики, которая является развитием «элементарной математики». В «элементарной математике» содержатся наиболее стабильные математические знания, которые проверены человеческой практикой в процессе развития математики и которые лежат в основе математического образования.** Именно такой подход к «элементарной математике» развит в двухтомнике выдающегося математика **Феликса Клейна** «Элементарная математика с точки зрения высшей» [3, 4].

Кроме понятий «натурального и иррационального числа, к числу таких фундаментальных («элементарных») понятий математики относятся основные геометрические понятия, такие как точка, линия, плоскость, объем, простейшие плоские и объемные геометрические фигуры. К числу таких же «элементарных» понятий относятся фундаментальные математические константы – числа π и e - и порождаемые ими «элементарные функции», в частности, тригонометрические, экспоненциальная, логарифмическая, гиперболические функции и т.д.

Согласно Колмогорову [5], в развитии математики можно выделить следующие периоды:

1. **Период зарождения математики** (догреческий период)
2. **Период элементарной математики** (от 6–5 в. до н. э. до 17-го столетия). Наверное, ни у кого не вызывает сомнений, что, выделяя «период элементарной математики» в качестве одного из важнейших периодов развития математики, **А.Н. Колмогоров**, придерживался такого же взгляда на «элементарную математику», как и **Феликс Клейн** [3, 4]. В период зарождения математики и период элементарной математики создавались исходные, фундаментальные понятия, которые лежат в основе математики.
3. **Период математики переменных величин** (17-й век – начало 19-го века). В 17 в. новые запросы естествознания и техники заставляют математиков изучать движение, процессы изменения величин, преобразования геометрических фигур. Ответом математики на эти запросы стало создание *аналитической геометрии Декарта*, а также *дифференциального и интегрального исчисления.*
4. **Период современной математики.** Как подчеркивает А.Н. Колмогоров [4], «дальнейшее расширение круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, привело в начале 19 в. к необходимости отнестись к процессу расширения предмета математических исследований сознательно, поставив перед собой задачу систематического изучения с достаточно общей точки зрения возможных типов количественных отношений и пространственных форм». По мнению Колмогорова, этот период начинается с создания русским математиком Николаем Лобачевским так называемой *«неевклидовой геометрии»*, которая является «первым значительным шагом в этом направлении».

Среди математиков распространено мнение, что создание «элементарной математики» завершилось в 17 в., после открытия *логарифмов*. После этого начался период *математики переменных величин* и затем *период современной математики*. В эти периоды интерес к развитию «элементарной математики» значительно уменьшился. На это обстоятельство в свое время обратил внимание Николай Лобачевский:

«Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она далека от совершенства. Это произошло от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою».

В настоящей статье делается попытка показать, что процесс развития «элементарной математики» никогда не прекращался, и в 21-м веке это привело к созданию «Математики Гармонии» [2] как нового междисциплинарного направления современной науки и нового вида «элементарной математики». В рамках этого математического направления в разряд «элементарных понятий» математики предлагается включить **«золотое сечение»**, которое является еще одной фундаментальной математической константой, а также так называемые **«обобщенные золотые сечения»** или **«золотые p-сечения»** (p=0, 1, 2, 3, ...) и «**металлические пропорции»,** которые вместе расширяют наши представления о гармонии естественных систем. Такими же «элементарным понятиями» являются **обобщенные числа Фибоначчи»** или ***p*-числа Фибоначчи** (p=0, 1, 2, 3, ...), которые выражают некоторые неизвестные ранее свойства *треугольника Паскаля.* К разряду таких же «элементарных понятий» относятся **коды Фибоначчи, система счисления Бергмана, коды золотой пропорции,** которые переворачивают наши представления о системах счисления. Из этих «элементарных понятий» вытекает концепция **компьютеров Фибоначчи,** которая является революционной идеей в области информатики и может повернуть ход развития современной компьютерной науки. Еще одна область, которой касается «Математика Гармонии», - это *гиперболическая геометрия.* В этой области к числу новых «элементарных» понятий относится **гиперболические функции Фибоначчи и Люка,** которые были использованы Олегом Боднаром для создания *новой геометрической теории филлотаксиса*, а также так называемая **«золотая» фибоначчиевая гониометрия**, которая была использована Алексеем Стаховым и Самуилом Арансоном для решения *4-й проблемы Гильберта.* Эти примеры можно было бы продолжить. Таким образом, в рамках «Математики Гармонии» созданы новые математические теории и получены новые математические результаты, которые могут фундаментально повлиять на развитие высшей математики и образования, информатики и всего теоретического естествознания.

В настоящей статье делается попытка рассмотреть «Математику Гармонии» [2] сквозь призму «элементарной математики», на что обратил внимание академик Митропольский в своем отзыве [1].

2. История развития греческой математики, «Начала» Евклида и «гипотеза Прокла»

2.1. *Ключевые проблемы в развитии «элементарной математики»*

Период элементарной математики непосредственно связан с периодом зарождения математики, который относится, прежде всего, к математике Древнего Египта и Вавилона. Какие же главные проблемы решала математика на этапе своего зарождения? Ответ на этот вопрос дал **А.Н. Колмогоров** в своей замечательной книге [5]:

«Счет предметов на самых ранних ступенях развития культуры привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над натуральными числами четырех арифметических действий... Потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т.д.) приводит к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и к разработке приемов выполнения арифметических действий над дробями. Таким образом, накапливается материал, складывающийся постепенно в древнейшую математическую науку – арифметику. Измерение площадей и объемов, потребности строительной техники, а несколько позднее – астрономии, вызывают развитие начатков геометрии. Эти процессы шли у многих народов в значительной мере независимо и параллельно. Особенное значение для дальнейшего развития науки имело накопление арифметических знаний в Египте и Вавилонии. В Вавилонии на основе развитой техники арифметических вычислений появились также начатки алгебры, а в связи с запросами астрономии – зачатки тригонометрии».

Основной вывод, который вытекает из этого высказывания выдающегося математика, состоит в том, что на этапе зарождения математики ее развитие в значительной степени стимулировалось двумя **ключевыми проблемами –** *проблемой счета,* которая привела к возникновению первых систем счисления (Вавилонская 60-ричная система и египетская десятичная (непозиционная) система счисления) и в конечном итоге, к формированию понятия **натурального числа –** одного из фундаментального понятия математики - и *проблема* *измерения,* которая привела к развитию начатков *геометрии* (Древний Египет) и в конечном итоге привела к введению понятия **иррационального числа –** второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики. Развитие этих двух *ключевых проблем* привело к созданию двух фундаментальных теорий математики – **теории чисел** и **теории измерения.**

2.2. *Позиционный принцип представления чисел и позиционные системы счисления*

Возникает вопрос: были ли сделаны на этапе зарождения математики какие-либо фундаментальные математические открытия, которые повлияли на развитие математики, образования и всей материальной культуры? Автор статьи берет на себя смелость утверждать, что таким открытием является **позиционный принцип представления чисел,** который был воплощен вавилонянами в их 60-ричной системе счисления. Этот принцип представления чисел лежит в основе двух важнейших систем счисления – *десятичной* и *двоичной.*

Каждый человек на земном шаре, окончивший хотя бы четыре класса начальной или «церковно-приходской» школы, знает, по меньшей мере, две полезные вещи: он умеет писать и читать и использовать *десятичную систему счисления* для выполнения простейших арифметических операций. И эта система кажется нам настолько простой и элементарной, что многие из нас с большим недоверием отнесутся к утверждению, что десятичная система является одним из *крупнейших математических открытий за всю историю математики.* И чтобы убедить читателя в этом, обратимся к мнению «авторитетов».

Пьер Симон Лаплас (1749-1827), французский математик, член Парижской академии наук, почетный иностранный член Петербургской академии наук:

«Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой».

М.В. Остроградский (1801-1862), русский математик, член Петербургской академии наук и многих иностранных академий:

«Нам кажется, что после изобретения письменности самым большим открытием было использование так называемой десятичной системы счисления. Мы хотим сказать, что соглашение, с помощью которого мы можем выразить все полезные числа двенадцатью словами и их окончаниями, является одним из самых замечательных созданий человеческого гения …»

Жюль Таннери (1848-1910), французский математик, член Парижской академии наук:

«Что касается до нынешней системы письменной нумерации, в которой употребляется девять значащих цифр и ноль, и относительное значение цифр определяется особым правилом, то эта система была введена в Индии в эпоху, которая не определена точно, но, по-видимому, после христианской эры. Изобретение этой системы есть одно из самых важных событий в истории науки, и несмотря на привычку пользоваться десятичной нумерацией, мы не можем не изумляться чудной простоте ее механизма».

Таким образом, как подчеркивают многие выдающиеся математики, открытие вавилонянами позиционного принципа, а затем индусами десятичной системы счисления (8 с.), а также разработка двоичной арифметики (Лейбниц, 17 в.), которая лежит в основе современных компьютеров, по праву можно отнести к разряду действительно эпохальных математических открытий за всю историю математики, которые повлияли на развитие материальной культуры, в частности, на развитие современных информационных технологий.

2.3. *Пифагор и его роль в развитии древнегреческой науки и математики*

Как подчеркивает **А.Н. Колмогоров** [5], *«ясное понимание самостоятельного положения математики как особой науки, имеющий собственный предмет и метод, стало возможным только после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в 6-5 вв. до н.э.»* К этому времени можно приурочить начало *периода элементарной математики.*

Одной из легендарных фигур, повлиявших на развитие греческой математики, без всякого сомнения, является **Пифагор** (ок. 570 – ок. 500 до н.э.). Это имя известно каждому человеку, изучавшему геометрию и знакомому с *теоремой Пифагора* – одной из самых известных теорем геометрии. Знаменитый философ и ученый, религиозный и этический реформатор, влиятельный политик, полубог в глазах своих учеников и шарлатан, по отзывам некоторых из его современников, – таковы отображения Пифагора в античной литературе. Об исключительной популярности Пифагора уже при жизни свидетельствуют монеты с его изображением, выпущенные в 430–420 гг. до н. э. Для 5-го века до н. э. это случай беспрецедентный! Пифагор первым из греческих философов удостоился специально посвященного ему сочинения.

Бюст Пифагора в Капитолийском Музее (Рим)

Мы не будем останавливаться на детальном анализе биографии Пифагора. Отметим только один факт. Большинство историков математики сходятся во мнении, что Пифагор длительное время провел в Египте (22 года), а затем в Вавилонии (12 лет), где он познакомился с мудростью египетских и вавилонских жрецов. Возвратившись из своих многолетних путешествий, он учредил в Кротоне – греческой колонии на юге Апеннинского полуострова - свой знаменитый *Пифагорейский союз*, который был одновременно и религиозным братством, и политическим клубом, и научным обществом.

Считается, что **выдающаяся роль Пифагора в развитии греческой науки состоит в исполнении исторической миссии в передаче знаний египетских и вавилонских жрецов в культуру Древней Греции.** Именно благодаря Пифагору, который был, без всякого сомнения, одним из наиболее образованных мыслителей своего времени, греческая наука получила огромный объем знаний в области философии, математики и естественных наук, которые, попав в благоприятную среду древнегреческой культуры, способствовали ее бурному развитию и приумножению.

Именно Пифагор ввел в древнегреческую науку **идею гармонии**. Идея простых числовых соотношений, экспериментально обнаруженных пифагорейцами в музыке, обрела у них «космические масштабы» и переросла в идею **Всеобщей или Мировой Гармонии**. Пифагорейцы начали утверждать, что вся Вселенная устроена на основе простых числовых отношениях и что движущиеся планеты издают «музыку небесных сфер», а обычная музыка является лишь отражением царящей всюду «всеобщей гармонии». Таким образом, музыка и астрономия были сведены пифагорейцами к анализу числовых закономерностей, то есть, к арифметике и геометрии. Все четыре дисциплины стали считаться математическими и называться одним словом – «математика».

Учение о «гармонии сфер», о единстве микро- и макрокосмоса, учение о числах и геометрических пропорциях – все эти идеи и составляют основу пифагорейского учения о гармонии. Главный вывод, который вытекает из пифагорейского учения, состоит в том, что **гармония объективна, она существует независимо от нашего сознания и выражается в гармоничном устройстве всего сущего, начиная с космоса и заканчивая микромиром.**

2.4. *Открытие несоизмеримых отрезков*

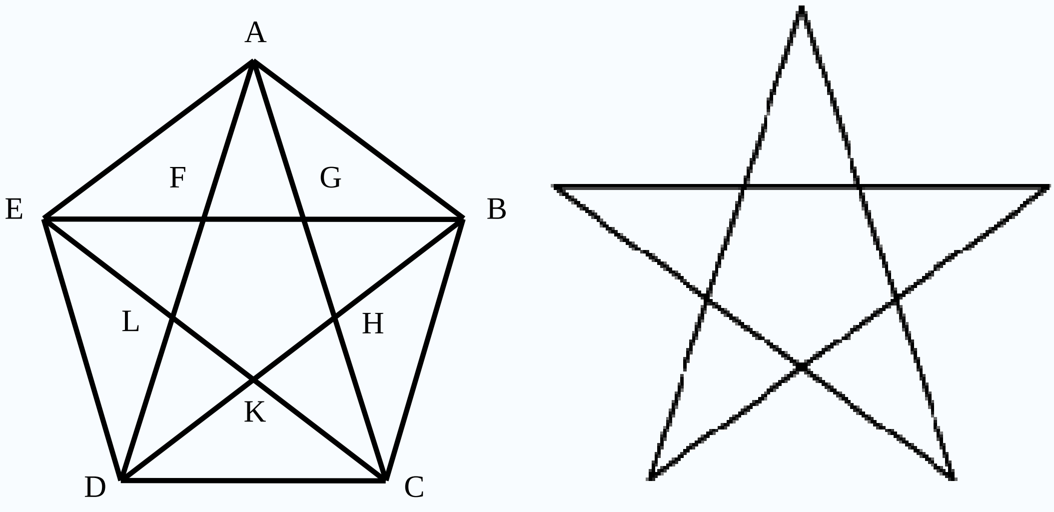
Наиболее известным геометрическим открытием Пифагора является открытие **несоизмеримых отрезков**, то есть, обнаружение таких отрезков, отношение которых не может быть выражено с помощью отношения целых чисел. Открытие *несоизмеримости* опрокидывало всю философскую систему пифагорейцев, поскольку они были убеждены, что «весь мир в целом является гармонией и числом». Чтобы выйти из затруднительного положения, пифагорейцы стали представлять величины не арифметически – числами, а геометрически – отрезками. Так возникла *геометрическая алгебра*.

Открытие несоизмеримых отрезков, которое привело к открытию **иррациональных чисел**, стало поворотным пунктом в развитии математики. В настоящее время считается, что это открытие является одним из наиболее значительных математических открытий за всю историю математики и что оно стоит в одном ряду с открытием дифференциального и интегрального исчисления Ньютоном и Лейбницем в 17 в., открытием неевклидовой геометрии Лобачевским в 19 в. или теории относительности Эйнштейна в начале 20 в.

2.5. *Пентаграмма и «золотое сечение»*

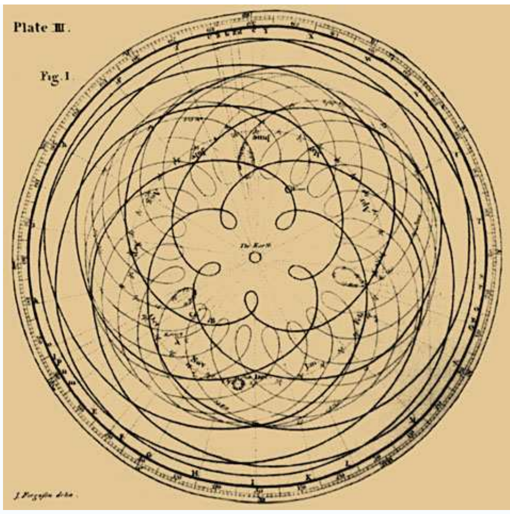
Особое внимание пифагорейцы уделяли *пентаграмме* - пятиконечной звезде, образованной диагоналями *правильного пятиугольника* или *пентагона*. Видимо, именно благодаря совершенной форме и богатству математических свойств пентаграмма была выбрана пифагорейцами в качестве символа здоровья и тайного опознавательного знака. С легкой руки пифагорейцев пятиконечная звезда и сегодня является символом многих государств и реет на флагах многих стран мира.

Если учесть отношение пифагорейцев к пентаграмме, то нет никаких сомнений, что при изучении пентаграммы, которая буквально «напичкана» золотыми сечениями, пифагорейцы открыли «золотое сечение», то есть, мы имеем полное право приписать пифагорейцам знание «деления отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотого сечения»). А.В. Волошинов пишет [6]: *«В пентаграмме пифагорейцы обнаружили все известные в древности пропорции: арифметическую, геометрическую, гармоническую, а также знаменитую золотую пропорцию или золотое сечение»*.



Пентагон и пентаграмма

Однако, особое отношение пифагорейцев к пентаграмме связано не только с эстетическими свойствами этой замечательной геометрической фигуры, но и с некоторыми астрономическими наблюдениями, в частности, с движением Венеры по небосводу. Для наблюдателя из Земли, странные «блуждания Венеры» по небосводу выглядят как некоторое «геометрическое чудо». Изучая восьмилетний цикл Венеры, древние астрономы обнаружили, что Венера описывает на небосводе сложный узор, подобный розе. Земля находится в центре картины. Если бы соединим вершины лепестков этой небесной розы вместе, как это делали древние астрономы, то при этом возникает пятиконечная звезда, называемая *пентаграммой*.



Удивительно то, что «цикл Венеры» повторяется с колоссальной точностью. Из этого астрономического феномена некоторые современные авторы сделали вывод, что наша Вселенная не является результатом «случая» и в основе этой «неслучайной» Вселенной лежит «золотая пропорция» - главная пропорция пентаграммы. Но не будем развивать эту тему, чтобы автора не обвинили в эзотеризме и «лженауке».

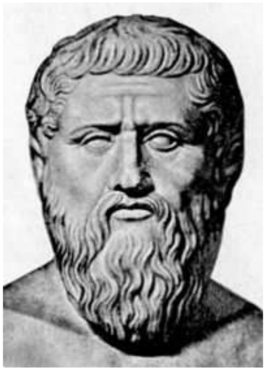
2.6. *О введении термина «Математика гармонии» для обозначения пифагорейской математики*

В 1994 г. опубликован словарь *The Oxford Dictionary of Philosophy* [13], который был переиздан в 2005 г. В статье «Гармония сфер» подчеркивается, что учение о гармонии сфер «восходит еще к Пифагору и объединяет вместе математику, музыку и астрономию. В сущности, небесные тела, будучи большими объектами, в своем движении должны продуцировать музыку. Совершенство небесного мира требует, чтобы эта музыка была гармоничной, но это скрыто от наших ушей только потому, что всегда присутствует. **Математика гармонии была центральным открытием огромной важности для пифагорейцев».**

Таким образом, значение словаря [13] состоит в том, что в нем впервые в истории науки введено понятие «Математика гармонии» для обозначения пифагорейской математики.

2.7. *Платоновы тела – крупнейшее геометрическое открытие античной науки*

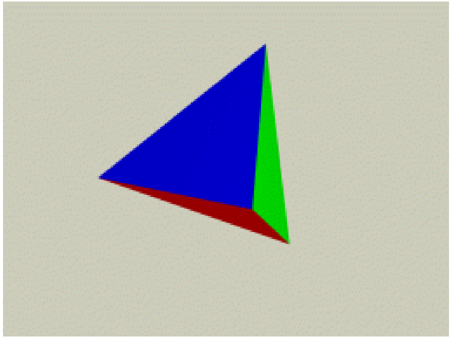
Учение Пифагора было продолжено многими учеными и последователями, которые считали себя пифагорейцами. Одним из них был великий греческий философ Платон (427-347 гг. до н.э.).



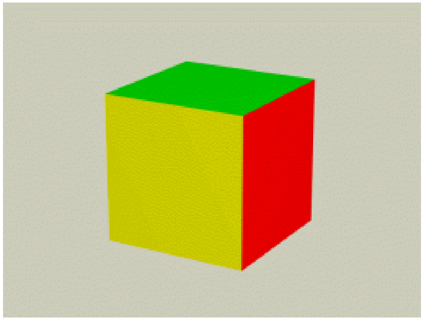
Широкую известность получила знаменитая философская школа – *Платоновская Академия,* которая была основана Платоном в 385 г. до н.э. Название берет свое начало от названия парка на северо-западе Афин, где и была расположена эта философская школа. Предание говорит, что при входе в свою Академию Платон сделал надпись: *"Негеометр – да не войдет»*. Любовь к геометрии привил Платону его друг пифагореец Архит. Многое в платоновской Академии было устроено по образцу пифагорейского союза. Тот же пифагорейский строгий распорядок дня, аскетизм и чистота нравов, воздержание от мясной пищи, скромность совместной трапезы определяли быт и нравы Академии. Так, в ежедневных беседах с учениками, раздумьях и упражнениях духа прошло 20 лет - лучшая и самая плодотворная пора в жизни Платона. В этот период он создал свои лучшие произведения – диалоги «Пир», «Теэтет», «Федр», «Федон», «Государство», «Тимей», «Критий» и др.

Рассуждая о математических достижениях Платона, мы должны, прежде всего, упомянуть об использовании им *правильных многогранников* в созданном им учении о строении материи. В этой связи эти многогранники получили название **Платоновых тел**.

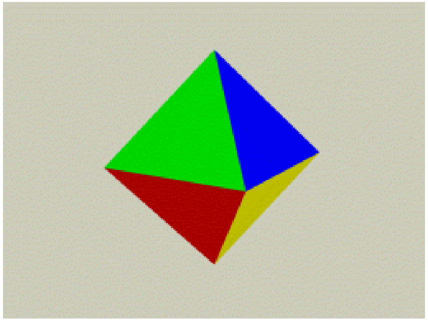
Четыре первых многогранника олицетворяли в *космологии Платона* четыре сущности или "стихии". *Тетраэдр* символизировал *Огонь*, так как его вершина устремлена вверх; *Икосаэдр* - *Воду*, так как он самый "обтекаемый" многогранник; *Куб* - *Землю*, как самый "устойчивый" многогранник; *Октаэдр* - *Воздух*, как самый "воздушный" многогранник. Пятый многогранник, *Додекаэдр*, воплощал в себе "все сущее", «Вселенский разум», символизировал *Эфир* и считался *главной геометрической фигурой мироздания.*



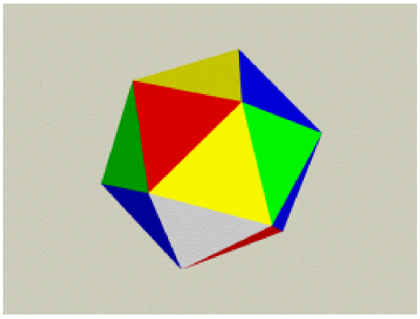
(а)



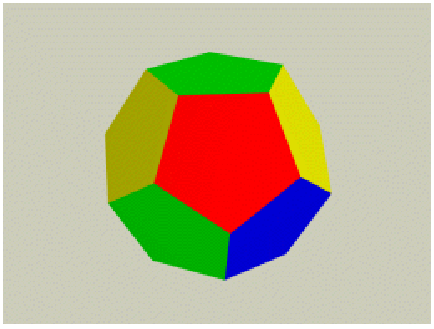
(б)



(в)



(г)



(д)

Платоновы тела: (а) октаэдр («Огонь»), (б) гексаэдр или куб («Земля»), (в) октаэдр («Воздух»), (г) икосаэдр («Вода»), (д) додекаэдр («Вселенский разум»)

Итак, главная идея Пифагора и Платона состояла в выдвижении идеи о гармоничном устройстве Мироздания. В процессе исторического развития науки и математики к этой идее было неоднозначное отношение. Но, несмотря на это, проблема гармони оказалась весьма живучей. Она по праву оносится к разряду «вечных» проблем науки, которые, по выражению **Э.М. Сороко** [7], «постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль».

Как подчеркивает **В. П. Шестаков** в своей замечательной книге «Гармония как эстетическая категория» [8], *«в истории эстетических учений выдвигались самые* *разнообразные типы понимания гармонии. Само понятие «гармония» употреблялось чрезвычайно широко и многозначно. Оно обозначало и закономерное устройство природы и космоса, и красоту физического и нравственного мира человека, и принципы строения художественного произведения, и закономерности эстетического восприятия».*

Шестаков выделяет три основных понимания гармонии, сложившихся в процессе развития науки и эстетики:

1. *Математическое понимание гармонии* или *математическая гармония*. В этом смысле гармония понимается как равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым. В Большой Советской Энциклопедии мы находим следующее определение гармонии, которое выражает математическое понимание гармонии: **«Гармония – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия».** «Цикл Венеры», ботаническое явление филлотаксиса, пентагональная симметрия, спираль наутилуса – все это яркие примеры математической гармонии природы.
2. *Эстетическая гармония*. В отличие от математического понимания, эстетическое понимание является уже не просто количественным, а качественным, выражающим внутреннюю природу вещей. Эстетическая гармония связана с эстетическими переживаниями, с эстетической оценкой. Наиболее четко этот тип гармонии проявляется при восприятии красоты природы и музыки.
3. *Художественная гармония.* Этот тип гармонии связан с искусством. Художественная гармония – это актуализация принципа гармонии в материале самого искусства.

Возникает вопрос: какое отношение проблема гармонии имеет к математике? Для ответа на этот вопрос нам придется проанализировать *Начала* Евклида – выдающееся математическое сочинение древнегреческой науки.

2.8. *«Начала» Евклида как основа «элементарной математики»*

В настоящее время каждый школьник знает, кто такой Евклид, который написал самое значительное математическое сочинение греческой эпохи – *Начала* Евклида. *Начала* состоят из тринадцати книг (отделов, или частей). Мы не будем останавливаться на анализе содержания этого математического сочинения. Заметим только, что это научное произведение создано Евклидом в 3 в. до н. э. и содержит основы античной математики: элементарную геометрию, теорию чисел, алгебру, теорию пропорций и отношений, методы определения площадей и объемов и др. Нетрудно усмотреть в этом перечне те математические знания и теории, которые составляют основу современной «элементарной математики», преподаваемой в средней школе. Для дальнейшего также важно обратить внимание на то, что 13-я, то есть, заключительная книга *Начал*, посвящена геометрической теории *Платоновых тел.*

2.9. *Гипотеза Прокла*

Возникает вопрос: с какой целью Евклид написал свои *Начала*? На первый взгляд, кажется, что ответ на этот вопрос очень простой: главная цель Евклида состояла в том, чтобы изложить основные достижения греческой математики за 300 лет, предшествующих Евклиду, используя «аксиоматический метод» изложения материала. Действительно, *Начала* Евклида являются главным трудом греческой науки, посвященным аксиоматическому построению геометрии и математики. Такой взгляд на *Начала* наиболее распространен в современной математике.

Однако, кроме «аксиоматической» точки зрения существует и другая точка зрения на мотивы, которыми руководствовался Евклид при написании *Начал*. Эта точка зрения высказана греческим философом и математиком **Проклом Диадохом** (412-485), одним из первых комментаторов *Начал* Евклида.

Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его *«Комментарий к первой книге «Начал» Евклида»*. В этом Комментарии он выдвигает следующую необычную гипотезу, которую называют *гипотезой Прокла*. Суть ее состоит в следующем. Как упоминалось, 13-я, то есть, заключительная книга *Начал* посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые в современной науке известны под названием *Платоновых тел*. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [7], по мнению Прокла, Евклид **«создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики».**

Анализ *гипотезы Прокла* содержится во многих источниках. Рассмотрим некоторые из них [9-11]. В книге [9] утверждается: «Согласно Проклу, главная цель «Начал» состояла в том, чтобы изложить построение так называемых Платоновых тел»**.**

В книге [10] эта идея получает дальнейшую конкретизацию: «Прокл, еще раз упоминая всех предшествующих математиков Платоновского кружка, говорит: "Евклид жил позже, чем математики Платоновского кружка, но раньше, чем Эратосфен и Архимед, ... Он принадлежал к школе Платона и был хорошо знаком с философией Платона и именно поэтому он поставил главной целью своих «Начал» построение так называемых Платоновых тел».

Этот комментарий важен для нас тем, что в нем обращается внимание на связь Евклида с Платоном. Евклид полностью разделял философию Платона и его космологию, основанную на *Платоновых телах*; именно поэтому он и поставил главной целью своих *Начал* создание геометрической теории *Платоновых тел*.

2.10. *Влияние «Начал» Евклида на научное творчество Иоганна Кеплера*

Как известно, в своей первой книге *Mysterium Cosmographicum* (1596), Кеплер создал оригинальную модель Солнечной системы, основанной на *Платоновых телах* и названой им *Космическим кубком*. Эта модель нас интересует, прежде всего, с точки зрения отношения Кеплера к «гипотезе Прокла». **Craig Smorinsky** в книге [11] обсуждает влияние идей Платона и Евклида на Иоганна Кеплера: *«Кеплеровский проект в Mysterium Cosmographicum состоял в том, чтобы дать "истинные и совершенные причины для чисел, величин и периодических движений небесных орбит". Совершенные причины должны основываться на простых принципах математического порядка, который Кеплер нашел в Солнечной системе, используя многочисленные геометрические демонстрации. Общая схема его модели была взята Кеплером из Платоновского Тимея, но математические соотношения для Платоновых тел (пирамида, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) были взяты Кеплером из трудов Евклида и Птоломея. При этом Кеплер следовал Проклу в том, что "главная цель Евклида состояла в том, чтобы построить геометрическую теорию так называемых Платоновых тел". Кеплер полностью был очарован Проклом, которого он часто цитирует и называет «пифагорейцем»*.

Из этой цитаты мы можем сделать вывод, что Кеплер использовал *Платоновы тела* для создания своего *Космического кубка*, но при этом все математические соотношения для *Платоновых тел* были взяты им из 13-й книги «Начал», то есть, он объединил в своих исследованиях *Космологию Платона* с *Началами Евклида*. **При этом главное, что он полностью верил в *гипотезу Прокла* о том, что первичной целью «Начал» было дать завершенную геометрическую теорию *Платоновых тел,* которые и были использованы Кеплером в его геометрической модели Солнечной системы.**

2.11. *Икосаэдр как главный геометрический объект математики*

Следует заметить, что среди пяти *Платоновых тел* икосаэдр и додекаэдр занимают особое место. В Платоновой космологии *икосаэдр* символизировал воду, а *додекаэдр* – гармонию Мироздания. Эти два *Платоновых тела* непосредственно связаны с *пентаграммой,* которая описывает движение Венеры по небосводу, а через него – с золотой пропорцией. *Додекаэдр* и *икосаэдр* лежат в основе так называемой *додекаэдро-икосаэдрической доктрины*, которая пронизывает историю всей человеческой культуры, начиная от Пифагора и Платона. И, наверное, нельзя считать случайным, что эта доктрина получила неожиданное развитие в трудах выдающегося немецкого математика **Феликса Клейна** (1849 -1925).

Кроме *Эрлангенской программы* и других выдающихся математических достижений, гениальность Феликса Клейна проявилась также в том, что более чем 100 лет назад он сумел предсказать выдающуюся роль *Платоновых тел*, в частности, *икосаэдра*, в будущем развитии науки, в частности, математики. В 1884 г. Феликс Клейн опубликовал книгу «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» [12], посвященную геометрической теории икосаэдра.

В первой части книги определено и объяснено место *икосаэдра* в математике. Согласно Ф. Клейну, ткань математики широко и свободно разбегается листами отдельных теорий. Но есть объекты, в которых сходятся несколько листов, - своеобразные точки ветвления. Их геометрия связывает листы и позволяет охватить общематематический смысл разных теорий. Именно таким математическим объектом, по мнению Клейна, является *икосаэдр*. **Клейн трактует икосаэдр как математический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий: *геометрия, теория Галуа, теория групп, теория инвариантов и дифференциальные уравнения.***

Таким образом, главная идея Клейна чрезвычайно проста: **«каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра».**

Значение «икосаэдрической» идеи Клейна было оценено ровно через 100 лет, то есть, только в 1984 г., когда израильский физик Дан Шехтман опубликовал статью, подтверждающую существование специальных сплавов (названных квазикристаллами), обладающих так называемой «икосаэдрической» симметрией, то есть симметрией 5-го порядка, что строго запрещено классической кристаллографией.

Таким образом, еще в 19 в. гениальная интуиция Феликса Клейна привела его к мысли о том, что одна из древнейших геометрических фигур – *икосаэдр* – является главной геометрической фигурой математики. Тем самым Клейн в 19 в. вдохнул новую жизнь в развитие «гипотезы Прокла» и «додекаэдро-икосаэдрического представления» о структуре Вселенной, последователями которого были великие ученые и философы: Платон, построивший свою космологию на основе правильных многогранников, Евклид, посвятивший свои «Начала» изложению теории *Платоновых тел*, Иоганн Кеплер, использовавший *Платоновы тела* при создании своего *Космического кубка,* оригинальной геометрической модели Солнечной системы.

3. Новый взгляд на историю возникновения математики

3.1. *Значение гипотезы Прокла для развития математики*

Главный вывод из «гипотезы Прокла» состоит в том, что «Начала» Евклида, величайшее греческое математическое сочинение, было написано Евклидом под непосредственным влиянием греческой идеи гармонии, которая была воплощена в *Платоновых телах*. Таким образом, «гипотеза Прокла» позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке *"Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания» и «Космология Платона»,* основанная на правильных многогранниках, были воплощены в величайшем математическом сочинении греческой математики, *Началах* Евклида. С этой точки зрения мы можем рассматривать *Начала* Евклида как **первую попытку создать Математическую теорию гармонии мироздания**, которая ассоциировалась в античной науке с *Платоновыми телами*. И это было главной идеей греческой науки! Это и есть главная тайна «Начал» Евклида, которая приводит к пересмотру истории возникновения математики.

К сожалению, **оригинальная гипотеза Прокла, касающаяся истинных целей, которые преследовал Евклид при написании *Начал,* проигнорирована современными историками математики, что привело к искаженному взгляду на историю, структуру и цели как математики, так и всего математического образования**. И это является главной «стратегической ошибкой» в развитии математики. Самое любопытное, что проигнорировано не только революционная идея **Прокла**, но также мнение о «гипотезе Прокла» **Иоганна Кеплера**, который был не только гениальным астрономом, но и гениальным математиком. Проигнорирована также «икосаэдрическая идея» **Феликса Клейна**, имя которого широко известно в математике 19 и 20-го веков.

3.2. *«Гипотеза Прокла»* и *«ключевые» проблемы античной математики*

Как упоминалось выше, академик Колмогоров в книге [5] выделил две главные, то есть, «ключевые» проблемы, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения - **проблему счета** и **проблему измерения.** Однако, из «гипотезы Прокла» вытекает еще одна «ключевая» проблема **– проблема гармонии,** которая была связана с «Платоновыми телами» и «золотым сечением» - одним из важнейших математических открытий античной математики (Предложение II.11 «Начал» Евклида). **Именно эта проблема была положена Евклидом в основу его *Начал,* главной целью которых было создание геометрической теории «Платоновых тел», которые в «космологии Платона» выражали гармонию Мироздания.** И мы не имеем права игнорировать «гипотезу Прокла», точку зрения на эту гипотезу Иоганна

Кеплера и «икосаэдрическую идею Феликса Клейна. Эта идея приводит к новому взгляду на историю математики, изображенному на рисунке.

Подход, демонстрируемый с помощью рисунка, основан на следующих рассуждениях. Уже на начальных этапах развития математики было сделано ряд важных, можно даже сказать, эпохальных математических открытий, которые повлияли как на развитие математики и математического образования, так и всей науки и материальной культуры в целом. Важнейшими из них являются:

1. **Позиционный принцип представления чисел,** сформулированный вавилонскими математиками во 2-м тысячелетии до н.э. и воплощенный ими в Вавилонской 60-ричной системе счисления. Это важное математическое открытие лежит в основе всех последующих позиционных систем счисления, в частности, *десятичной системы* и *двоичной системы* - основы современных компьютеров. Это открытие, в конечном итоге, привело к формированию понятия **натурального числа –** первого «элементарного», то есть, фундаментального понятия, лежащего в основе как элементарной, так и высшей математики.

2. **Доказательство существования несоизмеримых отрезков.** Как упоминалось, это открытие, сделанное в научной школе Пифагора, сыграло революционную роль в развитии всей математики. Оно привело к переосмысливанию ранней пифагорейской математики, в основе которой лежал «принцип соизмеримости величин», и к введению **иррациональных чисел –** второго (после натуральных чисел) «элементарного», то есть, фундаментального понятия

математики. В конечном итоге, эти два «элементарных понятия» (натуральные и иррациональные числа) и были положены в основу «Классической Математики».

3. **Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»).** Впервые описание этого открытия дано в Книге II *Начал* Евклида (Предложение II.11). Это предложение было введена Евклидом с целью создания полной геометрической теории «Платоновых тел» (в частности, додекаэдра), изложению которых посвящена заключительная (13-я) книга *Начал*. Как известно, «золотое сечение» стало своеобразным каноном древнегреческого искусства и затем широко использовалось в искусстве Возрождения, а также в искусстве 19-го и 20-го веков. В 13 веке знаменитый итальянский математик Фибоначчи вводит важную числовую последовательность – *числа Фибоначчи,* непосредственно связанные с «золотым сечением». Математическая теория чисел Фибоначчи получила дальнейшее развитие в работах французских математиков 19-го века Бине *(«формулы Бине»*) и Люка (*«числа Люка»*). Во второй половине 20-го века эта теория получила развитие в работах советского математика Николая Воробьева и американского математика Вернера Хогатта. Развитие этого направления, в конечном итоге, привело к возникновению «Математики Гармонии» [2] - нового междисциплинарного направления современной науки, которое имеет отношение к современной математике, компьютерной науке, экономике, образованию и, в конечном итоге, ко всему теоретическому естествознанию. **Мы не имеем права игнорировать «золотое сечение» хотя бы потому, что великий Кеплер сравнил «золотое сечение» с «теоремой Пифагора» - выдающимся математическим открытием античной математики.**

Сформулированный выше подход приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что **параллельно с «Классической Математикой» в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – «Математика Гармонии», которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Предложение II.11) и на теории правильных многогранников, изложенной в 13-й книге «Начал» Евклида.** И в развитии «Математики Гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители и ученые: **Пифагор, Платон, Евклид, Пачиоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн**, а в 20-м веке – известные математики **Воробьев и Хогатт**. В 21 в. пришла пора объединить «Математику Гармонии» с «Классической Математикой» и этот союз может привести е новым научным открытиям.

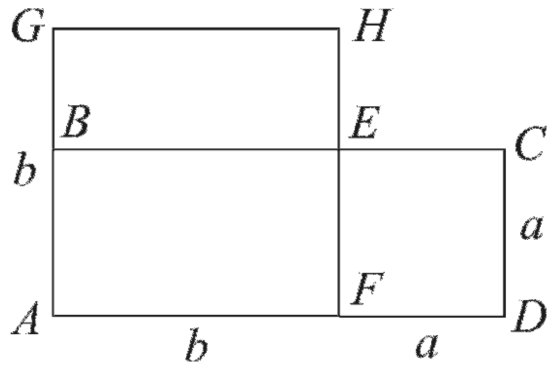
4. Золотое сечение: начало «математики гармонии»

4.1. *Предложение II. 11 «Начал» Евклида*

Итак, уже на начальном этапе *периода элементарной математики* в древнегреческой математике было введено важное «элементарное», то есть, фундаментальное понятие – *золотое сечение*. Это понятие широко встречается в «Началах» Евклида, начиная с Книги II. Речь идет о *делении отрезка в крайнем и среднем отношении*, называемым в современной науке **«золотым сечением»** [14, 15]. В «Началах» Евклида эта задача встречается в двух формах. Первая форма сформулирована в виде Предложения 11 Книги II «Начал» Евклида [16-18].

Предложение II. 11. *Данную прямую AD разделить на две неравные части AF и FD так, чтобы площадь квадрата, построенного на большем отрезке AF, равнялась бы площади прямоугольника, построенного на отрезке AD и меньшем отрезке FD.*

Вникнем в суть этой задачи. Для этого изобразим эту задачу геометрически:



Деление отрезка в крайнем и среднем отношении

Таким образом, согласно Предложению II. 11 при делении в крайнем и среднем отношении площадь квадрата *AGHF* должна быть равна площади прямоугольника *ABCD*. Если обозначить длину большего отрезка *AF* через *b* (она равна стороне квадрата *AGHE*), а сторону меньшего отрезка через *a* (она равна вертикальной стороне прямоугольника *ABCD*), то условие Предложения II. 11 можно записать в следующем алгебраическом виде:

$$b^2 = a \times (a + b) \tag{1}$$

4.2. ***Комментарии Мордухай-Болтовского***

«Начала» Евклида переведены на многие языки мира. Наиболее авторитетным изданием сочинения Евклида на русском языке являются «Начала» в переводе и с комментариями **Д.Д. Мордухай-Болтовского** [16-18]. Один современный «исследователь» утверждает, что «задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» никакого отношения не имеет к «золотому сечению». В этой связи интересно ознакомиться со следующими комментариями Мордухай-Болтовского, касающимися «золотого сечения»:

«Теперь посмотрим, какое место занимает золотое сечение в «Началах» Евклида. Прежде всего, нужно отметить, что оно встречается в двух формах, разница между которыми почти неощутима для нас, но была очень существенной в глазах греческого математика VI–V веков до н. э. Первая форма, прототип которой мы видели в Египте, является в Книге II «Начал», а именно в Предложении 11 вместе с вводящими его предложениями 5 и 6; здесь золотое сечение определяется как такое, в котором квадрат, построенный на большем отрезке, равняется прямоугольнику на всей прямой и меньшем отрезке. Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему – и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен Евдокса. Интересно отметить, что предложениям 5, 6 и 11 книги II соответствуют предложения 27, 28 и 30 – шестой. Затем, предложения 5 и 6 книги II разорвали связь между предложениями 4 и 7, соответствующим нашим формулам квадратов суммы и разности; «та же фигура», о которой упоминается в предложении 7, строится в 4-м.

В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1–5 и во второй – в предложениях 8–10. Правда, в формулировке и тексте доказательства 1–5 предложений встречаются слова «в крайнем и среднем *отношении», в доказательствах есть некоторые следы пользования пропорциями, но при внимательном чтении нетрудно заметить, что все эти места не связаны органически с общим текстом и легко из него могут быть исключены; все доказательство по существу ведётся, исходя из равенства на большем отрезке прямоугольнику ... Более того, предложение 2 книги XIII по существу равнозначно геометрическому построению предложения 11 книги II.*

Все это позволяет думать, что предложения 4, 7, 8 книги II и предложения 1–5 книги XIII представляют остатки одного из самых древних в истории греческой геометрии документов, восходящего, по всей вероятности, к первой половине V века и возникшего в пифагорейской школе на основании того материала, который был привезен из Египта. Сравнительную древность этого документа можно установить из того обстоятельства, что предложения 4 и 7 книги II служат в ней для доказательства обобщенной теоремы Пифагора [квадрат стороны против острого и тупого угла (предложения 12 и 13 книги II)], которая, несомненно, была известна Гиппократу Хиосскому ... Несмотря на то, что первые пять предложений книги XIII составляют одно целое с рядом предложений книги II, нужно отметить, что при непосредственном использовании предложений книги II (в особенности предложения 11, которое и даёт построение золотого сечения) доказательства были бы в отдельных случаях значительно проще»

Мы можем сделать следующие выводы из этих комментариев:

1. Во-первых, в «Началах» Евклида имеется не одна (Предложение II.11), а, по крайней мере, две различные формулировки задачи о «золотом сечении». Приведем ещё раз цитату Мордухай-Болтовского: «Вторую форму мы имеем в определении 3 книги VI, где золотое сечение определяется пропорцией – как вся прямая к большему отрезку, так и больший отрезок к меньшему – и называется делением в крайнем и среднем отношении; в этой форме золотое сечение могло быть известным только со времен Евдокса». И далее: «В книге XIII золотое сечение является в обеих указанных формах, а именно в первой форме в предложениях 1–5 и во второй – в предложениях 8–10». То есть, Евклид широко использует в своих «Началах» как первую форму (Предложение II.11 и предложения 1–5 книги XIII), так и вторую форму как представление золотого сечения в виде пропорции (предложение 3 книги VI и предложения 8–10 книги XIII).

2. В задаче о золотом сечении Мордухай-Болтовский усматривет «египетский след» и явно намекает на Пифагора, который 22 года провел в Египте и привез оттуда огромное количество египетских математических знаний, включая теорему Пифагора и золотое сечение. Отсюда вытекает, что Мордухай-Болтовский не сомневался в том, что не только Евклид, но и Пифагор (а отсюда следует, что и Платон, который был пифагорейцем), а также и древние египтяне знали о золотом сечении и широко его использовали. В этой связи «сенсационные заявления» некоторых «ученых» о том, что Пифагор и Платон не знали о «золотом сечении» не выдерживает серьезной критики.

4. 3. *Современная формулировка задачи о «золотом сечении»*

Перейдем теперь ко второй форме формулировки задачи о золотом сечении, о которой упоминает Мордухай-Болтовский. Вторая форма вытекает из первой, задаваемой выражением (1), если проделать следующие преобразования. Разделив обе части выражения (1) вначале на *a*, а затем на *b*, получим следующую пропорцию:

$$\frac{b}{a}=\frac{a+b}{b} \tag{2}$$

Пропорция (2) имеет следующую геометрическую трактовку. Разделим отрезок *AB* точкой *C* в таком отношении, чтобы большая часть отрезка *CB* так относилась к меньшей части *AC*, как отрезок *AB* к своей большей части *CB*, то есть:

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{AC} \tag{3}$$

Это и есть определение «золотого сечения», используемое в современной науке.

Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)

Из пропорции (3) легко прийти следующему алгебраическому уравнению:

$$x^2 - x - 1=0. \tag{4}$$

Из «физического смысла» пропорции (3) вытекает, что искомое решение уравнения (4) должно быть положительным числом, откуда вытекает, что решением задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении является положительный корень уравнения (4), который мы обозначим через Ф, то есть:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{5}$$

Это и есть то знаменитое число, которое имеет много восхитительных названий: *золотое сечение*, *золотое число*, *золотая пропорция*, *божественная пропорция*.

Именно это удивительное число, обладающее уникальными алгебраическими свойствами, стало эстетическим каноном древнегреческого искусства и искусства эпохи Возрождения. Кто же ввел термин «золотое сечение»? Наиболее часто введение этого названия приписывают Леонардо да Винчи. Однако существует мнение, что великий Леонардо не был первым. Согласно утверждению **Эдуарда Сороко** [7], термин *“aurea section”* (*«золотое сечение*) восходит к книге Птолемея «О гармонии».

Выведенное выше алгебраическое уравнение (4) часто называют *уравнением золотой пропорции*. Заметим, что на отрезке *AB* существует еще одна точка *D*, которая делит его золотым сечением, так как:

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

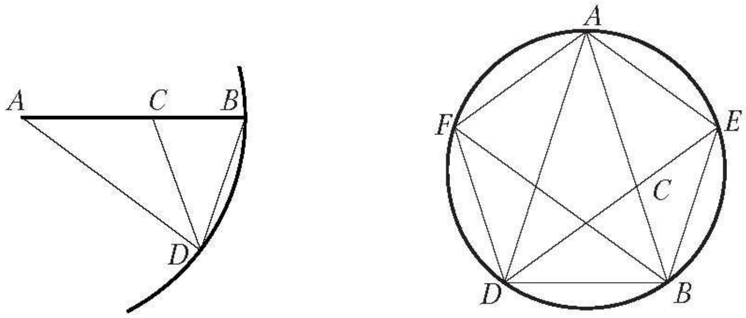
Обозначение золотого сечения греческой буквой Ф (число PHI) не является случайным. Эта буква является первой буквой в имени знаменитого греческого скульптора **Фидия (Phidius),** который широко использовал «золотое сечение» в своих скульптурных произведениях.

4.4. ***Как Евклид использовал «золотое сечение»?***

Возникает вопрос: зачем Евклид ввел в своих «Началах» различные формы «задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение»), которые встречаются в Книгах II, VI и XIII? Для ответа на этот вопрос мы вновь возвратимся к *Платоновым телам*. Мы знаем, что гранями *Платоновых тел* могут быть только три вида правильных многоугольников:

правильный треугольник (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр), *квадрат* (куб) и *правильный пятиугольник* или *пентагон* (додекаэдр). Для того чтобы сконструировать *Платоновы тела,* мы должны прежде всего уметь геометрически (то есть, с помощью линейки и циркуля) построить грани *Платоновых тел*. У Евклида не было никаких проблем с построением *правильного* или *равностороннего треугольника* и *квадрата,* однако он столкнулся с определенными трудностями при конструировании *правильного пятиугольника* или *пентагона.*

Именно для этой цели Евклид в Книге II ввел «золотое сечение», представленное в «Началах» в двух формах. Используя «золотое сечение», Евклид вначале конструирует *«золотой» равнобедренный треугольник,* чьи углы при основании равны удвоенному углу при вершине, а затем переходит к конструированию *правильного пятиугольника,* после чего переходит к конструированию додекаэдра.



«Золотой» равнобедренный треугольник (*а*) и пентагон (*б*)

5. Три основных периода в развитии «золотой» парадигмы

5.1. *Что такое «золотая» парадигма древних греков?*

Для ответа на этот вопрос обратимся еще раз к некоторым высказываниям гения российской науки, исследователя эстетики Античной Греции и эпохи Возрождения **Алексея Лосева** (1893 - 1988). В статье [19] он высказывает следующую интересную мысль:

«*Космос античным мыслителям периода зрелой классики представляется не просто некоей отвлеченной неопределенностью, (в таком случае он был бы только чистой мыслью), но совершенно живым и единораздельным телом, содержащим в себе нерушимую цельность, несмотря на бесконечные различия всех его проявлений.* ***С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения (то есть, целое относится в нем к большей части, как большая часть к меньшей).*** *Этому закону, кстати сказать, древние греки подчиняли и свои архитектурные сооружения. Их систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия*».

В этом высказывании **Алексей Лосев** в очень отчетливой форме сформулировал **«золотую» парадигму античной космологии**. В ее основе лежат важнейшие идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «*курьезный результат* *безудержной и дикой фантазии»*. Прежде всего – это *пифагорейская идея о числовой гармонии мироздания* и *космология Платона,* основанная на *Платоновых телах*. Обратившись к геометрической структуре мироздания и арифметическим отношениям, выражающим гармонию, пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания оказалась бессмертной.

5.2. *Три основных периода в развитии «золотой» парадигмы*

В работе [20], которая представляет собой изложение доклада, сделанного автором на пленарном заседании Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010 г.), автор выделяет три основных периода в развитии «золотой» парадигмы древних греков:

1. **Древнегреческий период**. Условно можно считать, что этот период начинается с исследований **Пифагора** и **Платона** и заканчивается публикацией **«Начал» Евклида,** которые и являются основной математической публикацией того периода в области «Математической теории гармонии».
2. **Эпоха Возрождения**. Этот период связан с именами таких выдающихся личностей этой эпохи как **Пьеро дела Франческа** (1412-1492), **Леон Баттиста Альберти** (1404-1472), **Леонардо да Винчи** (1452-1519), **Лука Пачиоли** (1445-1517), **Иоганн Кеплер** (1571-1630). В этот период выдающийся итальянский математик эпохи Возрождения и ученый монах публикует уникальную книгу *"Divina Proportione"* (1509), которая является первой в истории науки книги, посвященной «золотому сечению». Книга написана под непосредственным влиянием **Леонардо да Винчи**, который был художником-иллюстратором этой замечательной книги, и поэтому книга Луки Пачиоли имеет не только научную, но и художественную ценность. Эта книга была одним из первых прекрасных образцов книгопечатного искусства эпохи Возрождения и оказала огромное влияние на современников. На заключительном этапе эпохи Возрождения Иоганн Кеплер публикует книгу *The Harmony of the World* («Гармония мира») (1619), в которой он формулирует свой третий *Закон Кеплера*. Следует заметить, что в этих книгах наиболее полно отражены воззрения науки Возрождения на проблему гармонии и *Пифагорейское Учение о Числовой Гармонии Мироздания.*

3. **Современный период**. Условно этот период начинается в 19 в. и его начало связано с исследованиями французских математиков **Жака Филлипа Мари Бине** (1786-1856), **Франсуа́ Эдуа́рда Анато́ля Люка́** (1842-1891), немецкого поэта и философа **Адольфа Цейзинга** (род. в 1810 г.) и немецкого математика **Феликса Клейна** (1949-1925). В первой половине 20 в. развитие «золотой» парадигмы связано с именами российского профессора архитектуры **Г.Д. Гримма** (1865-1942), немецкого математика **Г.Е. Тимердинга**, французского исследователя **Матилы Гика** и российского энциклопедиста **Павла Флоренского** (1882-1937). Во второй половине 20 в. и начале 21 в. интерес к «золотой» парадигме интенсивно возрастает во всех сферах науки, в частности, математики. В области математики наиболее яркими представителями этого направления стали советский математик **Николай Воробьев** (1925-1995) и американский математик **Вернер Хоггатт** (1921-1981).

Автор не имеет возможности развивать эти идеи более детально, отсылая к своей статье [20]. Автор убежден в том, что в современной науке существует ряд признаков, которые позволяют говорить о приближающейся **«Золотой» Научной Революции**. Во-первых, огромное количество научных открытий в области различных наук, основанных на «золотом сечении», числах Фибоначчи, Платоновых телах (квазикристаллы Шехтмана, фуллерены, «золотые» геноматрицы Петухова, закон структурной гармонии систем Сороко, геометрия Боднара, фибоначчиева интерпретация Периодической системы (Якушко) и др.). Следующим признаком является огромное количество книг и научных статей по этой теме, опубликованных во второй половине 20 в. и начале 21 в., наконец, наличие в современной науке критической массы «золотоискателей», которые активно внедряют «золотую» парадигму древних греков в современную науку и образование. Если проанализировать развитие гармоничного направления в 20 и 21 вв., то можно назвать имена известных ученых и исследователей, которые исповедовали и исповедуют «золотую» парадигму древних греков и вносят большой вклад в развитие этого направления и его приложения в различных областях науки и эстетики. К числу этих исследователей по праву принадлежат: **Сабанеев**, **Гика**, **Гримм**, **Коксетер**, **Воробьёв**, **Хоггатт**, **Бергман**, **Сороко**, **Боднар**, **Шпинадель**, **Газале**, **Каппрафф**, **Коши**, **Ливио**, **Бутусов**, **Шевелев**, **Шмелёв**, **Марутаев**, **Суббота**, **Петухов**, **Цветков**, **Семенюта, Шило и Динков**, **Харитонов**, **Черепанов**, **Татаренко**, **Васютинский**, **Петруненко**, **Иванус**, **Радюк**, **Эль Нашие**, **Розин**, **Абачиев**, **Мартыненко**, **Олсен**, **Якушко**, **Арансон, Крючкова, Егорова-Гудкова, Митяй, Когновицкий, Коновалов, Райлян, Тимошенко, Чечик, Южанников, Быстров, Клещев** и др.

Симптоматично, что уже проведен **Первый Международный Конгресс по Математике Гармонии** (Одесса, 8-10 октября 2010 г.).

В конце 20-го и начале 21-го в. в этой области опубликовано ряд книг методологического характера, которые можно назвать предвестниками «золотой» научной революции. Прежде всего, это – книга белорусского философа **Эдуарда Сороко** «Структурная гармония систем», опубликованная в 1984 г. [7]. В 2006 и 2009 гг. вышло второе и третье издание этой замечательной книги под названием «Золотое сечение, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем». Книга Э. Сороко сыграла огромную роль в консолидации научных сил вокруг «золотой» парадигмы древних греков и стала первой предвестницей приближающейся «золотой» научной революции. Главным научным результатом книги Э. Сороко [7] является формулировка *закона структурной гармонии систем*, который охватывает системы любой природы: физические, химические, технические, экономические, экологические и другие системы. Особое эстетическое очарование «закона Сороко» состоит в том, что он основан на обобщённых числах Фибоначчи и обобщённых золотых сечениях, которые в скрытой форме находятся в треугольнике Паскаля.

Еще одна книга методологического характера – это книга украинского архитектора **Олега Боднара** [21], которая была переиздана на украинском языке в 2005 г. под названием «Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві». Междисциплинарное значение работ Боднара состоит в том, что в его работах произошло объединение сразу нескольких «ключевых» открытий, теорий и гипотез современной науки – теории чисел Фибоначчи, гиперболической геометрии Лобачевского, четырехмерного пространства Минковского, как геометрической интерпретации специальной теории относительности Эйнштейна, гипотезы Вернадского о гиперболическом характере биологических объектов. Пока «геометрия Боднара» воспринимается с некоторым недоверием в научных кругах. И не вина Боднара в том, что современные ученые пока не в состоянии оценить это выдающееся открытие. Автор уверен, что наступит время, когда открытие Боднара будет внесено в реестр выдающихся научных открытий 20-го века.

Заметим, что сам факт переиздания книг Сороко и Боднара в 21 в. является свидетельством возрастания интереса научного сообщества к «золотой» парадигме древних греков.

Одной из методологических книг в этой области 21 в. является упомянутая выше книга автора **«The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science»,** опубликованная в 2009 г. международным издательством «World Scientific» [2]. Заметим, что это – первая книга украинского ученого, опубликованная всемирно известным научным издательством «World Scientific». И она закрепляет приоритет украинской науки в этой важной области.

А теперь продолжим развивать идею академика Митропольского о том, что «Математика Гармонии» является одним из вариантов «элементарной математики» в современной науке и образовании. Для этого рассмотрим под таким углом зрения основные математические теории и новые математические результаты, полученные в рамках «Математики Гармонии» [2].

6. Алгоритмическая теория измерения

В связи с бурным развитием цифровых компьютеров для обеспечения их связи в реальными объектами, в которых информация была представлена в аналоговой форме, возникла проблема создания преобразователей информации из аналоговой формы в цифровую и наоборот – аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей (АЦП и ЦАП) [22]. Именно в этой области техники возникла проблема выбора оптимальных, то есть, наилучших алгоритмов аналого-цифрового преобразования [23-27]. Именно эти исследования привели, в конечном итоге, к созданию новой теории измерения, которая была названа *алгоритмической теорией измерения* [28]. При этом оказалось, что новая теория измерения имеет прямое отношение к *математической теории измерения* [29], которая начала создаваться еще в Древней Греции и которая считается одной из фундаментальных, то есть, основополагающих теорий математики.

6.1. *Эволюция понятия «измерение» в математике*

«Проблема измерения» играет такую же значительную роль в математике, как и в других областях науки, в частности в технике, физике и других «точных» науках. Выдающийся советский математик академик Колмогоров в предисловии к книге А. Лебега [29] выразил свое отношение к этой проблеме в следующих словах: *"В чем же основной интерес книги Лебега? Мне кажется, в следующем: у математиков существует склонность, уже владея законченной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная с уже готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений. Все здание школьной алгебры и весь математический анализ могут быть воздвигнуты на понятии действительного числа без всякого упоминания об измерении конкретных величин (длин, площадей, промежутков времени и т.д.). Поэтому на разных ступенях обучения с разной степенью смелости неизменно проявляется одна и та же тенденция: возможно скорее разделаться с введением чисел и дальше уже говорить только о числах и соотношениях между ними. Против этой тенденции и протестует Лебег"*.

Проследим теперь эволюцию понятия «измерения» в математике. Как известно, первой "теорией измерений" был свод правил, которыми пользовались древнеегипетские землемеры. От этого свода правил, как свидетельствуют древние греки, берет начало геометрия, обязанная своим появлением (и названием) задаче об "измерении земли". Однако уже в Древней Греции происходит разбиение проблем измерения на *прикладные*, которые относятся к "логистике", и *фундаментальные*, относящиеся к геометрии; последние и становятся в центре античной математики.

Наука об измерении развивается в этот период преимущественно как *математическая теория*. Именно в этот период происходит открытие *несоизмеримых отрезков*, формулировка «метода исчерпывания» Евдокса и «аксиомы измерения», к которым в своих истоках восходит теория чисел, интегральное и дифференциальное исчисление. Именно эти крупнейшие открытия античной математики, связанные с измерением, дают право болгарскому математику академику

Л. Илиеву утверждать, что «*на протяжении первой эпохи своего развития – от античности и вплоть до открытия дифференциального и интегрального исчисления – математика, исследуя в первую очередь проблемы измерения величин, создала геометрию Евклида и учение о числах*» [30].

6.2. ***Аксиомы Евдокса-Архимеда и Кантора***

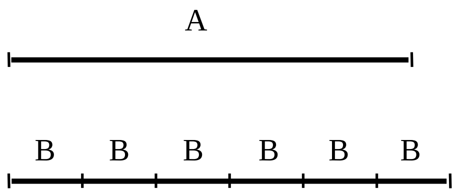
Для преодоления кризиса в основаниях античной математики, связанного с открытием «несоизмеримых отрезков», выдающийся геометр Евдокс предложил "метод исчерпывания", с помощью которого он построил остроумную *теорию отношений*, лежащую в основе античной теории континуума. "Метод исчерпывания" сыграл выдающуюся роль в развитии математики. Будучи прообразом интегрального исчисления, "метод исчерпывания" позволял античным математикам решать задачи вычисления объема пирамиды, конуса, шара. В современной математике метод исчерпывания находит свое отражение в аксиоме Евдокса-Архимеда, называемой также *аксиомой измерения*.

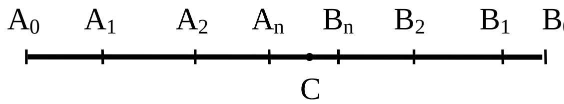
Теория измерения геометрических величин, восходящая к «несоизмеримым отрезкам», основывается на группе аксиом, называемых *аксиомами непрерывности* [24], которые включают в себя аксиомы Евдокса-Архимеда и Кантора или аксиому Дедекинда.

Аксиома Евлокса-Архимеда («аксиома измерения»):

Для любых двух отрезков A и B можно найти такое натуральное число n, чтобы

$$nB > A. \tag{6}$$





Аксиома Евдокса-Архимеда **Аксиома Кантора**

Аксиома Кантора (о «стягивающихся отрезках»):

Если задана бесконечная последовательность отрезков A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n, ..., «вложенных» друг в друга, то есть, каждый отрезок являются частью предыдущего, тогда существует по крайней мере одна точка C, общая для всех отрезков.

Главным результатом теории геометрических величин является доказательство существования и единственности решения q *«основного уравнения измерения»*:

$$Q = qV, \tag{7}$$

где V есть единица измерения; Q – измеряемая величина и q – результат измерения.

Несмотря на кажущуюся простоту сформулированных выше аксиом и всей математической теории измерения, она, тем не менее, является продуктом более чем двухтысячелетнего периода в развитии математики и содержит в себе ряд глубоких математических понятий. Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что "метод исчерпывания" и вытекающая из него аксиома измерения имеют практическое (эмпирическое) происхождение; они были позаимствованы древнегреческими математиками в практике измерений. В частности, "метод исчерпывания" является математической моделью процессов измерения объемов жидкостей и сыпучих тел путем "исчерпывания"; аксиома измерения, в свою очередь, концентрирует тысячелетний опыт человека, задолго до возникновения аксиоматического метода в математике миллиарды раз измерявшего расстояния, площади и временные интервалы, и представляет собой *сжатую формулировку алгоритма измерения* отрезка A с помощью отрезка B. Суть этого алгоритма состоит в последовательном откладывании отрезка B на отрезке A и подсчете числа отрезков B, укладывающихся на отрезке A. В современной практике измерений такой метод измерения называется *алгоритмом счета*.

6.3. ***Задача Баше-Менделеева***

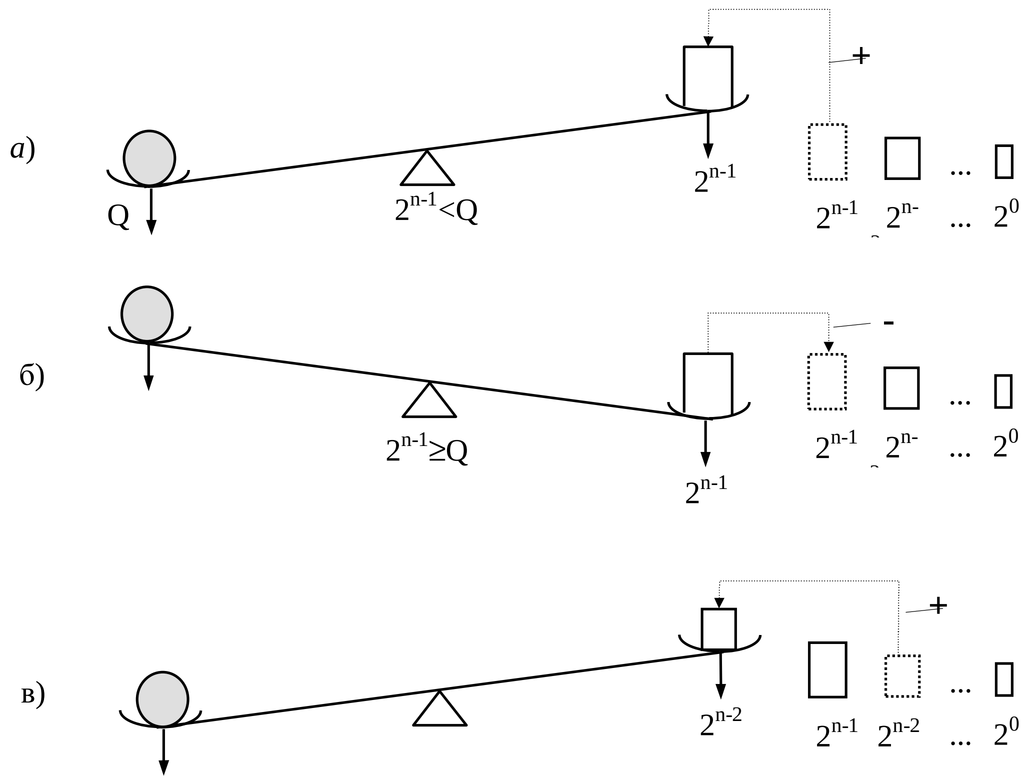
Оказывается, что знаменитый итальянский математик Фибоначчи внес существенный вклад не только в теорию чисел Фибоначчи, но и в развитие математической теории измерения, впервые сформулировав в своей книге “Liber abaci” (1202) так называемую *«задачу о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах»* или проще *«задачу о гирях»*. Из книги Фибоначчи она перекочевала в сочинения еще одного знаменитого итальянского математика **Луки Пачиоли.** Пачиоли поместил ее в свою книгу “Summa de Arithmetica, Geomeytria, Proprtioni et Proportionalita” (1494). Эта книга по праву считается математической энциклопедией эпохи Возрождения. Затем «задача о гирях» появляется в «Сборнике приятных и занимательных задач» (1612), написанном французским математиком **Баше де Мизириаком**.

В русской историко-математической литературе «задача о гирях» известна также под названием *задачи Баше-Менделеева*. Но кто такой Менделеев? Неужели это знаменитый русский химик **Дмитрий Менделеев**, автор Периодического закона. Да, это именно так. Но почему русский химик вдруг заинтересовался «задачей о гирях»? Ответ на этот вопрос дает ознакомление с некоторыми малоизвестными фактами из жизни гениального ученого. Во время происходивших в 1890 г. студенческих волнений в Петербургском университете Менделеев, который в тот период работал профессором этого университета, выступил на защиту студентов и в качестве протеста подал прошение об отставке с должности профессора университета. Его прошение было удовлетворено и поэтому в 1892 г. Менделеев был назначен ученым хранителем Депо образцовых гирь и весов, которое по инициативе Менделеева в 1893 г. было преобразовано в Главную палату мер и весов России. Ее директором Менделеев оставался до конца жизни. Таким образом, заключительный этап жизни великого ученого (с 1892 г. и до его кончины в 1907 г.) был связан с развитием измерительного дела и именно в этот период со свойственной ему активностью Менделеев интересуется различными задачами, связанными с измерениями; одной из них и была «задача о гирях». Вклад Менделеева в развитие измерительного дела в России настолько значителен, что «задача о гирях» была названа *задачей Баше-Менделеева*, а сам Менделеев по праву считается «отцом русской метрологии».

В чем же состоит суть этой задачи? Одним из наиболее древних измерительных устройств являются рычажные весы, которыми каждый из нас пользовался неоднократно. При взвешивании мы используем некоторую систему гирь; при этом «взвешивание» некоторого груза Q осуществляется путем его сравнения с гирями, имеющимися в нашем распоряжении. Процедура взвешивания, выполняемая в соответствии с некоторыми правилами, называется *алгоритмом взвешивания* или *алгоритмом измерения*. При этом возникает задача о выборе *«оптимальной» системы гирь*, которая по существу сводится к задаче о нахождении *«оптимального» алгоритма измерения*.

Известно решение сформулированной выше задачи. Оно состоит в выборе *двоичной системы гирь* $\{1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}\}$, с которыми последовательно (начиная со старшей гири) происходит сравнение измеряемого веса Q. Указанный способ измерения получил широкое распространение в измерительной практике и носит название *алгоритма поразрядного* *кодирования* или *«двоичного» алгоритма измерения*. Важно подчеркнуть, что применение этого алгоритма автоматически приводит к представлению результата измерения N в двоичной системе счисления, то есть, в результате проведенных рассуждений мы неожиданно перешли от алгоритмов измерения к способам представления чисел - и в этом состоит одно из важных практических приложений алгоритмической теории измерения.

При внимательном анализе «двоичного» алгоритма измерения обнаруживается одна его особенность, которая имеет общий характер для любых мыслимых измерений, основанных на сравнении измеряемой величины с «эталонными гирями», и наглядно может быть продемонстрирована на модели взвешивания на рычажных весах неизвестного веса $Q<2^n$ с помощью системы двоичных гирь: $\{q_1, q_2, q_3,\ldots, q_n\}$, где $q_i=2^{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$.



Принцип асимметрии измерения

На первом шаге взвешивания на правую чашу весов кладется «старшая» гиря весом 2^{n-1}, что обозначено символом «+» («добавить»). При этом после первого шага взвешивания могут возникнуть две ситуации: 2^{n-1} < Q и 2^n≥Q. В первом случае следующий шаг состоит в том, чтобы добавить (+) на правую чашу весов очередную по старшинству гирю 2^{n-2}. Во втором случае «весовщик» должен выполнить две операции: снять (-) предыдущую гирю, после чего весы возвращаются в исходное положение; после возвращения рычажных весов в исходное положение он должен добавить (+) на правую чашу весов следующую по старшинству гирю.

Следовательно, **логика любого сравнения с помощью рычажных весов *«асимметрична»*, так как предполагает различную степень сложности действий «весовщика» в зависимости от положений, в которых оказываются рычажные весы (устройство сравнения) после очередного шага сравнения; при этом действия "весовщика" после получения сигнала "больше" (правая чаша перевесила) оказываются**

"сложнее" по сравнению с его действиями после получения сигнала "меньше" (весы остались в исходном положении).

Обнаруженное свойство измерения и составляет содержание **принципа асимметрии измерения** [28]. Сложность действий «весовщика» после получения сигнала «больше» определяется двумя факторами. Во-первых, он должен снять гирю и, во-вторых, учесть время, затрачиваемое на «восстановление» весов в исходное положение. Введение *восстановительного периода* устройства сравнения (рычажных весов) и учет этого периода в математической модели измерения и его алгоритме и является центральной идеей **алгоритмической теории измерения** [28], основанной на этом принципе.

6.4. *Новая формулировка «задачи о гирях»*

Введем теперь указанный выше принцип в «задачу о гирях», предложенную Фибоначчи. С этой целью будем рассматривать измерение как процесс, протекающий в дискретные моменты времени; и пусть операция «*добавить гирю*» выполняется за одну единицу дискретного времени, а операция «*снять гирю*» (которая сопровождается возвратом рычажных весов в исходное положение) выполняется за p единиц дискретного времени, причем $p \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

Ясно, что параметр p как бы моделирует «*инерционность*» рычажных весов. При этом случай p=0 соответствует той «идеальной ситуации», когда мы пренебрегаем «инерционностью» рычажных весов. Именно этот случай и рассматривал Фибоначчи и все последующие ученые, которые изучали эту задачу. Для остальных случаев $p > 0$ мы имеем новые варианты «задачи о гирях», решение которых и составляет основное содержание алгоритмической теории измерения.

Дальнейшее обобщение задачи Баше-Менделеева состоит в увеличении рычажных весов от 1 до k (k – натуральное число), причем на левые чаши всех весов положен один и тот же груз Q (такая ситуация соответствует случаю «параллельных измерений», когда одна и та же измеряемая величина сравнивается с «эталонными величинами» с помощью k «компараторов» (такой прием широко используется при измерении электрических величин). В этом случае обобщенная «задача о гирях» может быть сформулирована следующим образом: требуется найти «оптимальный» n-шаговый алгоритм взвешивания (измерения) с помощью системы из k рычажных весов («компараторов»), обладающих «инерционностью» p, при условии, что на каждом шаге измерения гири («эталонные величины») разрешается класть на свободные чаши тех и только тех рычажных весов («компараторов»), которые на этом шаге находятся в исходном положении «больше».

Ясно, что такая задача является несравненно значительно более сложной, чем классическая «задача о гирях» (сформулированная Фибоначчи еще в 13-м веке), которая является частным случаем сформулированной выше задачи для случая k=1 и p=0. И для ее решения требуется создание специальной математической модели измерения, адаптированной к решению задач синтеза оптимальных алгоритмов измерения.

6.5. *Фибоначчиевые алгоритмы измерения*

У нас нет возможности анализировать все классы так называемых «оптимальных алгоритмов измерения», исследованных в книге [28]. Рассмотрим только один класс алгоритмов, названных *фибоначчиевыми алгоритмами измерения*. Эти алгоритмы соответствуют случаю, когда взвешивание (измерение) осуществляется с помощью одних рычажных весов, обладающих «инерционностью» p=0,1,2,3,... . Доказано, что при заданном p оптимальная система гирь представляет собой следующее множество гирь:

$$\{F_p(n), F_p(n-1), F_p(n-2), ..., F_p(i), ..., F_p(2), F_p(1),\}, \qquad (8)$$

в котором вес каждой гиря $F_p(i)$ связан с весами предыдущих гирь следующим рекуррентным соотношением:

$$\begin{aligned} &F_p(i) = F_p(i-1) + F_p(i-p-1) \\ &F_p(1) = F_p(2) = F_p(3) = ... = F_p(p+1) = 1 \end{aligned} \qquad (9)$$

Если последовательно задаваться различными значениями p=0,1,2,3,..., то рекуррентная формула (9) будет последовательно порождать бесконечное число новых рекуррентных числовых последовательностей, приведенных в таблице.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F_0(n)$	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$F_1(n)$	1	1	2	3	5	8	13	21	34
$F_2(n)$	1	1	1	2	3	4	6	9	13
$F_3(n)$	1	1	1	1	2	3	4	5	7
$\vdots$	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$F_\infty(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Наиболее неожиданными являются случаи p=0 и p=1. Для случая p=0 оптимальная система гирь является «двоичной», а для случая p=1 – «фибоначчиевой», так как числовая последовательность $F_1(n): 1,1,2,3,5,8,13,21,...$ представляет собой знаменитые *числа Фибоначчи*, описанные Фибоначчи в книге “Liber abaci” (1202) при решении задачи «о размножении кроликов».

На этом основании числовые последовательности $F_p(n)$, задаваемые рекуррентной формулой (9), были названы *обобщенными числами Фибоначчи* или *p-числами Фибоначчи* [28]. Ни у кого не вызывает сомнений в том, что *числа Фибоначчи*, как впрочем и вся *теория чисел Фибоначчи* [29] относятся, прежде всего, к «элементарной математике». Но ведь в этом случае мы полное право отнести к «элементарной математике» и *p-числа Фибоначчи*, задаваемые рекуррентной формулой (9). Итак, благодаря *алгоритмической теории измерения* современная «элементарная математика» пополнилась новыми числовыми последовательностями.

6.6. *Треугольник Паскаля и обобщенные числа Фибоначчи*

В математике, прежде всего, в комбинаторике хорошо известен один математический объект, получивший название *треугольника Паскаля*. Он представляет таблицу биномиальных коэффициентов, расположенных в виде треугольной таблицы, и представляет собой один из восхитительных математических объектов, относящихся к «элементарной математике».

Известный американский математик, писатель, популяризатор науки **Ма́ртин Га́рднер** (1914- 2010) написал о треугольнике Паскаля следующие замечательные слова:

«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике».

Возникает вопрос: существует ли связь между треугольником Паскаля и p-числами Фибоначчи? Оказывается, существует. Более того. Именно треугольник Паскаля и является источником многих математических результатов, которые были положены в основу «Математики Гармонии» [2].

Как известно, существует много различных форм представления треугольника Паскаля. Для наших исследований нам будет удобно использовать способ представления биномиальных коэффициентов в виде таблицы, напоминающей прямоугольный треугольник. Такую таблицу биномиальных коэффициентов мы будем называть *прямоугольным треугольником Паскаля.*

Прямоугольный треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Такая таблица начинается с «нулевого столбца», который содержит единственный биномиальный коэффициент C_0^0=1 и из «нулевой строки», который содержит биномиальные коэффициенты: $C_0^0 = C_1^0 = C_2^0 = ... = C_n^0 = 1$. Заметим, что «гипотенуза» *прямоугольного треугольника Паскаля* состоит из биномиальных коэффициентов типа $C_0^0 = C_1^1 = C_2^2 = ... = C_n^n = 1$.

Заметим также, что в n-м столбце сверху вниз расположены следующие биномиальные коэффициенты: $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$; при этом все клетки под «гипотенузой» являются «пустыми». Это означает, что все биномиальные коэффициенты типа C_n^m ($m>n$) тождественно равны нулю, то есть,

$$C_n^m = 0 \text{ при } m>n. \tag{10}$$

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты n-го столбца рассматриваемого треугольника Паскаля, то мы получим «двоичное число» 2^n. Если это сделать для всех столбцов, начиная с нулевого, то мы получим широко известный нам «двоичный ряд чисел»:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …., 2^n, … . \tag{11}$$

Таким образом, треугольник Паскаля «генерирует» двоичный ряд чисел!

А теперь сдвинем каждую строку исходного треугольника Паскаля на один столбец вправо относительно предыдущей строки. В результате такого преобразования мы получим некоторый «деформированный» треугольник Паскаля, который мы будем называть *1-треугольником Паскаля.*

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты 1-треугольника Паскаля по столбцам, то, к нашему изумлению, мы обнаружим, что такое суммирование приведет нас к числам Фибоначчи (выделены жирным шрифтом):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, F_1(n+1), …, \tag{12}$$

где через $F_1(n+1)$ обозначено $(n+1)$-е число Фибоначчи, которое задается с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_1(n+1) = F_1(n) + F_1(n\text{-}1) \text{ при } n>2 \qquad (13)$$

при следующих начальных условиях:

$$F_1(1) = F_1(2) = 1. \qquad (14)$$

1-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	**5**	6	7	8	9	10
				1	3	**6**	10	15	21	28	36
						1	4	10	20	35	56
								1	5	15	35
										1	6
1	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**

Анализируя указанную выше таблицу, легко найти математическую формулу, которая позволяет выразить числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_1(n+1) = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + C_{n-4}^4 + \ldots \qquad (15)$$

В результате проведенных рассуждений мы нашли, что существует два способа представления чисел Фибоначчи: в виде рекуррентной формулы (13), (14) и в виде формулы (15), выражающей числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты.

А теперь закрепим наш успех и покажем, что треугольник Паскаля является источником новых математических результатов, представляющих интерес для комбинаторики.

Рассмотрим ситуацию, когда в исходном прямоугольном треугольнике Паскаля мы сдвигаем биномиальные коэффициенты каждой строки на p столбцов вправо относительно предыдущей строки, где p может принимать значения из множества {0, 1, 2, 3, ... }. Полученный таким путем «деформированный» треугольник Паскаля мы будем называть *p-треугольником Паскаля*.

P-треугольники Паскаля, соответствующие случаям p = 2 и p = 3, имеют следующий вид соответственно:

2-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						1	3	6	10	15	21	28
									1	4	10	20
												1
1	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**9**	**13**	**19**	**28**	**41**	**60**

3-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
				1	2	3	4	5	6	7	8	9
								1	3	6	10	15
												1
1	**1**	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**	**14**	**19**	**26**

Доказано [28], что в общем случае (произвольное p), суммируя по столбцам биномиальные коэффициенты p-треугольника Паскаля, мы получим числовую последовательность, которая для заданного p = 0, 1, 2, 3, ... будет задаваться тем же рекуррентным соотношением (9), которое было нами получено при синтезе фибоначчиевого алгоритма измерения.

В книге [29] выведена следующая общая формула, позволяющая выразить p-числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + C_{n-4p}^4 + \dots \qquad (16)$$

Итак, в результате проведенных рассуждений мы обнаружили глубокую связь *р-чисел Фибоначчи* с треугольником Паскаля, который, по мнению Гарднера, является «*одной из наиболее изящных схем во всей математике»*. Но обнаруженная выше удивительно простая связь треугольника Паскаля с p-числами Фибоначчи (9) дает нам основание отнести *р-числа Фибоначчи* к одному из наиболее изящных результатов в «элементарной математике».

5.7. *P-коды Фибоначчи*

Подобно тому как «двоичный алгоритм измерения» порождает двоичный способ представления чисел, рассмотренные выше фибоначчиевые алгоритмы измерения порождают необычные способы позиционного представления чисел, названные *р-кодами Фибоначчи*:

$$N = a_n F_p(n) + a_{n-1} F_p(n-1) + \dots + a_i F_p(i) + \dots + a_1 F_p(1), \qquad (17)$$

где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (17); n – разрядность кода (17).; $F_p(i)$ – вес i-го разряда, равный i-му p-числу Фибоначчи, задаваемому рекуррентной формулой (9).

Сокращенная запись суммы (17) имеет следующий вид:

$$N = a_n\, a_{n-1} \dots a_i \dots a_1. \qquad (18)$$

Заметим, что позиционное представление (18) включает в себя бесконечное число различных позиционных представлений, потому что каждое p «порождает» свое собственное позиционное представление типа (17) (p = 0, 1, 2, 3, ...).

Пусть p = 0. Для этого случая 0-числа Фибоначчи $F_0(i)$ совпадают с «двоичными» числами, то есть, $F_0(i) = 2^{i-1}$ и тогда представление (17) принимает форму «двоичного» кода:

$$N = a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \dots + a_i 2^{i-1} + \dots + a_1 2^0 \qquad (19)$$

Пусть p =1. Для этого случая 1-числа Фибоначчи $F_1(i)$ совпадают с классическими числами Фибоначчи, то есть, $F_1(i) = F_i$ и для этого случая представление (17) принимает следующий вид:

$$N = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \dots + a_i F_i + \dots + a_1 F_1. \qquad (20)$$

Напомним, что веса разрядов F_i в представлении (20) связаны рекуррентным соотношением Фибоначчи:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}; \quad F_1 = F_2 = 1 \qquad (21)$$

Именно поэтому позиционное представление (20) называется *кодом Фибоначчи*, а более общее представление (17) – *р-кодом Фибоначчи* [28].

Интересно подчеркнуть, что представление (20) в теории чисел Фибоначчи впервые было исследовано бельгийским любителем математики **Эдуардом Цекендорфом** (1901-1983). Исследуя (20), он доказал еще в 1939 г. так называемую *теорему Цекендорфа.* Теорема Цекендорфа утверждает, что каждое натуральное число может быть представлено единственным образом в виде суммы (20), состоящей из одного или нескольких различных чисел Фибоначчи, таким образом, чтобы сумма не включала два соседних числа Фибоначчи. Например, число 100, по Цекендорфу, может быть представлено в следующем виде: $100 = 89 + 8 + 3$. Существуют другие представления числа 100 в виде суммы (20), например, $100 = 89 + 8 + 2 + 1$, $100 = 55 + 34 + 8 + 3$. Однако, эти представления не являются *суммами Цекендорфа.*

Пусть теперь $p=\infty$. В этом случае все p-числа Фибоначчи, задаваемыми (9) тождественно равны 1, то есть, для любого i имеем: $F_p(i) = 1$. В этом случае представление (17) принимает следующий вид:

$$N = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{N}. \tag{22}$$

Заметим, что сумма (22), называемая «унитарным» кодом, есть ни что иное, как «Евклидово определение» натурального числа, с которого начинается *теория чисел*.

Таким образом, p-коды Фибоначчи являются весьма широким обобщением «двоичного» кода (19), соответствующего случаю $p=0$. Частными случаями p-кодов Фибоначчи являются код Фибоначчи (20) ($p=1$) и «унитарный» код (22) ($p = \infty$).

Таким образом, *алгоритмическая теория измерения* [28] приводит нас к важному математическому результату в области теории систем счисления. Формула (17), задающая *p-код Фибоначчи*, является обобщением «двоичного» кода (19)! Благодаря этому открытию мы теперь знаем, что существует бесконечное число «двоичных» позиционных представлений натурального числа N, которые задаются некоторой общей формулой (17)! И классическая «двоичная» система счисления (19) является лишь частным случаем p-кода Фибоначчи (17).

Но двоичный код (19) является основой современных компьютеров! Но тогда возникает вопрос: если мы будем использовать «фибоначчиевые» представления (17), то, возможно, придем к новым компьютерам - *компьютерам Фибоначчи*, как новому направлению в развитии компьютерной техники! Об этом мы расскажем ниже.

Какие выводы мы можем сделать из проведенных рассуждений? Прежде всего, ответим на вопрос: в чем наибольший интерес *алгоритмической теории измерения* [28] с точки зрения «элементарной математики»? Самое любопытное состоит в том, что в этой теории решается математическая задача, которая никогда не ставилась в математике – *синтез оптимальных алгоритмов измерения*. При этом каждый оптимальный алгоритм измерения порождает новую позиционную систему счисления, то есть, алгоритмическая теория имеет прямое отношение к позиционному принципу представления чисел, открытому вавилонскими математиками, и к позиционным системам счисления, в частности, к *десятичной* и *двоичной*. Парадокс состоит в том, что в современной теории чисел системам счисления не уделяется должного внимания, но ведь именно с систем счисления и должна начинаться теория чисел! Именно поэтому исторически мы должны поставить *алгоритмическую теорию измерения* впереди теории чисел и такой подход может привести нас к переосмысливанию как теории чисел, так и всей математики! **То есть, *алгоритмическая теория измерения* – это математическая теория, с которой и должна начинаться «элементарная математика»!** Вывод неожиданный, если учесть, что *алгоритмическая теория измерения* – прикладная математическая теория, которая началась с аналого-цифровых преобразователей [23-28]. Но ведь *аксиома Евдокса-Архимеда*, которая лежит в основе математической теории измерения, также начинается с *метода исчерпывания Евдокса*, берущего своего начало из практики измерений.

5.8. ***Международное признание алгоритмической теории измерения***

<u>Всесоюзная конференция ИИС-73</u>

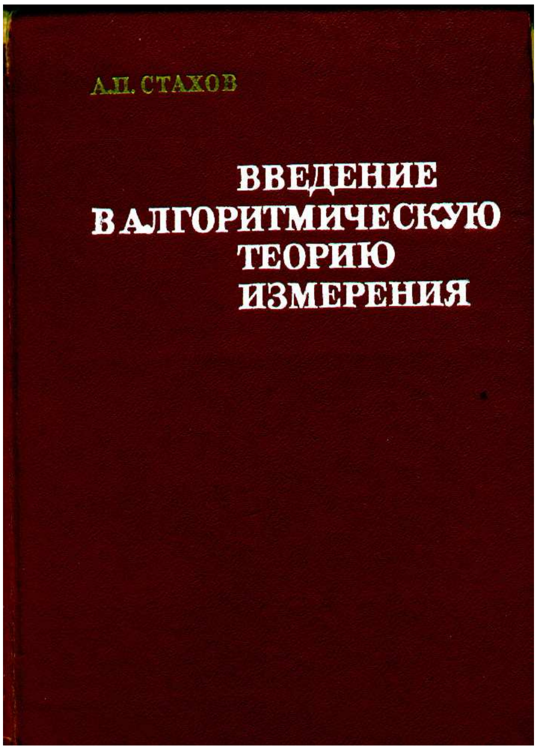
В развитии «алгоритмической теории измерения» можно выделить следующие события, которые можно считать некоторыми «вехами» в ее развитии. Понятие «алгоритмической теории измерения» впервые было введено автором в 1973 г. в докладе «Алгоритмическая теория измерения», прочитанном на Всесоюзной конференции по информационно-измерительным системам ИИС-73 (Украина, г. Ивано-Франковск). Высокая оценка этого доклада участниками конференции, в частности, выдающимся советским специалистом, одним из основателей «информационной техники» проф. Темниковым Федор Евгеньевичем воодушевили автора на дальнейшие исследования в этом направлении и на написание специальной научной книги по «алгоритмической теории измерения» [28].

Доклад в Австрии

Впервые широкая международная апробация «алгоритмической теории измерения» состоялось в 1976 г. в Австрии – сначала (23-го февраля 1976 г.) на заседании Математического института двух Грацких университетов, где по инициативе известного австрийского математика проф. Айгнера автор выступил с докладом *«Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики»* и затем (3-го марта 1976 г.) в Вене, где по инициативе проф. Рихарда Эйера, зав. кафедрой обработки информации Венского технического университета, автор выступил с таким же докладом на объединенном заседании кибернетического и компьютерного обществ Австрии.

Публикация книги «Введение в алгоритмическую теорию измерения»

Знаковым событием в широком признании «алгоритмической теории изменения» стала публикация в 1977 г. первой книги автора «Введение в алгоритмическую теорию измерения» [28]. Книгу опубликовало в 1977 г. известное издательство «Советское Радио».



8-й Конгресс ИМЕКО

В мае 1979 г. в Москве состоялся 8-й Конгресс ИМЕКО (так называется Международная конфедерация по измерительной технике и приборостроению), в рамках которого состоялась Международная конференция по измерительной технике и приборостроению. Конгресс ИМЕКО стал крупным событием в международной научной жизни, а в его работе принимали участие выдающиеся ученые всего мира. От Винницкого политехнического института, где автор работал в то время заведующим кафедрой вычислительной техники, в работе конференции принимали участие ректор института проф. И.В. Кузьмин, проф. В.Т. Маликов, зав. кафедрой автоматики и информационно-измерительной техники, и проф. А.П. Стахов, зав. кафедрой вычислительной техники.

Пленарное заседание Конгресса состоялось 21 мая в знаменитом Киноконцертном зале "Россия". Центральным событием пленарного заседания стал доклад "Теоретические и физико-метрологические проблемы дальнейшего развития измерительной техники в промышленности и науке", авторами которого были проф. Ю.В. Тарбеев (НПО "ВННИ им. Д.И. Менделеева") и проф. Д. Хофман (Университет им. Ф. Шиллера, Йена, ГДР).

Доклад делал проф. Хофман. Каково же было удивление автора, когда он неожиданно услышал свое имя в связи с "алгоритмической теорией измерения". После доклада в оргкомитете автору дали текст доклада проф. Хофмана, в котором я обнаружил, что раздел доклада "Проблемы общей теории измерений" очень тесно коррелируется с первой главой "Проблема измерения" моей книги [28], а весь доклад написан под флагом "алгоритмической теории измерения". Анализируя состояние современной теории измерения, авторы доклада подчеркивали, что "за последние годы предложены разные варианты общей теории измерений: и "информационная теория измерений", и "квантово-механическая (физическая) теория измерений", и "теоретико-множественная теория измерений", и "алгоритмическая теория измерений" и др.".

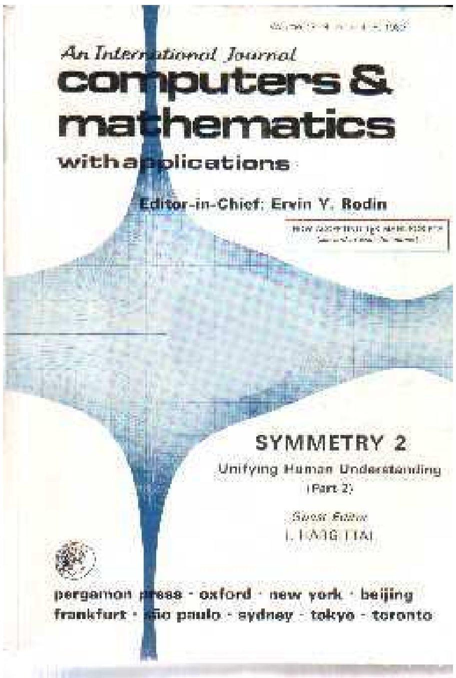
Из зала автор написал записку проф. Хофману в Президиум. И к удивлению автора (и удивлению всех присутствующих), знаменитый ученый сразу же спустился со сцены, разыскал автора в зале, вручил автору свою визитную карточку и горячо поздравил с публикацией книги по новой теории измерения [28].

Доклад на Международном симпозиуме «Интеллектуальные измерения»

В 1986 г. автор выступил с докладом *«Алгоритмическая теория измерения»* на пленарном заседании Международного симпозиума «Интеллектуальные измерения», который состоялся в немецком городе Йена. На докладе присутствовал известный советский ученый проф. Владимир Кнеллер, который в то время был главным редактором журнала «Измерения, контроль, автоматизация». Он сразу же предложил автору написать статью для его журнала и такая статья сразу же после Симпозиума была опубликована в этом престижном журнале [33].

Статья в Международном журнале “Computers & Mathematics with Applications”

В 1989 г. Международный журнал “Computers & Mathematics with Applications” опубликовал статью автора “The Golden Section in the Measurement Theory” [34]. Это была первая публикация автора на английском языке. История этой публикации такова. В одну из поездок в Москву автор познакомился с известным советским философом и биологом профессором **Урманцевым Юниром Абдулловичем**. Он был широко известен в научном мире как автор одного из вариантов «общей теории систем». После более чем двухчасовой беседы, в процессе которой автору удалось детально ознакомить известного ученого с содержанием алгоритмической теории измерения, Юнир Абдуллович предложил автору написать статью для Международного журнала “Computers & Mathematics with Applications”. Оказалось, что редакция журнала поручила именно ему отобрать для журнала лучшие статьи советских авторов.

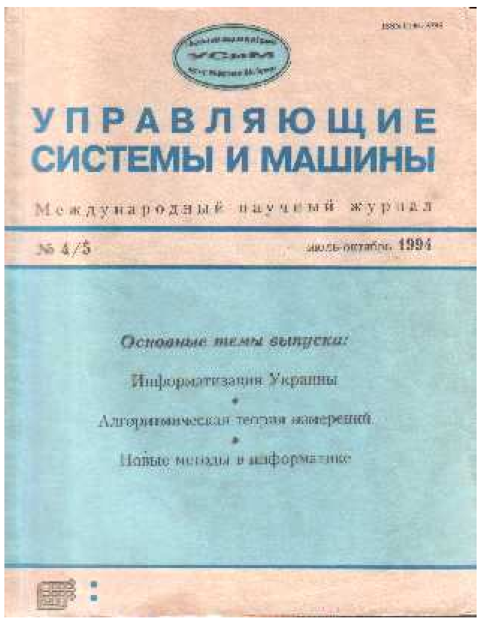


Книга проф. П.А. Арутюнова

В 1990 г. издательство "Энергоатомиздат" (Москва) выпустило в свет книгу П.А. Арутюнова "Теория и применение алгоритмических измерений". В Предисловии к своей книге П.А. Арутюнов, с которым, к сожалению, яавтор лично не знаком, написал следующее: "Данный материал согласуется с работами ученых, занимающихся проблемами теории измерения (А.Н. Колмогорова, Н.В. Хованова, А.П. Стахова, Я. Яворского, И. Пфанцагля, Д.Гофмана, В. Г. Кнорринга, С. Стивенса, Д.Зинеса, В. Торгенсона и др.)". Автору приятно, что в этом перечне действительно известных ученых в области теоретической метрологии имя автора поставлено третьим после имени выдающегося советского математика А.Н. Колмогорова и рядом с именами таких классиков мировой науки в области теории измерения как Пфанцагль, Стивенс, Зинес и др. Автору приятно также, что в книге Арутюнова впервые введено понятие "алгоритмы Стахова". Наверно, это и есть высшая награда для ученого, когда твоим научным результатам независимо от тебя присваивается твое имя.

<u>Статья в журнале «Управляющие системы и машины»</u>

В 1994 г. Международный журнал «Управляющие системы и машины» опубликовал статью автора «*Алгоритмическая теория измерения: новый взгляд на теорию позиционных систем счисления и компьютерную арифметику*» [35]. Чтобы подчеркнуть значимость этой публикации редакция журнала вынесла название статьи «Алгоритмическая теория измерения» на переднюю обложку журнала в качестве одной из основных тем выпуска наряду с такими темами, как «Информатизация Украины» и «Новые методы в информатике».



Таким образом, без всяких сомнений понятие «алгоритмической теории измерения», введенное автором в 1973 г., широко вошло в современную научно-техническую литературу, а «алгоритмическая теория измерения» является широко признанным оригинальным научным направлением современной информатики и метрологии.

7. Теория систем счисления с иррациональными основаниями

7.1. *Система счисления Бергмана*

Выше мы отмечали, что открытие вавилонянами позиционного принципа представления чисел, лежащего в основе десятичной и двоичной системы, является одним из наиболее выдающихся математических открытий за всю историю развития математики. И именно с таких высоких позиций мы должны подойти к математическому открытию в этой области, сделанному юным американским математиком Джорджем Бергманом в 1957 г. [36].

Математическое выражение *системы Бергмана* имеет следующий вид:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \tag{23}$$

где A – некоторое действительное число и a_i – двоичные цифры, 0 или 1 (i = 0, ±1, ±2, ±3, …), Φ^i – вес i-й цифры в системе счисления (23), $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - основание системы счисления (23).

На первый взгляд, может показаться, что не существует никакой особенности в выражении (23) по сравнению с известными позиционными системами счисления, но это только на первый взгляд. Главная особенность состоит в том, что Бергман использовал иррациональное число $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция») в качестве основания своей системы счисления (23).

Рассмотрим *систему Бергмана* (23) с вычислительной точки зрения. Именно ее основание $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ определяет все необычные свойства системы (23) с точки зрения представления чисел.

Как известно, «золотая пропорция» обладает следующим замечательным свойством:

$$\Phi^i = \Phi^{i-1} + \Phi^{i-2} = \Phi \times \Phi^{i-1}, \tag{24}$$

где i = 0, ±1, ±2, ±3, … .

Рассмотрим представления чисел в системе Бергмана (24). Ясно, что сокращенная цифровая запись числа A в системе (24) имеет следующий вид:

$$A = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}. \tag{25}$$

Из (25) вытекает, что сокращенная запись числа A представляет собой двоичную кодовую комбинацию, разделенную запятой на две части, левую часть $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$, соответствующую «весам»: $\Phi^n, \Phi^{n-1}, \ldots, \Phi^1, \Phi^0 = 1$, и правую часть $a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$, соответствующую «весам»: $\Phi^{-1}, \Phi^{-2}, \ldots, \Phi^{-m}$. Заметим, что «веса» Φ^i (i =0, ±1, ±2, ±3, …) связаны между собой математическими соотношениями (24).

Например, рассмотрим двоичную кодовую комбинацию 100101. Ясно, что в системе Бергмана (23) она представляет следующее действительное число:

$$A = 100101 = \Phi^5 + \Phi^2 + \Phi^0. \tag{26}$$

Известна следующая формула, которая связывает i-ю степень «золотой пропорции» Φ^i с числами Фибоначчи F_i и числами Люка L_i:

$$\Phi^i = \frac{L_i + F_i\sqrt{5}}{2}\left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\right) \quad (27)$$

Используя формулу (27), мы можем установить, что число A, задаваемое выражением (26), равно:

$$A = 100101 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{16+6\sqrt{5}}{2} = 8 + 3\sqrt{5}\,. \quad (28)$$

Существенно подчеркнуть, что число (28) является иррациональным числом. Это означает, что мы представили иррациональное число (28) в системе Бергмана (23), в виде кодовой комбинации 100101, состоящей из конечного числа бит!

В частности, основание системы (23) («золотая пропорция») представляется в системе Бергмана (23) традиционным образом, то есть:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 10\,.$$

Но из нашего предыдущего опыта мы знаем, что невозможно представить иррациональное число в виде цифровой записи, использующей конечного числа цифр. Именно поэтому возможность представления некоторых иррациональных чисел (степеней «золотой пропорции» и их сумм) с использованием конечной совокупности двоичных цифр есть *первый неожиданный результат* системы Бергмана (23), который вступает в противоречие с нашими традиционными представлениями о системах счисления.

7.2. *Новые свойства натуральных чисел*

В 2004 г. по рекомендации академика Митропольского в Украинском математическом журнале была опубликована статья автора «Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа» [37]. В этой статье приведено много неожиданных математических свойств системы Бергмана. Представим в виде (23) натуральные числа

$$N = \sum_i a_i \Phi^i\,. \quad (29)$$

Представление (29) будем называть Ф-кодом натурального числа N.

В статье [37] доказаны следующие теоремы для Ф-кода (29).

Теорема 1. Любое натуральное число в Ф-коде (29) представляется в виде конечной суммы степеней золотой пропорции.

Теорема 2 (*Z*-свойство натуральных чисел). Если в выражении для Φ-кода (29) заменить все степени золотой пропорции Φ^i соответствующими числами Фибоначчи F_i (i=0, ±1, ±2, ±3, …), то возникающая при этом сумма $\sum_i a_i F_i$ тождественно равна нулю независимо от исходного натурального числа N, то есть,

$$\sum_i a_i F_i = 0\,. \quad (30)$$

А теперь возвратимся на 2,5 тысячелетия назад и представим себе реакцию пифагорейцев на Теоремы 1 и 2. Согласно главной доктрине пифагорейцев **«Все есть число»** в основе мироздания лежат натуральные числа и их отношения, так как любую вещь в природе можно выразить как отношение двух натуральных чисел (хотя после открытия «несоизмеримых отрезков» это представление пифагорейцев и было подвергнуто сомнению, в результате чего и появилось понятие *иррационального числа*). Но Теорема 1 утверждает, что любое натуральное число может быть выражено через «золотую пропорцию». Из этого рассуждения с необходимостью вытекает новая доктрина, которую пифагорейцы немедленно сформулировали бы, если бы знали об этой теореме: **«Все есть золотая пропорция»!** Еще большее восхищение у пифагорейцев вызвала бы Теорема 2 (если бы только они знали о числах Фибоначчи).

Выше мы сделали весьма смелое утверждение о том, что позиционный принцип представления чисел, открытый Вавилонскими математиками и вытекающие из него позиционные системы счисления (десятичная, двоичная), возможно, являются крупнейшими математическими открытиями античной математики, которые оказали огромное влияние, как на развитие материальной культуры, так и современной информационной технологии. Можно ли представить современное общество без компьютеров и Интернета? Каждый человек в мире однозначно ответит, что компьютеры и Интернет являются эпохальными изобретениями, которые произвели революционные преобразования в современном обществе. Но не следует забывать, что в основе современных компьютеров лежит **двоичная система счисления**, которая является результатом коллективной творческой деятельности многих народов (Вавилон – позиционный принцип представления чисел, Древний Египет – «метод удвоения», Древний Китай – император **Фо Ги**, изобретатель двоичного способа представления чисел, **Готфрид Лейбниц** – изобретатель двоичной арифметики, **Джон фон Нейман** – создатель новых принципов конструирования электронных компьютеров).

Возникает вопрос: а как с этих позиций оценить открытие юного американского математика Джорджа Бергмана, который в 1957 г. описал весьма необычную систему счисления, названную им *системой счисления с иррациональным основанием* [36]? Отвечая на этот вопрос, мы должны сделать еще одно смелое заявление: **система Бергмана является крупнейшим современным открытием в области систем счисления, сравнимым разве что с открытием позиционного принципа представления чисел, а также десятичной и двоичной системами счисления. Она переворачивает наши представления о системах счисления; более того - соотношение между рациональными и иррациональными числами. В этой системе на первый план выдвигается иррациональное число «золотая пропорция», которое становится основанием всех чисел, так как с его помощью может быть представлено любое действительное число!**

Хотя система Бергмана представляла собой результат принципиальной важности не только для систем счисления, но и для теории чисел, но в тот период (50-е годы прошлого столетия) она просто не была замечена ни математиками, ни инженерами. И свое математическое открытие сам Бергман оценил весьма скромно [36]: *"Я не знаю никакого полезного приложения для систем счисления, подобных этой, как для умственного упражнения и приятного времяпровождения, хотя эта система счисления может быть полезной для алгебраической теории чисел"*.

7.2.*Золотые p-пропорции*

Как известно, отношение соседних чисел Фибоначчи F_i / F_{i-1} при неограниченном увеличении индекса *i* стремится к «золотой пропорции», то есть,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (30)$$

Считается, что первым установил свойство (30) гениальный Кеплер. Поэтому выражение (30) иногода называют *формулой Кеплера*.

Возникает вопрос: к чему стремится отношение соседних *p-чисел Фибоначчи*, задаваемых рекуррентной формулой (9)? Ответ на этот вопрос дан в книге [28]. В этой книге доказана справедливость следующего выражения:

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}=\Phi_p, \quad (31)$$

годе Φ_p - положительный корень следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1}-x^p-1=0. \quad (32)$$

Заметим, что при $p=1$ выражение (30) сводится к формуле Кеплера (31), а уравнение (32) – к уравнению «золотой пропорции» (4). На этом основании числовые константы Φ_p были названы *обобщенными золотыми пропорциями* или *золотыми p- пропорциями*.

Используя (31), (32), автор обобщил задачу о золотом сечении [28]. Обобщенный вариант этой знаменитой задачи формулируется следующим образом. Зададимся целым неотрицательным $p=0,1,2,3,...$ и разделим отрезок AB точкой C в следующей пропорции:

$$\frac{CB}{AC}=\left(\frac{AB}{CB}\right)^p \quad (33)$$

Нетрудно показать, что при $p=1$ пропорция (33) сводится к «золотой пропорции».

Соотношения (31), (32), (33) высоко оценил академик Митропольский. В своем отзыве [1] он написал следующее:

«В 2004 г. «Украинский математический журнал» (№ 8) опубликовал статью А.П. Стахова ***«Обобщенные Золотые Сечения и новый подход к геометрическому определению числа».*** *В этой статье проф. Стаховым получено ряд математических результатов фундаментального характера, к числу которых относятся:*

(1) ***Обобщение задачи о Золотом Сечении.*** *Суть этого обобщения предельно проста. Если задаться неотрицательным целым числом p=0, 1, 2, 3,... и разделить отрезок AB точкой C в такой пропорции (33), то мы приходим к алгебраическому уравнению (32), корни которого называются обобщенными золотыми пропорциями или золотыми p-пропорциями* Φ_p. *Давайте вдумаемся в этот результат. В течение нескольких тысячелетий, начиная с Пифагора и Платона, человечество пользовалось широко известным классическим Золотым Сечением, которое считалось единственным, уникальным и неповторимым. И вот в конце 20-го века украинский ученый Стахов обобщает эту задачу и доказывает существование бесконечного числа Золотых Сечений! И все они имеют такое же право на существование, как и классическое Золотое Сечение. Более того, Стахов показывает, что Золотые p-пропорции* Φ_p *представляют собой новый класс иррациональных чисел, которые выражают некоторые неизвестные нам до этого математические свойства треугольника Паскаля. Ясно, что такой математический результат имеет фундаментальное значение для развития современной науки и математики.*

(2) ***Коды Золотой p-пропорции.*** *Используя понятие золотой p-пропорции, Стахов затем вводит новое определение действительного числа в виде:*

$$A=\sum_i a_i\Phi_p^i, \quad (34)$$

которое он назвал «Кодом Золотой p-пропорции». Стахов показывает, что это понятие, которое является развитием известного «Ньютоновского определения» действительного числа, может быть положено в основу новой теории действительных чисел. Далее он показывает, что этот результат имеет важное прикладное значение и может привести к созданию принципиально новой компьютерной арифметики и новых компьютеров, компьютеров Фибоначчи. И Стахов не только провозглашает идею «компьютеров

Фибоначчи», но и возглавляет и организует инженерные проекты по созданию таких компьютеров в Виницком политехническом институте (1977-1995). 65 зарубежных патентов на изобретения в области «компьютеров Фибоначчи», выданных государственными патентными ведомствами США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и др. стран, подтверждают приоритет украинской науки (и приоритет проф. Стахова) в этой важной компьютерной области».

7.3. *Коды золотой p-пропорции*

Заметим, что выражение (34), которое приводит академик Митропольский в своем отзыве «генерирует» бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому p (p=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (34). Заметим, что при p=0 основание $\Phi_p = \Phi_0 = 2$ и система счисления (34) сводится к классической двоичной системе

$$A = \sum_i a_i 2^i , \qquad (35)$$

которая лежит в основе современных компьютеров.

Рассмотрим случай p=1. Для этого случая основанием системы счисления (34) является классическая «золотая пропорция» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и система (34) сводится к системе Бергмана (29).

Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (34), как весьма широкое обобщение *двоичной системы* (35) и *системы Бергмана* (29).

Заметим, что системы счисления (29) и (34) переворачивают наши представления не только о системах счисления, но и о соотношения между числами рациональными и иррациональными. Дело в том, что основанием систем счисления (29), (34) являются иррациональные числа Φ и Φ_p, с использованием которых можно представить все действительные числа. Это означает, что эти результаты вводят в математику новый класс систем счисления – *системы счисления с иррациональными основаниями.* Традиционно проблематика систем счисления относится к «элементарной математике», поэтому системы счисления (29), (34) также относятся к «элементарной математике». В работе [37] автор высказал мысль о том, что системы счисления (29), (34) являются началом новой теории чисел – *«золотой» теории чисел.*

Теории кодов золотой p-пропорции посвящена книга автора «Коды золотой пропорции» [38].

8. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка и геометрия Боднара

Среди огромного количества различных функций, которые используются в математике, выделяется их особый класс, называемый *элементарными функциями*. Эти функции заслуживают такого названия, потому что они являются своеобразными «элементарными частицами» всей математики. Они связывают математику с реальным миром. Значение этих функций для науки состоит в том, что они выражают некоторые устойчивые отношения, встречающиеся в окружающем нас мире. Примерами элементарных функций являются: *степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические функции* и т.д. С помощью «элементарных функций» выражаются многие физические законы. Основные «элементарные функции» изучаются в средней школе, а сам теория «элементарных функций» является важной составной частью «элементарной математики». Поэтому открытие новых типов «элементарных функций», имеющих отражение в реальном мире, всегда является важным событием в матемаике!

8.1. *Формулы Бине*

В теории чисел Фибоначчи широко известны формулы, выведенные в 19 в. известным французским математиком по имени **Жак Филлип Мари Бине** (1786-1856). Существуют различные формы представления формул Бине. Эти формулы задают связь чисел Фибоначчи F_n и чисел Люка L_n с «золотой пропорцией» Ф. Мы представим их в следующем виде, удобным для дальнейших рассуждений:

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{36}$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \qquad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \qquad n = 2k \end{cases} \tag{37}$$

Анализ формул (36), (37) дает нам возможность ощутить истинное эстетическое наслаждение и еще раз убедиться в мощи человеческого разума. Действительно, ведь мы знаем, что числа Фибоначчи и числа Люка всегда являются целыми числами. С другой стороны, любая степень золотой пропорции является иррациональным числом. Отсюда вытекает, что целые числа L_n и F_n с помощью формул (36), (37) очень просто выражаются через специальные иррациональные числа.

Справедливости ради необходимо заметить, что формулы (36), (37) были выведены **Абрахамом де Муавром** (1667-1754) и **Николаем Бернулли** (1687-1759) на одно столетие раньше **Жака Бине**. Однако в современной математической литературе эти формулы называются *формулами Бине.*

8.2. *Гиперболические функции Фибоначчи и Люка (ГФФЛ)*

Обычно в математике используется представление формул Бине в виде, несколько отличающимся от (36), (37). Возможно, впервые представление этих формул в виде (36), (37) было использовано автором в его книге [38]. Но именно в таком виде четко прослеживается «гиперболический характер» чисел Фибоначчи и Люка, потому что формулы Бине, представленные в виде (36), (37), оказываются подобными по своему виду формулам для классических гиперболических функций. Вот эта аналогия и лежит в основе нового класса гиперболических функций, названных *гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка.* Впервые новый класс гиперболических функций, основанных на формулах Бине, был введен автором совместно с **Иваном Ткаченко** в конце 80-х годов 20-го столетия. Первая статья с описанием этого математического открытия была опубликована в виде препринта [38] в 1988 г. В 1993 г. согласно рекомендации академика Митропольского в журнале «Доклады Академии наук Украины» была опубликована статья **Алексея Стахова** и **Ивана Ткаченко** *«Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи»* [39] и благодаря этой публикации научный мир узнал о новом классе «элементарных функций».

Теория ГФФЛ получила дальнейшее развитие в статьях **Алексея Стахова** и **Бориса Розина**, опубликованных в международном журнале “Chaos, Solitons & Fractals” [40] и международном электронном журнале «Visual Mathematics” [41]. В этих статьях введены так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*.

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{38}$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{39}$$

Симметричный гиперболический синус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \tag{40}$$

Симметричный гиперболический косинус Люка

$$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x} \tag{41}$$

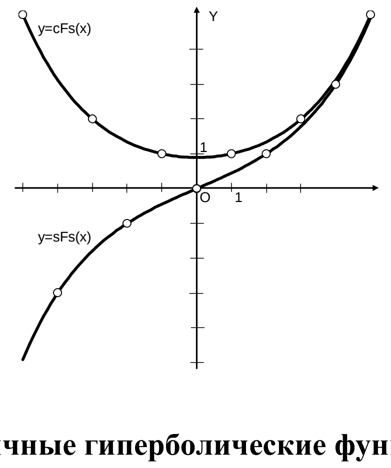
При этом числа Фибоначчи и Люка оказываются тесно связанными с гиперболическими синусами и косинусами Фибоначчи и Люка и однозначно определяются через них следующим образом:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) & \text{при} \quad n = 2k \\ cFs(n) & \text{при} \quad n = 2k+1 \end{cases}; \qquad L_n = \begin{cases} cLs(n) & \text{при} \quad n = 2k \\ sLs(n) & \text{при} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{42}$$

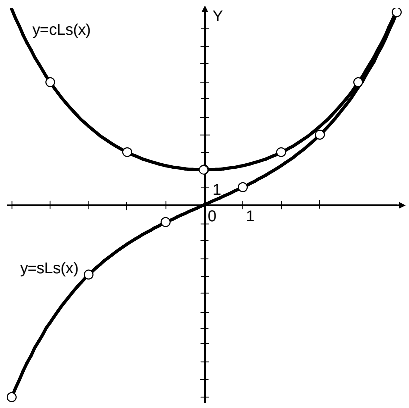
Необходимо отметить, что согласно (42), числам Фибоначчи с четными индексами (n=2k) всегда соответствует симметричный фибоначчиевый синус $sFs(x)$, а с нечетными индексами (n=2k+1) – симметричный фибоначчиевый косинус $cFs(x)$, в то время как числам Люка с четными индексами всегда соответствует симметричный люковый косинус $cLs(x)$, а с нечетными индексами – симметричный люковый синус $sLs(x)$. Введенные выше симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$sFs(x) = \frac{sLs(x)}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x) = \frac{cLs(x)}{\sqrt{5}} \tag{43}$$

Графики функций (38)-(41) имеют вид, представленный на рисунках.



Симметричные гиперболические функции Фибоначчи



Симметричные гиперболические функции Люка

В упомянутых выше статьях **Стахова** и **Розина** [41,42] проведено детальное исследование математических свойств нового класса гиперболических функций. При этом доказано, что *гиперболические функции Фибоначчи и Люка* (ГФФЛ), с одной стороны, обладают *рекуррентными* свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка, с другой стороны, *гиперболическими* свойствами, подобными свойствам классических гиперболических функций.

Приведем только некоторые из них. Как известно, одним из наиболее удивительных свойств, связывающих три соседних числа Фибоначчи, является *формула Кассини*:

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = \left(-1\right)^{n+1}. \tag{44}$$

Для случая гиперболических функций Фибоначчи эта формула превращается в две формулы:

$$\left[sFs\left(x\right)\right]^2 - cFs\left(x+1\right)cF\left(x-1\right) = -1; \quad \left[cFs\left(x\right)\right]^2 - sFs\left(x+1\right)sF\left(x-1\right) = 1. \tag{45}$$

Существенно подчеркнуть, что каждому «дискретному» тождеству для чисел Фибоначчи и Люка соответствуют два «непрерывных» тождества для ГФФЛ. И наоборот, используя соотношения (42), каждому тождеству для ГФФЛ мы можем поставить в соответствие некоторое «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи и Люка. Поскольку числа Фибоначчи и Люка согласно (42) являются «дискретным» случаем ГФФЛ, с которыми они совпадают для дискретных значений непрерывной переменной $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$, то это означает, что с введением ГФФЛ «классическая теория чисел Фибоначчи» как бы «вырождается», поскольку она становится частным («дискретным») случаем более общей («непрерывной) теории ГФФЛ.

Широко известно следующее свойство классических гиперболических функций:

$$\left[ch\left(x\right)\right]^2 - \left[sh\left(x\right)\right]^2 = 1. \tag{46}$$

Легко доказать, что в терминах ГФФЛ это тождество может быть представлено в виде двух тождеств (для гиперболических функций Фибоначчи и гиперболических функций Люка):

$$\left[cFs\left(x\right)\right]^2 - \left[sFs\left(x\right)\right]^2 = \frac{4}{5} \tag{47}$$

$$\left[cLs\left(x\right)\right]^2 - \left[sLs\left(x\right)\right]^2 = 4 \tag{48}$$

То есть, ГФФЛ могут быть использованы во всех многочисленных приложениях классических гиперболических функций! Но первым, кто показал высокую эффективность использования ГФФЛ при моделировании природных явлений, был украинский ученый **Олег Боднар**.

8.3. *Геометрия Боднара*

Мы не будем углубляться в детальный анализ научного открытия **Олега Боднара,** отсылая читателей к его замечательной книге [21]. Сформулируем только ключевые идеи явления динамической симметрии, лежащего в основе ботанического явления *филлотаксиса*:

1.Боднар доказывает, что основным принципом, лежащим в основе филлотаксиса, является *гиперболический поворот*. В соответствии с этим принципом рост филлотаксисного объекта, сопровождающийся изменением динамической симметрии, может быть смоделирован как последовательный переход от объекта с меньшим порядком симметрии к объекту с большим порядком симметрии, осуществляемый с помощью *гиперболического поворота плоскости*. **Этими рассуждениями Боднар доказал гиперболический характер ботанического явления филлотаксиса!**

2. Для описания математических соотношений в геометрической модели филлотаксиса Боднар использует специальный класс гиперболических функций - *«золотые» гиперболические функции*, которые с точностью до постоянного коэффициента совпадают с *гиперболическими функциями Фибоначчи* (38), (39). **Такое решение позволяет ему доказать тот широко известный факт, почему числа Фибоначчи появляются на поверхности филлотаксисных форм!**

Таким образом, мы имеем полное право высказать предположение, что введенные выше гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются новым классом «элементарных функций», которые расширяют современную «элементарную математику».

Дальнейшим развитием теории *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* является «золотая» фибоначчиевая гониометрия [43], основанная на «металлических пропорциях» Веры Шпинадель. С использованием «золотой» фибоначчиевой гониометрии **Алексей Стахов** и **Самуил Арансон** решили 4-ю проблему Гильберта [44]

9. «Золотая» фибоначчиевая гониометрия и 4-я проблема Гильберта

9.1. *Лямбда-числа Фибоначчи и «металлические пропорции»*

В конце 20-го и начале 21-го веков сразу несколько исследователей из разных стран – аргентинский математик **Вера Шпинадель**, французский математик египетского происхождения **Мидхат Газале**, американский математик **Джей Каппрафф** и российский исследователь **Александр Татаренко** - начали изучать новый класс рекуррентных числовых последовательностей, которые являются обобщением классических чисел Фибоначчи. Эти числовые последовательности, названные λ-числами Фибоначчи, привели к открытию нового класса математических констант, названных **Верой Шпинадель** металлическими пропорциями.

Зададимся действительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \qquad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1. \tag{49}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (49) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_1(n+2) = F_1(n+1) + F_1(n); \; F_1(0) = 0, F_1(1) = 1, \tag{50}$$

которое задает *числа Фибоначчи*. Основываясь на этой аналогии, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (50) будем называть λ-*числами Фибоначчи*.

Поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свою собственную последовательность типа (49), то это означает, что множество новых рекуррентных числовых последовательностей, задаваемых (49), бесконечно. Их столько же, сколько существует действительных чисел $\lambda > 0$.

Рекуррентному соотношению (49) соответствует следующее квадратное уравнение:

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0 \tag{51}$$

Обозначим через Φ_λ положительный корень алгебраического уравнения (51):

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{52}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ формула (52) сводится к «золотой пропорции»:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{53}$$

Уже этот факт может привлечь наше внимание к формуле (52), которая является ни чем иным, как обобщением формулы (53) для «золотой пропорции».

Аргентинский математик **Вера Шпинадель** [43] назвала математические константы, задаваемые выражением (52), *металлическими пропорциями*. Если в (52) мы примем λ =1, 2, 3, 4, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель, следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\text{золотая пропорция}, \lambda = 1\right); \quad \Phi_2 = 1+\sqrt{2}\left(\text{серебряная пропорция}, \lambda = 2\right);$$

$$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\left(\text{бронзовая пропорция}, \lambda = 3\right); \quad \Phi_4 = 2+\sqrt{5}\left(\text{медная пропорция}, \lambda = 4\right).$$

Остальные *металлические пропорции* ($\lambda \geq 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3+2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4+\sqrt{17}..$$

Ясно, что количество «металлических пропорций», задаваемых (52), теоретически бесконечно, так каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответсвует своя «металлическая пропорция» типа (52). И самое интересное, что формула для «металлических пропорций» (52) являются обобщением формулы для «золотой пропорции» (53) ($\lambda = 1$). Это дает нам основание выдвинуть гипотезу, что «металлические пропорции» (52) представляют собой новый класс математических констант, которые могут сыграть важную роль в развитии математики и теоретического естствознания.

Любопытно подчеркнуть, что простейшее квадратное уравнение типа (51) известно более двух тысячелетий (Вавилон, Древняя Индия, Древний Китай). И тем не менее только в конце 20-го века – начале 21-го века ученые разных стран (**Шпинадель, Газале, Капраф, Татаренко**) обратили внимание на уникальность квадратного уравнения (51), корни которого образуют новый класс математических констант – «металлические пропорции» (52).

«Металлические пропорции» (52) обладают следующими алгебраическими свойствами:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\ldots}}}}\;; \qquad \Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}}, \tag{55}$$

которые являются обобщением следующих широко известных свойств «золотой пропорции»:

$$\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}\ ; \qquad \Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

9.2.*Формулы Газале*

Египетский математик **Мидхат Газале** вывел в работе [44] замечательную математическую формулу, позволяющую аналитически выразить λ-числа Фибоначчи через «металлические пропорции»:

$$F_\lambda(n)=\frac{\Phi_\lambda^n-(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\ , \qquad (56)$$

где $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

Нетрудно установить, что при $\lambda=1$ *формула Газале* для λ-чисел Фибоначчи (56) сводится к *формуле Бине* для чисел Фибоначчи (37).

В работе [45] выведена аналитическая *формула Газале* для λ-чисел Люка:

$$L_\lambda(n)=\Phi_\lambda^n+(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}, \qquad (57)$$

где $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

Нетрудно установить, что при $\lambda=1$ *формула Газале* (57) сводится к *формуле Бине* для чисел Люка (36).

9.3.*«Золотая» фибоначчиевая гониометрия*

Формулы Газале (56), (57) были использованы в работе [45] для введения нового класса «элементарных функций», названных *гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка.*

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \qquad (58)$$

$$cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \qquad (59)$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \qquad (60)$$

$$cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \qquad (61)$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda>0$ - заданное положительное действительное число.

λ-числа Фибоначчи и Люка определяются через гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F_\lambda(n)\ =\ \begin{cases}sF_\lambda(n), & n=2k\\ cF_\lambda(n), & n=2k+1\end{cases}; \qquad L_\lambda(n)\ =\ \begin{cases}cL_\lambda(n), & n=2k\\ sL_\lambda(n), & n=2k+1\end{cases}. \qquad (62)$$

Нетрудно видеть, что функции (58)-(61) связаны друг с другом простыми соотношениями:

$$sF_\lambda(x) = \frac{sL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}; \qquad cF_\lambda(x) = \frac{cL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}. \tag{63}$$

Это означает что функции (58) и (59) отличаются от функций (60) и (61) только постоянным коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}$.

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (58)-(61) сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка, введённым в работе [41].

Еще раз подчеркнем, что количество гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (58)-(61) теоретически бесконечно, так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует свой вариант функций (58)-(61). Этот факт дает нам основание утверждать, что функции (58)-(61) образуют основу общей теории гиперболических функций, которые, с одной стороны, обладают всеми свойствами классических гиперболических функций («гиперболические свойства») и, с другой стороны, обладают «рекуррентными свойствами», подобными свойствам λ-чисел Фибоначчи и Люка, задаваемыми выражениями (56) и (57).

Ниже приведены соотношения, связывающие *золотую пропорцию* (53) с *металлическими пропорциями* (52).

Золотая пропорция ($\lambda = 1$)	**Металлические пропорции ($\lambda > 0$)**
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$	$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}}$
$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	$\Phi_\lambda = \lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\ldots}}}$
$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}$	$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda \times \Phi_\lambda^{n-1}$
$F(n) = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$L(n) = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}$	$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}$
$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$ $cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$ $cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}$ $cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x}$	$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}$ $cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}$

Математическая красота этих формул завораживает. Возникает вопрос: имеют ли введенные гиперболические функции какое-либо практическое или теоретическое значение. Убедительный ответ на этот вопрос дает новая геометрическая теория филлотаксиса, разработанная украинским исследователем **Олегом Боднаром** [21]. Об этой оригинальной теории мы упоминали выше. Боднаром показано, что «мир филлотаксиса» является «гиперболическим миром», основанным на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка (38)-

(41), основанием которых является классическая «золотая пропорция». При этом к этому гиперболическому миру относится огромное количество ботанических объектов (сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и корзинки цветов). Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте». Эта гипотеза, выдвинутая Боднаром, оказалась весьма плодотворной и привела к созданию новой геометрической теории филлотаксиса.

В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических функций, задаваемых (58)-(61), могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке была неизвестна «золотая» фибоначчиевая гониометрия, описанная в работе [45]. Но тогда мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (58)-(61).

Но вполне возможно, что новые типы гиперболических функций (58)-(61) могут представлять интерес для тех разделов математики, которые связаны с гиперболической геометрией. Примером может служить новый подход к решению 4-й проблемы Гильберта, основанный на «золотой» фибоначчиевой гониометрии [46].

9.4. *Решение четвертой проблемы Гильберта*

В докладе *«Математические проблемы»*, сделанном на II Международном Конгрессе математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, Давид Гильберт (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе. На данный момент решены **16 проблем из 23**. К разряду нерешенных относится 4-я проблема Гильберта, связанная с гиперболической геометрией. Она относится к разряду фундаментальных проблем геометрии. Суть этой проблемы состоит в нахождении геометрий, чьи аксиомы наиболее близки к Евклидовой геометрии. В течение 20-го века предпринимались многочисленные попытки решения этой проблемы, но в конечном итоге математики пришли к заключению, что **4-я проблема Гильберта сформулирована слишком расплывчато и нечётко поставлена, чтобы судить о том**, **решена она или нет,** то есть математики возложили ответственность за решение 4-й проблемы на самого Гильберта, который, по их мнению, ее «нечетко сформулировал»**.**

В статье [46] предложено следующее оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта. Развивая идею метрической формы плоскости Лобачевского, задаваемой выражением

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2, \tag{64}$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус, в работе [46] предложено бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи (58), (59). Доказано [46], что эти метрические формы, задаваемые в координатах $(u,v), 0<u<+\infty, -\infty<v<+\infty$, имеют *гауссову кривизну* $K=-1$ и представляются в виде

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \tag{65}$$

где $\Phi_\lambda = \frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - *металлическая пропорция* и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи (58). Формы (65) названы в [46] *метрическими* λ*-формами плоскости Лобачевского*.

В таблице приведены различные *метрические* λ*-формы плоскости Лобачевского,* соответствующие различным значениям $\lambda = 1,2,3,4$.

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая $\lambda -$форма Лобачевского	$\lambda > 0$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}[sF_\lambda(u)]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda = 1$	$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}[sFs(u)]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda = 2$	$\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.1421$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2[sF_2(u)]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda = 3$	$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda = 4$	$\Phi_4 = 2+\sqrt{5} \approx 4.23607$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5[sF_4(u)]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e \approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$	$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2$

Общий итог исследования, выполненного в работе [46], состоит в том, что получено бесконечное множество метрических $\lambda -$форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$-заданное положительное число), задаваемых выражением (65). Все эти формы изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (64). А это означает, что полученные в работе [46] новые *модели плоскости Лобачевского,* основанные на «металлических пропорциях» (52), вместе с классическими геометриями Лобачевского и Римана "*могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида"* (Давид Гильберт).

Таким образом, результаты, полученные в работе [46], являются важным вкладом в решение 4-й проблемы Гильберта, которая считается одной из сложнейших проблем Гильберта. Ясно, что это решение не может рассматриваться как окончательное решение этой важной математической проблемы. Но оно, несомненно, будет стимулировать математиков в поисках полного решения 4-й проблемы Гильберта.

Статья [46], опубликованная в 2008 г., была переведена на английский язык и затем в конце 2008 г. опубликована в известном математическом сборнике Congressus Numerantium [47]. Публикация этой статьи вызвало интерес к этой тематике со стороны международного журнала *Applied Mathematics.* По предложению редакции журнала **Алексей Стахов** и **Самуил Арансон** написали большую статью **Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem,** которая разбита на 3 части: **1. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and "Golden" Fibonacci Goniometry, 2. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar's Geometry), 3. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem.** Статья прошла рецензирование, принята к публикации и будет опубликована в в первых трех номерах журнала за 2011 г. Авторы надеются, что после публикации этой статьи последует официальное признание со стороны западной науки следующих научных открытий: *гиперболические функции Фибоначчи и Люка, «золотая» фибоначчиевая гониометрия, новая* *геометрическеая теория филлотаксиса (геометрия Боднара), решение 4-й проблемы Гильберта.*

Хотя гиперболические функции Фибоначчи, «металлические пропорции» Веры Шпинадель, формулы Газале, «золотая» фибоначчиевая гониометрия относятся к «элементарной математике, но вытекающее из них решение 4-й проблемы Гильберта относится к «высшей математике», то есть, в данном случае «золотая» элемеентарная математика стала источником решения крупной математической проблемы.

10. Компьютеры Фибоначчи

Недавно в связи с выступлением автора на научном семинаре кафедры Electrical and Computer Engineering Ryerson University (11 ноября 2010, Торонто) на сайте Межднародного Клуба Золотого Сечения были опубликованы две статьи автора, посвященные обсуждению конецепции «Компьютеров Фибоначчи» http://www.goldensectionclub.net/

Основываясь на своем 40-летнем опыте работы в этой области, полученных научных и инженерных результатах, включая 65 зарубежных патентов по компьютерам Фибоначчи, автор берет на себя смелость утверждать следующее:

1. В течение многих десятилетий в компьютерных технологиях и цифровой метрологии доминировало **«двоичное отношение»** и **«двоичная система»,** которая и была положена в основу знаменитых «Неймановских принципов» (1946 г.). Благодаря исключительным **арифметическим преимуществам** двоичной системы по сравнению с другими системами счисления, это привело к беспрецедентным по своим масштабам темпам развития информационной технологии. К сожалению, двоичная система обладает **НУЛЕВОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ,** и в ней отсутствует механизмы для обнаружения и исправления ошибок, которые неизбежно (с большей или меньшей вероятностью) могут возникнуть в элементах электронных систем под влиянием различных внешних и внутренних факторов (радиация, электромагнитные воздействия, помехи в шинах питания и т.д.). Поэтому дальнейшее развитие информационной технологии на основе классической двоичной системы счисления следует признать **тупиковым направлением**. Двоичная система не может служить информационной и арифметической основой специализированных компьютерных и измерительных систем (космос, управление транспортом и сложными технологическими объектами), где проблемы надежности, помехоустойчивости, контролеспособности, стабильности, живучести систем выходят на передний план.
2. Настало время заменить «двоичное отношение» и двоичную систему на «золотое отношение» (широко используемое в природных системах) и вытекающие из него фибоначчиеву систему и «золотую» систему. **Альтернативы для кодов Фибоначчи и «золотых» кодов среди существующих позиционных систем счисления и избыточных кодов при создании высоконадежных компьютерных и измерительных систем не существует!**
3. Компьютеры Фибоначчи открывают новую эру в развитии надежных информационных технологий! **Переход компьютерной и измерительной техники на «золотое отношение» и «золотую арифметику» можно рассматривать как важный шаг в использовании природных принципов гармонизации систем для улучшения информационной технологии.**

Так случилось, что публикация этих статей совпала по времени с неудачным запуском 5 декабря 2010 с Байконура на ракете-носителе «Протон-М» трех спутников "Глонасс-М". Заметим, что каждый спутник стоит 5 млд. Рублей, то есть, 15 млд. рублей российских налогоплательщиков «вылетели в трубу». Запуски ракеты-носителя "Протон" приостановлены до выяснения причин аварии, сообщил глава Роскосмоса **Анатолий Перминов**. Глава ведомства успокаивает читателей ссылками на высокую надежность "Протонов", которую он оценивает в 96%. Он отмечает, что к разгонному блоку ракеты серьезный претензий не было 15 лет. **Однако в этот раз впервые использовалась новая модификация разгонного блока.** Стоит обратить внимание на следующую фразу из заявления Анатолия Перминова: **«На последнем аварийном запуске была впервые использована новая модификация разгонного блока с цифровым управлением. Естественно, комментарии пока преждевременны".**

Не в этом ли заключается главная причина катастрофы? **Очень вероятно, что в цифровой системе управления ракетой произошел сбой бортового компьютера, что и привело к отклонению ракеты-носителя от расчетного курса.**

К сожалению, специалисты-разработчики бортовых компьютеров до сих пор игнорируют научное направление автора. К счастью, компьютерные идеи автора привлекли внимание специалистов в области истории науки и техники. Один из ведущих российских специалистов в этой области проф. **Сергей Абачиев,** который хорошо знаком с научными результатами автора в этой области, в своей статье «Математика гармонии глазами историка и методолога науки»[48] написал следующее**:**

«Выбор фон Нейманом двоичного кода со всеми его недостатками по сравнению с избыточными кодами золотой пропорции не должен расцениваться как исторически неудачный и ошибочный. В конце 40-х гг. ему просто не было никаких альтернатив. В принципе, любительское открытие Бергмана, датируемое 1957-м годом, могло быть сделано кем-то другим на полвека раньше. Попади тогда первая «золотая» система счисления в поле зрения Хартли, Шеннона и фон Неймана, история цифровых информационных технологий могла бы начаться сразу же с кодов золотой пропорции. Но реальная история Мировой науки и техники распорядилась по-иному. Первым восприемником и профессиональным разработчиком этого любительского открытия стал А. П. Стахов в условиях раскрученного маховика информационных технологий на основе двоичного кода.

Проученное горьким опытом былых гонений на генетику и кибернетику, Советское государство на этот раз быстро осознало, что отечественная наука обретает стратегически прорывные позиции на всеопределяющем направлении научно-технического прогресса. Свидетельством тому стало беспрецедентное патентование первых информационных технологий А. П. Стахова на качественно новой арифметической первооснове в СССР, на Западе и в Японии. Тем не менее, такие технологии объективно не могли тогда быстро вытеснить безраздельно господствовавшие технологии на основе двоичного кода. В любом случае их экспансия была бы процессом сугубо поэтапным, длительностью во много десятилетий.

И в 80-х гг. этот естественный процесс в нашей тогда ещё единой стране начал осуществляться со сравнительно узкой области бортовой электроники военных самолётов и космических аппаратов, в которой экономические критерии эффективности техники отходят на задние планы по сравнению с функциональными. При нормальном развитии к настоящему времени он позволил бы России и Украине быть Мировыми «законодателями» и производителями, по крайней мере, уникально надёжной авионики. Но катастрофический финал «перестройки» 1985–1991 гг. пресёк в начальной фазе этот процесс поэтапного отвоёвывания нашей страной ведущих Мировых позиций в области технической кибернетики и информационных технологий».

Так может специалистам в области бортовых компьютеров все же прислушаться к мнению проф. Абачиева и не ожидать, когда «компьютеры Фибоначчи» будут созданы на Западе?

11. Международный Конгресс по Математике Гармонии

С 8 по 10 октября 2010 г. в Одесском Национальном Университете им. И.И. Мечникова был проведен **1-й Международный Конгресс** на тему **"СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ ГАРМОНИИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ, ЕСТЕСТВОЗНАНИИ, ТЕХНОЛОГИИ, СОЦИУМЕ И ОБРАЗОВАНИИ".**

Инициатива кафедры менеджмента и математического моделирования рыночных процессов Института математики, экономики, механики Одесского Национального Университета им. И.И. Мечникова (доц. **Егорова-Гудкова Т.И.**, д.э.н. **Садченко Е.В.**), поддержка администрации университета (акад. **Сминтына В.А.**, проф. **Коваль И.В.** проф. **Круглов В.Е.**) и публикация книги автора **"The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science"** и стали непосредственной причиной проведения этого Международного Конгресса.

Проведению Конгресса предшествовало несколько важных событий, касающихся «Математики Гармонии». Прежде всего, в рамках подготовки к Конгрессу в университете был создан "Музей Математики Гармонии", в котором с помощью живописных планшетов представлены история Математики Гармонии, начиная с Пифагора, Платона, Евклида, и примеры проявления "Математики Гармонии" в природе, науке и искусстве. В начале 2010 г. в Одесском Национальном Университете им. И.И. Мечникова принято решение ввести курс **"Математика Гармонии"** в учебный план подготовки студентов специальности «Менеджмент организаций», 4-й курс. Такой курс был прочитан автором в сентябре-октябре 2010 года.

Непосредственно перед началом Конгресса состоялась встреча ректора университета проф. **Коваля И.Н.** с тремя участниками Конгресса, ведущими в мире специалистами в этой области – сопредседателем Конгресса проф. **Стаховым А.П.** (Канада) и членами оргкомитета – проф. **Сороко Э.М.** (Беларусь) и проф. **Скоттом Олсеном** (США). Встреча прошла в дружественной обстановке. Беседа велась на двух языках (русском и английском), потому что проф. Коваль свободно владеет английским языком (он год стажировался в США). Была отмечена важная роль Конгресса, в работе которого приняли участие ряд известных ученых из других стран (США, Канада, ФРГ, Чили, Южная Африка), в расширении контактов Одесского национального университета с зарубежными университетами, что является одной из стратегических целей Одесского национального университета в период подготовки к празднованию 150-летия университета, которое будет отмечаться в 2015 г. Именно во время этой встречи проф. Скотт Олсен произнес замечательные слова:

«Университет, который первым введет математику гармонии и сопряженные дисциплины в учебный процесс, станет мировым лидером в сфере образования».

В заключение встречи ее участники обменялись презентами и книгами. Проф. Коваль вручил профессорам Стахову, Сороко и Олсену книги, посвященные истории Одесского университета.

На пленарных заседаниях (8, 9 и 10 октября) было сделано 30 докладов по теории «Математики Гармонии» и ее приложениям в различных сферах современной науки. Прежде всего, необходимо отметить широкую географию участников Конгресса – от США, Канады, Чили, ФРГ до Украины (Одесса, Львов, Запорожье, Сумы), России (Москва, Санкт-Петербург, Саратов, Красноярск, Тюмень), Беларуси (Минск, Гомель). Участие в работе Конгресса ученых, прибывших из Тюмени и Красноярска (Коновалов и Южанников) можно считать героическим поступком, если учесть стоимость авиабилетов до Одессы. Таким же героическим поступком является участие в Конгрессе Почетного профессора Белорусского государственного университета транспорта Семенюты Н.Ф. (Гомель), если учесть, что ему свыше 80 лет и перед Конгрессом он тяжело переболел.

Характерной особенностью Конгресса явилось участие в нем специалистов, работающих на стыке наук. Доктор философских наук Эдуард Сороко (Минск) является математиком по базовому образованию, доктор физико-математических наук Сергей Петухов (Москва) является одновременно кандидатом биологических наук, доктор философских наук Александр Волошинов (Саратов) одновременно является кандидатом физико-математических наук, доктор технических наук Александр Коновалов (Тюмень) имеет также ученую степень кандидата географических наук.

О высоком профессиональном уровне докладчиков свидетельствует перечень книг, опубликованных участниками Конгресса в 21 в.:

1. Крючкова І.В.Структурні чинники розвитку економіки України, Київ, 2004
2. Иванус А.И. Код да Винчи в бизнесе или гармоничный менеджмент по Фибоначчи, Москва, URSS, 2005
3. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи, Изд-во «Питер», 2006
4. Боднар О.Я,. «Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві», Львів, 2005.
5. Scott Olsen. “The Golden Section. Nature’s Greatest Secret,” 2006.
6. Цветков В.Д. Золотая гармония и сердце, Пущино, 2008.
7. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. Москва, 2008
8. Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем, URSS, (2-е изд., 2006, 3-е изд., 2009)
9. Мартыненко Г.Я. Введение в теорию числовой гармонии текста, Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2009
10. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science, World Scientific, 2009
11. Когновицкий О.С. Двойственный базис и его применения в телекоммуникациях. Санкт-Петербург, 2009 (Гл. 9. Применение двойственного базиса для анализа и обработки числовых рекуррентных рядов)
12. Южанников А.Ю. Золотое сечение и техноценозы в системах электроснабжения. Красноярск, 2009.
13. Тимошенко Л.В. Космические загадки творчества, Москва, 2010

Это и есть те реальные достижения в области «золотого сечения» и «математики гармонии», полученные лучшими представителями этого направления в 21 в.

Своими решениями Конгресс четко определил задачи по развитию этого направления и его практического воплощения в современную жизнь. Создана Международная комиссия по «Математике гармонии», во главе с проф. Стаховым (Канада) и проф. Олсеном (США), которая будет координировать все работы по этому направлению.

Главная цель Конгресса – ознакомление участников с основными направлениями развития «Математики Гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки и с деятельностью Одесского Национального Университета им. Мечникова по внедрению в учебный процесс нового учебного курса «Математика Гармонии» - была полностью выполнена.

Ясно одно, что после этого Конгресса «Математика Гармонии» как новое междисциплинарное направление, новый тип «элементарной математики» и «золотая» парадигма современной науки получила путевку в жизнь.

12. Заключение

В основу настоящей статьи положено замечание академика Митропольского о том, что «Математика Гармонии» имеет прямое отношение к «элементарной математике». Более того, она как бы заполняет пробел между классической «элементарной математикой» и «высшей математикой». Анализ этой идеи академика Митропольского, проведенный в настоящей статье, приводит к следующим выводам:

1. Как известно, «Начала» Евклида являются величайшим математическим сочинением, которое, с одной стороны, можно считать главным источником математических знаний, используемых в современном школьном математическом образовании, с другой стороны, неисчерпаемым источником развития высших разделов математической науки (примером является неевклидова геометрия Лобачевского).
2. Однако, современные историки математики проигнорировали «гипотезу Прокла», согласно которой в основу «Начал» Евклида была положена «гармоничная идея» древних греков, которая ассоциировалась в Древней Греции с «золотым сечением» и «Платоновыми телами». Это привело к одностороннему взгляду на «Начала» Евклида и приуменьшению роли «золотого сечения» и «Платоновых тел» в современной науке и образовании. Идеи Прокола были поддержаны **Иоганном Кеплером**, который на основе «Платоновых тел» создал оригинальную модель Солнечной системы («Космический кубок») и сравнил «золотое сечение» с «Теоремой Пифагора), и **Феликсом Клейном**, который выдвинул оригинальную идею объединения математических теорий на основе икосаэдра.
3. Но главный вывод, вытекающий из «гипотезы Прокла», состоит в том, что «Начала» Евклида и есть исторически первая Математическая теория Гармонии, основанная на «золотом сечении» и «Платоновых телах». Начиная с Евклида, развитие математики пошло в двух направлениях – **«Классическая Математика»,** которая позаимствовала в «Началах» Евклида аксиоматический подход и основные знания в области теории чисел и теории иррациональностей, геометрии, геометрической алгебры и стереометрии, и **«Математика Гармонии»**, которая позаимствовала в «Началах» «золотое сечение» и «Платоновы тела».
4. Анализ основных математических результатов «Математики Гармонии» показывает, что в этой области получены оригинальные математические результаты, которые имеют прямое отношение к «элементарной математике». Это относится, прежде всего, к *алгоритмической теории измерения, p-числам Фибоначчи,* основанных на треугольнике Паскаля, *золотым p-пропорциям, «металлическим пропорциям»*, которые лежат в основе *«золотой» фибоначчиевой гониометрии, p-кодам Фибоначчи и кодам золотой p-пропорции,* которые могут быть положены в основу компьютеров нового типа - *компьютеров Фибоначчи и др.*
5. Все эти результаты составляют основу так называемой **«золотой элементарной математики»,** которая должна быть введена в учебный процесс через курс «Математика Гармонии». В Одесском национальном университете такая работа началась, а курс «Математика Гармонии» введен в учебный процесс ряда специальностей.
6. В общетеоретическом плане особое внимание необходимо обратить на развитие новой теории гиперболических функций («золотой» фибоначчиевой гониометрии). В рамках этой теории уже получен важный математический результат – решена *Четвертая Проблема Гильберта*. Новые классы гиперболических функций нацеливают теоретическое естествознание на поиск новых гиперболических миров природы, подчиняющимся математическим соотношениям *«золотой» фибоначиевой гониометрии.*
7. Особый интерес для современных информационных технологий представляет концепция *компьютеров Фибоначчи* как нового направления в создании супернадежных компьютеров. Реализация этой идеи, то есть, создание компьютеров Фибоначчи, может привести к

революционным преобразованиям в области информационных технологий и расширению области их применения.

Литература

1. Митропольский Ю.А. Отзыв о научном направлении украинского ученого, доктора технических наук, профессора Алексея Петровича Стахова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12452, 23.09.2005
2. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific, 2009.
3. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2-х томах. Том 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. 4-е издание. М. Наука, 1987
4. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2-х томах. Том 2. Геометрия. 2-е издание. М. Наука, 1987.
5. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. – Москва: Наука, 1991.
6. Волошинов А.В. Венок мудрости Эллады. Москва: Дрофа, 2003.
7. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984
8. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. Москва: Наука, 1973.
9. Charles H. Kann. Pythagoras and Pythagoreans. A Brief History. Hackett Publishing Co, Inc., 2001.
10. Leonid Zhmud. The origin of the History of Science in Classical Antiquity. Published by Walter de Gruyter, 2006.
11. Craig Smorinsky. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008
12. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнен6ий пятой степени (пер. с нем.). Москва: Наука, 1989.
13. Blackburn S. The Oxford Dictionary of Philosophy. New York, Oxford University Press, 1994, 2005, 408 p.
14. Васютинский Н. А. Золотая пропорция. – Москва: Молодая гвардия, 1990.
15. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. – Санкт-Петербург: Питер, 2006.
16. Начала Евклида. Книги I-VI. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948.
17. Начала Евклида. Книги VII-X. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1949.
18. Начала Евклида. Книги XI-XV. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1950.
19. Лосев А.Ф. История философии как школа мысли. Коммунист, 1981, №11.
20. Стахов А.П. Эстетика Математики Гармонии как «золотой» парадигмы современной науки. Сайт Международного Клуба Золотого Сечения, публикация от 8 октября 2010 г. https://docs.google.com/fileview?id=0B5BajO1r9mlMNjQzNDkwZDYtYTlmMS00YzNjLTgwNTctYjU0NDMyNTI3MjQ2&hl=en&authkey=CI_AkRc
21. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994
22. Гитис Э.И. Преобразователи информации для электронных цифровых вычислительных устройств. Москва: Энергия, 1975.
23. Карпюк Б.В. Об алгоритмическом описании процессов измерения. Измерительная техника, 1962, №1.
24. Euler K. New Principen zur Analog-Digital-Umwaldung and derer optimal Auslegung. Frequenz, 1960, №10

25. Витенько И.В., Волков А.А., Стахов А.П. Оптимальные алгоритмы функционирования преобразователей «напряжение-код». В кн. Тезисы докладов V научно-технической конференции «Кибернетически пути совершенствования измерительной аппаратуры». ЛОП НТО, Приборпром, 1966.
26. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
27. Алипов Н.В., Витенько И.В., Стахов А.П. Корректирующие (n,k,S)-алгоритмы. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.
28. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
29. Лебег А. Об измерении величин. Москва: Учпедгиз, 1960.
30. Илиев Л. Математика как наука о моделях. – Успехи математических наук. 1972, том 27, вып. 2.
31. Бахвалов С.В., Иваницкая В.П. Основания геометрии. Москва: Издательство «Высшая школа», 1972.
32. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
33. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №2, 1988 г.
34. Stakhov A.P. The Golden Section in the measurement theory. An International Journal «Computers & Mathematics with Applications», Volume 17, No 4-6, 1989.
35. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения: новый взгляд на теорию позиционных систем счисления и компьютерную арифметику. Международный научный журнал «Управляющие системы и машины», №4-5, 1994
36. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
37. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
38. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
39. Стахов А.П., Ткаченко И.С. и др. Об определении фибоначиевых и люковых функций. Винницкий политехнический институт. Винница, 1988. Депонировано в УкрНИИНТИ, 10.08.88.
40. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993.
41. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
42. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
43. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
44. Газале Мидхат. Гномон. От фараонов до фракталов (пер. с англ.). Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002
45. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm)

46. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm
47. Alexey Stakhov, Samuil Aranson. “Golden” Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert’s Fourth Problem. Congressus Numerantium, Vol. CXCIII, December 2008.
48. Абачиев С.К. Математика гармонии глазами историка и методолога науки. Международный Клуб Золотого Сечения, 2010
http://www.goldensectionclub.net/publications/abachiev/abavhiev-articles/abachiev003