Г. Я. Мартыненко

Математика гармонии: Новейшее время – XX век, 1900–1985 гг.

Вундеркинд

Посвящается юному Джорджу Бергману,
построившему в 1957 г. систему счисления на основе золотого сечения

Мы любим Скалу, Метрополитен и прочие театры,
Изяществом письма пленяет нас поэт,
В балете восхищает ловкий пируэт,
А в ресторане – вина и салаты.

Вгоняют в транс рулетка, кости, карты,
Головоломки, фокусы, загадки,
Секреты, сплетни, колдовство, колядки. -
У каждого свои пристрастья и азарты.

Но более всего гурманы ценят чудеса,
Где странные рождаются догадки, -
Там числа и игра согласно правят миром.

В таких потехах вундеркиндов голоса
Громят все догмы и порядки, -
Сметая славу изваяний и кумиров.

Данный очерк охватывает XX столетие за исключением последних 15 лет. Мне кажется, что этот финишный отрезок и примыкающее к нему первое десятилетие XXI века – еще не история. Это скорее текущая, живая жизнь, не успевшая превратиться в сухие факты. Живая жизнь многолика, пестра, противоречива, неустойчива. Представляется, что дискуссионная пыль, порожденная муками стремительного становления, должна осесть. После этого можно будет бесстрастно оценить ситуацию. Сделаю это я или кто-то другой, покажет время. Возможно, этот краткий период «бури и натиска» нуждаются в критическом обзоре, но я пока не ощущаю в себе ни готовности, ни способности к профессионально безупречной и объективной оценке положения дел и приведения невероятно разнообразных противоречивых и трудносопрягаемых тенденций к общему знаменателю. Пока же я переведу дух в преддверии этого интереснейшего периода в развитии математико-гармонических представлений.

Я не могу себе позволить торопиться и вмешиваться в процесс, развивающийся по своим законам и стремящийся к самоосознанию. О молодой математике гармонии можно сказать словами Вергилия: *Naviget, haek summa est* –

Пусть она плывет, т.е. идет вперед, а не стоит на месте. Именно эти слова произнес Валерий Брюсов в 1921 г., говоря о многовекторности развития молодой советской поэзии в 20-е гг. XX века (Брюсов, 1973, с. 185). Многовекторность, молодость и революционность математики гармонии несомненны.

Общая характеристика

В течение XX в. интенсивность математико-гармонических изысканий постепенно нарастает. Это обусловлено стремительным ростом науки в целом, ее превращением из малой науки в большую науку – науку, ставшую непосредственной производительной силой подобно современной промышленности (Михайлов, Черный, Гиляревский, 1977). Но важную роль играли и внутренние процессы в развитии золотосеченских проблем, прошедших стадию «первичного накопления знаний». Эти знания постепенно превращались в фактор, ориентирующий в сторону систематической работы. К концу века поток информации, связанный с золотым сечением и числами Фибоначчи, стал лавинообразным. Качественный перелом начался примерно в начале 70-х в процессе экспансии математико-гармонических представлений в сферу информационных технологий. С этого момента математико-гармоническое движение стало набирать энергию как в области математических идей, так и в области многочисленных приложений, затрагивающих основы развития современной цивилизации.

XX век характеризуется беспрецедентно радикальными сдвигами в области научного и художественного творчества. Речь идет об отходе от классических схем, переоценке ценностей, декадансе, обновлении художественного и научного языка, становлении новых и даже экстравагантных научных парадигм, возникновении различных форм модернизма и авангардизма.

Вот как, например, описывает А. Н. Толстой в своем романе «Хождение по мукам» противоречивую и сложную ситуацию начала века в Петербурге, эпоху кануна первой мировой войны: «Петербург жил бурливо-холодной, пресыщенной, полуночной жизнью. Фосфорические летние ночи, сумасшедшие и сладострастные, и бессонные ночи зимой, зеленые столы и шорох золота, музыка, крутящиеся пары за окнами, бешеные тройки, дуэли на рассвете, в свисте ледяного ветра и пронзительном завывании флейт… С невероятной быстротой создавались грандиозные предприятия, возникали, как из воздуха, миллионные состояния. Из хрусталя и цемента строились банки, мюзик-холлы…великолепные кабаки, где люди оглушались музыкой, отражением зеркал, полуобнаженными женщинами, светом, шампанским… В городе была эпидемия самоубийств. Залы суда наполнялись толпами истерических женщин, жадно внимающих кровавым и возбуждающим процессам. Все было доступно – роскошь и женщины. Разврат проник всюду, им, как заразой, был поражен дворец… То было время, когда любовь, чувства добрые и здоровые считались пошлостью и пережитком… разрушение считалось хорошим вкусом – признаком утонченности… Люди выдумывали себе пороки и извращения, чтобы не прослыть пресными. Таков был Петербург в 1914 году. Замученный бессонными ночами, оглушающий тоску свою вином, золотом, безлюбой любовью, надрывающими и бессильно-чувственными звуками танго – предсмертного гимна, – он жил словно в ожидании рокового и страшного дня» (Толстой, 1973, с. 5–7).

В это время ценности, которые ранее казались прочными и незыблемыми, перестали существовать. Уходило в прошлое и традиционное представление о гармонии природы и человеческого существования, идея единения с природой и сопричастности к вечным ценностям. Разброд, качания, бунт, ниспровержение всего и вся, неприятие всего затхлого и омертвевшего.

Первая четверть XX века – это сложный и бурный период в истории европейской культуры с колоссальным приливом творческой энергии и поиском новых путей во всех областях искусства. Всеми цветами радуги переливался нескончаемый поток сталкивающихся противоречивых идей. В этих условиях формировалась какая-то новая гармония, уникальный и парадоксальный сплав течений, школ, манер, не вмещавшиеся в традиционные рамки реализма, импрессионизма, романтизма и прочих течений.

Но одновременно постепенно набирает силу тенденция преодоления чересполосицы мнений, поиска выхода из эстетического хаоса через переход к формализации, математизации и даже индустриализация искусства. Эта тенденция начала прорисовываться уже в конце XIX века. Все началось с Поля Сезанна, который призывал к геометрической структурализации реальности (Панкин, 2004). «Трактуйте природу посредством цилиндра, шара, конуса…», – призывал он. Логическим продолжением идей Сезанна явился кубизм, который призывал отказаться от евклидовой геометрии и войти в царство слияния времени и пространства. В дальнейшем идеи кубизма привели к супрематизму Казимира Малевича. В этом течении была реализована зримая проекция неземного, беспредметного мира. Позднее идеи супрематизма были развиты Василием Кандинским, который не конструировал формы, а корректировал то, что являлось его воображению. В поздний период Кандинский становится все более рациональным, геометрическим, сциентистским. Это было характерно и для «научной поэзии», которую проповедовал Рене Гиль (Брюсов, 1973). Основная идея Р. Гиля и его многочисленных последователей состоит в том, что «поэзия есть верховный акт мысли». Поэтический образ по Гилю есть результат синтезирующей способности интеллекта. Поэтому поэзия, как и наука, есть проявление мысли, выраженной не в отвлеченной форме, а в живом образе.

Но это только одна из черт данной эпохи. Много и других.

Экспансия идей и методов естественных наук и математики в гуманитарные науки и искусство в это время была тотальной. Это тенденция зародилась уже в XIX веке, воплотившись в новых измеряющих гуманитарных дисциплинах. В XX веке эта тенденция приобрела характер пандемии. Вдогонку за антропометрией, биометрией, стилеметрией, эконометрией, которые зародились в XIX веке, устремились психометрика, социометрия, наукометрия, библиометрия, искусствометрия, информметрия, технометрия и др. дисциплины.

Но на фоне первой тенденции довольно активна и вторая: экспансия гуманитарных наук и искусства в естественные науки, т. е. набирает силу тенденция гуманизации естественных наук. Особенно это характерно для математики, познавательные принципы которой переосмысляется в гуманитарном аспекте.

Возникают обширные сферы междисциплинарной деятельности. Это теория систем и системный анализ, математическое моделирование, синергетика, социодинамика и теория ценозов.

XX век – это время расцвета великой русской формальной школы в литературоведении, связанной с именами Андрея Белого, Юрия Тынянова, Виктора Шкловского.Это время русского авангардизма в лице Василия Кандинского, Марка Шагала, Давида Бурлюка и др. Это время рождения структурализма Фердинанда де Соссюра, расцветшего в пражской, американской и копенгагенской школах структурной лингвистики, а также в различных школах общей поэтики. Это математическое стиховедение, увлекшее не только филологов, но и великих математиков, например, Н. А. Колмогорова. Именно в XX веке наблюдается расцвет техники психологических и социологических измерений: семантический дифференциал, ассоциативный эксперимент, контент-анализ, методики экспертных оценок и т. п. В XX веке обостряется интерес к информации во всех ее ипостасях. Рождается математическая теория информации, теория избыточности, теория кодирования, математическая лингвистика. А в конце столетия стала складываться междисциплинарная область, которая уже в начале следующего тысячелетия получила название «Математика гармонии».

Примечательной чертой столетия является тотальный интерес к динамике формообразования в природе, общественной жизни и искусстве. В эстетике стали говорить об общности принципов формообразования для разных типов искусств. Было установлено, что в большинстве случаев в искусстве укоренены сюжеты, в которых действует принцип восхождения, достижения вершинной точки с последующим спадом и развязкой. Такой способ конструирования формы типичен для всех временных искусств. Он был провозглашен на материале фольклора В. Я. Проппом (Пропп, 1969) и на материале музыки – Гансом – Генрихом Унгером (Махов, с. 122). При этом динамический пик является некоторой равновесной точкой, регулирующей распределение «энергии» в тексте.

Первая половина XX века

Следуя логике и интенсивности развития математико-гармонических идей, обозреваемое столетие было разбито на два полустолетия, а второе полустолетие – на две неравные части: 1950 – 1985 и 1985 – 2000 гг. Эта неравномерность обусловлена стремительным ростом информационного потока по мере приближения к концу столетия.

В былые времена математико-гармонические изыскания были уделом одиночек. Такое положение вещей сохранялось и в первой половине XX в. Причем, в это время преимущественно осваивались, интерпретировались и совершенствовались результаты, достигнутые в школах Цейзинга и Фехнера, т. е. в рамках экспериментальной эстетики и в конкретных искусствах: архитектуре, музыке, живописи, отчасти в словесном искусстве. Важным достоянием этого этапа является то, что числа Фибоначчи и золотое сечение стали использоваться для изучения динамики текста: музыкального и словесного.

Собственно математических достижений было немного, если не считать трех замечательных открытий.

Первое открытие выполнено в области непрерывных дробей. В 1917 г. американским математиком Куртом Альтшулером золотое сечение впервые было представлено в виде повторного радикала, состоящего исключительно из единичек:

$$\lim \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} \to 1{,}618$$

Таким образом, золотое сечение пополнило ряды замечательных математических констант, которые могут быть представлены в виде непрерывной дроби, повторного радикала, бесконечного произведения или каким-то других итерационных структур. Число φ заняло почетное место в тройке великих констант: e, π, φ.

Следует также упомянуть замечательные формулы великого индийского математика Сриниваза Рамунаджана (1887-1920), полученные благодаря его гениальной интуиции, не укладывающейся в рамки практического разума. Вот одна из них. Обе связывает три замечательных числа: e,π и φ (Жуков, 2004, с. 61):

$$\frac{1}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+\frac{e^{-2\pi}}{1+..}}} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \varphi\right) e^{\frac{2\pi}{5}}$$

А теперь остановимся на одном достаточно курьезном открытии. О нем упоминает Мартин Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» (Гарднер, 1971, с. 230). В русский перевод вошли три книги, изданные им в США в интервале 1959-1966 гг.

С. А. Ясинский в книге (Ясинский, 2004, с. 153) обратил внимание на интересное замечание Гарднера: «Стифен Барр, сын Марка Барра, давшего *числу* φ *его название*, прислал мне оттиск статьи своего отца, опубликованной в лондонском Sketch в 1913 году. В этой статье содержится следующее *обобщение этого замечательного числа*. Если построить аддитивный ряд, в котором каждый член (начиная с четвертого) равен сумме трех предыдущих, то *предел отношения последующего члена к предыдущему будет равен 1,839*…Аналогичный предел аддитивного ряда, в котором каждый член, начиная с пятого, равен сумме четырех предыдущих, равен 1, 927… В общем случае

$$n = \frac{\log(2-x)^{-1}}{\log x},$$

где n – число слагаемых, которые необходимо взять для получения следующего члена ряда, а x – предел отношения последующего члена к предыдущему. При $n = 2$ мы получаем обычные числа Фибоначчи с $x = \varphi$. При n, стремящемся к бесконечности, x стремится к 2». В этой пространной цитате содержится по крайней мере три интересных пассажа. С позиций сегодняшнего дня мы можем сказать, что при трех слагаемых мы получаем так называемые числа Трибоначчи, которые были заново открыты Фейнбергом (Feinberg, 1963) только в середине 60-х гг. Для многих будет интересно, что обозначение золотого сечения буквой φ в честь великого греческого зодчего Фидия также принадлежит Барру. Любопытно также, что Гарднер назвал числа Барра (числа Трибоначчи) обобщением числа φ. Так же поступил и А. П. Стахов, назвав свою рекуррентную последовательность обобщением золотого сечения, что породило среди некоторых участников золотосеченского движения острую терминологическую дискуссию. Из сказанного видно, что Стахов в таком словоупотреблении имеет сторонника в лице великого популяризатора математики и автора математических головоломок Мартина Гарднера, а также Марка Барра и его сына Стифена – знаменитого «фокусника» и «умника» от математики.

Возможно, если устроить серьезный информационный поиск, то можно будет разыскать в первой половине XX в. еще какие-то математические достижения, относящиеся к золотосеченской теме, но в целом информационного вала здесь нет.

Этого нельзя сказать о прикладных исследованиях этого периода. Здесь есть определенные достижения, но и они в целом могут рассматриваться как развитие идей XIX в.

Замечательным исключением из этого ряда работ является статья *Эмиля Карловича Розенова*, написанная в 1904 г.. Основой статьи послужил доклад Розенова «О применении закона золотого деления к музыке», сделанный им на заседании Московского научно-музыкального кружка 15 октября 1903 года и опубликованной в «Русской музыкальной газете» (1904, № 25–28), а также в «Известиях С.-Петербургского общества музыкальных собраний (СПб, 1904, июнь-август, с. 1–19).

Отличительной чертой статьи Розенова является то, что здесь золотое сечение в явном виде используется для анализа не только музыкального, но и словесного текста. До Розенова эта эстетическая характеристика использовалась только при анализе музыки. Причем Розенов исследует оба типа звучащего текста с единых позиций и в единых терминах. К такому методу анализа Розенова, по его же словам, побудили обратиться «бедность, шаткость, и разрозненность музыкальной эстетики» и желание разгадать «таинственные творческие законы природы, руководящие музыкальным формовоплощением художественно-эмоциональных идей через посредство человеческого гения» (Розенов, 1982, с. 119). Это очень важная мысль, ибо для Розенова закон природы, воплощенный в выдающихся произведениях искусства, превращается в эстетический закон.

В центре внимания Розенова – динамическая развертка текста и разыскание в нем точки-кульминации, которая может «1) служить моментом раздела между главными частями произведения и установить этим пропорциональные размеры частей по отношению к целому; она может 2) подчеркнуть кульминационный пункт возрастающего по напряжению ожидания и может 3) отметить главную, основную мысль произведения, поместив ее на столь заметное для непосредственного чувственного восприятия место» (Розенов, там же, с. 125).

Далее Розенов на материале текстов М.Ю.Лермонтова («Бородино», Умирающий гладиатор», «Демон», «Три пальмы», «Кубок» Ф. Шиллера, «То было раннею весной» А. К. Толстого) демонстрирует эффективность своей методики. Тот же вывод делается для ряда произведений Баха, Бетховена, Моцарта, Вагнера и Глинки, народных песен.

В заключение Розенов отмечает, что закон золотого сечения проявляется далеко не во всех случаях. Наиболее четко он «проявляется у гениальных авторов, а у последних – преимущественно в эпоху их полной зрелости и главным образом, в лучших, наиболее одухотворенных творениях их» (Розенов, 1982, с. 156).

Несколько позднее Леонид Леонидович Сабанеев (1881–1968) предпринял детальное исследование проявления золотого сечения. Им было исследовано более 2 тыс. произведений русских и зарубежных композиторов.

Сабанеев исходил из посылки (Сабанеев, 1925), что музыкальное произведение во времени делится на части некоторыми вехами, которые облегчают восприятие сложного целого. Такими вехами, по Сабанееву, являются: изменение структуры мелодии, интонационные кульминационные пункты, изменение тональности и др. При этом в большинстве случаев такие изменения, переломы, переключения делят текст по закону золотого сечения.

Интересно, что в динамике музыкальных произведений Сабанеев обнаруживает не только классическое, а целую серию золотых сечений. Каждое сечение отражает свое музыкальное событие в развитии музыкальной темы. В изученных им 1770 сочинений 42 композиторов он зафиксировал 3275 золотых сечений. Причем в подавляющем числе произведений золотое сечение проявляется.

Наиболее всесторонне Сабанеевым были изучены все этюды Шопена. Все они, кроме трех, содержат золотое сечение (всего было выявлено 154 таких сечений). Сабанеев обратил внимание также и на то, что в ряде случаев зеркальная симметрия сочетается с золотой. В таких случаях произведение распадается на несколько равных частей, в каждой из которых можно выделить золотое сечение.

Характерно, что Сабанеев, как и Розенов, указывает на то, что золотое сечение чаще всего обнаруживается в высокохудожественных произведениях, написанных выдающимися композиторами. Причем весьма примечателен тот факт, что *в произведениях композиторов XX в. золотая пропорция встречается значительно реже, чем у их предшественников*. Это было следствием отхода от классических традиций, массовым распространением модернизма и авангардизма.

Исследования Розенова и Сабанеева позднее были продолжены *Львом (Лео) Абрамовичем Майзелем* (1907–2000). В своей книге (Майзель, 1960) он отмечает наличие в произведении некоторого «кульминационного взлета», высшей точки, причем такое построение характерно не только для произведения в целом, но и для его частей. Майзель подчеркивает, что кульминация редко располагается в центре произведения, она обычно асимметрично смещена. Например, в восьмитактных мелодиях Бетховена, Шопена, Скрябина высшая точка располагается на сильной доле шестого такта или на последней мелкой доле пятого такта, т. е. в точке золотого сечения. По мнению Майзеля, доля таких восьмичленных мелодий, в которых подъем занимает пять тактов, а последующий спуск – три, необычайно велика. Если автор пишет гармонично, то наверняка это проявляется в установленной числовой закономерности. Рисунок мелодии имеет такой «профиль»: от длительного периода нарастания через кульминацию к более короткому спаду.

Заметным явлением в математико-гармонических штудиях этого времени является книга немецкого математика *Генриха Тимердинга* «Золотое сечение», написанная в 1919 г. (Тимердинг, 2005). Математическая часть книги представляет собой элементарное изложение теории золотого сечения посредством геометрических структур. Что касается прикладной части (наиболее интересной), то она содержит критическое изложение эстетических идей Цейзинга и Фехнера. Тимердинг рассматривает сильные и слабые стороны их концепций. Много местоа Тимердинг отводит вопросам искажения визуального восприятия произведений изобразительного искусства и влияния этого искажения на математико-гармонические характеристики.

Кроме того, Тимердинг высказал ряд принципиальных соображений. На некоторых из них мы считаем необходимым остановиться.

1. Тимердинг говорит о двух подходах к изучению золотого сечения в искусстве. Первый подход он называет реалистическим. Согласно такому подходу каждое явление должно быть рассмотрено без пристрастия и предвзятости, обусловленной предварительным установлением нормы. «Поэтому, – пишет Тимердинг, – для художника необходимо только наблюдение и овладение техникой его искусства, а всякое знание является для него опасным, так как оно нарушает правильность и непосредственность его восприятия» (Тимердинг, 2005, с.60). Второй подход Тимердинг считает идеалистическим. Художник стремится передать тип, некоторый идеал, который формируется в сознании художника. Никакой реальный объект его не достигает, он может лишь приблизиться к нему. Но этот тип может быть сформирован не умозрительно, а экспериментальным путем через статистическое обобщение. Для этого нужно измерить множество объектов данного рода и вычислить среднюю величину. Это соответствует методу А. Кетле, о котором мы говорили в предыдущем очерке (Мартыненко, 2010б).

2. Тимердинг весьма скептически относится к тем исследователям, которые смотрят на золотое сечение, как на господствующее отношение и на норму в природе и искусстве. Большие надежды он возлагает на биометрию, осуществляющую систематическое измерение живых существ на массовом материале. Именно результаты биометрических исследований должны дать ответ на вопрос о роли золотого и прочих отношений в природе и искусстве. Таким образом, Тимердинг предостерег от чрезмерного оптимизма относительно всеобщности золотого сечения и призвал к проведению статистических исследований на массовом материале.

3. Тимердинг активно предостерегал и от мистического толкования золотого сечения, «которое не требуется для понимания действительных законов

искусства и психологических условий художественных впечатлений, а лишь препятствует правильному пониманию этих условий и направляет на ложный след, вследствие необоснованного введения метафизического элемента» (Тимердинг, 2005, с. 86). Обратим внимание на то, что эта фраза-напутствие в книге Тимердинга является заключительной. Это предостережение не теряет актуальности и в XXI в.

Во время второй мировой войны крупнейший французский архитектор XX в. *Ле Корбюзье* (1887–1965) начинает разрабатывать свой знаменитый «Модулор», описанный им в одноименной книге с подзаголовком «Опыт соразмерной масштабу человека гармоничнщй системы мер, применяемой как в архитектуре, так и в механике» (Ле Корбюзье, 1976). Корбюзье продолжил традиции Витрувия и архитекторов эпохи Возрождения, у которых в центре творчества была идея проекта (Мартыненко, 2010а), совместив идеи старых мастеров с искусством авангарда. В основу своего модулора Корбюзье положил пропорции человеческого тела, связанные с золотым сечением. Вообще в творчестве Корбюзье очень сильным было конструкторское начало. Например, в 1914 г. совместно с инженером М. Дюбуа он запатентовал свой проект Домино, в котором предугаданы возможности строительства из крупноразмерных строительных элементов, что было ярким новаторским шагом. *Это был первый случай в истории патентования, когда интеллектуальная собственность была защищена человеком, причастным к сознательному, рабочему математико-гармоническому конструированию*. Значительно позднее, патентование, но в более широких масштабах применительно к информационным технологиям было осуществлено А. П. Стаховым и его коллегами. Но на этом мы остановимся ниже.

Современником Ле Корбюзье был выдающийся русский и советский архитектор *Иван Владиславович Жолтовский* (1867-1959). В 20-е гг. он изучал архитектуру в Италии, где на него сильное впечатление произвели работы Андреа Палладио. Четыре книги великого итальянца Жолтовский перевел на русский язык. Увлекшись Палладио, Жолтовский занялся также изучением пропорций в архитектуре и искусстве. На основании золотой пропорции он конструирует производную функцию, которая вошла в историю архитектуры как функция Жолтовского. Последняя является удвоенным третьим членом нисходящего ряда золотого сечения от единицы до 0,236: 1,000 – 0,618 – 0,382, 0,236. Удвоенный отрезок последнего члена равен 0,472. Эта величина может быть проинтерпретирована также как средняя геометрическая золотого сечения и его дополнения до единицы: $0{,}472 = 2 \times 0{,}618 \times 0{,}382$. Это малый отрезок функции Жолтовского. Больший отрезок равен $1 - 0{,}472 = 0{,}528$. Последующие члены равны, соответственно, $0{,}528 : 0{,}472 = 1{,}118$; $1 : 1{,}118 = 0{,}896$. Исходя из этого соотношения, получаем так называемый «живой квадрат» Жолтовского, у которого высота составляет $0{,}896$ его ширины.

Определенный вклад развитие золотосеченских идей внес великий кинорежиссер *Сергей Михайлович Эйзенштейн* (1896–1948), который начал заниматься математикой еще в юности. Он понимал необходимость введения точных методов анализа, чем объясняется, в частности, его увлечение русским авангардом, достижениями русских формалистов, а также золотым сечением. Специфической особенностью работ Эйзенштейна было то, что и золотое сечение и логарифмическая спираль – линия типа латинского *S*, им изучались как структурные схемы, соотносящиеся с общими законами природы. Логарифмическую спираль в версии Хогарта (Мартыненко, 2010б). Эйзенштейн обсуждает в контексте соединения двух противоположных начал – *инь* и *янь*, характерных для китайской модели мира. Такая спираль рассматривается Эйзенштейном как модель развития.

Можно отметить также интерес Эйзенштейна к динамической организации временных искусств: музыки, словесных произведений, кинофильмов. Например, он, анализируя произведения Пушкина, отмечает характерные точки поэтического текста, в которых проявляется закон золотого сечения (Иванов, 1976, с.193).

Характерные переломы композиции в точках золотого сечения он использовал и при «конструировании» фильма «броненосец Потемкин».

Он разбил ленту на пять частей. В первых трёх действие разворачивается на броненосце. В двух последних — в Одессе, где поднимается восстание. Этот переход в город происходит точно в точке золотого сечения. В каждой части также есть свой перелом, соответствующий золотому сечению.

Таким образом, Эйзенштейн, как Ле Корбюзье и Жолтовский сознательно использовал в своих шедеврах идею золотого сечения, рассматривая связанные с ним структуры как элемент творческого метода.

В первой половине XX века появились первые признаки прорастания математико-гармонических идей в техносферу. Это произошло в электросвязи благодаря усилиям профессора Михаила Александровича Бонч-Бруевича (1888–1940) – советского радиотехника, основателя отечественной радиотехнической промышленности. В его учебнике «Элементы радиотехники» (Бонч-Бруевич, 1938) был приведен пример расчета однородной лестничной цепи, в которой токи были пропорциональны отношениям чисел в последовательности Фибоначчи. С этой работы начались исследования электрических цепей в Электротехническом институте инженеров связи в Ленинграде, которому позднее было присвоено имя Бонч-Бруевича. Ныне это Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций.

Несколько позднее в исследования по данной проблеме включился профессор Владимир Николаевич Листов (1900–1978), основоположник и первый заведующий кафедрой «Электрическая связь» Ленинградского института железнодорожного транспорта – коллега М. А. Бонч-Бруевича по Нижегородской лаборатории. Увлеченность Листова золотым сечением имела два источника. Во-первых, это идеи Бронч-Бруевича в области электрических цепей (Листов, 1936). Во-вторых, его страстная увлеченность архитектурой, где он находил различные варианты проявления золотого сечения. Архитектурные исследования Листова отличались высоким профессионализмом. Это нашло отражение в книге, посвященной выдающемуся русскому архитектору итальянского происхождения Ипполиту Антоновичу Монигетти (Листов, 1976). В лице Владимира Николаевича мы находим счастливое и редкое в новейшее время сочетание искусствоведа, инженера и ученого.

Вторая половина XX века: 1950–1985 гг.

Во второй половине XX в. математико-гармоническое движение стало постепенно набирать силу и к концу 60–х становится массовым. В значительной мере «виновата» в этом атмосфера творческих исканий, характерная для динамичных и революционных 60-х. Но прежде чем на авансцену вышли шестидесятники, было еще преддверие 60-х, где также наблюдалось заметное оживление.

Для этого периода характерны две согласованных тенденции: математизация гуманитарного знания, его дегуманизация и обратная тенденция – гуманизация математического знания. Ситуация изменилась весьма радикально. Возникли математическая лингвистика, математическая психология, математическое искусствоведение и другие математико-гуманитарные гибриды. К метрическим дисциплинам, возникшим в XIX в. (биометрии, антропометрии, стилеметрии, эконометрии), присоединились новые: наукометрия, информметрия, библиометрия, психометрика, социометрия и др. В гуманитарных науках, например, в лингвистике, стал распространяться метод эксперимента, свойственный естественным наукам. Благодаря неуклонно возрастающей роли вычислительных машин возникли новые прикладные задачи: машинный перевод, распознавание и синтез речи, компьютерные методы идентификации личности, информационный поиск и др.

В этот период в математико-гармонических изысканиях постепенно вызревали новые тенденции.

Прежде всего, началась массовая пропаганда математико-гармонических идей, прежде всего среди одаренной молодежи, а затем и среди специалистов разных отраслей науки и искусства, включая математиков через благородную хоббистскую деятельность в рамках «фибоначчизма».

Мало-помалу стала складываться система отраслевых ветвей математики гармонии с разной степенью концептуальной и методической зрелости.

Математические исследования

В 50-е гг. был заложен фундамент дальнейшего бурного развития математического учения о гармонии. В этом десятилетии были опубликованы три выдающиеся книги: «Возвратные последовательности» А. Я. Маркушевича (1951 г.) (Маркушевич, 1951) и «Симметрия» Германа Вейля (1952 г.) (Вейль, 2007) и «Числа Фибоначчи» Н. Н. Воробьева (1950), а также эпохальная статья американского школьника 12-летнего Джона Бергмана «Система счисления на иррациональном основании» (Bergman, 1957). Заслуживает особого упоминания также большая статья венгерского математика Альфреда Реньи «Вариации на тему Фибоначчи» (Реньи, 1959).

Большинство математических работ середины века имеют откровенно научно-популярный характер, но на основе весьма сложной элементарной математики.

Начнем наш обзор с замечательной книги советского математика *Александра Ивановича Маркушевича* (1908–1979) (Маркушевич, 1950) – выдающегося популяризатора математики и вообще достижений науки. По его инициативе был начат выпуск серии книг «Библиотека учителя» и «Популярные лекции по математике». Последняя серия была открыта его книгой «Возвратные последовательности». Книга представляет собой расширенное содержание лекции, читанной автором для школьников IX и X классов – участников Московской математической олимпиады, а затем – в несколько преобразованном виде и в Московском институте усовершенствования учителей. Кроме того, Маркушевич был одним из авторов и редактором 12-томной «Детской энциклопедии» (1971–1978), а также одним из инициаторов и авторов «Энциклопедии элементарной математики» (1951–1952, 1963–1966). Интересно также, что *Маркушевич является автором статьи «Начала» Евклида в Большой советской энциклопедии*.

Сказанное позволяет сделать заключение, что Маркушевич был прежде всего популяризатором науки и его книга «Возвратные последовательности» занимает в его творчестве заметное место.

Маркушевич доносит до читателя основательно подзабытую теорию возвратных последовательностей, основы которой были заложены в начале XVIII в. французским алгебраистом де Муавром. После Муавра развернутую теорию возвратных последовательностей дал Леонард Эйлер, посвятивший возвратным последовательностям тринадцатую главу своего «Введения в анализ бесконечно малых» (1748). В XX в. изложение теории возвратных последовательностей содержится в лекциях, читанных знаменитыми русскими математиками П. Л. Чебышевым (Чебышев, 1936, с. 139–147) и А. А. Марковым (Марков, 1910) в рамках теории конечных разностей.

Прежде всего, Маркушевич знакомит читателя с понятием характеристического уравнения. Он пишет, что возвратному уравнению (рекуррентной формуле) порядка k соответствует алгебраическое уравнение степени k с теми же коэффициентами – его характеристическое уравнение. Каждый из корней характеристического уравнения представляет собой знаменатель геометрической прогрессии, удовлетворяющей данному возвратному уравнению. В случае, когда все корни характеристического уравнения различны между собой, получаются k различных геометрических прогрессий, образующих базис возвратного уравнения. Следовательно, в этом случае члены любой последовательности, удовлетворяющей возвратному уравнению, можно получить путем почленного сложения некоторых геометрических прогрессий (числом k) (Маркушевич, 1951, с. 25).

А теперь приведем интерпретацию Маркушевичем последовательности Фибоначчи.

Возвратное уравнение (рекуррентная формула) для этой последовательности имеет вид:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n ,$$

Откуда получаем характеристическое уравнение:

$$q^2 = q + 1.$$

Решая это уравнение, получим два действительных корня:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ и } \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Поэтому общий член последовательности Фибоначчи можно записать так:

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, положим $n = 1$ и $n = 2$; получим:

$$u_1 = 1 = A + B$$

$$u_2 = 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A - B)$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}},\ B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

И, следовательно,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

или

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].$$

Это и есть общее выражение для чисел Фибоначчи, полученное в XVIII в. де Муавром, а позднее Бине.

Маркушевич рассматривает некоторые важные свойства последовательностей Фибоначчи. Часть из них стали позднее хрестоматийными. Отметим лишь интригующую связь между числами Фибоначчи и алгоритмом Евклида (там же, с. 29–30), которая в более поздних исследованиях не фигурирует.

Значительным шагом в развитии математико-гармонического направления была также книга *Николая Николаевича Воробьева (1925-1995)* «Числа Фибоначчи» (Воробьев, 1950) – советского математика, специалиста в области алгебры, математической логики и теории вероятностей, основателя советской школы теории игр. Книга Воробьева приобрела огромную популярность и выдержала множество изданий огромными тиражами.

Костяк книги образуют круг тем, обсуждавшихся на нескольких занятиях математического кружка школьников при Ленинградском университете в 1949/50 учебном году.

В «Предисловии» к книге Воробьев отмечает, что числа Фибоначчи – это собрание трудных, но увлекательных задач, рассыпанных по разным изданиям научно-популярного характера. При этом каждая задача имеет вид маленькой теории, со своей историей, проблематикой и методами, связанными с большой математикой.

В книге рассматриваются основные свойства чисел Фибоначчи, а также теоретико-числовые свойства, связь чисел Фибоначчи с непрерывными дробями и геометрией. В заключительном разделе рассматривается важная оптимизационная задача – теория поиска, основанная на числах Фибоначчи.

Наиболее интересной представляется часть книги, посвященная теоретико-числовым свойствам чисел Фибоначчи. Речь идет об их делимости. Например, Воробьев доказывает такую теорему: «если n делится на m, то и u_n делится на u_m» или такую: «каково бы ни было целое число, среди первых $m^2 - 1$ чисел Фибоначчи найдется хотя бы одно, делящееся на m».

Далее, Воробьев приводит несколько «признаков делимости» чисел Фибоначчи.

Число Фибоначчи четно тогда и только тогда, когда его номер делится на 3.

Число Фибоначчи делится на 3 тогда и только тогда, когда его номер делится на 4.

Число Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делится на 6.

Число Фибоначчи делится на 5 тогда и только тогда, когда его номер делится на 5.

Число Фибоначчи делится на 7 тогда и только тогда, когда его номер делится на 8.

Этот раздел книги, хотя в нем используется техника, не выходящая за пределы элементарной математики, достаточно не элементарен даже для математика – профессионала.

Числа Фибоначчи, как отмечает Воробьев в последнем издании своей книги (1978 г), ярко проявили себя в нескольких математических вопросах, среди которых в первую очередь он упоминает решение аспирантом Ленинградского университета Ю. В. Матиясевичем *десятой проблемы Гильберта*.

В этом же издании Воробьев рассматривает игру «цзяньшицзы», теоретико-игровой анализ которой опирается на детальное рассмотрение фибоначчиевых представлений натуральных чисел. Кроме того, Воробьев рассматривает приобретшую широкую известность теорию поиска унимодальной функции, построенную впервые, как отмечает Воробьев, известным американским математиком Р. Беллманом.

Что касается десятой проблемы Гильберта, то этой теме по свежим следам была посвящена статья Ф. Л. Варпаховского и А. Н. Колмогорова (Варпаховский, Колмогоров, 1970). Авторы отмечают, что суть проблемы заключается в возможности построения алгоритма, который позволил бы для любого алгебраического уравнения с любым числом неизвестных и целочисленными коэффициентами выяснить, имеет ли это уравнение по крайней мере одно целочисленное решение. Вывод Матиясевича оказался неожиданным: требуемого алгоритма не существует. Доказать это помогли числа Фибоначчи.

Примерно в том же ключе, что и книга Маркушевича и Воробьева, написана большая статья выдающегося венгерского математика *Альфреда Реньи* (1921 – 1970). Эта статья построена (1960 г.) в увлекательной манере. Она представляет собой, как выразился сам автор, последовательность взаимосвязанных математических (алгебраических, геометрических, комбинаторных) задач на тему «последовательности Фибоначчи».

Работа Реньи, как и все его творчество, в высшей степени оригинальна и по форме, и по содержанию. Реньи берет основное определение последовательности Фибоначчи, т. е. основную тему, а затем начинает наматывать вариации на эту тему с точки зрения комбинаторики и алгебраических, числовых и геометрических свойств этих последовательностей.

Помимо классической схемы Фибоначчи (идеализированной задачи о размножении кроликов) Реньи приводит задачу о росте деревьев, задачу о раскраске домов разной этажности, задачу о вариантах составления телевизионных программ, задачу о рассаживании персон за круглым столом. Через такие наглядные задачи Реньи приходит от чисел Фибоначчи к числам Люка.

Помимо классической последовательности Фибоначчи Реньи приводит варианты, зависящие от других начальных условий. Такие последовательности он называет последовательностями типа Фибоначчи, а также формулирует правило вычисления всех членов этой последовательности по известным значениям двух любых чисел.

Реньи дает также интересную геометрическую интерпретацию отношения последующего члена к предыдущему при стремлении последовательности к бесконечности.

Не прошел Реньи и мимо замечательных свойств треугольника Паскаля. Наряду с известными манипуляциями с треугольником (смещение, наклонные линии) Реньи использует ход шахматного коня.

Интересны также соображения Реньи о делимости чисел Фибоначчи. В частности, Реньи установил, что остатки от деления чисел Фибоначчи на любое целое число образуют периодическую последовательность. Такие последовательности играют большую роль при генерировании так называемых «псевдослучайных чисел».

В конце статьи Реньи высказывает интересные соображения относительно рекурсий и рекуррентности, а также приводит любопытную нелинейную последовательность, каждый член которой (начиная с третьего) равен произведению двух предыдущих. Нетрудно проверить, что n-й последовательности

$$2, 4, 8, 32, 256, 8192, \ldots$$

равен 2^{F_n}, где F_n – n-е число Фибоначчи.

Завершая краткий обзор вариаций Реньи, нам трудно удержаться, чтобы не привести его похвальное слово в адрес чисел Фибоначчи: «Начав «вариации» с чисел Фибоначчи, мы затронули множество интересных вопросов, относящихся к алгебре, теории чисел, комбинаторике, геометрии, теории разностных и дифференциальных уравнений, теории поиска, рекурсивных алгоритмов и метода Монте-Карло. Разумеется, избранная нами тема отнюдь не исчерпана, но и приведенных выше «вариаций» достаточно для того, чтобы понять простую истину: подобно тому как незатейливая мелодия таит в себе несравненно больше, чем кажется при первом прослушивании, простая математическая задача (например, задача Леонардо Фибоначчи о размножении кроликов) при всестороннем рассмотрении позволяет заглянуть в широкий круг актуальных проблем современной математики».

В 1952 г. была опубликована великая книга *Германа Вейля* «Симметрия». В ней в концентрированной форме представлены результаты его творчества. Сам Вейль назвал эту книгу своей лебединой песнью.

Если попытаться отнести книгу Вейля к какому-нибудь жанру письменной речи, то ее, несомненно, нужно отнести к жанру научной литературы и притом в двух ипостасях: в собственно научном и научно-популярном. Но в равной степени ее можно отнести к жанру публицистики. В книге изящно, ненавязчиво и предельно деликатной форме излагаются серьезнейшие проблемы современной математики.

Примечательно и то, что Вейль обсуждает не только математические, но философские проблемы симметрии. Причем теоретические и прикладные аспекты находятся в гармоническом равновесии. Более того, Вейль акцентирует внимание на том, что «математика играет весьма существенную роль в формировании нашего духовного облика. Занятие математикой – подобно мифотворчеству, литературе или музыке – это одна из наиболее присущих человеку областей творческой деятельности, в которой проявляется его человеческая сущность, стремление к интеллектуальной сфере жизни, являющейся одним из проявлений мировой гармонии» (Klein, 1930)

Вейль определяет симметрию так: « …симметрия обозначает тот вид согласованности отдельных частей, которая объединяет их в единое целое», т. е. он придерживается вполне традиционной точки зрения. Например, Витрувий дает такое определение симметрии: «Симметрия возникает из пропорции… Пропорция есть соразмерность составных частей целым». Вейль также отмечает, что красота тесно связана с симметрией (Вейль, там же). Далее, Вейль отмечает, что симметрия тесно связана также и с гармонией. В целом создается впечатление, что понятия симметрии, соразмерности, согласованности, гармонии, красоты и др. относятся к одному семантическому пространству, при этом симметрия, как говорит Вейль, « является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство» (Вейль, там же, с.37). Вейль не дает окончательного решения, он не высказывает твердого мнения относительно того, где здесь курица, а где яйца, но дает пищу для размышлений, которые выходят за рамки данного очерка.

Важной познавательной установкой Вейля является то, что симметрия (и вся группа понятий, с ней связанная) соотносится не только с природой, но и с продуктами созидательной творческой деятельности человека. Его философское кредо можно квалифицировать как *космизм*, покоящийся на законах математики. Такой подход прекрасно согласуется с духом и буквой пифагореизма.

Основываясь на наглядных представлениях, относящихся к природе (кристаллы, закономерности филлотаксиса, строение внутренних органов человека) и искусству (орнаменты, архитектура, символика), Вейль рассматривает многочисленные разновидности симметрии и их порождение и постепенно подводит читателя к абстрактным идеям, в частности к идее группы и поля в математике и теории относительности.

В заключение приведем оценку, данную Б. В. Бирюковым в «Послесловии» к «Симметрии» Вейля: «По цельности и гармонии своих частей, по богатству и действенности заключенных в ней научных и методологических целей, по яркости и выразительности изложения она принадлежит к классическим произведениям мировой научной литературы» (Бирюков, 2007).

Прикладные исследования

Во второй половине XX в. велись интенсивные исследования в области психологической ветви математико-гармонических изысканий.

Интересные идеи в этой области высказывает *Яков Давыдович Гликин* (1900-1987) – выдающийся советский архитектор и градостроитель, за плечами которого огромные достижения в архитектуре и ее теории.

Но в данном случае нас будут интересовать не эти достижения, а то, что он со всей возможной остротой поставил вопрос о психологических аспектах гармонического пропорционирования и, прежде всего, о закономерностях зрительного восприятия объектов художественного творчества (Гликин, 1979, с. 26 и далее).

Основные проблемы по Гликину здесь такие: 1. Психофизиологические закономерности зрительного восприятия, непосредственно связанные с пропорциональностью; 2. Глазомерная оценка пропорциональных членений и их относительная точность; 3. Оптимальные условия зрительного восприятия пропорциональности и гармонии архитектурных сооружений и ансамблей в натуре.

Гликин основывается на пороговых ощущениях, которые рассматривал Эрнст Вебер (Weber, 1854). Немецкий психолог, исследуя пороговые ощущения при оценке веса, освещенности, длины линий и давления на кожу, пришел к заключению, что наши ощущения относительны и являются лишь мерой изменения вызывающих их раздражителей. Гликин отмечает, что в яркий солнечный день мы не ощущаем света 100-ватной лампы, поскольку по отношению к солнечному свету прирост освещенности слишком мал, тогда как в темноте нас слепит и зажженная спичка.

Г. Фехнер (Fechner, 1860) исходя из допущения, что едва уловимые изменения в ощущениях и в вызывающих их раздражениях можно рассматривать как бесконечно малые величины, установил математическую зависимость между величиной раздражения R и соответствующей интенсивностью ощущения E в виде дифференциального уравнения $\frac{dR}{R} = mdE$, где m – некоторый постоянный коэффициент. Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, он получил формулу $LogR - LogR_o = m(E - E_0)$. Далее, заменив натуральные логарифмы на десятичные и приняв $R_0 = 0$ и $E_0 = 0$, Фехнер получил формулу $E = p \ln R + C$, в которой p и С – постоянные величины, зависящие от природы раздражения и индивидуальных особенностей восприятия.

Эта формула и есть психофизический закон Вебера-Фехнера. Из него следует, что интенсивность наших ощущений растет пропорционально логарифмам вызывающих их раздражений. Иначе говоря, при возрастании раздражения в геометрической прогрессии ощущение изменяется в арифметической прогрессии.

По мнению Гликина, закон Вебера-Фехнера имеет особое значение потому, что он дает возможность раскрыть психофизическую сущность пропорциональности. Мотивирует он это тем, что если прологарифмировать пропорциональную последовательность золотых чисел 1,000 – 1, 618 – 2, 618 – 4, 236 и т.д., то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Это означает, что зрительные ощущения возрастают на определенную постоянную величину при возрастании раздражения в геометрической прогрессии. Гликин утверждает, что архитектурные ряды подобно звуковым рядам нотной записи образуют закономерную и взаимосвязанную систему пропорций в соответствии требованиям архитектурной композиции.

Гликин в своей книге подверг серьезному критическому анализу опыт отечественных архитекторов в их стремлении приспособить золотое сечение к различным версиям пропорционирования.

Говоря о Парфеноне как некотором идеале, совершенстве, образце, всегда волновавшем воображение архитекторов, Гликин говорит о том, что исследователи искали тайну его гармонии разными методами, разными вариантами пропорционирования: Цейзинг и Жолтовский – с помощью золотого сечения, Покровский – на основе особенностей оптических законов зрения, Хэмбидж – методом разложения площадей, Мессель – делением окружности, Хазанов – с позиций модульных размеров. И каждый из перечисленных и многих не перечисленных ученых находит в Парфеноне гармонию, основанную на своей концепции и методе пропорционирования.

Такая ситуация настораживает и даже может вызвать неуверенность (Гликин, 1979, с. 45). Слишком много красивых, стройных сосен, в которых можно и заблудиться. Может быть, в Парфеноне слишком много гармонических красок, вариаций и оттенков. И каждый исследователь при хорошем воображении находит то, что его волнует. Не случайно, такая капризная гармония дала основание Ле Корбюзье бросить неожиданную реплику, что Парфенон – это не архитектура, а скульптура (Гликин, там же, с. 46).

Теоретико-информационная интерпретация психофизики Фехнера

Еще одна психофизическая идея Г. Фехнера, касающаяся закономерностей восприятия фигур прямоугольной формы, математиком В. М. Петровым и архитектором Н. Е. Прянишниковым (Петров, Прянишников, 1979) была проинтерпретирована с теоретико-информационных позиций. Опишем их подход с той степенью детализации, к какой прибегают авторы, так как иначе суть их позиции может ускользнуть из внимания.

Авторы выдвигают гипотезу, что при распознавании формы (в данном случае прямоугольника со сторонами a и b) используется тот же компаративный механизм, который действует и других сферах психики. Сравнивая меньшую сторону с большей, мы фактически сравниваем прямоугольник с квадратом, в который он превратился бы, если бы большая сторона сжалась до размеров меньшей. А так как глаз обследует не отрезки, а фигуру, то именно такое сравнение (прямоугольника с квадратом) и должно иметь место для опознания формы.

Прямоугольник разрезается авторами на две части, одна из которых представляет собой квадрат, а оставшаяся – малый («лишний») прямоугольник, дополняющий квадрат до большого прямоугольника. Наблюдатель придает «особое значение» сигналам именно с этого малого прямоугольника, потому что эти сигналы являются источником «разбаланса» (отклонения от зеркальной симметрии) и служат для опознания формы объекта.

Далее авторы переходят к теоретико-информационной интерпретации.

Известно, что количество информации равно $H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$. В предлагаемой модели сигнал может принимать два значения: точка фиксации расположена либо на «разбалансированнойной» части объекта (малый прямоугольник), либо на его «сбалансированной» (квадратной) части. Поскольку эти события являются альтернативными (т. е. сумма их вероятностей равна единице), то ситуация описывается вышеприведенной формулой. Авторы показывают, что эта функция имеет лишь один экстремум- максимум при «оптимальной» вероятности $p_{iопт} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$, при этом $1 - \frac{1}{e} \approx 0{,}63$. Эти два числа совсем не намного отличаются от золотого сечения. Отсюда авторы делают вывод, что максимальная эстетическая предпочтительность прямоугольных объектов, построенных по правилу золотого сечения, объясняется максимальностью количества информации такой формы по сравнению с другими прямоугольниками. Такое объяснение представляется авторам гораздо более правдоподобным, чем традиционное, восходящее к Фехнеру, объяснение, основанное на «гармоничности» средней пропорциональности, что не соответствует никакому реальному механизму функционированию психики. От себя добавим, что здесь авторы чуть-чуть погорячились, так как интерпретация золотого сечения Евклидом также осуществляется с помощью площадей прямоугольников и квадратов: площадь большого квадрата приравнивается сумме малого квадрата и малого прямоугольника. В результате такого приравнивания возникает квадратное уравнение (именно поэтому оно и называется квадратным), корнем которого является золотое сечение. При этом сама процедура приравнивания может рассматриваться как оптимизационная. Что касается эстетической интерпретации золотого сечения, то этот вопрос ввиду его исключительной сложности заслуживает внимательного и всестороннего осуждения. Но сам по себе предлагаемый авторами теоретико-информационный подход является перспективным..

Техносфера и информационные технологии

В рассматриваемый период был сделан еще один важный шаг: *началась экспансия этих структур в техносферу*.

Применение математико-гармонических структур в инженерном деле, как мы говорили в предыдущих очерках (Мартыненко, 2010а) исторически связано с искусством проекта, которое сложилось в эпоху Возрождения и сознательно использовалось в архитектуре и строительстве. Но не только там.

1. Техническая эстетика

В XX в. архитектурные идеи проектирования были распространены и на собственно техносферу – на проектирование внешнего облика машин, механизмов, изделий и соотношение габаритов составляющих их частей. Речь идет, прежде всего, о технической эстетике и бионике. Известно, что еще в конце 30-х гг. Л. Эрлих разработал конструкцию пропорционального сверлильного станка в соответствии с законами золотого сечения (Васютинский, 1990), а в начале 50-х гг. инженер Э. Шехвиц также предложил при конструировании многошпиндельного полуавтомата использовать те же закономерности (там же). Это примеры сознательного использования принципа пропорционирования. Однако многие конструкторы, как и в архитектуре или в строительстве, проектируя машины, действуют согласно закону золотой пропорции интуитивно.

2. Электросвязь

В начале второй половины XX были также продолжены исследования, связанные с применением золотого сечения и чисел Фибоначчи в области электрических цепей.

Свои исследования в области в изучении оптимальных условий передачи энергии через лестничные фильтры с использованием золотого сечения продолжил В. Н. Листов (Листов, 1943, 1964).

В 1968 г. вышла любопытная брошюра известного математика и популяризатора науки И. М. Яглома «Как разрезать квадрат?», в которой была приведена разветвленная электрическая цепь, демонстрирующая схему разрезания квадрата (Яглом, 1968). В этой схеме сила тока и напряжение в разветвлениях распределяются в соответствии с числами Фибоначчи.

Значительный вклад в теорию электрических цепей внес продолжатель дела М. А. Бонч-Бруевича и В. Н. Листова белорусский ученый и инженер *Николай Федорович Семенюта* (р. в 1929 г.). В работах автора рассмотрен более общий случай в сравнение с работами его предшественников (Семенюта, 1971, 1972), благодаря введению понятия лестничных чисел и лестничных последовательностей. При этом автор показал, что числа Фибоначчи являются частным случаем лестничных чисел. Семенюта получил формулы для вычисления четных и нечетных членов лестничных последовательностей с помощью гиперболических функций.

3. Системы счисления и компьютеры Фибоначчи

В 50-е гг. в истории золотого сечения произошло знаменательное событие. В 1957г. американский вундеркинд *Джордж Бергман* построил систему счисления, названную им «системой счисления с иррациональным основанием типа золотой пропорции» (Bergman, 1957). Бергман опубликовал свою систему в возрасте 12 лет. Сейчас Бергман – профессор одного из университетов в США. В системе Бергмана любое натуральное число представимо в виде суммы степеней числа φ:

$$1=\varphi^{-1}+\varphi^{-2},$$
$$2=\varphi+\ \varphi^{-2},$$
$$3=\varphi^{2}+\varphi^{-2},$$
$$4=\varphi^{2}+\varphi^{0}+\varphi^{-2}$$
$$5=\varphi^{3}+\varphi^{-1}+\varphi^{-4}\text{ и т. д.}$$

Если использовать последовательность чисел φ^{i} в качестве «весов разрядов» двоичной системы счисления, то получим двоичную систему счисления, имеющую иррациональное основание φ. Система Бергмана может быть задана в виде следующего выражения:

$$A=\sum\alpha_{i}\varphi^{i},$$

где A – некоторое действительное число, α_{i} – двоичные цифры 0 или 1,
$i=0,\pm1,\pm2,\pm3...,\varphi^{i}$ – вес i-й цифры в системе счисления, φ (золотая пропорция) – основание системы счисления.

Сам Бергман отнесся к этому результату не слишком серьезно, полагая, что он не имеет шансов на практическое применение. Достижение юного Джорджа не получило достойной оценки и со стороны коллег. Виновата здесь, с одной стороны юность Бергмана, а с другой несвоевременность его идеи. Ее место было уже прочно занято двоичной системой. Да и сам Бергман писал по этому поводу: « Я не знаю ни одного практического применения подобных систем, кроме как умственного упражнения и приятного времяпровождения, хотя эта система может быть пригодна для теории алгебраических чисел».

В последнем пункте Бергман прав. Его система после достижения де Муавра является еще одним мостом, связывающим математику гармонии с теорией чисел, мостом, переброшенным между иррациональными и целыми числами, между рекуррентными последовательностями и натуральным рядом чисел.

Что касается его системы счисления, то сложись ситуация для Бергмана несколько иначе, развитие информатики могло пойти другим путем. Но это было маловероятно ввиду исключительной простоты неймановской системы и ее тотального внедрения в практику.

Более 20 лет статья юного Джорджа пылилась на полке, пока в начале 70-х гг. близкие идеи не были высказаны советскими учеными И. В. Витенько и А. П. Стаховым. Но они продвинулись существенно дальше, дав этой идее жизнь и четкую прикладную направленность. При этом их идеи имели под собой убедительное теоретическое основание.

Известно, что развитие компьютерной техники на многие десятилетия вперед определили так называемые «Неймановские принципы». Первой универсальной электронной вычислительной машиной считается машина ЭНИАК, созданная в 1945 г. в США.

Одним из главных в перечне Неймановских принципов считается следующий: машины на электронных элементах должны работать не в десятичной, а в двоичной системе счисления. Основными преимуществами *двоичной системы* являются: двухпозиционный характер работы электронных элементов, высокая экономичность двоичной системы и простота выполнения арифметических операций с двоичными числами.

Неймановские принципы таят в себе «ловушку», в которую попала вся компьютерная техника и основанные на ней информационные технологии. Дело в том, что двоичная система обладает «нулевой избыточностью». Это означает, что в классической двоичной системе отсутствует механизм обнаружения ошибок в процессоре и компьютере. Эти ошибки неизбежно возникают под влиянием различных внешних и внутренних факторов. Это означает, что «Неймановские машины», являются принципиально ненадежными: сбой лишь одного электронного элемента в процессоре может привести к серьезной технологической катастрофе.

Выход в создавшейся ситуации был найден в создании *систем счисления с иррациональными основаниями*, основанными на «золотой пропорции» и ее обобщениях.

В 70-е и 80-е годы 20-го столетия в Советском Союзе были проведены теоретические и инженерные разработки компьютеров принципиально нового типа, названных *компьютерами Фибоначчи* или *«золотыми» компьютерами, а также* новых средств измерительной техники – «золотых» аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей (АЦП и ЦАП). Основной эффект от использования КФ и КЗП в вычислительной и измерительной технике состоял в существенном повышении контролеспособности компьютерных средств, а также точности и метрологической стабильности АЦП и ЦАП. Эти исследования были начаты в Таганрогском радиотехническом институте (1971–1977), а затем продолжены в Винницком политехническом институте (1977–1990). Теоретические результаты этих исследований опубликованы в книгах (Стахов, 1977), а инженерные разработки описаны в брошюре (Стахов, 1979).

На тему «Компьютеры Фибоначчи» в СССР было проведено беспрецедентное по своим масштабам патентование изобретений во всех ведущих странах-производителях компьютерной техники (США, Япония, Англия, ФРГ, Франция, Канада и др.). 65 зарубежных патентов являются официальными юридическими документами, которые подтверждают приоритет советской науки в этом важном направлении. В 1989 г. это направление было заслушано и одобрено на специальном заседании Президиума Академии наук Украины. К сожалению, известные геополитические события привели в конце 80-х годов к прекращению инженерных разработок в этом направлении. Но сами идеи создания «золотых» компьютеров как альтернативы «неймановских» компьютеров не потеряли своей актуальности и ждут массового внедрения в информационные технологии завтрашнего дня.

Это направление исследовательской и конструкторской деятельности велось под знаменем «алгоритмической теории измерения» (Стахов, 1977, 1979). Отличительной чертой этой теории явилось введение «фибоначчиевых» алгоритмов. Эти алгоритмы основаны на обобщенных p-числах Фибоначчи, задаваемых следующей трехчленной рекуррентной формулой:

$$F_n^p = F_{n-1}^p + F_{n-p-1}^p$$

где $p = 0,1,2,3,...$ – заданное целое число, характеризующее расстояние, между слагаемыми, равное числу вставных членов между ними. Рекуррентная формула задает бесконечное количество числовых последовательностей, частными случаями которых являются двоичные числа (p=0) и классические числа Фибоначчи (p=1).

Любопытно, что А. Стахов и И. Витенько пришли к упомянутому обобщению, анализируя классическую задачу Фибоначчи о взвешивании. Эта задача, как и знаменитая задача о кроликах, была описана Леонардо Пизанским в 1202 г. в книге «Liber abaci». А. Стахов, сопоставляя «двоичный» ряд гирь и фибоначчиевый, пришел к формулировке описанного выше рекуррентного отношения, которому соответствует система обобщенных золотых сечений. Решение этой задачи – неожиданный и красивый ход фибоначчизма.

Проблема была переведена в практическую плоскость, что послужило в дальнейшем основой для разработки компьютеров Фибоначчи (Стахов, 1979,1989).

Пионерские исследования и практические разработки украинских исследователей явились серьезным прорывом в создание теоретической базы и производство вычислительных машин нового типа.

Завершая наше изложение, обратим внимание на очень важную черту рассмотренного периода. Для него характерно возникновение массовых неформальных сообществ «золотосеченцев» и «фибоначчистов». Первое сообщество возникло в Сан-Хосе вокруг ежеквартальника «Fibonacci Quarterly» издаваемом с 1963 г., возникла (в значительной мере благодаря усилиям П. П. Стахова) многочисленная Славянская группа, включающая ученых России, Украины, Белоруссии, Польши, значительная группа ученых стала группироваться вокруг электронных журналов «Visual Mathematic», Института «Золотое сечение» Академии Тринитаризма. Стали проводиться масштабные Международные научные конференции. Информационный поток по золотосеченской проблематике стал стабильным и мощным. Но он еще более возрос качественно и количественно по мере движения к концу столетия, обретя черты информационного вала. Именно поэтому мы вынесли этот период за пределы нашего внимания, считая, что он достоин особого рассмотрения. Мы рассмотрим этот период, как уже говорилось выше, чуть позднее, потому что мы имеем дело с событиями с минимальным сроком давности, и это, наверное, еще не история. Отметим также, что для этого бурного периода существуют детальные обзоры, выполненные А.П. Стаховым (Стахов, 2007, 2010).

Основные итоги

1. В первой половине XX в. на фоне скромных математических достижений устойчиво развивались две ставших уже традиционными области применения идеи пропорционирования, преимущественно на основе золотого сечения. Это музыка и архитектура.

В музыке, прежде всего усилиями Розенова, Сабанеева, Майзеля была выдвинута гипотеза о динамической развертке музыкального текста от длительного периода нарастания через кульминацию к более короткому спаду. Причем точка кульминации, как правило, совпадает с золотым сечением. Аналогичные исследования были осуществлены и на материале вербального текста. Необходимо отметить, закон золотого сечения был применен на таком материале впервые (Розенов).

Принципиально важными являются первые попытки сознательного, «рабочего» применения принципа золотого сечения в архитектуре (Ле Корбюзье, и большая группа советских архитекторов – Жолтовский, Гликин и др.). С. Эйзенштейн применил принцип золотого сечения в кинематографе.

2. Заметным событием в первой половине XX в. была книга немецкого математика Г. Тимердинга, в которой остро ставятся спорные проблемы корректного применения золотого сечения в искусстве.

3. В начале второго пятидесятилетия XX в. наблюдается резкий подъем популяризаторской активности в золотосеченской теме. Публикуются серьезные работы А. Маркушевича, В. Воробьева, А. Реньи, В. Хагарта и др., в которых излагается теория чисел Фибоначчи, рассматриваются их замечательные свойства, их место в теории чисел, комбинаторике, варианты их использования в прикладных задачах.

4. Опубликована эпохальная книга Г. Вейля, позиционирующая числа Фибоначчи и золотое сечение в рамках теории симметрии и системе космогонических гармонических представлений

5. Опубликованы два замечательных достижения. Первое – решение с помощью чисел Фибоначчи 10-й проблемы Гильберта (Ю. Матиясевич), второе – создание новой системы счисления на основе золотого сечения (Дж. Бергман).

6. Введен в математико-гармонический оборот закон Вебера-Фехнера, касающийся психологических экспериментов по схеме «стимул-реакция»

7. В техносфере серьезным успехом следует считать теорию электрических цепей на основе чисел Фибоначчи, развиваемую в трудах М. А. Бонч-Бруевича, В. Н. Листова и Н. Ф. Семенюты.

8. Фундаментальным достижением математико-гармонического направления второй половины XX в. является создание под руководством А. П. Стахова компьютеров Фибоначчи и их фронтальное патентование в технологически ведущих странах. Таким образом, идея Бергмана получила теоретическое и практическое подтверждение. Образовалась ось Бергман-Стахов, которая стала «обрастать деталями» в последующие десятилетия.

9. Перечисленные достижения создали основу для мощного интеллектуального рывка. Это привело к созданию предпосылок для формирования междисциплинарной сферы, которая уже в XXI веке конституировалась под знаменем математики гармонии.

Литература

Бирюков Б. В. Г. Вейль и методологические проблемы науки / Г. Вейль. Симметрия. Перевод с немецкого. М.: Издательство ЛКИ, 2007. – С.174–191.

Бонч-Бруевич М. А. Элементы радиотехники. М.: Связьтехиздат, 1938.

Брюсов В. Я. Сила русского глагола. М.: Советская Россия, 1973.

Варпаховский Ф. Л., Колмогоров А. Н. О решении десятой проблемы Гильберта / Квант, 1970, № 7, с. 39–44.

Вейль Г. Симметрия. Пер с англ. М.: Наука, 1968.

Витенько И. В., Волков А. А., Стахов А. П. Оптимальные алгоритмы функционирования преобразователей «напряжение-код». В кн. Тезисы докладов V научно-технической конференции «Кибернетически пути совершенствования измерительной аппаратуры». ЛОП НТО, Приборпром, 1966.

Витенько И. В., Стахов А. П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования / Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.

Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. Наука. М., 1969. Серия. Популярные лекции по математике. Вып. 6.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. Пер. с англ. М.: Мир, 1974.

Гарднер М. Математические новеллы. Пер. с англ. М., Мир, 1974.

Гликин Я. Д. Методы архитектурной гармонии. Л.: Стройиздат, 1979.

Жолтовский И. Б. Пропорции архитектуры. М.: Архитектура СССР, № 5.

Жуков А. В. Вездесущее число π. М.: УРСС, 2004.

Иванов Вяч. Вс. Очерки по истории семиотики в СССР. М.Наука, 1976.

Кокстер Г. С. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.

Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. М.: Знание, 1968.

Листов В. Н. Элементарная теория синтеза фильтров. М.: Трансжелдориздат, 1963.

Листов В. Н. Ипполит Монигетти. Л.: Стройиздат, 1974.

Листов В. Н. Дальняя связь. М.: Транспорт, 1964.

Михайлов А.И., Черный А. И., Гиляревский Р. С. Научные коммуникации и информатика. М.: Мир, 1976.

Петров В. М., Прянишников Н. Е. Формулы прекрасных пропорций / Число и мысль. Вып. 2. М., 1979. С.72–83.

Пропп В. Я. Морфология волшебной сказки. М., 1969.

Ле Корбюзье. Архитектура XX века. Перевод с франц. М.: Прогресс, 1970.

Де Корбюзье. Модулор. М.: Стройиздат, 1976.

Марков А. А. Исчисление конечных разностей. Одесса, 1910.

Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. Популярные лекции по математике. Вып. 1, 1951.
Мартыненко Г. Я. Математика Гармонии: Возрождение (XIV–XVI вв.) (к 500–летию книги Луки Пачоли «О божественной пропорции») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77–6567, публ.16006, 20.07. 2010 а.
Мартыненко Г. Я. Математика гармонии: Эпоха Просвещения — XVIII в. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77–6567, публ. 16071, 12.09. 2010 б.
Мартыненко Г. Я. Математика гармонии: Новое время – XIX век // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77- 6567, публ.16087, 26.09. 2010 в.
Панкин А. Ф. Число как искусство / Языки науки – языки искусства / Редактор-составитель З.Е. Журавлева. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – С. 170–178.
Пойя Д. Математическое открытие. Пер с англ. М.: Наука, 1967.
Покровский Г. И. Архитектура и законы зрения. М.: Изд-во Всесоюзной Академии архитектуры, 1936.
Реньи А. Вариация на тему Фибоначчи / Трилогия о математике. Перевод с венгерского. М.: Мир, 1980.
Розенов Э. К. Закон золотого сечения в поэзии и музыке / Статьи о музыке. Избранное. М.: Музыка, 1982.
Сабанеев Л. Л. Этюды Шопена в освещении золотого сечения. Опыт позитивного обоснования / Искусство, ГАХН. М., 1927. Т.II—III, вып. 2-3.
Семенюта Н. Ф. Применение рекуррентных соотношенийк анализу электрических цепей / Электрические машины, цепи и системы: Труды Белорусского ин-та инженеров ж.-д. транспорта. Гомель: БелИИЖТ, 1972.
Семенюта Н. Ф. О связи рекуррентных числовых последовательностей и гиперболических функций / Применение АВМ и ЭЦВМ вк решению некоторых задач механикидеформируемых тел. Гомель: БелИИЖТ, 1973. Вып.114, с. 39-43.
Семенюта Н. Ф. Анализ электрических цепей методом рекуррентных чисел /Электрическая связь на железнодорожном транспорте. Гомель: Бел. ИИЖТ, 1974. Вып.134, с. 3–19.
Стахов А. П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн.: Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, Вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
Стахов А. П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып. 6, 1979.
Стахов А. П. «Золотая» пропорция в цифровой технике // Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
Стахов А. П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984.
Стахов А. П. Важнейшие научные открытия современной науки, основанные на «золотом сечении» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14575, 18.09.2007 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321071.htm).
Стахов А.П. Взгляд на «Математику Гармонии» сквозь призму «Элементарной Математики» // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.16243, 23.12.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321106.htm.

Тимердинг Г. Е. Золотое сечение. Перевод с нем. М.: Научное книгоидательство, 1924.
Тростников В. Н. Алгебра гармонии. М., Знание, 1968.
Толстой А. Н. Хождение по мукам. Минск, 1973.
Чебышев П. Л. Теория вероятностей, лекции 1879-1880 гг. М.-Л., 1936.
Яглом М. М. Как разрезать квадрат? М.: Наука, 1968.
Ясинский С. А. «Золотая пропорция» в электросвязи. Ясинский СПб: ВУС, 1999.
Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31. P.: 98-119.
Fechner G. T. Vorschule der Ästhetik, 2 Bände, Leipzig, 1876.
Hoggat V. E. A new angle on Pascal’s Triangle // The Fibonacci Quarterly, 1968, v. 6, No. 4.
Hoggat V. E. Fibonacci and Lucas Numbers. – Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
Stakhov A. Three “key” problems of mathematics o n the stage of its origin,the “Harmony Mathematics” and its applications in contemporary mathematics, theoretical physics and computer science. Visual Mathematics, 2007, Vol. 9, No http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/stakhov2007/stakhov1.htm.
Weber E. H. Testsinn und Gemeingtfuhl Wagners Handbuch der Physiologie. 1846. Bd. 3.
Weil G. Felix Kleins Stellung in der mathematischen Gegenwart / Die Naturwissenschaften, 18, 1930, s. 4-11.