А.П. Стахов

Как создавалась «математике гармонии»?

Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии.

Альберт Эйнштейн

1. Статья Виктора Шенягина

Недавно на сайте «Академия Тринитаризма» опубликована статья известного российского фибоначчиста Виктора Шенягина [1] с таким призывом:

Обращение к мировой научной общественности: О целесообразности выдвижения кандидатуры профессора Стахова А.П. на присуждение Абелевской премии в области математики в 2014 году

Мне, конечно, приятна высокая оценка моих изысканий со стороны моих коллег. Подобные оценки были высказаны и другими известными учеными: академиком Юрием Митропольским [2,3], американским философом Скоттом Олсеном [4], белорусским философом Эдуардом Сороко [5], российским философом Сергеем Абачиевым [6] и многими другими исследователями, за что я им благодарен. Для меня их отзывы – самая высокая награда.

К сожалению, мое научное направление, которое я назвал «математикой гармонии», пока не входит в круг понятий современной «высшей математики». Тем не менее, оно стало достаточно широко известным в современной науке после публикации книги “**The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”** (World Scientific, 2009, p.748) [7].

2. «Математика Гармонии»: мнение академика Юрия Митропольского

Что же такое «математика гармонии»? Какова ее роль в современной науке и математике? Выдающийся украинский математик, глава украинской математической школы, Почетный Директор Института Математики Академии наук Украины и главный редактор “Украинского математического журнала» академик Юрий Митропольский в своем отзыве на мое научное направление [2] написал следующее:

«Возникает вопрос, какое место в общей теории математики занимает созданная Стаховым Математика Гармонии? Мне представляется, что в последние столетия, как выразился когда-то Н.И. Лобачевский, «математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою». В результате между «элементарной математикой», лежащей в основе современного математического образования, и

«высшей математикой» образовался разрыв. И этот разрыв, как мне кажется, и заполняет Математика Гармонии, разработанная А.П. Стаховым. То есть «Математика Гармонии» — это большой теоретический вклад в развитие прежде всего «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «Математики Гармонии» для математического образования».

Академик Митропольский Ю.А. (1917 - 2008)

Таким образом, «математика гармонии», согласно мнению Митропольского, - это некоторая новая математическая теория, которая заполняет пробел между «элементарной математикой» и «высшей математикой». То есть, эта теория направлена на решение новых задач в области «элементарной математики». Эта теория восходят в своих истоках к античным математическим направлениям таким, как «теория измерения», «системы счисления», «элементарные функции» и др., которыми математики пренебрегли, «*не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою*» (Н.И. Лобачевский).

Главная задача, которую я поставил в «математике гармонии» - это получение новых результатов в области «элементарной математики», основанных на «золотом сечении» и «числах Фибоначчи». Оказывается, что в этом направлении можно получить много новых математических результатов, имеющих важное прикладное значение. Я доказал высокую эффективность этих результатов в таких областях как теория рекуррентных соотношений, теория элементарных функций, гиперболическая геометрия, наконец, компьютерная и измерительная техника, теория кодирования и др.

3. Немного о себе

По образованию я - инженер. Я закончил в 1961 г. Харьковский авиационный институт, в котором студентам давалась повышенная физико-математическая подготовка. Там я с огромным удовольствием слушал лекции и посещал научный семинар выдающегося математика Анатолия Дмитриевича Мышкиса, который в перерыве между лекциями играл с нами в волейбол, а вечерами посещал студенческие капустники (я был конферансье на этих капустниках, Анатолий Дмитриевич всегда сидел в первом ряду и бурно реагировал на мои шутки).

В большую науку я вошел достаточно стремительно. В 1966 г. я защитил кандидатскую диссертацию, а в 1972 – докторскую в области вычислительной техники.

В англоязычной Wikipedia представлена моя биографическая статья http://en.wikipedia.org/wiki/Alexey_Stakhov

4. От «алгоритмической теории измерения» и «кодов золотой пропорции» к «математике гармонии»

В свою книгу [7] я включил следующие научные результаты, которые были получены мною на протяжении более чем 40 лет:

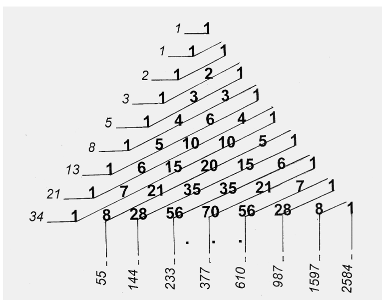
4.1. Алгоритмическая теория измерения (эта теория изложена в моей книге «Введение в алгоритмическую теорию измерения», Советское радио, 1977) [8].

Книги по алгоритмической теории измерения (1977, 1979)

Хотя эта теория по своей задумке носила сугубо прикладной характер («Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования»; так, кстати, называлась моя докторская диссертация, 1972), но при создании этой теории я вышел за прикладные рамки и коснулся оснований математики. Прежде всего, я исключил из рассмотрения абстракцию **актуальной бесконечности** как внутренне противоречивое понятие («завершенная бесконечность»), против чего возражал еще Аристотель. Как следствие, я исключил из алгоритмической теории измерения **аксиому Кантора**, которая лежит в основе классической (теоретико-множественной) теории измерения, основанной на аксиомах непрерывности. Для математиков может представлять интерес обнаруженное мною **противоречие между аксиомой Кантора и аксиомой Архимеда**, которое я изложил в своей книге [8]. Из этого противоречия автоматически вытекает наличие противоречия в основаниях математики. Первым ученым, с которым я поделился этим своим наблюдением, был выдающийся российский философ доктор философских наук Георгий Васильевич Чефранов (математик по образованию). Об этом я написал в статье «Георгий Васильевич Чефранов в моей жизни» [9]. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах известного российского математика и философа Александра Зенкина, который в своих работах подверг резкой критике канторовскую теорию бесконечных множеств [11].

Такой конструктивный подход к алгоритмической теории измерения, основанный на абстракции **потенциальной бесконечности**, позволил мне решить задачу, которая никогда не ставилась и не решалась в математике. Речь идет о **синтезе оптимальных алгоритмов измерения**, которые являются обобщением таких известных алгоритмов измерения как «алгоритм счета» (лежит в основе Евклидового определения натурального числа) и «двоичный алгоритм» (лежит в основе двоичной системы счисления – основы современных компьютеров). Каждому алгоритму измерения соответствует некоторый способ позиционного представления чисел. Из алгоритмической теории измерения естественным образом вытекают все известные позиционные системы счисления, но появляются новые, неизвестные ранее системы счисления, в частности, **«фибоначчиева» и «биномиальные системы** [8]. Таким образом, алгоритмическая теория измерения – это оригинальная теория позиционных систем счисления. К сожалению, математики никогда всерьез не занималась системами счисления. И это их большая ошибка. Именно новые позиционные системы счисления (в частности, введенные мною *p*-коды Фибоначчи) могут стать альтернативой двоичной системе счисления для многих критически важных приложений (например, при создании бортовых систем управления ракетами).

4.2. Треугольник Паскаля и обобщенные числа Фибоначчи. Треугольник Паскаля является настолько широко известным и исследованным математическим объектом, что многие математики будут удивлены: что нового можно обнаружить в этом треугольнике? Многим широко известна книга Пойа «Математическое открытие» (русский перевод, 1970) [12]. В этой книге в виде упражнения для студентов Пойа показал неожиданную связь треугольника Паскаля с числами Фибоначчи:



Самое любопытное, что ни Паскаль, который описал впервые треугольник Паскаля, ни математики-фибоначчисты такой связи не увидели.

Изучение так называемых «диагональных сумм» треугольника Паскаля, проведенное многими математиками (в том числе и мною), привело к обнаружению бесконечного количества рекуррентных числовых последовательностей, названных мною ***p*-числами Фибоначчи** [8]. Эти рекуррентные последовательности при заданном p=0,1,2,3,.. задаются следующим общим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad \text{для} \quad n > p+1$$

при начальных условиях

$$F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p+1) = 1.$$

Кстати, к этим числовым последовательностям я пришел еще в 60-е годы 20 в. независимо от работ Пойа («диагональные суммы» треугольника Паскаля) при решении задачи синтеза «фибоначчиевых» алгоритмов измерения [8].

4.3. Обобщение задачи о «золотом сечении». Изучая p-числа Фибоначчи и рассматривая предел отношения соседних p-чисел Фибоначчи $\underbrace{\lim}_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = x$, я пришел к следующему алгебраическому уравнению [8]:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0 \ (p=0,1,2,3,..).$$

Положительные корни этого уравнения Φ_p образуют множество новых математических констант, которые характеризуют некоторые алгебраические свойства треугольника Паскаля. Их частным случаем (p=1) является «золотая пропорция» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. На этом основании я назвал константы Φ_p **«золотыми *p*-пропорциями».** Этот результат вызвал восхищение академика Митропольского, который в своем отзыве [3] написал следующее:

«На протяжении многих тысячелетий «Золотое Сечение» было предметом пристального внимания Пифагора, Платона, Евклида, а затем Леонардо да Винчи, Луки Пачоли, Иоганна Кеплера, а в современной культуре гениального российского философа Алексея Лосева и выдающегося кинодраматурга Сергея Эйзенштейна.

И вот в 1977 г. появляется обобщение этой знаменитой математической задачи. И сделал это украинский ученый Алексей Стахов!

Давайте вдумаемся в этот результат. В течение нескольких тысячелетий, начиная с Пифагора и Платона, человечество пользовалось широко известным классическим Золотым Сечением, которое считалось единственным, уникальным и неповторимым. И вот в конце 20-го века украинский ученый Стахов обобщает эту задачу и доказывает существование бесконечного числа Золотых Сечений! И все они имеют такое же право на существование, как и классическое Золотое Сечение. Более того, Стахов показывает, что золотые р-пропорции Φ_p *представляют собой новый класс иррациональных чисел, которые выражают некоторые неизвестные нам до этого математические свойства треугольника Паскаля. Ясно, что такой математический результат имеет фундаментальное значение для развития современной науки и математики».*

4.4. Избыточные двоичные позиционные системы счисления (*p*-коды Фибоначчи). Фибоначчиевые алгоритмы измерения, основанные на p-числах Фибоначчи [8], привели меня еще в 1974 г. к открытию новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые я назвал ***p*-кодами Фибоначчи**:

$$N = a_n F_p(n) + a_{n-1} F_p(n-1) + \ldots + a_i F_p(i) + \ldots + a_n F_p(1),$$

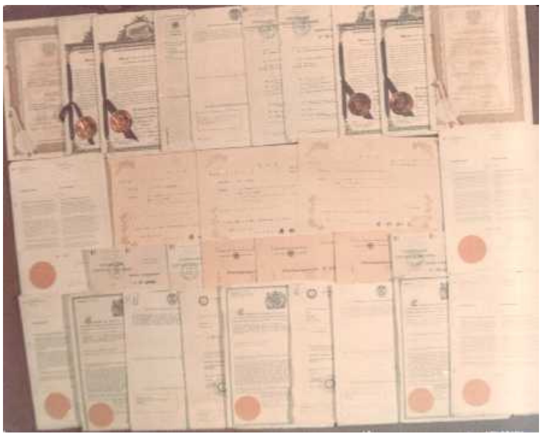
где p=0,1,2,3,... - заданное целое число; $a_i \in \{0,1\}$ – двоичная цифра i-го разряда; $F_p(i)(i = 1,2,3,\ldots,n)$ – вес i-го разряда, равный i-му p-числу Фибоначчи.

Это выражение является обобщением классического двоичного кода (p=0)

$$N = a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \ldots + a_i 2^{i-1} + \ldots + a_1 2^0,$$

который лежит в основе современных компьютеров. При p>0 все p-коды Фибоначчи являются избыточными двоичными системами, которые могут быть использованы для создания нового класса компьютеров – **компьютеров Фибоначчи**, обладающих супервысокой информационной надежностью.

4.5. Зарубежное патентование изобретений по «компьютерам Фибоначчи». В 1976 г. я был командирован в Австрию, где в течение 2 месяцев работал Приглашенным Профессором Венского технического университета. На заключительном этапе своего пребывания в Австрии я выступил с докладом **«Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики»** на объединенном заседании Компьютерного и Кибернетического обществ Австрии. Успех доклада был ошеломляющий. Было признано, что мой доклад содержит **новые информационные основы компьютеров**. Такой неожиданный интерес австрийских ученых к моему докладу заинтересовал Посольство СССР в Австрии и Посол Иван Ефремов направил письмо по этому поводу в Госкомитет СССР по науке и технике. На основании этого письма Госкомизобретений СССР принял решение о срочном патентовании моих изобретений в области «компьютеров Фибоначчи» за рубежом. 65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран являются официальными юридическими документами, которые подтверждают мой мировой приоритет в этой области.



Посол СССР в Австрии Иван Ефремов (1911 -2000)	**Зарубежные патенты по «компьютерам Фибоначчи»**

4.6. Коды золотой пропорции. В 1957 г. юный (12-летний) американский вундеркинд Джордж Бергман в одном из американских журналов описал уникальную систему счисления, которую он назвал **системой счисления с иррациональным основанием** [13]:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \ ,$$

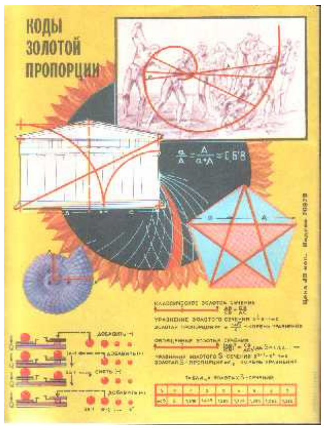
где A – некоторое действительное число, $a_i \in \{0,1\}$ – двоичная цифра i-го разряда $(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...)$, Φ^i – вес i-го разряда, $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ - основание «системы Бергмана». К сожалениию, математики 20 в. не обратили внимания на это математическое открытие, несмотря на то, что **«система Бергмана» является наиболее крупным математическим открытием в области систем счисления после открытия вавилонянами «позиционного принципа представления чисел», а также десятичной и двоичной систем счисления**. В 1980 г. я обобщил систему Бергмана и ввел в рассмотрение более широкий класс позиционных представлений с иррациональными основаниями, названными мною **«кодами золотой *p*-пропорции»** [14]:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i \ ,$$

где $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...,$ $p = 0, 1, 2, 3, ...,$ $a_i \in \{0,1\}$ - двоичная цифра $i-$го разряда, Φ_p - основание системы счисления (золотая *p*-пропорция, которая вытекает из треугольника Паскаля), Φ_p^i - вес $i-$го разряда, связанный с весами предыдущих разрядов следующим тождеством:

$$\Phi_p^i = \Phi_p^{i-1} + \Phi_p^{i-p-1} \ .$$

Теория кодов золотой *p*-пропорции изложена в моей книге «Коды золотой пропорции» (Радио и связь, 1984) [15]. Эта книга вызвала интерес научно-популярного журнала «Техника – молодежи». И в одном из номеров этого журнала за 1985 г. была опубликована моя статья «Коды золотой пропорции, или системы счисления для ЭВМ будущего?» [16]. Эта статья была центральной публикацией этого номера журнала. Это подчеркивалось коллажем на тему «Коды золотой пропорции», размещенным на обратной обложке этого журнала.



Публикация этой статьи в научно-популярном журнале тиражом 1 700 000 экз. значительно сопобствовала популяризации моего научного направления, которое стало широко известным не только в СССР, но и во всех социалистических странах.

Заметим, что приведенное выше выражение для кодов золотой *p*-пропории включает в себя бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому $p\left(p=0,1,2,3,...\right)$ соответствует своя система счисления. В частности, при $p=0$ основание $\Phi_p=\Phi_0=2$ и код золотой *p*-пропорции сводится к классической двоичной системе, а при *p*=1 – к «системе Бергмана».

Хочу подчеркнуть, что *p*-коды Фибоначчи, основанные на *p*-числах Фибоначчи [8], и коды золотой *p*-пропорции, основанные на золотых *p*-пропорциях [14,15], фундаментально связаны с треугольником Паскаля, который порождает как *p*-числа Фибоначчи, так и золотые *p*-пропорции. Поэтому *p*-коды Фибоначчи и коды золотой *p*-пропорции не только являются новым направлением в системах счисления, но через треугольник Паскаля они тесно связаны с комбинаторикой. И я рад тому, что мне удалось установить такую связь.

4.7. «Золотая» теория чисел. Я рассказал о кодах золотой *p*-пропорции академику Митропольскому, главному редактору «Украинского математического журнала», который является одним из немногих украинских академических журналов, переводимых на английский язык. Митропольский порекомендовал мне срочно написать статью о кодах золотой *p*-пропорции для этого журнала. В 2004 г. согласно рекомендации Митропольского моя статья **«Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа»** была опубликована в этом престижном журнале [17].

Особенность этой статьи состояла в следующем утверждении: коды золотой *p*-пропорции, связанные с треугольником Паскаля, могут стать началом новой теории чисел - **«золотой» теории чисел**. Действительно, с помощью кодов золотой *p*-пропорции можно представить все действительные числа, включая натуральные, рациональные и иррациональные.

Приведу только один необычный результат «золотой» теории чисел на примере «системы Бергмана». Для этого представим натуральное число N в «системе Бергмана»:

$$N = \sum_i a_i \Phi^i .$$

Доказано [17], что суммы такого вида (для любого N) всегда конечны, то есть, любое натуральное число может быть представлено в виде конечной суммы степеней «золотой пропорции». Поскольку все степени «золотой пропорции» Φ^i являются иррациональными числами (за исключением $\Phi^0 = 1$), то указанное утверждение является далеко не тривиальным.

Теперь рассмотрим так называемые «расширенные» числа Фибоначчи $F_i \left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\right)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21	34	–55

Подставим вместо каждого Φ^i в выражении для «системы Бергмана» «расширенное» число Фибоначчи $F_i \left(i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\right)$. Доказано [17], что возникающая при этом сумма тождественно равна 0 для любого натурального числа N, то есть,

$$\sum_i a_i F_i = 0 .$$

Это свойство я назвал **Z-свойством натуральных чисел** [17]. Поскольку это свойство справедливо только для натуральных чисел, это означает, что мне удалось обнаружить новое свойство натуральных чисел, спустя 2.5 тысячелетия после начала их теоретического изучения (академик Митропольский был в восторге!).

4.8. Интерес академиков Петрова Ю.Н., Марчука Г.И., Патона Б.Е., Митропольского Ю.А., а также Американской Фибоначчи-ассоциации к моему научному направлению. Моими работами заинтересовались многие выдающиеся представители советской науки. Первым проявил интерес к моим работам академик Петров Б.Н. По его инициативе 20 марта 1979 г. я сделал доклад «О возможных путях развития цифровой техники на основе систем счисления с иррациональными основаниями» на совместном заседании Научного Совета по проблемам управления движением и навигации (Председатель – академик Б.Н. Петров) и Секции прикладных проблем при Президиуме Академии наук СССР (руководитель – проф. Ю.В. Чуев) (Москва, АН СССР).

Академик Петров Б.Н. (1913 - 1980)

Следующий доклад на тему «Применение чисел Фибоначчи в компьютерной технике» я сделал 14 ноября 1985 г. на научном семинаре Председателя Государственного Комитета СССР по науке и технике академика Г.И. Марчука (Москва, Госкомитет СССР по науке и технике).

Академик Марчук Г.И. (1925 - 2013)

В июне 1989 г. моя концепция «компьютеров Фибоначчи», защищенная 65 патентами, по инициативе Бориса Патона была заслушана и одобрена на заседании Президиума Академии наук Украины.

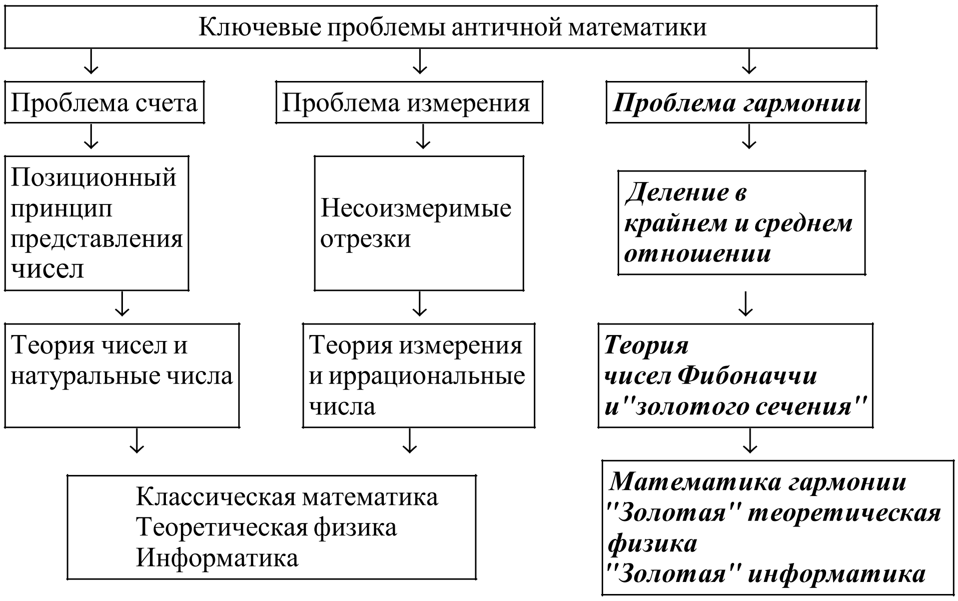
Академик Патон Б.Е.

В 1996 г. я принял участие в работе 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения» (Австрия, Грац, июль 1996). Здесь я выступил с докладом «The Golden Section and Modern Harmony Mathematics». Это был именно тот доклад, в котором я впервые ввел понятие «Harmony Mathematics”. Доклад вызвал большой интерес американских математиков-фибоначчистов и был отобран для публикации в сборнике “Applications of Fibonacci Numbers”, Volume 7, 1998 (Kluwer Academic Publishers) [18].

В 1998 г. по инициативе академика Митропольского этот же доклад был с большим интересом заслушан на заседании «Украинского математического общества». Эти два события меня вдохновили и, начиная с того периода, меня увлекла идея создания «Математики Гармонии».

4.9. Гипотеза Прокла, «теория чисел Фибоначчи» и решение 10-й проблемы Гильберта. Гипотеза Прокла содержит неожиданный взгляд на «Начала» Евклида, высказанный в 5 в. нашей эры известным греческим философом и математиком **Проклом Диадохом**. Прокл попытплся ответить на вопрос: с какой целью Евклид создавал свои «Начала»? Согласно Проклу, цель Евклида состояла не в изложении геометрии как таковой, а в том, чтобы построить завершенную теорию правильных многогранников («Платоновых тел»). Эта теория изложена Евклидом в XIII-й, то есть, заключительной книге «Начал», что само по себе является косвенным подтверждением «гипотезы Прокла». Для решения этой задачи Евклид включил в «Начала» необходимые математические сведения. Самое любопытное, что уже в Книге II он вводит “золотое сечение», которое он использует затем при создании геометрической теории додекаэдра. В Космологии Платона правильные многогранники ассоциировались с «гармонией Мироздания», то есть, в «Началах» Евклида были воплощены «гармонические идеи» Пифагора и Платона. Такой подход приводит к выводу, неожиданному для многих математиков.

Как известно, академик Колмогоров в книге [19] выделил две главные, то есть, «ключевые» проблемы, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения - **проблему счета** и **проблему измерения**. Однако, из «гипотезы Прокла» вытекает еще одна «ключевая» проблема **– проблема гармонии**, которая была связана с «Платоновыми телами» и «золотым сечением» - одним из важнейших математических открытий античной математики (Предложение II.11 «Начал» Евклида). Именно эта проблема была положена Евклидом в основу «Начал», главной целью которых было создание геометрической теории «Платоновых тел», выражавших в «космологии Платона» гармонию Мироздания. Эта идея приводит к новому взгляду на историю развития математики, начиная с Евклида:



Подход, демонстрируемый с помощью этого рисунка, впервые был изложен в работе [20]. Он основан на следующих рассуждениях. Уже на этапе зарождения математики было сделано ряд важных математических открытий, которые фундаментально повлияли на развитие математики и всей науки в целом.

Важнейшими из них являются:

1. **Позиционный принцип представления чисел**, сделанный вавилонскими математиками во 2-м тысячелетии до н.э. и воплощенный ими в Вавилонской 60-ричной системе счисления. Это важное математическое открытие лежит в основе всех последующих позиционных систем счисления, в частности, десятичной системы и двоичной системы - основы современных компьютеров. Это открытие, в конечном итоге, привело к формированию понятия **натурального числа** – важнейшего понятия, лежащего в основе математики.
2. **Доказательство существования несоизмеримых отрезков**. Это открытие, сделанное в научной школе Пифагора, привело к переосмысливанию ранней пифагорейской математики, в основе которой лежал «принцип соизмеримости величин», и к введению **иррациональных чисел** – второго (после натуральных чисел) фундаментального понятия математики. В конечном итоге, эти два понятия (натуральные и иррациональные числа) и были положены в основу «Классической Математики».
3. **Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»)**. Описание этого математического открытия дано в «Началах» Евклида (Предложение II.11). Это предложение было введена Евклидом с целью создания полной геометрической теории «Платоновых тел» (в частности, додекаэдра), изложению которых посвящена заключительная (XIII-я) книга «Начал» Евклида.

Сформулированный выше подход приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что параллельно с **«Классической Математикой»** в науке, начиная с древних греков, начало развиваться еще одно математическое направление – **«Математика Гармонии»,** которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Предложение II.11) и на теории правильных многогранников, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида. В развитии «математики гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители, ученые и математики: Пифагор, Платон, Евклид (античный период), Фибоначчи (Средневековье), Пачоли, Леонардо да Винчи, Кеплер, Кассини (Возрождение), Бине, Люка, Клейн (19-й век), канадский геометр Коксетер [21], советский математик Воробьев [22], американский математик Хоггатт [23]. В 1963 г. в США была организована математическая Фибоначчи-Ассоциация и учрежден математический журнал «The Fibonacci Quarterly». Но первым из известных математиков понял значение «теории чисел Фибоначчи» для развития современной науки советский математик Николай Николаевич Воробьев, брошура которого «Числа Фибоначчи» [22] стала своеобразным «математическим бестселлером» 20-го века, выдержала много изданий и переведена на многие языки. Но в 1970 г. случилось событие, которое до сих пор до конца не осознано многими математиками. Молодой советский математик Юрий Матиясевич с помощью чисел Фибоначчи решил 10-ю проблему Гильберта. Приведем высказывание Юрия Матиясевича:

«Мое оригинальное доказательство ... основывалось на теореме, доказанной в 1942 г. советским математиком Николаем Воробьевым, но опубликованной только в третьем расширенном издании его популярной книги.... После того, как я прочитал статью Джулии Робинзон, я сразу же увидел, что теорема Воробьева может быть очень полезной. Джулия Робинзон не видела 3-го издания книги Воробьева до тех пор, пока она не получила копию от меня в 1970 г. Кто мог сказать, что бы случилось, если бы Воробьев включил свою теорему в первое издание своей книги? Возможно, что 10-я проблема Гильберта была решена на десять лет раньше!»

В развитие вопроса Юрия Матиясевича, мы вправе поставить следующий вопрос: а что бы случилось, если бы итальянский математик Фибоначчи не открыл числа Фибоначчи в 13 в.? Возможно, 10-я проблема Гильберта не была бы решена до сих пор. Конечно, теорема Воробьева, использованная Юрием Матиясевичем, является важным математическим результатом, но все же главным «виновником» решения 10-й проблемы Гильберта следует признать итальянского математика Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи). Еще в 1202 г. он опубликовал книгу “Liber abaci”, в которой ввел новую числовую последовательность - числа Фибоначчи.

Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что решение одной из наиболее сложных математических проблем – 10-й проблемы Гильберта – получено с использованием «теории чисел Фибоначчи» [22, 23]. И этот факт сам по себе поднимает на высокий уровень как «теорию чисел Фибоначчи» [22, 23], так и «математику гармонии» [7], которая является развитием и обобщением «теории чисел Фибоначчи».

4.10. Формулы Бине, гиперболические функции Фибоначчи, «геометрия Боднара». В 19 в. известный французский математик Бине вывел удивительные математические формулы, которые позволяют выразить в аналитическом виде «расширенные» числа Фибоначчи $F_n\left(n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...\right)$ через «золотую пропорцию» Φ. Приведем эти формулы в виде, в котором они были представлены в книге [15]:

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}$$

Используя аналогию между классическими гиперболическими функциями и фомулами Бине, украинские исследователи Алексей Стахов, Иван Ткаченко и Борис Розин ввели в работах [24, 25] новый класс гиперболических функций, названных **гиперболическими функциями Фибоначчи:**

Гиперболический синус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$$

Гиперболический косинус Фибоначчи

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$$

Эти функции, с одной стороны, сохраняют все известные свойства классических гиперболических функций, но, с другой стороны, обладают рекурсивными свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи. При этом «расширенные» числа Фибоначчи $F_n\left(n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\right)$ и «гиперболические функции Фибоначчи» связаны следующим простым соотношением:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) \text{ при } n = 2k \\ cFs(n) \text{ при } n = 2k+1 \end{cases}$$

Именно это важнейшее соотношение объясняет, почему на поверхности филлотаксисных объектов (сосновых шишек, кактусов, ананасов, головках подсолнечников и др.) появляются «фибоначчиевые спирали». Это доказано украинским архитектором Олегом Боднаром в его удивительной геометрической теории филлотаксиса, наиболее распространенного ботанического явления. «Геометрия Боднара» [26] показывает, что гиперболическая геометрия значительно шире распространена в Живой Природе, чем это предполагалось ранее. **По существу вся Живая Природа является воплощением гиперболической геометрии особого типа – «геометрии Боднара», в которой используется особый класс гиперболических функций – гиперболические функции Фибоначчи**.

4.11. Выступление в МГУ. 29 мая 2003 г. состоялась моя лекция в МГУ. В этой лекции я представил свою новую книгу «Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении». Лекция была прочитна на совместном заседании семинара «Геометрия и Физика» кафедры теоретической физики МГУ (руководитель - доктор физико-математических наук проф. Ю.С. Владимиров) и Междисциплинарного семинара «Симметрия в науке и искусстве при Институте машиноведения РАН (руководитель - доктор физико-математических наук проф. С.В. Петухов).

Выступление в МГУ (29 мая 2003 г.)

Лекция была воспринята участниками семинаров с большим интересом. Руководители семинаров Ю.С. Владимиров и С.В. Петухов в своем отзыве написали:

«Оценивая достижения и научные результаты проф. Стахова и его книгу «Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении», можно без всяких сомнений утверждать, что речь идет о новом направлении междисциплинарного характера, имеющим основополагающее значение для развития современной науки. В этой связи мы выступаем со следующими предложениями:

1. *Рекомендовать к публикации книгу проф. Стахова «Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении», как импеющую чрезвычайную актуальность для современной напуки и образования.*
2. *Мы репкомендуем научным сообществам, научным академиям и правительственным оорганизациям в области науки, культуры и образования Украины, России и других стран всячески способствовать научным исследованиям проф. Стахова, направленных на создание новых концепций современной науки и образования».*

Эту книгу ждала счастливая судьба. После моего переезда в Канаду (2004 г.) я использовал эту русскоязычную книгу в качестве основы для написания своей англоязычной книги [7], которая является итогом моей 40-летней научной работы.

4.12. **Лямбда-числа Фибоначчи, обобщенная формула Кассини и «металлические пропорции».** В конце 20-го и начале 21-го веков внимание исследователей разных стран и континентов (аргентинский математик Вера Шпинадель [27], французский математик и инженер Мидхат Газали [28], американский математик Джей Каппрафф [29], армянский философ и физик Грант Аракелян [30], российский исследователь Виктор Шенягин [31], российский инженер Александр Татаренко [32], испанские математики Falcon Sergio, Plaza Angel [32] и др.) было сконцентрировано на исследовании следующего рекуррентного соотношения:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \quad F_\lambda(0) = 0; F_\lambda(1) = 1$$

где $\lambda = 1, 2, 3, ...$ заданное натуральное число, а $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$

Это рекуррентное соотношение порождает так называемые **лямбда-числа Фибоначчи** - бесконечное множество новых рекуррентных целочисленных последовательностей. Их частными случаями являются числа Фибоначчи $(\lambda = 1)$ и числа Пелля $(\lambda = 2)$.

Лямбда-числа Фибоначчи обладают следующим уникальным математическим свойством, которое связывает любую тройку соседних лямбда-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1), F_\lambda(n), F_\lambda(n+1)(n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...)$:

$$F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1) F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1}.$$

Словесно это свойство может быть сформулировано так:

Квадрат некоторого λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1)$ и $F_\lambda(n+1)$, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа *n*; если число *n* является четным, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

Самое любопытное, что этот математический результат может оказаться сюрпризом не только для «любителей математикии», но для профессиональных математиков, специализирующихся в области теории чисел. Суть результата состоит в том, что в множесте целых чисел (которое является предметом изучения в теории чисел) обнаружено бесконечное число новых целочисленных последовательностей (**λ-чисел Фибоначчи),** обладающих уникальными математическими свойствами. Это означает, что в рамках «математики гармонии» [7] в 21-м в. получен новый фундаментальный математический результат [32], имеющий непосредственное отношение к теории чисел – древнейшей математической дисциплине.

Это тождество является обобщением знаменитой «формулы Кассини» для чисел Фибоначчи $F_n(n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...)$, доказанной знаменитым астрономом Кассини в 17 в.:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Изучая лямбда-числа Фибоначчи, аргентинский математик Вера Шпинадель пришла к следующему алгебраическому уравнению:

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0$$

Положительные корни этого уравнения образуют класс новых математических констант, которые названы Верой Шпинадель **«металлическими пропорциями»:**

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \quad (\lambda = 1, 2, 3, ...).$$

Заметим, что для случая $\lambda=1$ эта формула сводится к выражению для классической золотой пропорции:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Уже этот факт должен привлечь наше внимание к этой формуле, которая является ни чем иным, как обобщением формулы для золотой пропорции. То есть, «золотая пропорция» древних греков – это просто частный случай более широкого класса математических констант – «металлических пропорций», открытых в рамках «математики гармонии». «Металлические пропорции» - это обобщенное название следующих математических констант, которые, согласно Шпинадель, имеют следующие названия:

$$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\text{золотая пропорция}, \lambda=1\right); \quad \Phi_2=1+\sqrt{2}\left(\text{серебряная пропорция}, \lambda=2\right);$$

$$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\left(\text{бронзовая пропорция}, \lambda=3\right); \quad \Phi_4=2+\sqrt{5}\left(\text{медная пропорция}, \lambda=4\right).$$

4.13. **Формулы Газале и гиперболические лямбда-функции Фибоначчи**. Французский математик и инженер Мидхат Газале в своей книге [28] вывел следующую замечательную формулу, которая позволяет выразить лямбда-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ через «металлические пропорции» Φ_λ:

$$F_\lambda(n)=\begin{cases}\dfrac{\Phi_\lambda^n+\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}} & \text{для} \quad n=2k+1;\\[2ex] \dfrac{\Phi_\lambda^n-\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}} & \text{для} \quad n=2k\end{cases}$$

Используя аналогию между классическими гиперболическими функциями и формулами Газале, в 2006 г. я ввел в рассмотрение так называемые «гиперболические лямбда функции Фибоначчи» [33]. Эти функции описаны также в статье [34]:

<u>Гиперболический λ-синус Фибоначчи</u>

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$$

<u>Гиперболический λ-косинус Фибоначчи</u>

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$$

Лямбда-числа Фибоначчи и гиперболические λ-функции Фибоначчи связаны следущим простым соотношением:

$$F_\lambda(n)=\begin{cases} sF_\lambda(n), n=2k \\ cF_\lambda(n), n=2k+1 \end{cases}$$

При $\lambda=1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи, основанием которых являются «металлические пропорции», сводятся к представленным выше «золотым» гиперболическим функциям Фибоначчи, основанием которых является «золотая пропорция». Но кроме «золотых» гиперболических функций существуют «серебряные», «бронзовые», «медные» гиперболические функции и т.д. до бесконечности [33, 34].

4.14. **Оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта.** Гиперболические λ-функции Фибоначчи открывают путь к очень простому решению 4-й проблемы Гильберта, которую сам Гильберт сформулировал следующим образом:

«Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии».

Как упоминалось, количество классов гиперболических лямбда-функций Фибоначчи теоретически бесконечно. Их столько же, сколько существует натуральных чисел λ=1,2,3,…. Но каждый класс таких функций «порождает» свою «гиперболическую геометрию», подобную «геометрии Боднара» [26]. Из этих рассуждений вытекает предельно простое решение 4-й проблемы Гильберта: **количество новых гиперболических геометрий, которые основаны на гиперболических лямбда-функциях Фибоначчи и являются *«ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии»* (Гильберт), теоретически бесконечно!**

Заметим, что этот результат был получен автором совместно с известным российским математиком Самуилом Арансоном (США), который по свой докторской диссертации является специалистом в области топологии и геометрии. Основываясь на гиперболических λ-функциях Фибоначчи, в работе [35] было выведено следующее выражение для метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи:

$$(ds)^2=\ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2+\frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2,$$

где $\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - металлическая пропорция и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи. Эти метрические формы названы **метрическими λ-формами плоскости Лобачевского.**

Более подробно с этим решением можно также познакомиться в статье [36].

Этот перечень новых фундаментальных и прикладных результатов, полученных в рамках «математики гармонии», можно продолжить:

4.15. Матрицы Фибоначчи и их обобщения [37]

4.16. «Золотые» матрицы [38]

4.17. Новая теория избыточного кодирования, основанная на «матрицах Фибоначчи» [39]

4.18. Троичная зеркально-симметричная арифметика [40]. Статья [40], опубликованная в Международном журнале «The Computer Journal" (British Computer Society) вызвала большой интерес западных специалистов. Но первым ученым, поздравившим автора с этой публикацией, стал американский математик профессор Дональд Кнут, автор бестселлера «Искусство программирования». В своем письме Дональд Кнут сообщил, что он намерен включить описание «троичной зеркально-симметричной арифметики» в новое издание книги «Искусство программирования».

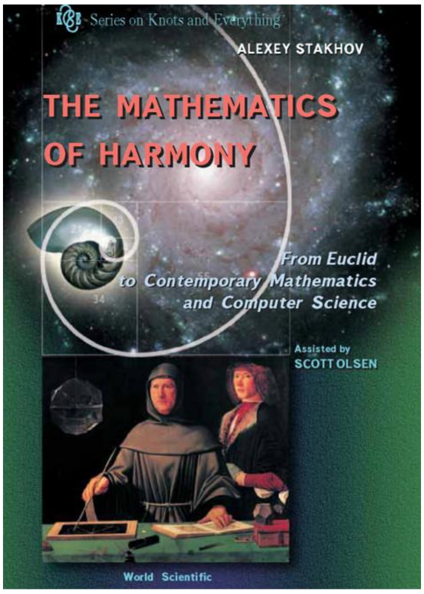
Американский математик Дональд Кнут

5. Является ли случайностью возникновение «математики гармонии» в современной науке?

5.1. Важнейшая тенденция в развитии современной науки. С моей точки зрения, возникновение «математики гармонии» отражает важнейшую тенденцию в развитии современной науки, прежде всего, в развитии теоретического естествознания. Суть этой тенденции очень проста: **возвращение к тому, с чего наука начинала, то ессть, к «гармоническим идеям» Пифагора и Платона («золотое сечение» и Платоновы тела), воплощенным в «Началах» Евклида.**

Яркими примерами, подтверждающими эту тенденцию, являются новейшие открытия в области химии и кристаллографии: **фуллерены**, основанные на «усеченном икосаэдре» (Нобелевская Премия - 1996) и **квазикристаллы Дана Шехтмана,** основанные на икосаэдрической или пентагональной симметрии (Нобелевская Премия - 2011). Количество открытий такого типа непрерывно увеличивается. К ним относится: **"закон структурной гармонии систем»** Эдуарда Сороко, основанный на золотых p-пропорциях [41], **«закон преобразования спиральных биосимметрий»** Олега Боднара [26], основанный на «золотых» гиперболических функциях Фибоначчи. Сюда же относится **новая теория**

генетического кодирования, основанная на «золотых геноматрицах» (автор – доктор физико-математических наук Сергей Петухов, Москва) [42]. Эти примеры можно продолжить. Таким образом, теоретическое естествознание уже полностью использует «гармонические идеи» Пифагора, Платона и Евклида. И оно ставит перед современной математикой задачу с достаточной серьезностью отнестись к этим «гармоническим идеям». И публикация книги [7] является ответом математической науки на эту важнейшую тенденцию.



5.2. Революционные идеи «математики гармонии». С моей точки зрения, в рамках «математики гармонии» уже получены фундаментальные математические результаты, которые могут привести к революционным преобразованиям в отдельных областях математики и информатики:

1. **Избыточные двоичные системы счисления (*p*-коды Фибоначчи и коды золотой *p*-пропорции),** на основе которых могут быть созданы новые информационные основы компьютерной и измерительной техники. Это направление может привести к революционным преобразованиям в информатике, в частности к созданию **супернадежных компьютеров (компьютеров Фибоначчи) и суперстабильных измерительных систем.**

2. **Коды золотой *p*-пропорции** можно рассматиривать как новые способы представления действительных чисел. Эта идея может привести к созданию **«золотой» теории чисел** [17].

3. **«Золотые» гиперболические функции Фибоначчи** уже привели к открытию новой гиперболической геометрии – **«геометрии Боднара»** [26], которая лежит в основе живой Природы

4. **Гиперболические лямбда-функции Фибоначчи** привели к оригинальному решению **4-й проблемы Гильберта** [34 - 36] и постановке перед теоретическим естествознанием задачи поиска новых гиперболических миров Природы, подобных «геометрии Боднара». В качестве первых кандидатов на «революцию» в естествознании можно рассматривать «серебряный», «бронзовый», «медный» и

другие «металлические» миры Природы, которые реально могут существовать в Природе.

5. **Международный Конгресс по Математике Гармонии.** Такой Конгресс состоялся в октябре 2010 г. в чудесном украинском городе Одесса на базе Одесского Национального Университета им. Мечникова https://sites.google.com/site/harmonymathkongress/. Это был по настоящему Международный Конгресс, в работе которого приняли участие ведущие специалисты в области «золотого сечения», чисел Фибоначчи и их приложений не только из стран СНГ (Украина, Россия, Беларусь), но также из других стран и континентов (США, ФРГ, Чили, Южная Африка).

П.7 Резолюции Конгресса гласит следующее:

«Одним из важнейших событий в этой области является публикация книги проф. А.П. Стахова “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (World Scientific, 2009), которая явилась итогом 40-летних исследований автора в этой области. Книга проф. Стахова получила широкое международное признание. Один из ведущих специалистов США в области теории гармонии и «золотого сечения» проф. Скотт Олсен в своем отзыве написал: «Идеи Стахова настолько значительны, что его новая книга вполне может изменить не только рассмотрение истории математики, но и будущее развитие математики в ее приложениях к естественным наукам».

Литература

1. В.П. Шенягин, Обращение к мировой научной общественности: О целесообразности выдвижения кандидатуры профессора Стахова А.П. на присуждение Абелевской премии в области математики в 2014 году // «Академия

Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.18249, 12.10.2013
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0001/005a/00011304.htm
2. Митропольский Ю.А. Отзыв о научном направлении украинского ученого, доктора технических наук, профессора Алексея Петровича Стахова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.12452, 23.09.2005
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0508-00.htm
3. Ю.А. Митропольский, «Математика Гармонии» профессора Стахова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.15176, 19.03.2009
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322020.htm
4. Scott A. Olsen, Professor Alexey Stakhov is an absolute genius of modern science (in Honor of Alexey Stakhov's 70th Birthday) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15281, 11.05.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322061.htm
5. Э.М. Сороко, Отзыв на книгу А.П.Стахова «Математика Гармонии. От Евклида к Современной Математике и Компьютерной Науке» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16029, 31.07.2010
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320065.htm
6. С.К. Абачиев, Математика гармонии глазами историка и методолога науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15991, 11.07.2010
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321185.htm
7. A.P. Stakhov. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science» (World Scientific, 2009, 748 p.)
http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/6635

8. А.П. Стахов. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва: Советское Радио, 1977

9. А.П. Стахов. Георгий Васильевич Чефранов в моей жизни. Журнал «Топос», 01/10/2013 http://www.topos.ru/article/ontologicheskie-progulki

11. Зенкин А.А. Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000, №2.

12. Пойа Д. Математическое открытие. М.: Наука, 1970.

13. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.

14. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г. – с.27-33.

15. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. –

16. Стахов А.П. «Коды золотой пропорции, или системы счисления для ЭВМ будущего?» Техника-молодежи. №7, 1985

17. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. // Украинский математический журнал, Том 56, №. 8, 2004, 1143-1150.

18. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Kluwer Academic Publishers, Vol. 7, 1998. 393 – 399.

19. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991.

20. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony: Clarifying the Origins and Development of Mathematics. Congressus Numerantium, 2008, 193.

21. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry. New York: John Wiley and Sons, 1961.

22. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1984. (первое издание - 1961).

23. Hoggat V. E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.

24. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993. –с.9-14.

25. Stakhov A.P., Rozin B.N. On a new class of hyperbolic functions. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, Vol. 23, Issue 2, 379-389) http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321042.htm

26. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994.

27. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).

28. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Русский перевод: Мидхат Газале. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.)

29. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2002.

30. Аракелян Грант. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989

31. Шенягин В.П. «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях

// «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm

30. Татаренко А.А. Золотые T_m – гармонии и D_m – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm

31. Falcon Sergio, Plaza Angel. On the Fibonacci k-numbers Chaos, Solitons & Fractals, Volume 32, Issue 5, June 2007 : 1615-1624.

32. Alexey Stakhov. A generalization of the Cassini formula. Visual Mathematics, Vol.14, No.2, 2012 http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/stakhovsept2012/cassini.pdf.

33. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

34. Alexey Stakhov. On the general theory of hyperbolic functions based on the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and on Hilbert's Fourth Problem», Visual Mathematics, Vol.15, No.1, 2013 http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/pap.htm)

35. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March)

36. Stakhov A.P. Hilbert's Fourth Problem: Searching for Harmonic Hyperbolic Worlds of Nature". Applied Mathematics and Physics, No.3, 2013
http://www.scirp.org/journal/jamp/.

37. Stakhov A.P. A generalization of the Fibonacci Q-matrix // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1999, No 9, 46-49.

38. Stakhov A. The "golden" matrices and a new kind of cryptography // Chaos, Solitons & Fractals, 2007, Vol. 32, Issue 3, 1138-1146.

39. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula," and a new coding theory // Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Vol. 30, Issue 1, 56-66.
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321039.htm

40. Stakhov A.P. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic // The Computer Journal, 2002, Vol. 45, No. 2, 221-236.

41. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Техника, 1984.

42. С.В. Петухов, Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и Золотое сечение // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13422, 09.06.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321018.htm