Н. Ф. Семенюта

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ: ОБЩИЕ ВОПРОСЫ, РЕКУРРЕНТНЫЕ И МУЛЬТИРЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, РЕШЕНИЯ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Комментарий Алексея Стахова.

Настоящая статья, написанная Почетным Профессором Белорусского государственного университета транспорта (БелГУТа) Николаем Филипповичем Семенютой, в определенном смысле является исторической. Эта статья является изложением первой лекции, которую прочел Николай Филиппович для студентов университета после Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 2010).

Кто такой Николай Филиппович Семенюта? Это – старейший в мире и мудрейший «золотосеченец», член Международного Клуба Золотого Сечения. В течение многих десятилетий он ведет плодотворную научную работу в области «золотого сечения, чисел Фибоначчи и их приложений в электросвязи и учебном процессе. Участие Н. Ф. Семенюты в работе Международного Конгресса по Математике Гармонии было героическим поступком с его стороны, если учесть, что ему свыше 80 лет и перед Конгрессом он тяжело переболел.

В лекции проф. Семенюты высказано немало критических замечаний в адрес «математики гармонии», которые будут восприняты как руководство к действию. Спасибо, Николай Филиппович, за конструктивную критику!

Историческое значение лекции Н.Ф. Семенюты состоит в том, что вслед за Одесским национальным университетом новая научная дисциплина «Математика гармонии» начинает внедряться в ведущих университетах мира, какими, несомненно, являются как Одесский национальный университет, так и Белорусский государственный университет транспорта. В этой связи уместно вспомнить слова одного из участников Одесского Конгресса проф. Скотта Олсена (США), который на встрече с ректором Одесского Национального Университета проф. Ковалем озвучил следующую интересную мысль: ***«Университет, который первым введет математику гармонии и сопряженные дисциплины в учебный процесс, станет мировым лидером в сфере образования».*** *Первыми это сделали Одесский национальный университет и Белорусский государственный университет транспорта. Честь и хвала этим университетам и таким подвижникам «Математики гармонии» как Николай Филиппович Семенюта!*

Введение. С 8 по 10 октября 2010 г. в Одесском национальном университете (Украина) состоялся 1-й Международный конгресс "Современные аспекты математики гармонии и её применение в экономике, естествознании, технологии, социуме и образовании".онгресс открыл исполняющий обязанности ректора университета проф. Коваль И. Н., который отметил основные направления деятельности университета, совершенствования учебного процесса и научных исследований, в том числе с использованием основных положений математики гармонии.

Всего на конференции было заслушано около 30 докладов ученых из Украины, России, Беларуси, США, Канады, ФРГ, ЮАР, Чили по различным свойствам золотого сечения, чисел Фибоначчи и Люка, гармоническим пропорциям и их проявлениям в математике, химии, экономике, искусстве, науке и др. В целом Конгресс прошел на достаточном научном уровне и с хорошей организацией, в том числе и культурной программой. Желающим была предоставлена экскурсия по городу Одессе, возможность побывать в знаменитом оперном театре Одессы. В целом следует выразить большую благодарность ректорату Одесского национального университета и сопредседателю проф. А. П. Стахову. Мне было очень приятно встретиться и установить новые контакты с коллегами из стран СНГ и более далеких стран.

Но, как всякое большое мероприятие (а таким, безусловно, являлся Конгресс) были и недостатки. Слушая доклады на Конгрессе, невольно всплывала в памяти, состоявшаяся в 2003 г., конференция на базе Винницкого государственного аграрного университета (ВГАУ). В Виннице было больше участников и заслушано большее число докладов, и самое главное, с большей практической направленностью [1].

По возвращению из Одессы, для одного потока студентов (100 человек) электротехнического факультета Белорусского государственного университета транспорта (БелГУТа) прочитал лекцию о Конгрессе и некоторых докладах на нем. После лекции основные вопросы студентов сводились о практике применения золотого сечения и гармонических пропорций в автоматике, телемеханике и связи. Поэтому по просьбе студентов было прочитано еще две лекции о проявлении золотого сечения в науке и технике, экономике и др.

Немного о БелГУТе. Университет является одним из ведущих ВУЗов Республики Беларусь. Электротехнический факультет готовит инженеров по специальности «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте». В составе университета 11 факультетов, 40 кафедр, большая научно-техническая библиотека, научно-исследовательский институт жел.-дор. транспорта, отраслевые научно исследовательские лаборатории, спортивный корпус, плавательный бассейн, издается научно-технический журнал «Вестник БелГУТа: наука и транспорт».

Проблемы золотого сечения и гармонических пропорций в центре внимания преподавателей и студентов находятся с начала моей работы в БелГУТе (1969 г.) и печати первых научных работ [2–6], первого учебника по передаче дискретной информации (1971) [7] и пособия по корректирующим кодам (1975 г.) [8]. Предметом обсуждения на студенческом семинаре была также статья, появившаяся в газете «Правда» в ноябре 1988 г. «Вот вам и

Фибоначчи», посвященная развитию научного направления проф. Стахова. Такое внимание к статье было связано с тем, что одной из проблем железнодорожного транспорта является безопасность перевозки пассажиров и грузов. К этой проблеме непосредственно примыкает проблема телеуправления и передачи сообщений для управления движением поездов, что в свою очередь связано с корректирующими кодами и верностью передачи сообщений по каналам связи телемеханических систем (диспетчерской централизации и др.) железнодорожного транспорта.

Активно работают над проблемами золотого сечения в технике и искусстве студенты БелГУТа, печатают свои результаты в сборниках студенческих научных работ, участвуют в конкурсах по научно-исследовательским работам студентов Республики Беларусь.

О книге «Математика гармонии». В мире математики издание книги «Математика гармонии» [9], бесспорно является событием и заслуживает быть положительно отмечено научной общественностью, а автора А. П. Стахова следует поздравить с ее выходом в свет. Ее недостаток – малая доступность, так как ее стоимость очень высока (180 дол. США), издана она на английском языке и в Сингапуре (США). Поэтому ее мало кто читал.

Теперь о названии книги, вызвавшем небольшую и, по моему мнению, бессодержательную дискуссию. По названию «*The matematics of harmoni*» (Математика гармонии) нет никаких возражений, Я уже писал по этому поводу, но повторюсь. Начну с того, что наряду с углублением и расширением уже сложившихся научных направлений, историческое развитие науки неизбежно приводит к появлению новых дисциплин (областей знания). Появление и развитие новых областей знания вызывается главным образом двумя факторами: фактором обособления и фактором обобщения.

Обособление научных направлений возникает под влиянием открытия новых объектов исследований и возникновением специфических научных направлений, глубоко изучающих сравнительно узкий класс объектов и характеризующихся своим специфическим подходом к постановке и решению проблем научного направленя. Такого рода специфическими направленями являются, например, квантовая механика и др. Наряду с этим появляются обобщающие научные направления, характерной особенностью которых является то, что они создаются с целью изучения общих закономерностей явлений, протекающих в весьма широком классе объектов. К научным напрвлениям такого рода относятся, например, теория чисел, теория измерений, теория информации, теория поиска, теория тепло- и массопереноса и др. К этой же категории обобщающего направления в науке относится и теория гармонии (математика гармонии).

Во всякой теории столько теории, сколько в ней математики. Например у Ветрувия «Математическая теория музыки», у К. Шенонна «Математическая теория связи». Поэтому во многих случаях можно заменить слово «теория» на слово «математика». Это относится в равной степени и к математической теории гармонии – математики гармонии.

Начала гармонии заложены в математичеких трудах Евклида, Пифагра и других мыслителей и философов еще до нашей эры. Непосредственным толчком для интенсивной разработки проблем гармонии с самых общих позиций послужили конкретные проблемы музыки, практические задачи строительной механики, измерения геометрических размеров и массы, теории чисел др. Первыми математическими понятиями теории гармонии были гармонические пропорции, в том числе золотое сечение (золотая пропорции), являющееся основой гармонического деления. Музыка была первой теорией и практического осуществления природных законов гармонии.

В настоящее время теория гармонии развивается и оказывает большое вияние на методы исследования и способы решеня многих практческих задач в самых разнообразных областях искусства, науки и техники: музыки, живописи, поэзии, архитектуры, биологии, медицине, технике связи, вычислительной технике, экономике и др.

Что касается «*Contemporary matematics*» («Современная математика») в целом не согласен. Математика фундаментальная наука, а математика гармонии лишь начало формирования нового научного направления. По «*Computer Science*» хочу отметить следующее. Наука о вычислительной математике большая и самостоятельный часть дискретной математики, которой в книге отведено наибольшая часть, а именно, – коды Фибоначчи, их системотехника и пример реализации кодов Фибоначчи в электронных вычислительных машинах. Все это относится к теории корректирующих кодов, составляющих отдельный раздел дискретной математики [10], примерами которых могут служить также ряд фундаментальных книг по теории корректирующих кодов [29]. Теория кодов, в том числе и кодов Фибоначчи, является составляющей дискретной математики, которая продолжает развиваться.

Немного об истории трудов по золотому сечению. В книге «Математика гармонии» в весьма укороченном виде отмечены работы ученых в области математики гармонии, представленных как «золотая» славянскя группа. Кроме ученных, приведенных в книге (О. Боднар, Э. Сороко, В. Коробко, Н. Васютинский, Н. Воробьев, С. Петухов, И. Шевелев, М. Марутаев, И. Шмелев, И. Ткаченко, В. Цветков, В. Петруненко, П. Шапоренко, Н. Померанцева и др.), в странах СНГ в области математики гармонии работают многие ученые не приведеные в книге (В. Смирнов, С. Ясинский, Г. Мартыненко, А. Харитонов, В. Груданов Б. Кузьмин, М. Радюк, Р. Повилейко, А. Волошинов, В. Зарудко, В. Очинский и др.). По этому поводу можно высказать только сожаление. История в лицах – основа любой истории, в том числе и история золотого сечения и гармонических пропорций. В целом хочу отметить также, что еще рано давать оценки трудов наших современников, история рассудит.

Вообще история математики гармонии заслуживает большего внимания. Необходима объективная история. При этом надо исходить из завещания великого русского писателя и историка Н. М. Карамзина (1766–1826): «История в некотором смысле есть священная книга, главная, необходимая; зерцало бытия и деятельности; скрижаль откровений и правил; завет предков к потомству, дополнение, изъяснение настоящего и будущего». История по Н. М. Карамзину это своего рода Библия. Однако история, приведенная в книге «Математика гармонии», не отвечает этому требованию. В ней отсутствуют труды многих исследователей математики гармонии.

Достаточно рациональным представляется нам и рекомендация Совета Европы об основных задачах исторического образования – уважать историческую правду.

О работах по золотому сечению. В свете исторического анализа отметим книги Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (1961) и Н. А. Васютинского «Золотая пропорция» (1990), положивших новую волну исследования золотого сечения и чисел Фибоначии. Значительным событием в истории золотого сечения явилось также книга Э. М. Сорока «Структурная гармония систем» (1984). С развитием передачи данных, информационно-регистрирующих систем, вычислительной техники вышла в свет книга А. П. Стахова «Коды золотой пропорции» (1984), посвященная теории кодирования по Фибоначчи.

Необходимо отметить также работы С. А. Ясинского и в первую очередь учебное пособие «Золотая» пропорция в электросвязи» (1999) [11], которое явилось началом системного исследования проблем теории электрической связи на основе золотого сечения и гармонических пропорций. Оно стало своего рода катализатором, который ускорил исследования в области электрической связи. Актуальность пособия С. А. Ясинского «Золотая» пропорция в электросвязи» подтверждена также тем, что главное издательство Российской Федерации, специализирующееся на технической литературе по связи в 2004 г. выпустило книгу «Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи» [12].

Фундаментальные книги В. С. Смирнова [15, 16] прошли обсуждение учеными С.-Петербурга. Основные идеи книги «Золотое сечение – основа математики и физики будущего. Спираль развития Вселенной» (2002) [16] была одобрены деканом факультета прикладной математики–процессов управления С.-Петербугского университета, чл. корр. РАН, лауреатом Государственной премии, доктором ф. м. н. профессором В. И. Зубовым, положительный отзыв на книгу дал также профессор кафедры прикладной математики–процессов управления, заслуженный деятель науки и техники России Р. А. Нелепин.

В последние годы появилось ряд новых изданий, среди которых отметим монографию белорусского ученого В. Я. Груданова «Золотая» пропорция в инженерных задачах» (2006) [13]. В монографии рассмотрены актуальные проблемы в области создания и разработки высокоэффективных машин и различного функционального назначения аппаратов с использованием «золотой» пропорции и рекуррентных чисел. На основе этих разработок автором было получено более 60 авторских свидетельств, в том числе СССР, а также патентов Республики Беларусь и Российской Федерации.

Необходимо также отметить монографию С. А. Ясинского «Золотое» сечение в стандартизации и теории измерения» в которой рассматривается важная государственная проблема по созданию систем предпочтительных чисел и гармонических пропорций в теории измерений и стандартов [40]. Начало исследования стандартов на основе золотого сечения было положено в работе В. Я. Груданова и др.[14]

Значительную роль в популяризации золотого сечения на начальном этапе (1970) сыграла, изданная на английском языке книга *Huntley H. E. «The Divine Proportion»* [36]. В книге рассмотрены не только золотое сечение и последовательности Фибоначчи, Люка, но и ряд красивых геометрических и алгебраических задач математики.

Отметим также переведенную на русский язык оригинальную как по содержанию, так и оформлению книгу «Конкретная математика. Основание информатики» (М.: Мир, (1998), [16], написанную известным американским математиком Д. Кнутом (*Stenford University*) и научными работниками Р. Грехемом (AT&T *Bell Laboratories*) и О. Паташником (*Center for Commuicatians Research*). Для меня, как специалиста по электрической связи, приятно констатировать совпадение моих научных интересов и интересов отечественных и зарубежных коллег.

Интересна также небольшая по объему, но богатая по содержанию книга американского ученого *Scott Olsen. «The Golden section»* (2006) в которой приведено много примеров проявления золотого сечения и гармонических пропорций в природе и науке [43].

В 2009 г. в издательстве «*World Scientific*» вышла уже упоминавшаяся книга *Stakhov A. «The Mathematics of Harmony – From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science (World Scientific,* 2009) в которой автор обобщил свою научную работу в области математики гармонии и компьютерной науки за последние десятилетия [9].

О гармонии. Гармония (греч. *harmonia* – связь, соразмерность, стройность, созвучие, согласие) соразмерность частей и целого, слияние различных частей объекта в единое органическое целое, означающее высокий уровень упорядоченного многообразия, оптимальное взаимосоответствие различного в составе целого.

Слово «гармония» возникло в Древней Греции в связи с пифагорейским музыкальным строем. Именно в античной теории музыки слово «гармония» обрело свое современное значение – согласие разногласного. Семь нот пифагорейского строя носят знакомые всем названия: до, ре, ми, фа, соль, ля, си. Эти семь частот относятся вовсе не случайным образом, а закономерно взаимосвязаны в единый ансамбль с помощью отношений – гармонических пропорций.

Семь нот пифагорейского строя, разнесенные по разным октавам, образуют единую последовательность – геометрическую последовательность на основе отношения квинты 3 : 2 между их частотами:

Параметр	Нота						
	Фа	До	Соль	Ре	Ля	Ми	Си
Частота,Гц	87	130	196	293	440	660	990
Отношение	$(3/2)^{-3}$	$(3/2)^{-2}$	$(3/2)^{-1}$	$(3/2)^{-0}$	$(3/2)^{1}$	$(3/2)^{2}$	$(3/2)^{3}$

В приведенном ансамбле отношения отдельных нот к средней частоте ноты «ре» первой октавы 293 Гц образуют последовательность со знаками и величинами целочисленных степеней квинты: от степени «–3» до степени «+3».

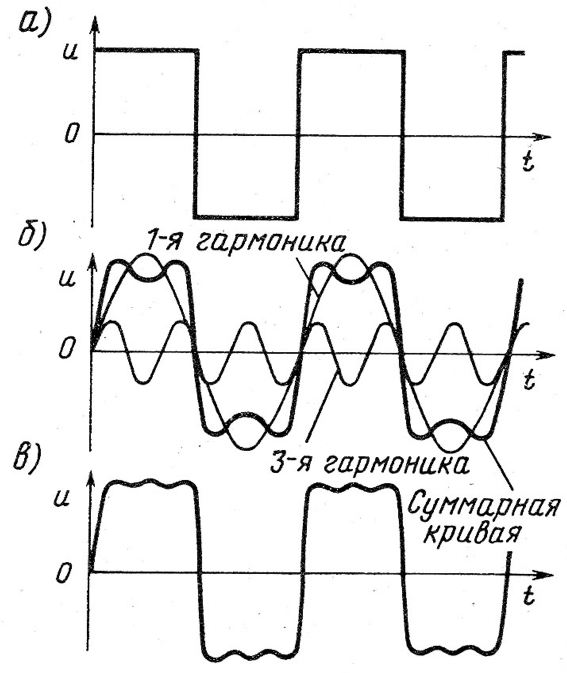
Древние греки, как и китайцы, приписывали музыкальной гармонии ключевую роль в устройстве мира. Поэтому они придавали чрезвычайное значение поиску отношений квинты 3 : 2 в природных системах, считая 3 мужским и 2 женским числами, которые своим взаимодействием порождают говые музыкальные тоны и др. Великий математик и механик Архимед (ок. 287–212 до н. э.), совершивший множество открытий и изобретений, полагал высшим достижением своей жизни обнаружение квинты 3 : 2 в соотношении объемов (и площадей) цилиндра и сферы, вписанной в него. Эти фигуры он завещал выгравировать на его могильном камне. Именно благодаря этим фигурам Цицерон (106 – 43 до н. э.) более чем через 100 лет после смерти Архимеда обнаружил могилу Архимеда.

В древнейшей из книг Торе, гармония характеризуется так: «Всякий сотворенный объект сам по себе «хорош». Но когда все сотворенное соединяется в единое целое, вся система мироздания поднимается на качественно новую ступень. Все сотворенное соответствует воле Творца, нет ничего недостающего и ничего избыточного, все сущее гармонично объединяется» (Тора. гл. 2, п. 31. Брейшит II, – С. 13). Там же: «Сама эта гармония является свидетельством единства Творца, ибо только единая воля могла сделать основой природы гармонию» (Луццатто).

Известный философ В. П. Шестаков в своей книге «Гармония как эстетическая категория» (1973) отмечал, что «в истории эстетических учений выдвигались самые разные понимания гармонии. Само понятие «гармония» употреблялось чрезвычайно широко и многозначно. Оно обозначало и закономерное устройство природы и космоса, и красоту физического и нравственного мира человека, и принципы строения художественных произведений, и закономерности эстетического восприятия». Среди различных понятий гармонии (эстетической, художественной, математической) большое значение имеет последняя – математическая.

Пропорции золотого сечения неукоснительно действуют в природе, искусстве, науке и технике, и мы часто не ведаем о том, что творим себя и окружающий мир по его соотношению. Причем (и это надо выделить!) золотое сечение связано не просто с гармонией, а с гармонией соединения в единое неравных частей, отводя симметрии особый статус гармонии соединения равных частей в едином. Основу большинства гармонических пропорций составляют золотое сечение и связанные с ним рекуррентные последовательности Фибоначчи, Люка и др.

Ярким примером гармонии – единства целого и его составляющих может служить периодическая последовательность прямоугольных импульсов тока, которая базируется на математическом аппарате рядов, предложенных французским математиком Жаном Фурье (1768–1830). Можно без преувеличения отметить, что все расчеты в радиотехнике и электросвязи в той или иной форме отражают представления, на которых построена математическая теория Фурье – гармонический анализ и синтез [17]. Функция состоит из множества гармонических составляющих ($n \to \infty$). В первом приближении функция может быть получена как сумма двух синусоидальных составляющих (гармоник), частота одной из которых равна частоте повторения основной функции ω (первая гармоника) и составляющей с частотой в три раза большей основной частоты 3ω (третья гармоника). Добавив еще пятую, седьмую, девятую и другие нечетные гармоники все больше приблизимся к исходной прямоугольной функции. Таким образом, единое целое – прямоугольная функция включает множество ее составляющих. Еще более плотный (сплошной) спектр гармонических составляющих имеет прямоугольный единичный импульс продолжительностью Δt и амплитудой $1/\Delta t$ (функция такого типа носит название δ – функция Дирака) [17]



Гармонические составляющие последовательности прямоугольных импульсов

Математика точная наука, и определения, и понятия должны быть такими же точными. Пока о понятии «математика гармонии» этого нельзя сказать, Уже упоминаемые ряды Фурье, – это математика гармонии?, корректирующие коды – это математика гармонии?, многочлены Чебышева, составляющие основу теории наилучшего приближения функций, это тоже математика гармонии? Можно продолжить число вопросов. Надо четкое (энциклопедическое) определение понятия «математика гармонии» и ее составляющих.

Математика гармонии представлает собой обобщенную теорию, применимую к любому объекту, характерным для которого является рациональное или в пределе оптимальное взаимосоответствие различного в составе целого. При этом под объектом понимается объединение любых элементов, рассмативаемых как связанное целое. Характерными примерами гармонии являются некоторые музыкальные произведения, а в науке – гармонические ряды Фурье и составляющие рядов – гармоники, которые являются основой теории гармонического анализа и синтеза в радиотехнике и электросвязи

Понятие гармонии довольно тесно связано с понятием оптимума, оптимальности. Можно привести достаточное количество примеров, когда золотое сечение и связанные с ним числа Фибоначчи и Люка проявляются в природе и искусстве, используются в поиске оптимальных результатов в науке и технике.

Петербургский ученый Б. И. Кузьмин обратил внимание также на то, что золотое сечение вносит «гармонию в бесконечный хаос», позволяет «отыскивать разумное начало в постоянно изменяющемся мире» [38, 39].

О теории информации. Возникновение и развитие теории информации, как нового научного направления, было связано с быстрым развитием техники связи в первой половине XX столетия. В этот период стали появляться работы, в которых предпринималась попытка научного обоснования основных характеристик систем связи и количественной оценки качества передачи сообщений. В 1928 г. американский ученый Р. Л. Хартли предложил логарифмическую меру оценки количества информации [189].

В 1933 г. была опубликована работа советского ученого В. А. Котельникова [19], в которой впервые была сформулирована теорема о дискретном представлении сигналов с ограниченным спектром, а также дан ряд практических рекомендаций по оценке пропускной способности каналов связи. В этой работе было фактически заложено начало общей теории связи. В 1946 г. опубликована работа В. А. Котельникова [20], в которой заложены основные положения теории потенциальной помехоустойчивости.

Наибольшее развитие теория информации получила после опубликования в 1947–1948 гг. классических работ американского ученного Клода Шенонна, в том числе «Математическая теория связи» [21], в которых сформулированы основные положения, касающиеся количественной оценки информации. Некоторые из положений К. Шенонна были строго доказаны советскими учеными А. Я. Хинчиным, А. Н. Колмогоровым, А. А. Харкевичем.

Теории информации К. Шенонна, основу которых составляют теория вероятностей и математическая статистика, и советских ученых А. Я. Хинчина, А. Н. Колмогорова, А. А. Харкевича явились базой для исследования процессов мышления, познания, психологии, общественных явлений и др., а также появления новых научных направлений. Так, академик В. А. Горбатов впервые в научном мире предложил название «информационная математика» (1980), что послужило развитию нового научного направления «Информациология» [24], а также «Информатика» [23]. Как первая, так и вторая до некоторой степени являются одними из направлений теории информации.

Французский биолог Р. Шовен (1913–2009) отмечал, что «наука, изучает только то, что можно измерить, это совершенно правильно; следует, однако, выделить, то, что заслуживает быть измеренным». В связи с эти мне бы хотелось обратить внимание на то, что одной из причин появления теории информации явились поиски количественной меры информации при оценке пропускной способности систем связи, тогда же впервые появились единица количества информации – двоичная единица – бит. Цель математики гармонии также должна заключатся в том, чтобы найти способ квантификации наблюдаемых исследований и их последующего описания в терминах, соответствующих численным понятиям.

Типичным для такого подхода является широко известная формулировка лорда Кельвина (1824–1907): «Когда вы в состоянии измерить то, о чем вы говорите, и выражать это в числах, значит вы что-то знаете в данной области; но если вы не можете ни измерить, ни выразить свои мнения в числах, то ваши знания по обсуждаемому предмету неудовлетворительны: может быть это лишь начало познания, первые мысленные памятки. В настоящее время математика гармонии не отвечает этой научной позиции. О гармонии говорят и пишут многие (гармоничное общество, гармоничный человек, гармоничные законы, гармоничный менеджмент и др.), но кто или что более гармоничен?

Первые методы измерения гармоничностих процессов по их отклонению от золотого сечения были рассмотрены в работе О. Н. Гринбаума [22].

И снова о Конгрессе. На последнюю треть XX века пришлось начало небывалого прежде роста активности исследований золотого сечения и гармонических пропорций, быстро возрастает число публикаций. Практичные американцы в 1963 г. первыми начали издавать математический журнал «*Fibonacci Quarterly*» о свойствах и проявлении золотого сечения и связанных с ним чисел рекуррентной последовательности Фибоначчи и др. Появление такого мощного информационного средства, как Интернет, способствовало объединению исследователей в этой области и привлечению внимания к этому важному научному направлению. Содержание сайтов Интернета также является убедительным свидетельством огромного интереса к золотому сечению и гармоническим пропорциям, последовательностям Фибоначчи и Люка – все расширяющегося пространства золотого сечения. И, что особенно важно, деятельность приобрела международный характер.

Возвращаясь вновь к Конгрессу по математике в Одессе отметим, что в. его решениях было отмечено, что целесообразно регулярное (один раз в 2 года) проведение Международного конгресса по математике гармонии. Хотелось бы, чтобы будущие конгрессы были более представительными, чем прошедший в 2010 г. Одессе.

Конгресс в Одессе во многом уступал международным математическим конгрессам. Так, на первом Международном математическом конгрессе, который состоялся в 1897 г. в Цюрихе было более 200 частников. Еще более представительным был второй международный математический конгресс в Париже (1900) – 226 участников. из Франции (90) участников), Германии (25), США (17), Бельгии (15), России (9), Австро-Венгрии (8), Швейцарии (8), Великобритании (8) и других стран. Работа конгресса протекала в 6 секциях: 1. Арифметика и алгебра. 2. Анализ. 3. Геометрия. 4. Механика и математическая физика. 5. История и библиография математики. 6.Преподавание и методология. На конгрессе была специальная секция, посвященная истории и библиографии. Более того, в день открытия на первом пленарном заседании выступил немецкий математик М. Кантор (1845–1918) с докладом об историографии математики. Актуальность проблем истории и библиографии золотого сечения и гармонических пропорций связана также с тем, что в настоящее время число публикаций растет и вследствие плохой информированности исследователей в разных странах мира, растет число «первооткрывателей» и пустопорожних реплик о плагиатах и др. История золотого сечения и гармонических пропорций ждет своих исследователей. Хорошее начало таких исследований положено работами Г. Я. Мартыненко [30–34].

Последовательность чисел Фибоначчи. В основу последовательности чисел Фибоначчи

$$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9 \quad F_{10} \quad \ldots, \tag{1}$$

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad \ldots, \tag{2}$$

положено рекуррентное соотношение

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \tag{3}$$

при начальных числах $F_1 = F_2 = 1$, $n > 2$.

В некоторых случаях рекуррентная последовательность (2) начинается с чисел $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$. Тогда

$$F_0 \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6 \quad F_7 \quad F_8 \quad F_9 \quad F_{10} \quad \ldots,$$

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \ldots, \tag{4}$$

Обобщенная рекуррентная последовательность по Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-1-\lambda}, \tag{5}$$

где λ – шаг сложения, $\lambda = F_1 = F_2 = \ldots = F_\lambda = 1$.

Отметим, что последовательность Фибоначчи (2) иногда называют последовательностью Г. Ламе (1796–1870), французского ученого, специалиста по математике, который долгие годы (1820–1832) был профессором Института Корпуса путей сообщения (ныне С.-Петербургский государственный университет путей сообщения).

Последовательность чисел Люка. В основу последовательности чисел Люка

$$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad L_8 \quad L_9 \quad L_{10} \quad \ldots,$$

$$1 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad 18 \quad 29 \quad 47 \quad 76 \quad 123 \ldots, \tag{6}$$

положено рекуррентное соотношение

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{7}$$

при начальных значениях $L_1 = 1$ и $L_2 = 3$, $n > 2$.

В некоторых случаях рекуррентная последовательность (5) начинается с чисел $L_0 = 2$ и $L_1 = 1$. Тогда

$$L_0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad L_8 \quad L_9 \quad L_{10} \ldots,$$

$$2 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 11 \quad 18 \quad 29 \quad 47 \quad 76 \quad 123 \ldots \tag{8}$$

Последовательности Фибоначчи и Люка находят применения для анализа и моделирования многих природных явлений и процессов в науке и технике, в том числе теории электрических цепей и связи [6].

Производные последовательности чисел. В основу производных последовательностей Фибоначчи–Семенюты (FS_n) и Люка–Семенюты (LS_n). лежат соответственно последовательности Фибоначчи (2) и Люка (6) [25, 26].

Таблица **1 Рекуррентные последовательности** $\boldsymbol{FS_n}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…
$FS_n(1)$	5	5	10	15	25	40	65	105	170	275	…
$FS_n(2)$	25	25	50	75	125	200	325	525	850	1375	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Таблица 2 – **Рекуррентные последовательности** $\boldsymbol{LS_n}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
L_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	…
$LS_n(1)$	5	15	20	35	55	90	145	235	380	615	…
$LS_n(2)$	25	75	100	175	275	450	725	1175	1900	3075	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Из таблиц 1 и 2 следуют следующие свойства последовательностей FS_n и LS_n

$$FS_n(1) = 5F_n\,, \qquad LS_n(1) = 5L_n\,,$$
$$FS_n(2) = 5^2 FS_n(1) = 25F_n\,, \qquad LS_n(2) = 5^2 LS_n(1) = 25L_n\,,$$
$$FS_n(3) = 5^3 FS_n(2) = 125F_n\,, \qquad LS_n(3) = 5^3 LS_n(2) = 125L_n\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Все производные последовательности связаны с последовательностями Фибоначчи и Люка через цифру 5 в соответствующей степени. Отношения двух рядом расположенных чисел FS_n и LS_n при $n \to \infty$ стремятся соответственно к золотому сечению $\Phi = 1{,}618\ldots$ или $1/\Phi = 0{,}618\ldots$.

Последовательности FS_n и LS_n находят применения при решении задач в теории электрических цепей [6, 26].

Мультирекуррентные последовательности чисел. В основе последовательности мультирекуррентных чисел S_n лежат рекуррентные соотношения [2 – 6]:

$$\left.\begin{aligned} S_{2n} &= S_{2n\text{-}1} + S_{2n} \\ S_{2\mathrm{n}\text{-}1} &= kS_{2n\text{-}2} + S_{2n} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $S_1 = 1$, $S_2 = 1$.

Четные S_{2n} и нечетные S_{2n-1} члены последовательности (9) определяются, как и в других рекуррентных последовательностях, – суммированием двух предыдущих чисел. Однако числа с четными номерами перед суммирование умножаются на коэффициент k. Следовательно, последовательность (9) является мультирекуррентной. Примеры чисел мультирекуррентных последовательностей при k = 1…4 приведены в таблице 3.

Таблица 3 – **Мультирекуррентные числа для *k* = 1,… , 4**

k	$S_1(k)$	$S_2(k)$	$S_3(k)$	$S_4(k)$	$S_5(k)$	$S_6(k)$	$S_7(k)$	$S_8(k)$	$S_9(k)$	$S_{10}(k)$
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2	1	1	3	4	11	15	41	56	153	209
3	1	1	4	5	19	24	91	115	436	551
4	1	1	5	6	29	35	169	204	985	1189

При k = 1 мультирекуррентная последовательность совпадает с последовательностью Фибоначчи (2). Мультирекуррентные последовательности чесел являются фундаментальной алгебраической моделью многих физических процессов и явлений в природе, науке и техники (тепло- и массоперенос, филлотаксис и др.), в том числе в теории электрических цепей, железнодорожных рельсовых цепях, электрических фильтрах и др. В целом можно отметить, что мультирекуррентные последовательности таят еще много не раскрытых математических особенностей и ждут своих исследователей.

Общее решение рекуррентные соотношения. В общем случае, линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами имеют вид

$$f_{n+k} = a_1 f_{n+k-1} + a_2 f_{n+k-2} + ... + a_n f_n. \qquad (10)$$

где a_1 , a_2 , …, a_n – постоянные числа.

Простейшей рекуррентной последовательности при k = 2

$$f_{n+2} = a_1 f_{n+1} + a_2 f_n, \qquad (11)$$

соответствует характеристическое квадратное уравнение

$$r^2 = a_1 r_1 + a_2, \qquad (12)$$

которое имеет два различных корня

$$r_{1,2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{a^2 - 4a^2}}{2}$$

Общее решение (11) для определения n-го рекуррентного числа

$$f_n = C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-2}. \qquad (13)$$

Значениями чисел C_1 и C_2 определяется из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= a \\ C_1 r_1 + C_2 r_2 &= b \end{aligned}\right\}, \qquad (14)$$

где

$$C_1 = \frac{b - a_1 r_1}{r_1 - r_2}, \qquad C_2 = \frac{a_1 r_1 - b}{r_1 - r_2}., \tag{15}$$

a и b – начальные числа рекуррентной последовательности (11).

Общее решение рекуррентного соотношения (11) при любых a и b

$$f_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}. \tag{16}$$

Это основная формула решения рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами (11). Из (16) следуют все известные формулы решения рекуррентных соотношений (Бине, Люка, Семенюты и др.) [6].

Общее решение последовательностей мультирекуррентных чисел. Характеристическое уравнение, соответствующее четным членам мультирекуррентного соотношения (9)

$$r^2 - (2 + k)\, r + 1 = 0 \quad \text{или} \quad r^2 - mr + 1 = 0 \tag{17}$$

где k и m – параметры мультирекуррентной последовательности (9), $m = (2 + k)$ [3].

Корни квадратного уравнения (17):

$$r_{1,2} = \frac{(2+\mathrm{k}) \pm \sqrt{(2+k)^2 - 4}}{2} = \frac{\mathrm{m} \pm \sqrt{\mathrm{m} - 4}}{2} \tag{18}$$

В зависимости от значения $m = (2 + k)$ корни уравнения (17) могут быть вещественными, мнимыми или равными Их анализ выполнен в [2, 3]. Вещественные корни p_1 и p_2 в случае $k = 1\ldots 4$ приведены в таблице 4.

Таблица 4. – **Параметры квадратного уравнения $r^2 - (2 + k)\, r + 1 = 0$**

Параметр	Корни уравнения			
k	1	2	3	4
r_1	$(3+\sqrt{5})/2$	$2+2\sqrt{3}$	$(5+\sqrt{21})/2$	$3+2\sqrt{2}$
r_2	$(3-\sqrt{5})/2$	$2-2\sqrt{3}$	$(5-\sqrt{21})/2$	$3-2\sqrt{2}$
$r_1 - r_2$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{21}$	$4\sqrt{2}$
γ	0,962	1,318	1,567	1,763

Решение для четных мультирекуррентных членов определяется формулой:

$$f_{2n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}. \tag{19}$$

Решение соотношений для чисел Фибоначчи и Люка. Рекуррентной последовательности Фибоначчи соответствует характеристическое уравнение

$$r^2 - r - 1 = 0. \tag{20}$$

Корнями этого характеристического квадратного уравнения являются числа золотого сечения

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi\,, \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}\,. \tag{21}$$

Поэтому из (19) и (21) следует формула чисел Фибоначчи

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\Phi^n - (-\Phi/\Phi)^n}{\Phi - (-1/\Phi)} \quad \text{или} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{22}$$

Из (22) можно получить также формулы для определения чисел Люка:

– для нечетных членов

$$L_{2n-1} = \mathit{\Phi}^n - (1/\mathit{\Phi})^n \qquad (n = 1, 3, 5,\ldots), \tag{23}$$

– для четных членов:

$$L_n = \mathit{\Phi}^n + (1/\mathit{\Phi})^n \qquad (n = 2, 4, 6,\ldots). \tag{24}$$

Решения соотношений для мультирекуррентных чисел. Из формулы (19) в зависимости от k (17) могут быть получены частные формулы связи четных членов мультирекуррентных последовательностей с корнями характеристических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
S_{2n}(1) &= \frac{p_1^n - p_2^n}{\sqrt{5}}, \quad p_1 = 2{,}618, \quad p_2 = 0{,}382,\\
S_{2n}(2) &= \frac{p_1^n - p_2^n}{2\sqrt{3}}, \quad p_1 = 3{,}732, \quad p_2 = 0{,}268,\\
S_{2n}(3) &= \frac{p_1^n - p_2^n}{\sqrt{21}}, \quad p_1 = 4{,}4791, \quad p_2 = 0{,}209,\\
S_{2n}(4) &= \frac{p_1^n - p_2^n}{4\sqrt{2}}, \quad p_1 = 5{,}829, \quad p_2 = 0{,}172,\\
S_{2n}(5) &= \frac{p_1^n - p_2^n}{3\sqrt{5}}, \quad p_1 = 6{,}854, \quad p_2 = 0{,}146.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Приняв $\gamma = \ln p_1$, и выполнив преобразования (25), получим формулы связи нечетных и четных чисел мультирекуррентных последовательностей с гиперболическими функциями:

- для нечетных членов

$$S_{2n-1} = \frac{\mathrm{ch}(2n-1)\frac{\gamma}{2}}{\mathrm{ch}\frac{\gamma}{2}}, \tag{26}$$

- для четных членов:

$$S_{2n} = \frac{\mathrm{sh}\gamma n}{\mathrm{sh}\gamma}, \tag{27}$$

Простые и красивые формулы (26) и (27) отражают многие процессы в живой природе, науке и технике и ждут своих исследователей. Впервые статья по аналитической связи мультирекуррентных последовательностей и гиперболических функций (26) и (27) была опубликована Н. Ф. Семенютой в научных трудах Белорусского института инженеров железнодорожного транспорта [4].

В случае k = 1мультирекуррентная последовательность (9) превращается в последовательность Фибоначчи и после преобразования (26) и (27), получим формулы определения чисел Фибоначчи с помощью гиперболических функций:

– нечетные $F_n = \frac{2}{\sqrt{5}} ch\ n\gamma,\quad n = 2k - 1,\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

– четные $F_n = \frac{2}{\sqrt{5}} sh\ n\gamma,\quad n = 2k,\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

где $\gamma = \ln \Phi = 0{,}441$.

Формулы определения чисел Люка с помощью гиперболических функций

– для нечетных членов:

$$L_{2n-1} = 2sh(2n-1)\frac{\gamma}{2},\quad n = 2k - 1,\quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

– для четных членов:

$$L_{2n} = 2ch\gamma n \quad n = 2k,\quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad \gamma = \ln \Phi = 0{,}441. \tag{29}$$

Другие рекуррентные последовательности. К рекуррентным относится широкий круг последовательностей, в том числе с «довольно произвольными рекуррентными соотношениями», «взаимно рекуррентные», последовательности чисел Каталани, Пели и др. [36]. В работе египетского ученого Мидхата Газале [37] выполнен анализ рекуррентной последовательности (10) для случая $k = 2$ и $a_1 = m$

$$f_{n+2} = mf_{n+1} + f_n,\qquad f_0 = 0,\qquad f_1 = 1. \tag{30}$$

В таблице 5 приведены числа последовательности (30) для $m = 1,\ldots, 4$.

Таблица 5 – **Рекуррентные чисел для** $\boldsymbol{m = 1,\ldots,4}$

m	$f_1(m)$	$f_2(m)$	$f_3(m)$	$f_4(m)$	$f_5(m)$
1	1	1	2	3	5
2	1	2	5	12	29
3	1	3	10	33	109
4	1	4	27	72	305

При $m = 1$ рекуррентная последовательность совпадает с последователь- ностью Фибоначчи (4).

Характеристическое уравнение последовательности (24) имеет вид

$$x^2 - mx - 1 = 0. \tag{31}$$

Уравнение (31) отличаются от уравнения (17) только знаком свободног члена. Корнями уравнения (31) являются числа

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}.$$

При $m = 1,\ldots,4$ корни x_1 и x_2 приведены в таблице 6.

Таблица 6 – **Корни квадратного уравнения** $x^2 - mx - 1 = 0$.

Парметр	Корни уравнения			
m	1	2	3	4
x_1	$(1+\sqrt{5})/2$	$1+\sqrt{2}$	$(3+\sqrt{13})/2$	$2+\sqrt{5}$
x_2	$(1-\sqrt{5})/2$	$1-\sqrt{2}$	$(3-\sqrt{13})/2$	$2-\sqrt{5}$
$x_1 - x_2$	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{13}$	$2\sqrt{5}$

Общее решение для рекуррентных соотношений определяется формулой

$$f_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2}. \qquad (32)$$

Из формулы (32) могут быть получены частные формулы при $m = 1, 2, 3, 4$.

$$\left.\begin{aligned}
f_n(1) &= \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}}, \quad x_1 = 1{,}618, \quad x_2 = -0{,}618,\\
f_n(2) &= \frac{x_1^n - x_2^n}{2\sqrt{2}}, \quad x_1 = 2{,}414, \quad x_2 = -0{,}414,\\
f_n(3) &= \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{13}}, \quad x_1 = 3{,}303, \quad x_2 = -0{,}303,\\
f_n(4) &= \frac{x_1^n - x_2^n}{2\sqrt{5}}, \quad x_1 = 4{,}236, \quad x_2 = -0{,}236,\\
f_n(5) &= \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{29}}, \quad x_1 = 5{,}192, \quad x_2 = -0{,}192.
\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Случай $m = 1$ соответствует формуле Бине (22). Таким образом, формула М. Газале, соответствует частному случаю решения рекуррентных соотношений (12) и относить их к «разряду выдающихся математических формул наряду с формулами Эйлера, формулами Муавра, формулой Бине и др.», как это утверждается в [9, 35] нет оснований.

Из результатов, полученных в работах [4, 29], можно также установить связь рекуррентных последовательностей (30) и гиперболических функций

$$\left.\begin{aligned}
f_{2n-1}(1) &= \frac{2ch(2n-1)\gamma}{\sqrt{5}}, \quad f_{2n}(1) = \frac{2sh2n\gamma}{\sqrt{5}}, \quad \gamma = 0{,}481,\\
f_{2n-1}(2) &= \frac{ch(2n-1)\gamma}{\sqrt{2}}, \quad f_{2n}(2) = \frac{sh2n\gamma}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = 0{,}881,\\
f_{2n-1}(3) &= \frac{2ch(2n-1)\gamma}{\sqrt{13}}, \quad f_{2n}(3) = \frac{2sh2n\gamma}{\sqrt{13}}, \quad \gamma = 1{,}195,\\
f_{2n-1}(4) &= \frac{ch(2n-1)\gamma}{\sqrt{5}}, \quad f_{2n}(4) = \frac{sh2n\gamma}{\sqrt{5}}, \quad \gamma = 1{,}444,\\
f_{2n-1}(5) &= \frac{2ch(2n-1)\gamma}{\sqrt{29}}, \quad f_{2n}(5) = \frac{2sh2n\gamma}{\sqrt{29}}, \quad \gamma = 1{,}647.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

В связи с поступившими на лекции вопросами о практическом применении золотого сечения были приведены простейшие примеры проявления золотого сечения и чисел Фибоначчи в науке и природе..

Гибкая нить (провода линий связи и электропередачи, электрические и волоконно-оптические кабели воздушных линий связи, тросы, шланги и др.) (рисунок 1).

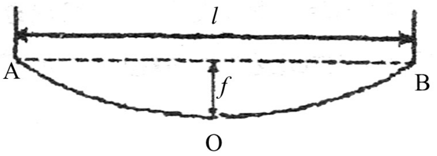


Рисунок 1 – Провисание гибкой нити

Из теории упругости известно, что при постоянном поперечном сечении гибкой нити, подвешенной между точками А и В, лежащими в одном уровне, в точке О возникают растягивающие усилия $H = ql^2/8f$, где q – масса единицы длины нити; l – длина пролета; f – стрела провисания нити: $f = ql^2/8H$ При этом длина всей нити:

$$L = l + \Delta l = l(1 + \frac{8f^2}{3l^2}) \ .$$

Отношение 8/3 может быть заменено на квадрат золотого сечения Φ^2 и формула принимает вид:

$$L = l\left[1 + \left(\frac{\Phi f}{l}\right)^2\right].$$

Таким образом, замена в формуле (27) отношения 8/3 на Φ^2 позволило незначительно, но упростить формулу. Аналогично отношение 3/8 может быть заменено на Φ^{-2} и при расчете параметров рельсовых электрических цепей железнодорожной автоматики и телемеханики [41].

«Живая» нить в виде журавлиного клина также связана с золотым сечением. Известный специалист по гидродинамик В. В. Шулейкин (1885–1979) исследовал взаимодействие тел, двигающихся в водной среде в непосредственной близости друг от друга. Было установлено, что если два тела перемещаются параллельными курсами в какой-либо среде, то между ними возникает сила, стремящаяся сблизить их. Если они движутся друг за другом, возникает отталкивающая сила. И только в том случае, когда тела движутся клином под углом примерно в 110° они не влияют друг на друга (рисунок 2). Если угловой интервал возможного полёта птиц разделить в пропорциях золотого сечения, то получим 180°/Ф = 180°/1,618 = 111° 15′, что отличается менее чем на 1% от 110°.

Рисунок 2 – Журавлиный клин

Теоретические расчеты В. В. Шулейкина были подтверждены в последние годы снимками облаков, полученных спутниками из Космоса. Мощные воздушные течения в районах Индийского и Тихого океанов на вершинах островных гор дробят облака и выстраивают их клином с углом при вершине примерно 110°, т. е. весьма близком к делению по золотому сечению.

Другие случаи проявления золотого сечения и гармонических пропорций в науке и технике будут рассмотрены в следующих лекциях по математики гармонии.

Литература

1 **Проблеми гармонії, симетрії, золотого перетину в природі, науці та мистецтві :** зб. наук. пр. ВДАУ. Вип. 15. – Вінниця, 2003. – 390 с.

2 **Семенюта Н. Ф.** Применение рекуррентных соотношений к анализу электрических цепей. Электрические машина, цепи и системы : Тр. Белорус. ин-та инженеров ж.-д. трансп. – Вып. 107. – Гомель : БелИИЖТ, 1971. – С. 54–57.

3 **Семенюта Н. Ф.** Свойства рекуррентных последовательностей, используемых для анализа электрических цепей. Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте: Тр. Белорус. ин-та инженеров ж.-д. трансп. Вып. 95. – Гомель : БелИИЖТ, 1971. – С. 28–32.

4 **Семенюта Н. Ф**. О связи рекуррентных числовых последовательных и гиперболических функций. Применение АВМ и ЭЦВМ к решению некоторых задач механики деформируемых тел. – Гомель : БелИИЖТ 1972. – Вып. 114. – С. 39–43.

5 **Семенюта Н. Ф.** О связи параметров цепочечных схем с рекуррентными числовыми последовательностями. Теоретическая электротехника, – Львов: Вища школа, 1974. – Вып 17. – С. 23–25.

6 **Семенюта Н. Ф.** Анализ электрических цепей методом рекуррентных чисел. Электрическая связь на железнодорожном транспорте. Тр. Белорус. ин-та инженеров ж.-д, трансп. – Гомель: БелИИЖТ, 1974. – Вып. 134. – С. 3–19.

7 **Балагин И. Я., В. А. Кудряшов, Н. Ф. Семенюта** Передача дискретной информации и телеграфия. – М.: Трансжелдориздат. 1971. – 352 с.

8 **Семенюта Н. Ф.** Корректирующие коды систем передачи дискретной информации на железнодорожном транспорте. – Гомель: БелИИЖТ. 1975. – 69 с.

9 **Stakhov A.** The Mathematics of Harmony – From Euclid to comtemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific. 2009. – 676 с.

10 **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику**.** Под ред. В. А. Садовничего. – М.: Высш. шк. 2001. – 384 с.

11 **Ясинский С. А.** «Золотая пропорция» в электросвязи. С. А. Ясинский – СПб. : ВУС, 1999. –164 с.

12 **Ясинский С. А**. Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 239 с.

13 **Груданов В. Я.** «Золотая» пропорция в инженерных задачах. – Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова. 2006. – 288 с.

14 **Груданов В. Я., Глущенко Л. Ф., Климович В. В..** Совершенствование конструкций машин и аппаратов пищевых производств. – Минск: Минсельхозпродукт. 1996. – 248 с.

15 **Смирнов В. С.** Феномен золотого сечения или Божественный материализм. Книга 1, книга 2. СПб.: ИНТЕГРАФ, 1998. – 285 с., – 293 с.

16 **Смирнов В. С.–** СПб.: РИО ГОУ ИПТ, 2002. – 113 с.

17 **Заездный А. М**. Гармонический анализ и синтез в электросвязи и радиотехнике. – М.: Госэнергоиздат. 1961. – 536 с.

18 **Хартли Р. Л**. Передача информации: сб. «Теория информации и ее приложения.» – М.: Физматгиз. 1959

19 **Котельников В**. А. О пропускной способности эфира и проволоки в радиосвязи. – М. :МГУ. 1933.

20 **Котельников В**. **А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. – М.: Госэнергоиздат. 1946.

21 **Shennon C. E.** A matematical theory of communication. Bell System Techn. J. 1948. – № 3. – P. 379– 423. – № 4 – P.623–656.

22 **Гринбаум О. Н**. Гармония строфического ритма в эстетико-формальном измерении. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. – 160 с.

23 **Семенюта Н. Ф.** Информатика: вопросы и проблемы. Труды второй междунар. конф. «Новые информационные технологии в образовании», Том 2. – Минск. 1999. – С.187–192.

24 **Юзвишин И. И.** Информациология. – М.: Радио и связь, третье издание. 1996. – 216 с.

25 **Семенюта Н. Ф**. Об обобщенных рядах типа Фибоначчи Сб. науч. трудов. – Гомель: БелГУТ. 2002. – С. 125–131.

26 **Семенюта Н. Ф**. Расширенные числа Фибоначчи и Люка. Гармония в формах и процессах: природа, общество, наука, искусство: Междунар. конф. – Львов: ЛНАИ, 2008. – С. 142–146.

27 **Семенюта Н. Ф.** Золотое сечение в теории электрической связи . 25 лет инфокоммуникационной революции. Инфокоммуникации XXI века: под ред Л. Е. Варакина. – М.: Междунар. акад. связи, 2006. Т. V . – С.231–262.

28 **Семенюта Н. Ф.** Мультирекуррентные последовательности чисел.в теории электрических цепей. Материалы междунар. науч.-практ. конф. Проблемы безопасности на транспорте. Гомель: БелГУТ. 2010. – С. 224–225.

29 **Питерсон У. У.** Коды, исправляющие ошибки. – М. : Мир, 1964. – 645 с.

30 **Мартыненко Г. Я.** Математика гармонии. Возрождение (XIV – XVI вв.) / . http // www.goldensectionclub.net // hublications. 20.07.2010.

31 **Мартыненко Г. Я.** Математика гармонии. Эпоха рационализма – XVII в. .) / http // www.goldensectionclub.net // hublications. 5.08.2010.

32 **Мартыненко Г. Я.** Математика гармонии. Эпоха просвещения – XVIII в.) / http // www.goldensectionclub.net // hublications. 5.08.2010.

33 **Мартыненко Г. Я.** Математика гармонии. Новое время – XIX в.) / http // www.goldensectionclub.net // hublications. 16.08.2010

34 **Мартыненко Г. Я.** Математика гармонии. Новейшее время – XX век, 1900–1985 гг.) / http // www.goldensectionclub.net // hublications. 29.12.2010.

35 **Южанников А. Ю.** Золотое сечение и техноценозы в системах электроснабжения. – Красноярск: Поликор. 2009. – 288 с.

36 **Грехем Р., Д. Кнут, О. Поташник.** Конкретная математика. Основание информатики.– М.: Мир, 1998. – 703 с.

37 Газале М. От фараона до фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. – 324 с.

38 Кузьмин Б. И. «Золотое сечение» поможет внести гармонию в бесконечный хаос. . Смена. – 25 янв. –1995. – С. 6.

39 Кузьмин Б. **И**. Исторические истоки использования математических методов в государственном управлении. Телекоммуникационные технологии. 1996. Вып.1, – С. 96–101. Вып. 2, – С. 157–164.

40 Ясинский С. А. «Золотое» сечение в стандартизации и теории измерения. – СПб.: ВАС. 2008. – 160 с.

41 Каллер М. Я. Теория линейных электрических цепей. – М.: Транспорт, 1978. – 342 с.

42 Huntley H. E. The Divine Proportion – New York, 1970. – 186 p.

43 Scott Olsen. The Golden section. – New York, 2006. – 56 p.