А.П. Стахов

ПОЧЕМУ ЗОЛОТЫЕ *P*-СЕЧЕНИЯ И «МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ПРОПОРЦИИ» ПРЕДСТАВЛЯЮТ НАИБОЛЬШИЙ ИНТЕРЕС ДЛЯ РАЗВИТИЯ «МАТЕМАТИКИ ГАРМОНИИ»?

1. Введение

Существуют различные критерии для оценки результативности того или иного математического результата. **Пуанкаре** называл изящным математическое построение, позволяющее вывести наибольшее число положений из наименьшего числа посылок. Для **Эйнштейна** такими критериями являются «внешнее оправдание» (согласие с опытом) и «внутренне совершенство». С этими критериями согласуется «принцип математической красоты» Дирака. **Морис Клайн** в своей замечательной книге «Математика. Утрата определенности» [1] подчеркивает, что для развития тех или иных направлений математики вынуждены «руководствоваться внешними соображениями». При этом наиболее важным соображением ***«остается традиционный и наиболее объяснимый довод в пользу создания новой и развития уже существующей математики – ее ценность для других наук».***

И далее:

«Приложения служат своего рода практическим критерием, которым мы проверяем математику... Почему бы и теперь не судить о правильности математики в целом по тому, насколько хорошо она продолжает описывать и предсказывать природные феномены?».

Вот с таких позиций необходимо оценивать различные «обобщения» золотого сечения и чисел Фибоначчи, которые появились в последние полвека и появляются в огромном количестве в научной литературе.

Ни у кого не вызывает сомнений, что классические числа Фибоначчи и золотая пропорция играют доминирующую роль, как с точки зрения «согласия с опытом», так и с точки «принципа математической красоты» Дирака. Достаточно убедительное объяснение причин широкого распространения «золотого сечения» в природе и человеческой практике дано в статье [2].

Однако, в последние десятилетия появилось ряд обобщений «золотой пропорции», которые привлекли внимание исследователей в этой области.

Почему в современной «математике гармонии» [3] исследователи отдают предпочтение двум обобщениям «золотой пропорции»: *золотым p-пропорциям* и *«металлическим пропорциям»?* Цель настоящей заметки – дать ответ на эти вопросы с точки зрения двух критериев – «согласия с опытом» и «принципа математической красоты» Дирака.

2. Золотые *p*-пропоции и *p*-числа Фибоначчи

Начнем с *p*-чисел Фибоначчи. Прежде всего, хочу заметить, что *p*-числа Фибоначчи стали побочным и неожиданным результатом решения важной прикладной задачи – разработки теории оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования [4]. Эту задача была сведена к «задаче о выборе наилучшей системы гирь», сформулированной Фибоначчи еще в 13 в. В русской историко-математической литературе эта задача называется «задачей Баше-Менделеева». В этой задаче требовалось найти оптимальную систему гирь для взвешивания на рычажных весах. Когда в 1963 г. мы с Игорем Витенько начинали решать «задачу о гирях», мы имели весьма смутное представление о числах Фибоначчи и золотом сечении. И поэтому для нас совершенно неожиданным результатом стали так называемые фибоначчиевые алгоритмы измерения, в которых «оптимальная система гирь» описывалась *p*-числами Фибоначчи.

Фибоначчиевые алгоритмы измерения стали источником новых математических результатов прикладного характера, а именно:

1. Новых способов позиционного представления натуральных чисел (*p-кодов Фибонасччи*) и новой компьютерной арифметики (*арифметики Фибоначчи*) [5-7]

2. Новых способов позиционного представления действительных чисел (*кодов золотой p-пропорции*) и «золотой компьютерной арифметики [9,10]

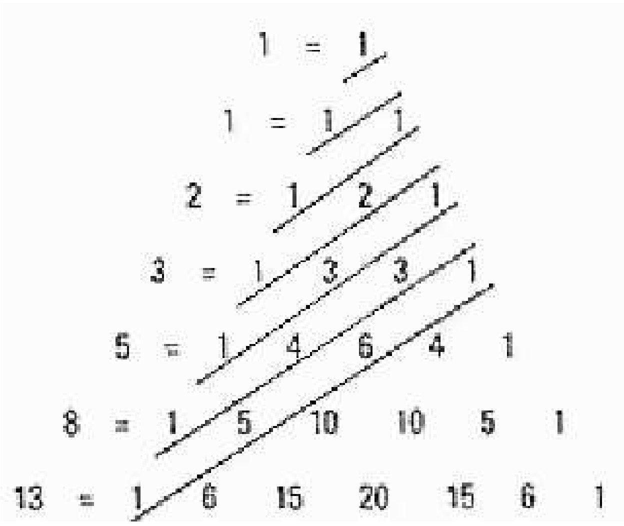
3. Серьезных инженерных разработок, основанных на *p-кодах Фибоначчи* и *кодах золотой p-пропорции* [10]

4. *P*-коды Фибоначчи и коды золотой *p*-пропорции лежат в основе уникального по своим масштабам зарубежного патентования советских изобретений за рубежом (65 патентов)

5. Коды золотой *p*-пропорции положены в основу новой теории чисел (*«золотой» теории чисел*) [11].

6. Золотые *p*-пропорции были положены Эдуардом Сороко в основу «закона структурной гармонии систем» [12], который затрагивает все аспекты человеческой деятельности, в частности, теоретическое естествознание и искусство.

Но кроме сформулированных выше прикладных аспектов в *p-числах Фибоначчи* и *золотых p-пропорциях* содержится глубокое эстетическое начало, которое было впервые показано в работах американского математика **Джорджа Пойа** [13]. Он впервые показал, что числа Фибоначчи выражают некоторые глубокие математические закономерности *треугольника Паскаля* – одного из красивейших математических объектов. Числа Фибоначчи могут быть получены из треугольника Паскаля путем вычисления так называемых *диагональных сумм*.



Изучая диагональные суммы, Пойа наметил путь получения *p-чисел Фибоначчи,* которые отражают некоторую глубокую «математическую тайну» треугольника Паскаля. Но ведь золотые *p*-пропорции есть предел отношения, к которому стремятся соседние *p*-числа Фибоначчи, и поэтому они выражают еще одну «тайну» треугольника Паскаля.

Таким образом, *p*-числа Фибоначчи и золотые *p*-пропорции удовлетворяют всем перечисленным выше критериям оценки математических результатов: и **критерию Пуанкаре** (наибольшее число положений из наименьшего числа посылок), и **критериям Эйнштейна** («согласие с опытом» и «внутреннее совершенство»), и **критерию Дирака** («принцип математической красоты»), и **критерию Мориса Клайна** («Приложения служат своего рода практическим критерием, которым мы проверяем математику»).

Именно эти факты выдвигают *p*-числа Фибоначчи и золотые *p*-пропорции на особое место среди других обобщений чисел Фибоначчи и золотого сечения.

3. Металлические пропорции

В конце 20-го и начале 21-го вв. сразу несколько исследователей из разных стран – аргентинский математик **Вера Шпинадель** [14], французский математик египетского происхождения **Мидхат Газале** [15], американский математик **Джей Каппрафф** [16], российский исследователь **Александр Татаренко** [17], армянский философ и физик **Грант Аракелян** [18], российский исследователь **Виктор Шенягин** [19], украинский физик **Николай Косинов** [20] и др. независимо друг от друга начали изучать новый класс рекуррентных числовых последовательностей, которые являются обобщением классических чисел Фибоначчи:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \qquad F_\lambda(0)=0, F_\lambda(1)=1, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$ - заданное действительное число.

Эти числовые последовательности, названные λ-числами Фибоначчи, привели к открытию нового класса математических констант, названных **Верой Шпинадель** «металлическими пропорциями» [14], а Александром Татаренко T_m-гармониями [17]. Общая формула для «металлических пропорций» имеет вид:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{2}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ формула (2) сводится к выражению для классической золотой пропорции:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

Уже этот факт может привлечь наше внимание к формуле (2), которая является ни чем иным, как обобщением формулы (3) для золотой пропорции.

Аргентинский математик **Вера Шпинадель** [14] назвала математические константы, задаваемые выражением (2), *металлическими пропорциями*. Если в (2) мы примем λ =1, 2, 3, 4, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель, следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (\text{золотая пропорция}, \lambda\ \ 1); \quad \Phi_2 = 1+\sqrt{2}\ (\text{серебряная пропорция}, \lambda\ \ 2);$$

$$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\ (\text{бронзовая пропорция}, \lambda\ \ 3); \quad \Phi_4 = 2+\sqrt{5}\ (\text{медная пропорция}, \lambda = 4).$$

Остальные *металлические пропорции* ($\lambda \ge 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3+2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4+\sqrt{17}\ldots$$

Ясно, что количество «металлических пропорций», задаваемых (2), теоретически бесконечно, так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответсвует своя металлическая пропорция типа (2). И самое важное, что «металлические пропорции» (2) являются обобщением золотой пропорции (3) ($\lambda = 1$).

«Металлические пропорции» обладают рядом уникальных математических свойств:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\ldots}}}} \tag{4}$$

$$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}}, \tag{5}$$

которые вызывают чувство глубокого эстетического наслаждения, то есть, «металлические пропорции» с лихвой удовлетворяют «принципу математической красоты» Дирака.

Это дает нам основание предположить, что «металлические пропорции» (2) представляют собой новый класс математических констант, которые представляют интерес для математики и теоретического естствознания.

Любопытно подчеркнуть, что простейшее квадратное уравнение, корнем которого являются «металлические пропорции» (2), известно более двух тысячелетий (Вавилон, Древняя Индия, Древний Китай). И тем не менее только в конце 20-го века – начале 21-го века ученые разных стран (**Шпинадель, Газале, Капраф, Татаренко, Аракелян, Шенягин, Косинов**) обратили внимание на уникальность этого квадратного уравнения, корни которого образуют новый класс математических констант – «металлические пропорции» (2).

4. Новая задача для теоретического естествознания

Прикладные аспекты «металлических пропорций» связаны с разработкой так называемых гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка [21], которые являются обобщением симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка (ГФФЛ), введенных в работе Алексея Стахова и Бориса Розина [26]. К подобным же функциям, названным «золотыми» гиперболическими функциями, пришел Олег Боднар, создатель новой геометрической теории филлотаксиса [27]. «Золотые» гиперболические функции Боднара [27] отличаются от ГФФЛ [26] только постоянными коэффициентами.

Общенаучная значимость ГФФЛ [26] для современной науки в целом состоит в следующем. В своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» (1822) великий французский математик и физик **Жан Батист Жозеф Фурье** (1768-1830) следующим образом оценивает роль математического метода в решении физических проблем: «Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке. Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы».

Олег Боднар после глубокого изучения явления филлотаксиса показал [27], что ГФФЛ являются **естественными функциями Природы,** отражающими важнейший закон природы – закон филлотаксиса. **Из этих рассуждений мы можем сделать вывод, что, следуя Фурье, новый класс гиперболических функций, введенных в работе [26], вместе с «геометрией Боднара» [27], могут быть отнесены к разряду фундаментальных открытий современного теоретического естествознания. И в таком качестве им суждено навсегда сохраниться в науке.**

Олег Боднар открыл нам новый гиперболический мир природы – мир филлотаксиса, в котором действуют законы ГФФЛ, основанные на «золотой пропорции». **Но тогда мы вправе поставить вопрос о поиске других гиперболических миров природы, в которых действуют законы не только «золотых», но и «серебряных», «бронзовых» или «медных» гиперболических функций.**

Создается впечатление, что эта идея начинает реализовываться в современной науке. При этом «серебряные» гиперболические функции

$$sF_2(x)=\frac{\Phi_2^x-\Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x-\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \qquad (6)$$

$$cF_2(x)=\frac{\Phi_2^x+\Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x+\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \qquad (7)$$

основанные на «серебряной пропорции» $\Phi_2=1+\sqrt{2}$, и могут стать «возмутителем спокойствия» в теоретическом естествознании. В этой связи уместно привлечь внимание исследователей к глубокой статье Олега Боднара «Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций» [28]. В одном из «опусов», опубликованных на сайте АТ, эта статья была подвергнута резкой критике:

«Олег Боднар предложил серебряные функции ... Речь идет о разновидности гиперболических синус-косинус функций, в основание которых положено число $1+\sqrt{2}$.

Формальная замена натурального логарифма на корень из двух ничего нового не вносит, а тем более, никак не обобщает. Но зато расшатывает сами основания гиперболического мира. Нет и практического выхода, кроме арифметической манипуляции...

Ни физики, ни математики такую процедуру за ненадобностью и бесполезностью не используют. Возможно, архитектор увидел в этом нечто. Ведь не зря в древности диагональ квадрата приводила мастеровых в восторг. Но об этом он не говорит».

Любопытно, что задолго до статьи Боднара [28] российский исследователь Александр Татаренко совершенно по-другому оценил «серебряную пропорцию» и обрисовал перспективы ее использования в современной науке [17]:

«Важнейшим и неожиданным результатом исследований T_m было установление двух фактов:

1) вторая Золотая $T_{m=\pm2}=\sqrt{2} \pm 1$ гармония (а не первая — согласно нумерации в ряде $T_{\pm m}$ чисел — классическая Φ) является доминантой, царствующей в беспредельном мире T_m.

2) «функция» второй Золотой $T_m=\pm2$ гармонии является $\overline{T}_{m=2}= \sqrt{8}/2 = \sqrt{2}$ - реликтовое число – корень из двух, встречающийся в архи-громадном множестве формул и закономерностей различных областей естествознания, что равнозначно причастности T_2 непосредственно или косвенно ко множеству (а возможно и ко всем) законов Природы и ее констант. **Таким образом T_2 буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам.**

Установление факта доминантности T_2-Гармонии, а с ней и особого статуса ее «функции» $\overline{T}_2= \sqrt{2}$ является заключительным аккордом — важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника.

Требуется кардинально новое мышление о Гармонии Мира».

Таким образом, в этих словах Татаренко еще раз обращает особое внимание на «серебряную пропорцию» $T_2=1+\sqrt{2}$, которая *«буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам»*. Более того, он считает введение «серебряной пропорции» $T_2=1+\sqrt{2}$ в современную науку «*важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника»*.

Это высказывание полностью опровергает заявление автора статьи по поводу «серебряных» функций Боднара. По-видимому, стоит прислушаться к мнению Александра Татаренко и способствовать тому, что его предсказание свершилось. И в этой связи работы [21] и [28] заслуживают пристального внимания.

5. Числа Пелля

Оказывается рекуррентное соотношение (1) имеет глубокие исторические корни, если вспомнить о *числах Пелля*. Числа Пелля P_n определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$P_n=2P_{n-1}+P_{n-2};P_0=0,P_1=1 \quad (8)$$

Первые несколько чисел Пелля выглядят так: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378 ... . Другими словами, последовательность чисел Пелля начинается с 0 и 1, а каждое последующее число Пелля равно сумме удвоенного предыдущего $2P_{n-1}$ и стоящего перед ним числа Пелля P_{n-2}.

Ясно, что если числа Пелля «расширить» в сторону отрицательных значений индекса n, получим последовательность чисел, совпадающих с λ-числами Фибоначчи, соответствующими случаю $\lambda = 2$. Таблица расширенных чисел Пелля приведена ниже.

Таблица 1. Расширенные числа Пелля

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2738
P_{-n}	0	1	–2	5	–12	29	–70	169	–408	985	–2738

Используя так называемую *формулу Газале* [21], для случая $\lambda = 2$, числа Пелля можно представить в виде следующей аналитической формулы:

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right], \tag{9}$$

где $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ - *серебряная пропорция.*

Согласно (5), *серебряная пропорция* $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$, соответствующая случаю $\lambda = 2$, может быть представлена в виде следующей цепной дроби:

$$\Phi_2 = 1+\sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}} \tag{10}$$

Доказано, что числа Пелля имеют свойства, подобные числам Фибоначчи. В частности, для них справедливо следующее тождество, подобное *формуле Кассини* для чисел Фибоначчи:

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n. \tag{11}$$

Числа Пелля возникли исторически при решении задачи рациональной аппроксимации корня квадратного из 2, то есть, $\sqrt{2}$. Если два больших целых числа x и y образуют решение *уравнения Пелля*

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1, \tag{12}$$

тогда их отношение $\frac{x}{y}$ обеспечивает аппроксимацию числа $\sqrt{2}$. Доказано, что следующая последовательность правильных дробей

$$\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{41}{29},\frac{99}{70},\ldots \tag{13}$$

является аппроксимацией числа $\sqrt{2}$.

Заметим, что в последовательности дробей (13) знаменатель каждой дроби является числом Пелля, а числитель представляет собой сумму числа Пелля в знаменателе этой дроби с числом Пелля в знаменателе предшествующей дроби, то есть, каждая дробь может быть представлена в виде: $\frac{P_{n-1}+P_n}{P_n}$.

Считается, что название *уравнение Пелля* восходит к Эйлеру, который ошибочно приписал его математику Джону Пелли. Эйлер был информирован о работах математика Брункера (Brouncker), который получил общее решение уравнения (12), но по ошибке перепутал Брункера с Пелли. К слову сказать, уравнение (12) имеет глубокие исторические корни. Оно впервые было изучено в Древней Индии за тысячи лет до Пелли. Приближение

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}, \tag{14}$$

где 577=408+169, была известна индийским математикам в 3-м или 4-м веке до н.э. Греческие математики 5-го столетия до н.э. также знали последовательность приближений (13).

Выражение (5), соответствующее случаю $\lambda = 2$, также может быть использовано для аппроксимации числа $\sqrt{2}$. Действительно, из (5) вытекает:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}. \tag{15}$$

Тогда, используя (15), можно вычислить все члены последовательности (13). В частности, приближение (14), которое было известно индийским математикам до новой эры, может быть представлено следующим образом:

$$\frac{577}{408} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}}$$

5. Решение 4-й проблемы Гильберта

В заключение я хотел бы привлечь внимание еще к одному важному результату, основанному на «металлических пропорциях» и вытекающих из них гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка [21]. Используя эти функции, **Алексей Стахов и Самуил Арансон** пришли к оригинальному решению 4-й проблемы Гильберта [22-25]. И публикация этой статьи в международном математическом журнале [23-25] является свидетельством признания этого решения международным математическим сообществом.

6. Заключение

Таким образом, приведенная выше аргументация отвечает на вопрос, поставленный в заглавии настоящей статьи.

Золотые *p*-пропорции и «металлические пропорции» удовлетворяют всем перечисленным критериям к математическим результатам. И поэтому они взяты на вооружение в «математике гармонии» [3]. Никто не отрицает использования других пропорций и обобщений «золотой пропорции», но это должно сопровождаться не голословными утверждениями со ссылками на малоизвестных авторов , а конкретными доказательствами их преимуществ в приложениях.

Литература

1. М. Клайн. Математика. Утрата определенности. Пер. с англ., под ред. д-ра физ.-мат. наук И.М. Яглома. Москва: Мир, 1984.
2. В.Л. Владимиров, А.П. Стахов, Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm

3. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.

4. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. – В кн. Приборы и системы автоматики, вып. 11. Харьков, Изд-во Харьковского университета, 1970.

5. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.

6. Стахов А.П. Использование естественной избыточности «фибоначчиевых» систем счисления для контроля вычислительных систем. / А.П. Стахов // Автоматика и вычислительная техника. – 1975. - № 6. – С.80-87.

7. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г. – 288 с.

8. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике / А.П. Стахов // Автоматика и вычислительная техника. 1980. - №1. С. 27-33.

9. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва: Издательство «Радио и связь», 1984. – с. 152.

10. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.

11. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.

12. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984

13. Пойа Джордж. Математическое открытие. М.: Наука, 1970. – 452 с.

14. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).

15. Газале Мидхат. Гномон. От фараонов до фракталов (пер. с англ.). Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002

16. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.

17. Татаренко А.А. Золотые Tm – гармонии и Dm – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm

18. Аракелян Грант. Числа и величины в совеменной физике. Ереван: Изд. АН, 1989

19. Шенягин В.П. «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых *s*-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm

20. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm

21. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

22. А.П. Стахов, С.Х. Арансон, «Золотая» фибоначчиевая гониометрия, четвёртая проблема Гильберта, преобразования фибоначчи-лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15225, 12.04.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322036.htm

23. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and “Golden” Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2 (January), 74-84

24. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar’s Geometry). Applied Mathematics, 2011, 2 (February), 181-188

25. A. Stakhov, S. Aranson. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert’s Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March).

26. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.

27. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994

28. Олег Боднар, Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17259, 26.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322135.htm