

А.П. Стахов, С.Х. Арансон

ЗОЛОТАЯ ФИБОНАЧЧИЕВАЯ ГОНИОМЕТРИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИБОНАЧЧИ-ЛОРЕНЦА И ЧЕТВЕРТАЯ ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Аннотация

Статья посвящена изложению нового подхода к преобразованиям Лоренца, которые используются в специальной теории относительности Эйнштейна.

Исходя из «золотой» *фибоначчиевой гониометрии* и *симметричных гиперболических функций Фибоначчи*, основанных на «золотой пропорции» (или «золотом сечении») – древнейшей научной парадигме о гармонии и красоте, предложены преобразования, названные авторами преобразованиями *Фибоначчи-Лоренца*.

На основе этих преобразований в статье в зависимости от «*фибоначчиевого поворота*», условно названного «*параметром самоорганизации*», получена некоторая «космологическая интерпретация» изменения *скорости света до-, в-, и после* бифуркации, названной авторами «*Большим Взрывом*», поскольку полученная картина качественно соответствует современным научным представлениям об эволюции Вселенной, основанных на таких физических явлениях, как Большой Взрыв, гравитация и антигравитация, реликтовое излучение, расширение Вселенной и так далее.

В статье приводятся также результаты авторов по построению бесконечного множества изометричных моделей плоскости Лобачевского, основанных на использовании *гиперболических λ -функций Фибоначчи*, где $\lambda > 0$ - любое вещественное число, и, в частности, при $\lambda = 1$ - *симметричных гиперболических функций Фибоначчи*, что имеет непосредственное отношение к четвертой проблеме Гильберта.

1. Введение

1.1. Геометрия Лобачевского и V-й постулат Евклида

23 февраля 1826 года российский математик **Николай Иванович Лобачевский** (1792 -1856) на заседании физико-математического факультета Казанского университета провозгласил о создании новой геометрии, названной им *воображаемой геометрией*. Эта геометрия была основана на тех же традиционных постулатах и аксиомах геометрии, как и у **Евклида** (330-275 гг. до н. э.), но с заменой его **V-го постулата о параллельных**: «*на плоскости через точку, взятую вне данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой, а все остальные прямые, проходящие через эту точку, пересекаются с данной прямой*», на **новый V-ый постулат о параллельных**: «*на плоскости через точку, взятую вне данной прямой, можно провести две и только две прямые, параллельные данной, а также бесконечное множество прямых, которые не пересекаются с данной прямой и ей не*

параллельны, и бесконечное множество прямых, которые пересекаются с данной прямой».

Одновременно он представил рукопись своего доклада. Тогда рукопись не была опубликована. Впервые свою новую геометрию Н.И. Лобачевский опубликовал в 1829 году в работе «О началах геометрии» в журнале «Казанский вестник».

Независимо от Лобачевского к подобным идеям пришёл венгерский математик **Янош Больяи** (1802-1860) опубликовавший свою работу «Appendix...» на три года позже Лобачевского (1832) и выдающийся немецкий математик **Карл Фридрих Гаусс** (1777-1855), у которого после его смерти были найдены отдельные неопубликованные наброски начальных положений неевклидовой геометрии.

Полное признание и широкое распространение геометрия Лобачевского получила через 12 лет после его смерти, когда стало понятно, что научная теория, построенная на базе некоторой *системы аксиом* (исходных положений, принимаемых без доказательства) считается только тогда полностью завершённой, когда эта система аксиом удовлетворяет трём условиям: *независимости, непротиворечивости и полноты.*

Именно этим свойствам и удовлетворяет *геометрия Лобачевского*.¹

Окончательно это стало ясно, когда в 1868 году итальянский математик **Эудженио Бельтрами** (1835-1900) в своём мемуаре «Опыт толкования неевклидовой геометрии» показал, что в евклидовом пространстве R^3 на *псевдосферических поверхностях* имеет место геометрия куска плоскости Лобачевского, если на них за прямые принять геодезические линии.

Далее немецкий математик **Феликс Христиан Клейн** (1849-1925) опираясь на исследования Эудженио Бельтрами и французский математик **Анри Пуанкаре** (1854-1912) строго доказали непротиворечивость неевклидовой геометрии, построив соответствующие модели плоскости Лобачевского. Истолкование геометрии Лобачевского на поверхностях евклидова пространства решающим образом способствовало общему признанию идей Лобачевского.

Итогом такого неевклидового подхода явилось создание **Георгом Фридрихом Бернхардом Риманом** (1826-1866) *римановой геометрии*, развившей математическое учение о пространстве, понятие дифференциала расстояния между элементами многообразия и учение о кривизне. Введение *обобщённых римановых пространств*, частными случаями которых являются *пространства Евклида и Лобачевского* и так называемой *геометрии Римана*, открыло новые пути в развитии геометрии и нашли применение в физике (теория относительности) и других разделах естествознания.

Геометрию Лобачевского называют также *гиперболической* на том основании, что для описания математических соотношений данной геометрии были использованы *гиперболические функции*

¹ Основным же недостатком аксиоматики Евклида, с современной точки зрения, следует считать её *неполноту* – здесь нет аксиом *непрерывности, движения и порядка*. В дальнейшем эти недостатки были устранены немецким математиком **Давидом Гильбертом** (1862-1943) в его книге «Основания геометрии» (1899).

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (1)$$

введенные в 18-м веке итальянским математиком **Винченцо Рикатти** (1707-1775), где $e \approx 2.71828$ -число, введённое **Джоном Непером** (1550-1617).

Перечислим наиболее известные классические *изометричные* (сохраняющие расстояние между точками) интерпретации плоскости Лобачевского, имеющую гауссову кривизну $K=-1$:

- интерпретация Бельтрами в круге;
- интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере;
- евклидова модель Кэли-Клейна;
- проективная модель Кэли-Клейна;
- интерпретация Пуанкаре на полуплоскости;
- интерпретация Пуанкаре внутри круга;
- интерпретация Пуанкаре на гиперboloиде.

В частности, классическая модель плоскости Лобачевского в *псевдосферических координатах* (u, v) , $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеющую гауссову кривизну $K = -1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере) имеет вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + \operatorname{sh}^2(u) (dv)^2, \quad (2)$$

где ds – элемент длины.

1.2. Специальная теория относительности Эйнштейна, преобразования Лоренца, и геометрия Минковского.

В 2005 году произошло замечательное событие: исполнилось сто лет со дня опубликования в 1905 году **Альбертом Эйнштейном** (1879-1955) его Специальной теории относительности (СТО).

С момента появления этой теории и до настоящего времени не прекращается критика СТО и споры относительно её научного статуса. С одной стороны, критики неопровержимо доказывают несостоятельность СТО. С другой стороны, апологеты СТО с не меньшим упорством защищают эту теорию, обвиняя своих оппонентов в некомпетентности. Обе стороны приводят свои неотразимые аргументы.

СТО основывается на двух принципах: *принцип относительности* и *принцип независимости скорости света в пустоте от скорости источника*. Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО и, следовательно, должны быть заменены другими преобразованиями.

Преобразования Лоренца, введенные в СТО — преобразования, которому подвергаются координаты события (x, y, z, t) при переходе от одной *инерциальной системы отсчёта* (ИСО) K — к другой ИСО K' , движущейся относительно ИСО K с постоянной скоростью V .

Преобразования названы в честь их первооткрывателя — нидерландского физика **Гендрика Антона Лоренца** (1853–1928), который вывел их, чтобы устранить противоречия между *электродинамикой Максвелла* и *механикой Ньютона*. Преобразования Лоренца были впервые опубликованы в 1904 г., но в то время их форма была несовершенна. К современному, полностью самосогласованному виду их привёл французский математик **А. Пуанкаре** (1854-1912).

В 1908 г., то есть спустя три года после обнаружения СТО, немецкий математик **Герман Минковский** (1864-1909) дал оригинальную геометрическую интерпретацию преобразований Лоренца.

В «*пространстве Минковского*» геометрически связь между двумя ИСО K и K' устанавливаются с помощью *гиперболического поворота* – движения, аналогичного обычному повороту декартовой системы в евклидовом пространстве. При этом координаты x' и t' в ИСО K' оказываются связанными с координатами точек x и t в ИСО K с помощью гиперболических функций (1).

Таким образом, в «геометрии Минковского» преобразования Лоренца – не что иное, как выраженные в терминах физики зависимости гиперболической тригонометрии. То есть, «геометрия Минковского» является гиперболической интерпретацией СТО и поэтому она знаменует революционный прорыв геометрических представлений в физике, выход на качественно новый уровень взаимоотношений физики и геометрии.

Как известно, основной спор, касающийся СТО, в основном, идёт относительно второго принципа, то есть зависит или не зависит скорость света в пустоте от скорости источника света.

В этом плане могут представить теоретический интерес работы **С.Х. Арансона** и **Е.В. Жужомы** [1-3], в которых в ситуации классической СТО замыкалось время и пространство, что вызвало квантование света и наложило жёсткие условия на арифметические свойства скоростей света и их спектров из допустимых относительных скоростей источников света.

1.3. Золотое Сечение, формулы Бине и гиперболические функции Фибоначчи и Люка.

Кроме «постулата о параллельных», из трактата «Начал» Евклида к нам пришла еще одна задача, значение которой для развития новых физических представлений в настоящее время пока еще до конца не осознано.

Речь идет о «задаче деления отрезка в крайнем и среднем отношении», сформулированной **Евклидом** в его трактате «Начала». В современной науке эта задача более широко известна как задача о «*Золотом Сечении*» [4, 5]. Решение этой задачи сводится к решению простейшего алгебраического уравнения

$$x^2 = x + 1. \quad (3)$$

Положительный корень уравнения (3)

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

есть ни что иное, как знаменитое «*золотое число*», называемое также «*золотой пропорцией*», «*божественной пропорцией*» и т.д.

Алгебраическое уравнение (3) и «золотая пропорция» (4) тесно связаны с двумя замечательными числовыми последовательностями – *числами Фибоначчи* F_n , задаваемыми рекуррентным соотношением:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_0 = 0, F_1 = 1, \quad (5)$$

и числами Люка L_n , задаваемыми рекуррентным соотношением:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}; \quad L_0 = 2, L_1 = 1, \quad (6)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Любые три соседние числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1} ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) связаны между собой уникальным математическим тождеством:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}. \quad (7)$$

Формула (7) называется *формулой Кассини* в честь французского астронома **Джовани Кассини** (1625-1712), который впервые вывел это тождество.

В 19-м столетии французский математик **Жак Филипп Мари Бине** (1786-1856) вывел две замечательные формулы, связывающие числа Фибоначчи и Люка с «золотой пропорцией»:

$$F_n = \frac{\tau^n - (-1)^n \tau^{-n}}{\sqrt{5}}; \quad L_n = \tau^n + (-1)^n \tau^{-n}. \quad (8)$$

К сожалению, эти формулы не были оценены по достоинству математиками 19-го и 20-го века, хотя в этих формулах содержался намек на важное математическое открытие – *гиперболические функции Фибоначчи и Люка*.

В 1984 г. **Алексей Стахов** опубликовал книгу «Коды Золотой Пропорции» [6], в которой формулы Бине (8) были представлены в виде, который ранее не использовался в математической литературе:

$$F_n = \begin{cases} \frac{\tau^n + \tau^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для нечетных } n = 2k + 1 \\ \frac{\tau^n - \tau^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для четных } n = 2k \end{cases} \quad (9)$$

$$L_n = \begin{cases} \tau^n + \tau^{-n} & \text{для четных } n = 2k \\ \tau^n - \tau^{-n} & \text{для нечетных } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (10)$$

Сходство формул Бине, представленных в виде (9), (10), с гиперболическими функциями (1) настолько поразительно, что формулы (9), (10) можно считать прообразом нового класса гиперболических функций, основанных на «золотой пропорции», то есть, **А.П. Стахов** еще в 1984 г. [6] предвосхитил введение нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка*. Разработка новой теории гиперболических функций, основанных на формулах Бине (9), (10), была выполнена украинскими математиками **Алексеем Стаховым** и **Иваном Ткаченко** в 1993 г. [7].

Дальнейшее развитие эта идея получила в работах **Алексея Стахова** и **Бориса Розина** [8, 9], которые ввели так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*.

Независимо от Стахова, Ткаченко и Розина к этим же идеям пришел украинский исследователь **Олег Боднар**, который в работах [10] ввел так называемые «золотые» *гиперболические функции*, которые отличаются от гиперболических функций Фибоначчи и Люка только постоянными коэффициентами.

Используя новый класс гиперболических функций, Боднар создал оригинальную геометрическую *теорию филлотаксиса*, в которой показал, что «геометрия филлотаксиса» является неевклидовой геометрией, основанной на «золотых» гиперболических функциях.

Таким образом, в работах Боднара, Стахова и Ткаченко сделан прорыв «гиперболических представлений» в теоретическом естествознании. В этих работах введен новый класс гиперболических функций, основанных на «золотой пропорции» [7-9], и показано [10], что эти функции являются «естественными» функциями Природы, которые обнаруживают себя в ботаническом явлении филлотаксиса (сосновые шишки, кактусы, ананасы, головки подсолнечников, корзинки цветов и т.д.) и других явлениях и структурах Природы.

Самым главным результатом этих исследований является осознание той важной роли, которую «золотая пропорция» играет в структурах Природы. Очевидно, что «золотая пропорция» и связанные с ней числами Фибоначчи и Люка выражают некоторую «скрытую гармонию» Природы, суть которой состоит в гиперболическом характере Природы.

Таким образом, обнаружение «золотой пропорции» или чисел Фибоначчи в том или ином природном явлении является сигналом к тому, что геометрическая природа этого явления является гиперболической.

Успех «золотых» гиперболических функций в раскрытии «загадки филлотаксиса» («геометрия Боднара») [10] наталкивает на мысль рассмотреть другие фундаментальные физические концепции и теории, связь которых с гиперболическими функциями не вызывает сомнений, с точки зрения гиперболических функций Фибоначчи и Люка [7-9].

Пожалуй, наиболее важной из таких концепций являются *преобразования Лоренца*, которые лежат в основе СТО. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы ввести новый класс преобразований – *преобразования Фибоначчи-Лоренца*, вытекающие из новой теории гиперболических функций, и обсудить некоторые новые физические эффекты, которые вытекают из такого подхода.

2. «Золотая» фибоначчиевая гониометрия.

Прежде всего поясним термин «*гониометрия*», употребляемый в настоящей статье. Как известно, *гониометрией* называется часть геометрии, устанавливающая соотношения между тригонометрическими функциями. В настоящей статье вместо тригонометрических функций рассматриваются так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*, введенные Стаховым и Розиным в статье [10]. Речь идет о функциях следующего вида:

Симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\tau^x - \tau^{-x}}{\sqrt{5}}; \quad cFs(x) = \frac{\tau^x + \tau^{-x}}{\sqrt{5}} \quad (11)$$

Симметричный гиперболический синус и косинус Люка

$$sLs(x) = \tau^x - \tau^{-x}; \quad cLs(x) = \tau^x + \tau^{-x} \quad (12)$$

Числа Фибоначчи и Люка определяются однозначно через симметрические гиперболические функции Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F_n = \begin{cases} sFs(n), & \text{for } n = 2k \\ cFs(n), & \text{for } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (13)$$

$$L_n = \begin{cases} cLs(n), & \text{for } n = 2k \\ sLs(n), & \text{for } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Несложно доказать, что гиперболический синус Фибоначчи является нечетной функцией, поскольку

$$sFs(-x) = \frac{\tau^{-x} - \tau^x}{\sqrt{5}} = -\frac{\tau^x - \tau^{-x}}{\sqrt{5}} = -sFs(x). \quad (14)$$

С другой стороны,

$$cFs(-x) = \frac{\tau^{-x} + \tau^x}{\sqrt{5}} = cFs(x), \quad (15)$$

то есть, симметричный гиперболический косинус Фибоначчи является четной функцией.

По аналогии можно доказать:

$$sL(-x) = -sL(x) \text{ и } cL(-x) = cL(x). \quad (16)$$

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$sF(x) = \frac{sLs(x)}{\sqrt{5}}; \quad cFs(x) = \frac{cLs(x)}{\sqrt{5}}.$$

Также мы можем ввести понятия симметричного гиперболического тангенсов и котангенсов Фибоначчи и Люка:

Симметричные гиперболические тангенс и котангенс Фибоначчи

$$tFs(x) = \frac{sFs(x)}{cFs(x)} = \frac{\tau^x - \tau^{-x}}{\tau^x + \tau^{-x}}; \quad ctFs(x) = \frac{cFs(x)}{sFs(x)} = \frac{\tau^x + \tau^{-x}}{\tau^x - \tau^{-x}} \quad (17)$$

Симметричные гиперболические тангенс и котангенс Люка

$$tLs(x) = \frac{sLs(x)}{cLs(x)} = \frac{\tau^x - \tau^{-x}}{\tau^x + \tau^{-x}}; \quad ctLs(x) = \frac{cLs(x)}{sLs(x)} = \frac{\tau^x + \tau^{-x}}{\tau^x - \tau^{-x}} \quad (18)$$

Как показано в [8], симметричные гиперболические функции (11), (12), с одной стороны, обладают всеми свойствами классических гиперболических функций (1), с другой стороны, всеми свойствами рядов Фибоначчи и Люка, задаваемых рекуррентным соотношениями (5), (6).

В таблице 1 приведены «рекурсивные» свойства гиперболических функций Фибоначчи и Люка вместе с соответствующими им математическими тождествами для чисел Фибоначчи и Люка. Сам факт, что каждому тождеству для чисел Фибоначчи и Люка соответствует некоторое «непрерывное» тождество для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка и наоборот (см. таблицу 1), имеет важные последствия для «теории чисел Фибоначчи» [4, 5].

Это означает, что «дискретная» по своей природе «теория чисел Фибоначчи» как бы «вырождается», так как она заменяется более общей, «непрерывной» по своей природе теорией гиперболических функций Фибоначчи и Люка. Все тождества для чисел Фибоначчи и Люка [5, 6] могут быть получены из тождеств для гиперболических функций Фибоначчи и Люка путем использования соотношений (13) и наоборот.

В качестве примера мы можем рассмотреть «формулу Кассини» (7), которую можно представить в виде двух формул, задаваемых для четных и нечетных значений n ($n=2k$ и $n=2k+1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$):

$$F_{2k}^2 - F_{2k-1}F_{2k+1} = -1; \quad F_{2k+1}^2 - F_{2k}F_{2k+2} = 1. \quad (19)$$

Если теперь воспользоваться соотношениями (13), то формулы (19) можно представить в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи в виде:

$$\begin{aligned} [sFs(n)]^2 - cFs(n+1)cFs(n-1) &= -1 \text{ для } n = 2k; \\ [cFs(n)]^2 - sFs(n+1)sFs(n-1) &= 1 \text{ для } n = 2k+1. \end{aligned} \quad (20)$$

Заменяя в (20) дискретную переменную n на непрерывную переменную x , получим следующее два «непрерывных» тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи, которые являются обобщением «формулы Кассини» (7):

$$\begin{aligned} [sFs(x)]^2 - cFs(x-1)cFs(x-1) &= -1; \\ [cFs(x)]^2 - sFs(x-1)sFs(x-1) &= 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Таблица 1. Тождества для чисел Фибоначчи и Люка и для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	$sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x);$ $cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$
$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$	$sLs(x+2) = cLs(x+1) + sLs(x);$ $cLs(x+2) = sLs(x+1) + cLs(x)$
$F_n = (-1)^{n+1} F_{-n}$	$sFs(x) = -sFs(-x); \quad cFs(x) = cFs(-x)$
$L_n = (-1)^n L_{-n}$	$sLs(x) = -sLs(-x); \quad cLs(x) = cLs(-x)$
$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$[sFs(x)]^2 - cFs(x+1)cFs(x-1) = -1;$ $[cFs(x)]^2 - sFs(x+1)sFs(x-1) = 1$
$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	$cFs(2x+1) = [cFs(x+1)]^2 + [sFs(x)]^2;$ $sFs(2x+1) = [sFs(x+1)]^2 + [cFs(x)]^2$
$L_n^2 - 2(-1)^n = L_{2n}$	$[sLs(x)]^2 + 2 = cLs(2x); \quad [cLs(x)]^2 - 2 = cLs(2x)$
$L_n + L_{n+3} = 2L_{n+2}$	$sLs(x) + cLs(x+3) = 2sLs(x+2);$ $cLs(x) + sLs(x+3) = 2cLs(x+2)$
$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$	$sLs(x+1)sLs(x-1) - [cLs(x)]^2 = -5;$ $cLs(x+1)cLs(x-1) - [sLs(x)]^2 = 5$
$F_{n+3} - 2F_n = L_n$	$sFs(x+3) - 2cFs(x) = sLs(x);$ $cFs(x+3) - 2sFs(x) = cLs(x)$
$L_n + 5F_n = 2L_{n+1}$	$sLs(x) + 5cFs(x) = 2cLs(x+1);$ $cLs(x) + 5sFs(x) = 2sLs(x+1)$
$L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{2n+1}$	$[sLs(x+1)]^2 + [cLs(x)]^2 = 5cFs(2x+1);$ $[cLs(x+1)]^2 + [sLs(x)]^2 = 5sFs(2x+1)$

В таблице 2 приведены «гиперболические» тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка вместе с соответствующими математическими тождествами для классических гиперболических функций.

Таблица 2. Тождества для классических гиперболических функций и для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Тождества для классических гиперболических функций	Тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка
$[ch(x)]^2 - [sh(x)]^2 = 1$	$[cFs(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = \frac{4}{5}; \quad [cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4$ $[cFs(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = \frac{4}{5}; \quad [cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4$

$ch(x+y)=ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y)$	$\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(x+y) = cFs(x)cFs(y) + sFs(x)sFs(y)$
$ch(x-y)=ch(x)ch(y)-sh(x)sh(y)$	$\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(x-y) = cFs(x)cFs(y) - sFs(x)sFs(y)$
$ch(2x)=[ch(x)]^2+[sh(x)]^2$	$\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(2x) = [cFs(x)]^2 + [sFs(x)]^2$ $2cLs(2x) = [cLs(x)]^2 + [sLs(x)]^2$ $\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(2x) = [cFs(x)]^2 + [sFs(x)]^2$ $2cLs(2x) = [cLs(x)]^2 + [sLs(x)]^2$
$sh(2x)=2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}sFs(2x) = sFs(x)cFs(x)$ $sLs(2x) = sLs(x)cLs(x).$
$[ch(x)\pm sh(x)]^n = ch(nx) \pm sh(nx)$	$[cFs(x) \pm sFs(x)]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} [cFs(nx) \pm sFs(nx)]$ $[cLs(x) \pm sLs(x)]^n = 2^{n-1} [cFs(nx) \pm sFs(nx)].$
$\frac{d^n}{dx^n}[ch(x)] = \begin{cases} sh(x), & n = 2k + 1 \\ ch(x), & n = 2k \end{cases}$	$\frac{d^n}{dx^n}[cFs(x)] = \begin{cases} (\ln \tau)^n sFs(x), & n = 2k + 1 \\ (\ln \tau)^n cFs(x), & n = 2k \end{cases}$
$\frac{d^n}{dx^n}[sh(x)] = \begin{cases} ch(x), & n = 2k + 1 \\ sh(x), & n = 2k \end{cases}$	$\frac{d^n}{dx^n}[sFs(x)] = \begin{cases} (\ln \tau)^n cFs(x), & n = 2k + 1 \\ (\ln \tau)^n sFs(x), & n = 2k \end{cases}$
$\int ch(x)dx = sh(x)$	$\int cFs(x)dx = [\ln(\tau)]^{-1}sFs(x)$
$\int sh(x)dx = ch(x)$	$\int sFs(x)dx = [\ln(\tau)]^{-1}cFs(x)$

Таблицы 1 и 2 являются достаточно убедительным свидетельством того факта, что речь идет о новом классе гиперболических функций, который сохраняет все известные свойства классических гиперболических функций (Таблица 2), но при этом обладают дополнительными («рекурсивными») свойствами (Таблица 1), которые объединяют эти функции с двумя замечательными числовыми последовательностями – *числами Фибоначчи* и *числами Люка*.

3. «Золотые» матрицы

3.1. Q -матрицы. Известный американский математик Вернер Хоггат развил теорию так называемой Q -матрицы [5], которая представляет собой квадратную матрицу следующего вида:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Если Q -матрицу (22) возвести в n -ю степень, то возникает циклическая группа с образующей (22), при этом элементами матрицы $Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ являются числа Фибоначчи и эта матрица имеет вид

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Детерминант матрицы (23) совпадает со знаменитый «формулой Кассини»:

$$\det Q^n = F_{n+1}F_{n-1} - (F_n)^2 = (-1)^n. \quad (24)$$

Выпишем характеристическое уравнение матрицы Q [11], которое имеет следующий вид:

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - x - 1 = 0 \quad (25)$$

Это уравнение, как мы видим, является уравнением золотой пропорции (3), при этом корни этого уравнения $x_1 = \tau$, $x_2 = -\tau^{-1}$ являются *собственными значениями* симметрической матрицы Q .

Но тогда матрица Q подобна диагональной матрице $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, то есть $Q = TXT^{-1}$, где T называется *сопрягающей матрицей*. В данном случае сопрягающая матрица T и обратная к ней матрица T^{-1} имеют вид:²

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} & \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{1+\tau^2}} & \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Отсюда матрицу Q^n можно представить в виде:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = TX^nT^{-1} = T \begin{pmatrix} \tau^n & 0 \\ 0 & (-\tau)^{-n} \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (27)$$

3.2. «Золотые» матрицы.

В [12] по аналогии с матрицами Q^n вида (23) введено понятие «золотых» матриц. Рассмотрим следующую символическую матрицу

² Алгоритм получения сопрягающих матриц T (и их обратных матриц T^{-1}) для любых симметрических матриц Q (не обязательно совпадающих с (27)), описан в [11]. Там же (глава 6) введено понятие функций от матриц.

$$Q_k(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{k+1}(x+1) & \varphi_k(x) \\ \varphi_k(x) & \varphi_{k+1}(x-1) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где функции $\varphi_k(x) = sFs(x)$ при $k=0$ (тот же результат получается при любом чётном k) и $\varphi_k(x) = cFs(x)$ при $k=1$ (тот же результат получается при любом нечётном k), $x \in R$, где R -множество всех вещественных чисел.

Отсюда получаем следующие свойства:

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(x) = \frac{\tau^x - (-1)^k \tau^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad Q_n(n) = Q^n, \quad \det Q_k(x) = (-1)^k, \quad (29)$$

где $k=0;1$, $n \in \mathbb{Z}$ -множество всех целых чисел, $x \in R$.

Но тогда, расписывая при $k=0$ и $k=1$ соотношения (28) и (29), получаем следующие две матрицы, которые называются *золотыми матрицами, составленными из симметричных гиперболических функций Фибоначчи* sFs , cFs :

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} cFs(x+1) & sFs(x) \\ sFs(x) & cFs(x-1) \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$Q_1(x) = \begin{pmatrix} sFs(x+1) & cFs(x) \\ cFs(x) & sFs(x-1) \end{pmatrix},$$

причём

$$\det Q_0(x) = 1, \quad \det Q_1(x) = -1 \quad (31)$$

Ясно, что «золотые матрицы» (30) являются обобщениями Q -матрицы (23) на непрерывную область.

4. Преобразования Лоренца.

Как упоминалось во введении, *преобразованиями Лоренца* называются кинематические формулы преобразования координат и времени в специальной теории относительности (СТО), созданной **Альбертом Эйнштейном** в 1905 году.

Преобразования Лоренца были предложены в 1904 году нидерландским физиком и математиком **Гендриком Антоном Лоренцом** как преобразования, относительно которых инвариантны уравнения электродинамики.

Эти преобразования устанавливают связь между пространственными координатами (x_1, x_2, x_3) и моментом времени t события, наблюдаемого в *инерциальной системе отсчёта* (ИСО) $K=(x_0=ct, x_1, x_2, x_3)$, и пространственными координатами (x'_1, x'_2, x'_3) и моментом времени t' этого же события, наблюдаемого в другой ИСО $K'=(x'_0=ct', x'_1, x'_2, x'_3)$.

Здесь c [$м \cdot сек^{-1}$] – скорость света в пустоте, t [$сек$] – время, x_0, x_1, x_2, x_3 имеют размерность [$м$]. Для случая, когда ИСО K' движется относительно ИСО K со скоростью v [$м \cdot сек^{-1}$] вдоль оси x_1 , преобразования Лоренца имеют вид [13]:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) & 0 & 0 \\ sh(\theta) & ch(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где θ ($-\infty < \theta < +\infty$) называется углом гиперболического поворота,

$$sh(\theta) = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad ch(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \quad (33)$$

Четырёхмерно пространство R_1^4 с координатной системой $K=(x_0=ct, x_1, x_2, x_3)$, снабжённое знакопеременной метрикой

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2, \quad (34)$$

где ds – элемент дуги, называется *четырёхмерным пространством Минковского*, а метрика (34) – *метрикой Минковского*.

Это пространство предложено немецким математиком и физиком **Германом Минковским** в 1908 году в качестве геометрической интерпретации пространства-времени специальной теории относительности.

Метрика Минковского (34) обладает замечательным свойством *инвариантности* относительно преобразований Лоренца (32).

Из инвариантности метрики Минковского (34) относительно преобразований Лоренца (32) с учётом соотношений (33) вытекает целый ряд следствий. В частности, из них следует релятивистский эффект замедления времени и лоренцово сокращение длины, а также вывод об относительности одновременности.

В [13] рассмотрены также n -мерные пространства R_1^n ($n \geq 2$) с координатной системой $K=(x_0=ct, x_1, \dots, x_{n-1})$, снабжённые знакопеременной метрикой

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (dx_i)^2, \quad (35)$$

которые названы *пространствами Минковского размерности n* .

В частности, в [13] подробно исследован случай $n=2$ (*плоскость Минковского* R_1^2) и двумерные преобразования Лоренца

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где $sh(\theta), ch(\theta)$ удовлетворяют условию (33).

Определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} \quad (37)$$

преобразования (38) равен $\det A = ch^2(\theta) - sh^2(\theta) = 1$, а метрика Минковского имеет вид:

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2. \quad (38)$$

Преобразования (37) называются в [13] *собственными двумерными преобразованиями Лоренца*.

Поскольку в (33) присутствует $\sqrt{1-(v/c)^2}$ и $th(\theta)=v/c$, то $1-(v/c)^2 > 0$, откуда при всех θ ($-\infty < \theta < +\infty$) выполняется неравенство:

$$|v| < c. \quad (39)$$

В работах [1-3] **С.Х. Арансон** и **Е.В. Жужома** подробно исследовали арифметические и динамические свойства собственных двумерных преобразований Лоренца в ситуации, когда вместо плоскости Минковского взят двумерный тор T^2 , надѐлённый как структурой плоского риманова многообразия, так и структурой лоренцова многообразия постоянной нулевой кривизны.

В этом случае «скорость света c » и параметр v , фигурирующие в соотношении (33), начинают квантоваться, при этом множество допустимых c для преобразований Лоренца на торе T^2 является счётным, всюду плотным на положительной полупрямой, и каждое допустимое c является иррациональным алгебраическим числом, радикалом некоторого положительного рационального числа. Выявлены также спектральные свойства допустимых «скоростей света c ».

Имеет также смысл рассматривать на плоскости Минковского R_1'' *несобственные двумерные преобразования Лоренца*

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sh(\theta) & ch(\theta) \\ ch(\theta) & sh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

где определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} sh(\theta) & ch(\theta) \\ ch(\theta) & sh(\theta) \end{pmatrix} \quad (41)$$

преобразования (40) равен $det A = sh^2(\theta) - ch^2(\theta) = -1$, а метрика Минковского $(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2$. (42)

антиинварианта относительно преобразования (40), то есть

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 = -(ds')^2 = (dx'_0)^2 - (dx'_1)^2 \quad (43)$$

но *инвариантна* относительно преобразования

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(2\theta) & sh(2\theta) \\ sh(2\theta) & ch(2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_0 \\ x''_1 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

то есть

$$(ds)^2 = (dx_0)^2 - (dx_1)^2 = (ds')^2 = (dx'_0)^2 + (dx'_1)^2 \quad (45)$$

Определитель матрицы

$$A^2 = \begin{pmatrix} ch(2\theta) & sh(2\theta) \\ sh(2\theta) & ch(2\theta) \end{pmatrix} \quad (46)$$

равен

$$det A^2 = ch^2(2\theta) - sh^2(2\theta) = 1, \quad (47)$$

при этом

$$sh(\theta) = sign(v) \frac{1}{\sqrt{(v/c)^2 - 1}}, \quad ch(\theta) = \frac{|v|/c}{\sqrt{(v/c)^2 - 1}}. \quad (48)$$

Здесь $sign(v)$ - знак числа v , то есть

$$sign(v) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\infty < v < 0, \\ 0, & \text{если } v = 0, \\ 1, & \text{если } 0 < v < +\infty \end{cases} \quad (49)$$

Поскольку в (48) присутствует $\sqrt{(v/c)^2 - 1}$ и $cth(\theta) = v/c$, то $(v/c)^2 - 1 > 0$, откуда при всех $\theta (-\infty < \theta < +\infty)$ выполняется неравенство

$$|v| > c. \quad (50)$$

5. Собственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца и их космологическая интерпретация

5.1. Собственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца.

Выше на плоскости Минковского R_1^2 были рассмотрены собственные двумерные преобразования Лоренца (36), зависящие от двух параметров: c - скорости света в пустоте, являющейся постоянной величиной в любой инерциальной системе отсчёта, и v - постоянной скорости движения одной инерциальной системы отсчёта относительно другой инерциальной системы отсчёта.

Назовём величину $\bar{v} = \frac{v}{c}$ *собственной нормированной относительной скоростью* и соотношение (39) перепишем в виде:

$$\bar{v} = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} = th(\theta), |\bar{v}| < 1. \quad (51)$$

Перепишем также соотношения (36) в виде:

$$\begin{cases} ct = ch(\theta)(ct') + sh(\theta)x_1' \\ x_1 = sh(\theta)(ct') + ch(\theta)x_1' \end{cases} \quad (52)$$

Предположим, что в соотношениях (52) параметр $c \neq const$ ³, а равен величине

$$c = c(\psi) = \bar{c}(\psi) c_0, \quad (53)$$

где безразмерную величину $\psi (-\infty < \psi < +\infty)$ назовём *параметром самоорганизации*, величину $c_0 = const$, размерность которой равна [м. сек⁻¹], - *нормирующим множителем* (например, c_0 можно считать равной эйнштейновской скорости света в пустоте, равной величине $2.998 \cdot 10^8$ м. сек⁻¹, делённой на золотую пропорцию $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$), параметр $\bar{c}(\psi)$, который является

безразмерной величиной и будет конкретизирован ниже, - *собственной нормированной фибоначчиевой скоростью света в пустоте*.

Обозначим через $\xi = c_0 t$, $\xi' = c_0 t'$ величины, имеющие размерность [м].

Тогда (52) перепишется в виде

³ Тот факт, что в разные периоды «скорость света c в пустоте» не всегда была постоянной величиной, согласуется с современными научными воззрениями на эволюцию Вселенной с момента *Большого Взрыва* (*Big Bang*) по настоящее время (13.7 миллиарда лет после Большого Взрыва) и с гипотетической судьбой Вселенной в будущем (варианты: *Большой Хруст*, *Большой Шёпот*, *Большой Разрыв*, *пульсирующая Вселенная*) читатель может ознакомиться в работах [14-20]. Более подробно об этих и других физических явлениях будет сказано в дальнейшем при сравнении этих явлений с полученными в данной статье результатами для *собственных нормированных фибоначчиевых скоростей света* в рамках рассматриваемых в данной статье собственных двумерных преобразований Фибоначчи-Лоренца.

$$\begin{cases} \bar{c}(\psi)\xi = \bar{c}(\psi)ch(\theta)\xi' + sh(\theta)x_1' \\ x_1 = \bar{c}(\psi)\xi' + ch(\theta)x_1' \end{cases} \quad (54)$$

Разделим первую строчку в (54) на $\bar{c}(\psi)$, тогда получим преобразование вида:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & \frac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} \\ \bar{c}(\psi)sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (55)$$

Преобразованию (55) соответствует матрица вида

$$\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} ch(\theta) & \frac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} \\ \bar{c}(\psi)sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}, \quad (56)$$

зависимая от двух параметров θ и ψ , где ψ является аргументом пока что неизвестной функции $\bar{c}(\psi)$. Для того, чтобы конкретизировать функцию $\bar{c}(\psi)$ и найти связь между θ и ψ , приравняем матрицу $\bar{\Omega}(\theta, \psi)$ поэлементно к матрице

$$\Omega(\psi) = \begin{pmatrix} cFs(\psi-1) & sFs(\psi-2) \\ sFs(\psi) & cFs(\psi-1) \end{pmatrix}, \quad (57)$$

то есть запишем матричное уравнение

$$\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi),$$

где элементами матрицы $\Omega(\psi)$ вида (57) являются введённые в [8, 9]

А.П. Стаховым и **Б.Н. Розиным** симметричные гиперболические функции Фибоначчи sFs, cFs .

Заметим, что матрицы $\Omega(\psi)$ получаются из «золотых матриц»,

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} cFs(\psi) & sFs(\psi-1) \\ sFs(\psi-1) & cFs(\psi-2) \end{pmatrix}, \quad (58)$$

введённых **А.П. Стаховым** в [12], умножением слева на постоянную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \det A = 1. \quad (59)$$

Матрицу $\Omega(\psi)$ вида (57) назовём *собственной двумерной матрицей Фибоначчи – Лоренца*, а преобразование

$$\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cFs(\psi-1) & sFs(\psi-2) \\ sFs(\psi) & cFs(\psi-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ x_1' \end{pmatrix} \quad (60)$$

собственным двумерным преобразованием Фибоначчи -Лоренца.

Как показано в [12], определитель матрицы (57) равен

$$\det \Omega(\psi) = 1, \quad (61)$$

при этом, согласно первому соотношению из таблицы 1, получаем равенство

$$sFs(\psi) = cFs(\psi-1) + sFs(\psi-2). \quad (62)$$

Выбор нами матрицы $\Omega(\psi)$ вида (57) такой, что из матричного уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$, как оказалось в дальнейшем, находится не только связь между θ и ψ , но и конкретный вид функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, обусловлен тем, что отталкиваясь от классических преобразований Лоренца (36), мы приходим к преобразованиям (60), основанных на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи [8]

$$sFs(x) = \frac{\tau^x - \tau^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad cFs(x) = \frac{\tau^x + \tau^{-x}}{\sqrt{5}},$$

выражаемых через степени «золотой пропорции» (4) - древнейшей научной парадигме о красоте и гармонии Мироздания.

Поэтому мы надеялись (и это оправдалось) получения новых неожиданных эффектов, согласованных, хотя и чисто качественно, не только с современными взглядами на эволюцию Вселенной с момента Большого Взрыва, но даже с прогнозами на существование и гибели гипотетической Вселенной до Большого Взрыва.

Заметим, что ни один из этих эффектов не может быть получен в рамках классических преобразований Лоренца и специальной теории относительности.

Из матричного уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$, получаем соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} ch(\theta) = cFs(\psi - 1) \\ \frac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} = sFs(\psi - 2) \\ \bar{c}(\psi) sh(\theta) = sFs(\psi) \end{array} \right. \quad (63)$$

Отсюда следуют соотношения:

$$\left\{ \begin{array}{l} ch(\theta) = cFs(\psi - 1) \\ sh(\theta) = \bar{c}(\psi) sFs(\psi - 2) = \frac{sFs(\psi)}{\bar{c}(\psi)} \end{array} \right. \quad (64)$$

Но тогда из второго соотношения в формулах (64) получаем, что *собственная нормированная фибоначчиевая скорость света $\bar{c}(\psi)$ в пустоте* для двумерного собственного преобразования Фибоначчи-Лоренца имеет вид:

$$\bar{c}(\psi) = \sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi - 2)}}. \quad (65)$$

Подставим (65) во второе соотношение в (63). Тогда получим равенство:

$$sh(\theta) = \sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi - 2)}} sFs(\psi - 2). \quad (66)$$

Отсюда получаем функцию

$$\theta = \theta(\psi) = \text{Arcsh } z = \ln[z + \sqrt{z^2 + 1}], \quad z = \bar{c}(\psi) sFs(\psi - 2)$$

После несложных преобразований эта формула приобретает вид:

$$\theta = \theta(\psi) = \ln \left[\sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi-2)}} sFs(\psi-2) + cFs(\psi-1) \right] \quad (67)$$

Функция (67) определена на множестве $D = \{-\infty < \psi \leq 0\} \cup \{2 \leq \psi < +\infty\}$, на котором эта функция непрерывна и взаимно однозначна. На интервале $0 < \psi < 2$ функция $\theta = \theta(\psi)$ как вещественная величина не определена, поскольку на этом интервале $\bar{c}(\psi)$ является мнимой величиной (см. рисунок 1).

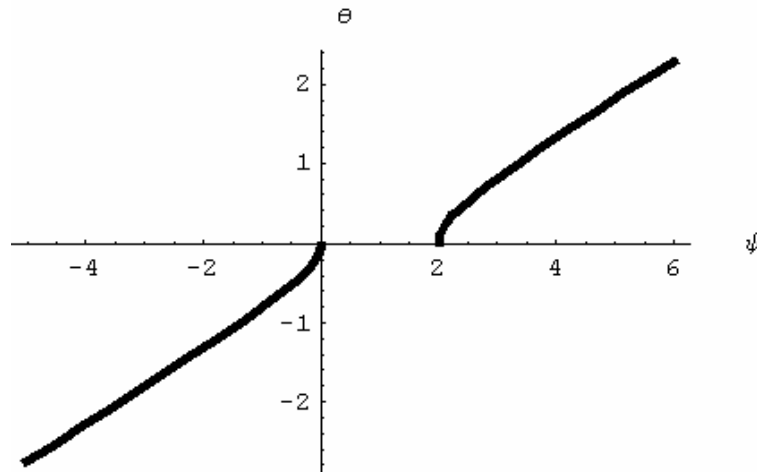


Рисунок 1. График функции $\theta = \theta(\psi)$.

Поэтому вещественное решение $\theta = \theta(\psi)$ уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$ имеет место только на множестве $D = \{-\infty < \psi \leq 0\} \cup \{2 \leq \psi < +\infty\}$, и тогда для таких ψ выполняется поэлементное тождество $\bar{\Omega}(\theta(\psi), \psi) \equiv \Omega(\psi)$.

Обратно, вещественное решение $\psi = \psi(\theta)$ уравнения $\bar{\Omega}(\theta, \psi) = \Omega(\psi)$ имеет место для всех $\theta \neq 0$, и следовательно, для таких θ выполняется тождество $\bar{\Omega}(\theta, \psi(\theta)) \equiv \Omega(\psi(\theta))$. Из формулы (67) и рисунка 1 следует также, что при $\theta = 0-0$ получаем $\psi(0-0) = 0-0$, а при $\theta = 0+0$ получаем $\psi(0+0) = 2+0$.

С этих позиций нужно трактовать переход от преобразований (55) к преобразованиям (60). Тем не менее, после того, как мы перешли к преобразованиям (60), мы будем для полноты картины рассматривать преобразования (60) при всех значениях параметра самоорганизации $-\infty < \psi < +\infty$, при этом для собственной нормированной фибоначчиевой скорости света в пустоте $\bar{c}(\psi)$ использовать формулу (65), график которой изображён на рисунке 2.

График функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ имеет три асимптоты, из которых две для ветви $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ при $2 < \psi < +\infty$ (вертикальная асимптота $\psi = 2$ и горизонтальная асимптота $\bar{c} = \tau \approx 1.61803$) и одна – для ветви $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ при $-\infty < \psi < 0$ (горизонтальная асимптота $\bar{c} = \tau^{-1} \approx 0.61803$).

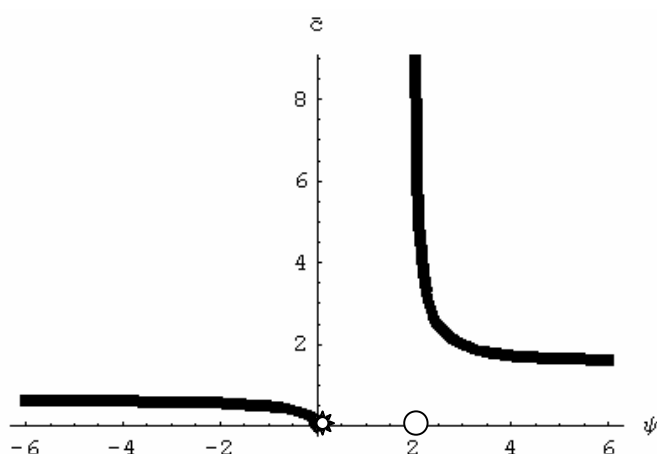


Рисунок 2. График зависимости собственной нормированной фибоначчевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ в пустоте от параметра самоорганизации ψ .

5.2. «Космологическая интерпретация».

График функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ качественно согласуется с современными представлениями об эволюции Вселенной от ее рождения (с начала Большого Взрыва) до наших дней и прогнозах её развития в будущем.

Поэтому в дальнейшем мы (чисто условно) для описания явлений, извлекаемых из качественного и количественного анализа графика $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, также будем пользоваться космологической терминологией, сравнивая каждый раз результаты такого анализа с данными современной космологии, взяв за основу эволюцию во времени T реальной скорости света $c=c(T)$ в пустоте с начала Большого Взрыва ($T=0$) до наших дней и далее.

Для определённости, согласование шкал T и ψ можно произвести, например, по формуле

$$T = a\psi \quad (68)$$

где $-\infty < \psi < +\infty$, $a=100$ [млн. лет], что связано с тем, что с одной стороны, приводимая ниже вторая бифуркация (*переход от тёмного периода к светлому периоду*) для графика $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ происходит при бифуркационном значении $\psi=2$, а с другой стороны, что согласно данным современной космологии [15-16], начало формирования первого поколения горячих звёзд в нашей Вселенной, впервые осветивших её после долгого *периода тёмных веков*, произошло приблизительно через $T=200$ млн. лет после Большого Взрыва.

Отсюда имеем:

$$a = \frac{T}{\psi} = \frac{200 \text{ [млн.лет]}}{2} = 100 \text{ [млн. лет]} \quad (69)$$

Если интерпретировать график, изображённый на рис. 2, в «космологическом плане» как эволюцию *собственной нормированной фибоначчевой скорости*


света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ в пустоте при изменении параметра самоорганизации ψ от бесконечно далёкого прошлого ($\psi = -\infty$) до бесконечно далёкого будущего ($\psi = +\infty$), то условно наблюдаемую картину можно разбить на три периода и две бифуркации (или, в современной терминологии, катастрофы)⁴.

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено отдельно, то для удобства восприятия и сокращения текста вместо термина «собственная нормированная фибоначчиевая скорость света \bar{c} в пустоте» будем употреблять термин «собственная фибоначчиевая скорость света \bar{c} ».

Период 1. До «Большого Взрыва» ($-\infty < \psi < 0$)

Этот период характеризуется *нестабильностью существования*, так как собственная фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ при изменении ψ от «минус бесконечности» ($\psi = -\infty$) до нуля ($\psi = 0$) падает от значения $\bar{c} = \tau^{-1}$ до полного исчезновения (коллапса, или, в другой терминологии, с образованием точки сингулярности), то есть до значения $\bar{c} = 0$ (до момента «Большого Взрыва»), где τ - «золотая пропорция» (или, «золотое сечение»).

Первая бифуркация. «Большой Взрыв» ($\psi = 0$).

Первым бифуркационным значением для собственной фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ является точка $\psi = 0$, отмеченная на рисунке 2 символом . При переходе через точку $\psi = 0$ получаем, что слева от точки $\psi = 0$ в сколь угодно малой окрестности этой точки значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются вещественными и положительными, стремящимися к нулю при $\psi \rightarrow 0-0$, а справа от точки $\psi = 0$ в сколь угодно малой окрестности этой точки значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются чисто мнимыми, модуль которых стремится к нулю при $\psi \rightarrow 0+0$, то есть, выражаясь на обычном языке, можно говорить о том, что при переходе слева направо через точку $\psi = 0$ наступил «тёмный период».

Такое явление в космологии ассоциируется с бифуркацией (или катастрофой), которое называется *Большим Взрывом*. Поэтому такую бифуркацию мы также назовём «Большим Взрывом», но взятым в кавычках.

Современные представления о Большом Взрыве. По современным данным космологии окончательно выяснено, что Большой Взрыв произошёл 13.7 миллиардов лет назад, то есть такой возраст современной Вселенной. Это открытие связано с недавним выдающимся достижением космологии (февраль 2003 года) - созданием на основании полугодовых наблюдений и анализа космического

⁴ Бифуркацией (или катастрофой) называется термин, употребляемый в физике и математике применительно к ситуации, когда некоторый объект $Q = Q(\mu)$ зависит от параметра μ и в любой окрестности некоторого значения $\mu = \mu_0$ (бифуркационное значение, или точка бифуркации) исследуемые качественные свойства объекта Q не являются одинаковыми для всех μ .

зонда Microwave Anisotropy Probe (дословный перевод: микроволновый анизотропный прощупыватель) карты Уилкинсона всей видимой части Вселенной [16].

Отметим также, что с точки зрения современной космологии нет никакой информации о том, что было до Большого Взрыва, а также, что было в самые первые моменты после Большого Взрыва (в интервале времени $0 \leq T < 10^{-45}$ сек). После Большого Взрыва Вселенная оставалась «тёмной», но необыкновенно горячей и плотной. Но по мере расширения температура излучения начала понижаться. Данные взяты из [14-16].

Период 2. Тёмный период ($0 < \psi < 2$). Отсутствие вещественной собственной фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$.

В этот период собственная фибоначчиевая скорость света \bar{c} не может принимать вещественных значений, так как подкоренное выражение в формуле (65) является отрицательным. Поэтому собственная фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, согласно формуле (65), есть чисто мнимая функция, имеющая вид:

$$\bar{c} = \bar{c}(\psi) = i |\bar{c}(\psi)|, \quad |\bar{c}(\psi)| = \sqrt{\left| \frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi-2)} \right|}, \quad |\bar{c}(0+0)| = 0, \quad |\bar{c}(2-0)| = +\infty, \quad (70)$$

где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Современные представления о тёмном периоде. По современным данным космологии, Вселенная, быстро остыв после Большого Взрыва, долгое время оставалась тёмной и холодной - ничто её не освещало. Этот период, названный «Тёмными веками», закончился, когда сформировались звёзды. Очень ранний возраст Вселенной, к которому относят начало формирования первого поколения горячих звёзд, впервые осветивших её приблизительно через 200 млн. лет после Большого Взрыва, привёл к идее о том, что таинственный тип невидимой материи собрал газ вместе вскоре после рождения Вселенной, позволив сформироваться первым звёздам и галактикам. Данные взяты из [14-16].

Вторая бифуркация. Переход от «тёмного периода к светлому периоду» ($\psi = 2$).

Вторым бифуркационным значением для собственной фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ является точка $\psi = 2$, отмеченная на рисунке 2 символом \bigcirc . При переходе через точку $\psi = 2$ получаем, что слева от точки $\psi = 2$ в сколь угодно малой окрестности этой точки значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются чисто мнимыми, модуль которых стремится к «плюс бесконечности» при $\psi \rightarrow 2-0$, а справа от точки $\psi = 2$ в сколь угодно малой окрестности этой точки значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются вещественными и положительными, стремящимися к «плюс бесконечности» при $\psi \rightarrow 2+0$.

Период 3. Собственная фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ вновь становится вещественной и положительной ($2 < \psi < +\infty$). Настоящий

период. Прогнозы на будущее.

Период 3 характеризуется *стабильностью существования* вещественной собственной нормированной фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi) > \tau$. После некоторого периода *релаксации (переходного периода)* от значения $\psi = 2$, соответствующего $T = 200$ [млн. лет] до значения параметра самоорганизации $\psi = \psi_{наст}$, соответствующего настоящему времени $T = 13.7$ [млрд. лет] существования Вселенной, *собственная* фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ падает от бесконечно больших значений до величин, близких к золотой пропорции $\tau \approx 1.61803$. Отсчёт всех величин ведётся от момента Большого Взрыва, то есть от значения $T = 0$ ($\psi = 0$) в направлении увеличения этих величин.

Для этого найдём значение $\psi = \psi_{наст}$, соответствующее значению $T_{наст} = 13.7$ [млрд. лет] = 13700 [млн. лет] по формуле (68) $\psi_{наст} = \frac{T_{наст}}{a}$. Поскольку, согласно (69), $a = 100$ [млн. лет], то $\psi_{наст} = \frac{T_{наст}}{a} = \frac{13700}{100} = 137$, и, следовательно, в силу (65) имеем:

$$\bar{c}(\psi_{наст}) = \sqrt{\frac{sFs(\psi_{наст})}{sFs(\psi_{наст} - 2)}} = \tau + 2.22045 \times 10^{-16} \quad (71)$$

Отсюда *собственная (ненормированная) фибоначчиевая скорость света в пустоте* $c = \bar{c}(\psi) c_0$ [м.сек⁻¹] в настоящее время равна величине

$$\begin{aligned} c_{наст} = \bar{c}(\psi_{наст}) c_0 &= \left(\tau + 2.22045 \times 10^{-16} \right) \frac{2.998}{\tau} 10^8 = \\ &= \left(2.998 \times 10^8 + 4.11419 \times 10^{-8} \right) \left[\text{м.сек}^{-1} \right] \approx 300000 \left[\text{км.сек}^{-1} \right] \end{aligned} \quad (72)$$

где нормирующий множитель c_0 [м.сек⁻¹] в соотношениях (54) выбирался в виде: $c_0 = \frac{2.998}{\tau} 10^8$ [м.сек⁻¹].

Далее при увеличении параметра самоорганизации $\psi > \psi_{наст} = 137$ *собственная* нормированная фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ как бы «замораживается», медленно приближаясь при $\psi \rightarrow +\infty$ к предельному значению $\bar{c}_{пред} = \tau$, то есть *коллапса* не наблюдается.

Современные представления о настоящем периоде и возможные сценарии развития Вселенной в будущем.

После окончания «темных веков» (приблизительно через времени $T = 200$ млн. лет после Большого Взрыва, соответствующего значению $T = 0$) в течение времени T от 200 млн. лет до 13.7 млрд. лет продолжалось рождение звёзд и галактик, при этом первое поколение гигантских звёзд не имело планет и свет, исходящий из этих звёзд, имел скорость, значительно превосходящую современную скорость света в пустоте $\approx 300\,000$ [км.сек⁻¹].

Современный период. По мере расширения Вселенной скорость света спадала, а когда температура Вселенной достигла некоторого критического

значения, произошёл *фазовый переход* – что-то вроде превращения воды в лёд: скорость света *замёрзла* на нынешнем уровне. Однако так продолжать вечно не может, и Вселенная должна дальше эволюционировать как во времени, так и в пространстве [17].

Сценарии прекращения существования Вселенной.

Сценарий 1. Большой Хруст.

Вселенная начнёт сжиматься, закончив свою жизнь *схлопыванием* (коллапсом) всех атомов и элементарных частиц в одну безразмерную точку с бесконечной плотностью и температурой. Этот сценарий конца Вселенной получил название *Большого Хруста* [16].

Сценарий 2. Большой Шёпот.

Вселенная будет расширяться без ускорения до бесконечности, закончив свою жизнь *Большим Шёпотом*, когда всё её вещество, вплоть до последних атомов и частиц, истончится до нуля (приблизительно через 10^{100} лет после Большого Взрыва) [16].

Сценарий 3. Большой Разрыв.

Вселенная не просто расширяется, а делает это ускоренно, как будто в ней существует какое-то невидимое *распирающее поле*, энергия которого получила название *тёмной*. Через 22 млрд. лет, считая от нынешнего момента, за счет бесконечно нарастающего расширения, Вселенная обратится *в ничто*, закончив свою жизнь *Большим Разрывом*. Сейчас этот сценарий наиболее вероятен, что подтверждает анализ карты *Уилкинсона* и изучение сверхновых звёзд [16, 17].

Сценарий 4. Осциллирующая Вселенная.

Расширение Вселенной сменится сжатием (не обязательно до коллапса), затем сжатие сменится расширением, и так далее, то есть начнётся *осцилляция* [18 - 20].

Замечание. Из формулы (67) и рисунка 2 следует, что поскольку при $\psi \rightarrow +\infty$ $\bar{c}(\psi) \rightarrow \tau$, то в нашей модели *коллапса* нет.

5.3. Метрическая форма для собственных двумерных преобразований Фибоначчи -Лоренца.

При $\psi < 0$ и $\psi > 2$ плоскость $L^2 = (\zeta, x_1)$ можно снабдить знакопеременной метрической формой Минковского

$$(ds)^2 = (\bar{c}(\psi))^2 (d\zeta)^2 - (dx_1)^2, \quad (73)$$

инвариантной относительно собственного преобразования Фибоначчи Лоренца (60), поскольку при $\psi < 0$ и $\psi > 2$ имеем $\bar{c}(\psi) > 0$ и, следовательно, $(\bar{c}(\psi))^2 > 0$.

Поэтому при $\psi < 0$ и $\psi > 2$ плоскость $L^2 = (\zeta, x_1)$ является плоскостью Минковского R_1^2 с координатной системой $K = (\xi, \chi_1)$. При бифуркационных значениях $\psi = 0$ и $\psi = 2$ метрика (75) имеет особенности. Далее, поскольку при

$0 < \psi < 2$ собственная фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ как вещественное число не существует (см. формулу (70), то метрическую форму на плоскости $L^2 = (\zeta, x_1)$, инвариантную относительно преобразования (60), вводить не имеет смысла.

5.4. Собственная нормированная фибоначчиевая скорость движения одной ИСО относительно другой ИСО

Согласно формуле (51), для собственных двумерных преобразований Лоренца (52) на плоскости Минковского $R_2^1 = (x_0 = ct, x_1)$ была введена безразмерная нормированная относительная скорость \bar{v} , имеющая вид:

$$\bar{v} = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} = th(\theta), |\bar{v}| < 1.$$

После перехода от собственных преобразований Лоренца (52) к собственным преобразованиям Фибоначчи-Лоренца (60) по формулам (64), получаем соотношение

$$\bar{v} = \bar{v}(\theta) = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} = th(\theta) = \frac{1}{c(\psi)} \frac{sFs(\psi)}{cFs(\psi-1)} = \frac{\bar{V}(\psi)}{c(\psi)}, \quad (74)$$

где безразмерную величину

$$\bar{V} = \bar{V}(\psi) = \frac{sFs(\psi)}{cFs(\psi-1)} \quad (75)$$

назовём *собственной нормированной скоростью движения ИСО $K' = (\xi', x_1')$ относительно ИСО $K = (\xi, x_1)$ вдоль оси x_1 преобразования Фибоначчи-Лоренца (60).*

На рисунке 3 совмещены два графика: график $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ (формула (65)), и график $\bar{V} = \bar{V}(\psi)$ (формула (75)).

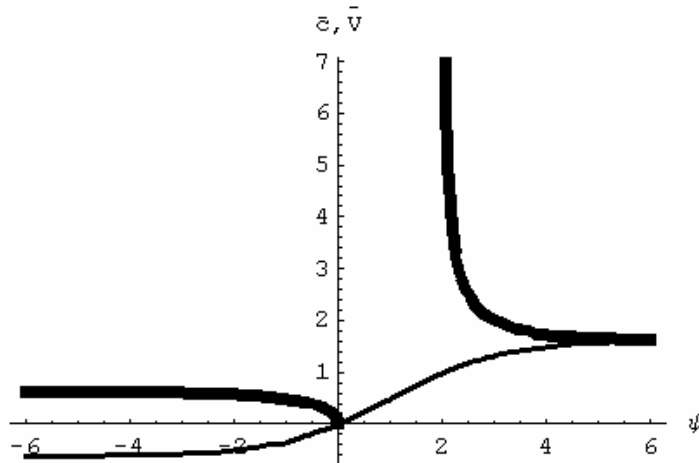


Рисунок 3. Совмещённые графики $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ (жирная линия) и $\bar{V} = \bar{V}(\psi)$ (тонкая чёрная линия).

График $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ имеет три асимптоты: вертикальную $\psi = 2$, горизонтальную $\bar{c} = \tau$, горизонтальную $\bar{c} = \tau^{-1}$. График $\bar{V} = \bar{V}(\psi)$ имеет две горизонтальных асимптоты: $\bar{c} = -\tau^{-1}$ и $\bar{c} = \tau$.

Замечание. Отметим, что функция $\bar{V} = \bar{V}(\psi)$ (формула (75)) определена при всех $-\infty < \psi < +\infty$, то есть определена и на интервале $0 < \psi < 2$ (*тёмный период*), на котором не определена функция $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$, ибо на этом интервале функция $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ является чисто мнимой (формула (70)).

С точки зрения современной космологии этот феномен можно объяснить тем, что в тёмный период существования Вселенной хотя ещё не зажглись первые звёзды и некому было её освещать, тем не менее во Вселенной уже появились элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны) и атомы, то есть, априори, уже можно говорить о скорости движения \bar{V} инерциальных систем (ИСО) относительно друг друга, «привязывая» ИСО к конкретным элементарным частицам и атомам.

В этом плане отождествление двух понятий: *скорость движения одной ИСО относительно другой ИСО есть скорость движения одного источника света относительно другого источника света*, как это принято в классической СТО, в нашей ситуации на интервале $0 < \psi < 2$ не корректно.

Из формул (65) и (75) непосредственно получаем соотношения:

$$\bar{c} = \bar{c}(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\bar{V}}{\bar{V}-1}}, \quad \bar{V} = \bar{V}(\bar{c}) = \frac{(\bar{c})^2}{(\bar{c})^2 - 1}, \quad (76)$$

где $|\bar{V}| < |\bar{c}|$.

Замечание 1. Более точные соотношения между \bar{c} и \bar{V} при различных значениях ψ можно извлечь из формул (65), (75) и из рисунка 3.

Замечание 2. По схеме, аналогичной рассмотрению *собственных двумерных преобразований Фибоначчи-Лоренца*, можно исследовать *несобственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца*, задаваемые матрицей

$$\underline{\underline{\Omega}}(\psi) = \begin{pmatrix} sFs(\psi-1) & cFs(\psi-2) \\ cFs(\psi) & sFs(\psi-1) \end{pmatrix}, \quad \det \underline{\underline{\Omega}}(\psi) = -1,$$

но этот вопрос мы выносим за рамки настоящей статьи.

6. Золотая фибоначчиевая λ -гонометрия и 4-я проблема Гильберта

6.1. Четвертая проблема Гильберта.

В докладе «Математические проблемы», сделанном на II Международном Конгрессе математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, **Давид Гильберт** сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот

доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе. Русский перевод доклада Давида Гильберта и комментарии к нему даны в работе [21]. В частности, в четвёртой проблеме Гильберта говорится: «Возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии». Под геометрией, ближайшей к евклидовой, Гильберт указал геометрию Лобачевского, геометрию Римана, геометрию Минковского.

6.2. Золотая фибоначчьева λ -гониометрия Стахова.

В работе [22-23] Алексей Стахов ввел широкое обобщение симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка (11), (12), основанных на так называемых «металлических пропорциях». Под «металлическими пропорциями» (Шпинадель [24], Газале [25], Татаренко [26]) понимается новый класс математических констант, которые возникают в результате решения следующего квадратного уравнения

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0 \quad (77)$$

и выражаются следующей математической формулой:

$$\tau_\lambda = \frac{\sqrt{4 + \lambda^2} + \lambda}{2}, \quad (78)$$

где $\lambda > 0$ - заданное положительное действительное число.

Заметим, что при $\lambda=1$ уравнение (77) сводится уравнению «золотой пропорции» (3), а «металлические пропорции» (77) – к «золотой пропорции» (4).

С «металлическими пропорциями» (78) связаны два новых класса рекуррентных числовых последовательностей - λ -числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ и λ -числа Люка $L_\lambda(n)$, которые задаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \quad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1, \quad (79)$$

$$L_\lambda(n+2) = \lambda L_\lambda(n+1) + L_\lambda(n), \quad L_\lambda(0) = 2, L_\lambda(1) = \lambda, \quad (80)$$

где $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$.

Эти числовые последовательности связаны с «металлическими пропорциями» (78) с помощью так называемых *формул Газале*:

$$F_\lambda(n) = \frac{\tau_\lambda^n - (-1)^n \tau_\lambda^{-n}}{\sqrt{4 + \lambda^2}}; \quad L_\lambda(n) = \tau_\lambda^n + (-1)^n \tau_\lambda^{-n} \quad (81)$$

Основываясь на формулах Газале (81), Алексей Стахов ввел в [22, 23] так называемые гиперболические λ -функции Фибоначчи и Люка:

$$sF_\lambda(x) = \frac{\tau_\lambda^x - \tau_\lambda^{-x}}{\sqrt{4 + \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 + \lambda^2}} \left[\left(\frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \right)^x - \left(\frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2} \right)^{-x} \right] \quad (82)$$

Гиперболический λ -синус Фибоначчи

Гиперболический λ -косинус Фибоначчи

$$cF_{\lambda}(x) = \frac{\tau_{\lambda}^x + \tau_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}} \left[\left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^x + \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^{-x} \right] \quad (83)$$

Гиперболический λ -синус Люка

$$sL_{\lambda}(x) = \tau_{\lambda}^x - \tau_{\lambda}^{-x} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}} \left[\left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^x - \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^{-x} \right] \quad (84)$$

Гиперболический λ -косинус Люка

$$cL_{\lambda}(x) = \tau_{\lambda}^x + \tau_{\lambda}^{-x} = \frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}} \left[\left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^x + \left(\frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \right)^{-x} \right] \quad (85)$$

Заметим, что эти гиперболические функции (82)-(85) являются обобщением симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка (11), (12) и сводятся к последним при $\lambda=1$.

6.3. Золотая фибоначчьева λ -гонометрия и 4-я проблема Гильберта

В связи с четвёртой проблемой Гильберта, авторами настоящей статьи предлагается бесконечное множество моделей (в зависимости от вещественного параметра $\lambda > 0$) плоскости Лобачевского в координатах (u, v) , $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, гауссовой кривизны $K = -1$, таких, что метрическая форма имеет вид

$$(ds)^2 = \ln^2(\tau_{\lambda})(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4} [sF_{\lambda}(u)]^2 (dv)^2, \quad (86)$$

где $\tau_{\lambda} = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - «металлическая пропорция», а $sF_{\lambda}(u)$ - гиперболический λ -синус Фибоначчи.

Непосредственно можно установить, что если в модели (2) координаты (u, v) переобозначить через (\bar{u}, \bar{v}) , то есть переписать модель (2) в виде

$$(ds)^2 = (d\bar{u})^2 + sh^2(\bar{u})(d\bar{v})^2, \quad (87)$$

то после замены переменных

$$\bar{u} = \bar{u} \quad (\bar{u} = \bar{u}(u, v) = \text{Arcch} \left[\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2} cF_{\lambda}(u) \right]) = \text{Arcsh} \left[\frac{\sqrt{4+\lambda^2}}{2} sF_{\lambda}(u) \right], \quad \bar{v} = \bar{v}(u, v) = v \quad (88)$$

модель (86) становится изометричной модели (2), то есть

$$(ds)^2 = \ln^2(\tau_{\lambda})(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{2} [sF_{\lambda}(u)]^2 (dv)^2 = (d\bar{u})^2 + sh^2(\bar{u})(d\bar{v})^2 \quad (89)$$

и, следовательно, при каждом $\lambda > 0$ модели (86), которые назовём *золотыми λ -моделями плоскости Лобачевского*, изометричны всем ранее построенным классическим моделям плоскости Лобачевского.

Укажем важные частные случаи золотых λ -моделей (86) плоскости Лобачевского.

1). При $\lambda = 1$ имеем $\tau_{\lambda} = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция») и, следовательно, *золотая модель плоскости Лобачевского* примет вид:

$$(ds)^2 = \ln^2(\tau)(du)^2 + \frac{5}{4}[sFs(u)]^2 (dv)^2 \quad (90)$$

где $sFs(u)$ - *симметричный гиперболический синус Фибоначчи* (см. часть 2 настоящей статьи).

2). При $\lambda = 2sh(1)$ имеем $\tau_\lambda = e$ («число Непера»), и, следовательно, получаем классическую модель (2) плоскости Лобачевского.

Таким образом, проведенные рассуждения дают право авторам утверждать, что рассмотренные выше λ -модели (86) плоскости Лобачевского, основанные на золотой фибоначчией λ -гонометрии, задают бесконечное множество новых интерпретаций плоскости Лобачевского гауссовой кривизны $K=-1$, изометричных всем ранее известным классическим интерпретациям плоскости Лобачевского гауссовой кривизны $K=-1$ (см. пункт 1.1), которые вместе с геометрией Лобачевского, геометрией Римана, геометрией Минковского могут «*считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии*» (Давид Гильберт). Естественно, что авторы при этом не претендуют на окончательное решение 4-й проблемы Гильберта, но подчеркивают, что такой подход приближает к ее решению.

7. Обсуждение полученных результатов.

7.1. В настоящей статье мы не хотим вступать в спор о правомочности или не правомочности Специальной теории относительности (СТО), основой которой являются *преобразования Лоренца*. Мы просто хотели понять, что получится, если классические *преобразования Лоренца*, используемые в качестве преобразования координат и времени в СТО, заменить на преобразования, которым мы дали название *собственных двумерных преобразований Фибоначчи-Лоренца* (формула (60)), а матрицы $\Omega(\psi)$ вида (57), соответствующие этим преобразованиям, - *собственными двумерными матрицами Фибоначчи-Лоренца*, при этом определитель этих матриц равен $\det \Omega(\psi) = 1$.

Матрицы $\Omega(\psi)$ получены с помощью операции умножения слева на постоянную матрицу (59) введённых **А.П. Стаховым** в [12] *золотых матриц*, элементами которых являются введённые **А.П. Стаховым** и **Б.Н. Розиным** в [8, 9] *симметричный гиперболический синус* и *косинус Фибоначчи*, задаваемые соотношениями (11).

Учитывая ту роль, которую проявляет золотая пропорция (золотое сечение) τ в современном естествознании как *основа красоты и гармонии Природы*, мы вправе были ожидать появления новых эффектов по сравнению с СТО, если рассматривать преобразования *Фибоначчи-Лоренца* как преобразования координат и времени, сохраняя ту же терминологию, что и в СТО.

В результате вместо *стационарной* классической модели СТО, в которой скорость света в пустоте является постоянной величиной, мы получили *нестационарную* модель, в которой *фибоначчиевая скорость света в пустоте* меняется в зависимости от угла фибоначчиевого поворота ψ , который мы, возможно, несколько нескромно (да простят нас физики и биологи) назвали *параметром самоорганизации*.

Построив и проанализировав графики *собственной нормированной фибоначчиевой скорости света* $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ в пустоте для собственных двумерных преобразований Фибоначчи-Лоренца в зависимости от ψ (рисунок 2), мы дали «космологическую интерпретацию» полученных результатов, употребив (опять несколько нескромно) такие термины, как *Большой взрыв* и другие, и, более того, описав теоретический сценарий развития мироздания до-, во время- и после Большого взрыва.

Из вышеуказанного следует, что применение гиперболических функций Фибоначчи и золотых матриц имеет фундаментальное значение в теоретической физике и других разделах естествознания.

7.2. Настоящим исследованием мы хотели бы привлечь внимание к 4-й проблеме Гильберта, которая непосредственно касается проблемы создания новых геометрий, ближайших к обыкновенной евклидовой геометрии. Авторы показывают, что более общий класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка, введенных **Алексеем Стаховым** в [12] и основанных на «металлических пропорциях» (78), представляет интерес с точки зрения 4-й проблемы Гильберта. Именно эта «золотая фибоначчиевая λ -гониометрия» приводит к λ -моделям (86) плоскости Лобачевского, которые задают бесконечное множество новых интерпретаций плоскости Лобачевского гауссовой кривизны $K=-1$, изометричных всем ранее известным классическим интерпретациям плоскости Лобачевского гауссовой кривизны $K=-1$, которые вместе с геометрией Лобачевского, геометрией Римана, геометрией Минковского могут «считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии» (Давид Гильберт).

8. Дальнейшие перспективы исследований:

8.1. Вышеуказанные *собственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца* на плоскости основаны на использовании симметричных гиперболических функций $sFs(\psi)$, $cFs(\psi)$, которые связаны с золотой пропорцией (золотым сечением) $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Представляет интерес по аналогичной схеме с использованием «космологической интерпретации» рассматривать на плоскости при $\lambda > 1$ *двумерные λ -преобразования Фибоначчи-Лоренца*, основанные на использовании введенных **Алексеем Стаховым** в [22-23] *гиперболических λ -функций Фибоначчи* (82)-(85), которые являются обобщением введенных **Алексеем Стаховым** и **Борисом Розиным** в [8] *симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка*.

Исследование по аналогичной схеме линейных двумерных преобразований на плоскости, для которых соответствующая матрица основана на использовании *квазисинусообразных фибоначчиевых функций* $sFFs(\psi)$, $cFFs(\psi)$, предложенных **А.П. Стаховым** и **Б.Н. Розиным** в «*Золотом Шофаре*» (проблема поставлена **Б.Н. Розиным**) [27].

8.2. По аналогии с классической специальной теорией относительности (СТО), основанных на преобразованиях Лоренца, представляет интерес разработать для *двумерных λ -преобразований Фибоначчи-Лоренца* ($\lambda \geq 1$) релятивистскую кинематику и динамику, то есть создать λ -специальную теорию относительности (λ -СТО).

После этого возможно имеет смысл, внося эффекты гравитационного взаимодействия тел, хотя бы для многообразий размерности два разработать некоторый аналог общей теории относительности (ОТО), которую можно назвать λ -ОТО.

8.3. Исследование λ -преобразований Фибоначчи-Лоренца, где $\lambda \geq 1$, на двумерном торе и на двумерной сфере с четырьмя точками ветвления, то есть когда время и пространственная координата замкнуты.

8.4. Для динамических систем с дискретным временем (*каскадов*), заданных на торе и замкнутых ориентируемых поверхностях отрицательной эйлеровой характеристики, представляет интерес установление связи между *топологической энтропией* (мерой хаоса) и λ -пропорциями $\tau_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}$, показав, что при $\lambda \geq 1$ для таких преобразований $\ln(\tau_\lambda)$ является наименьшей топологической энтропией среди всех энтропий преобразований, гомотопных преобразованию, для которого топологическая энтропия равна $\ln(\tau_\lambda)$.

8.5. На основе золотой фибоначчевой гониометрии **А.П. Стахова** создать на плоскости, поверхностях и в пространстве размерности большей двух *фибоначчевую* качественную теорию динамических систем с непрерывным временем (*потоков*), дискретным временем (*каскадов*), а также *слоений* с особенностями. Это потребует привлечения широкого круга специалистов по дифференциальным уравнениям, геометрии и топологии.

Литература

1. **Aranson S., Zhuzhoma E.** On arithmetical and dynamical properties of Lorenz maps of the torus. ArXiv:math. DS/0404464, 26 Apr. **2004**, V.1, P.1-14.
2. **Aranson S., Zhuzhoma E.** On arithmetical and dynamical properties of Lorenz maps of the torus. Institut de Recherche Mathematique de Rennes. France, Prepublication 04-27. April **2004**, P.1-14.
3. **Арансон С.Х., Жужома Е.В.** Арифметические и динамические свойства преобразований Лоренца на торе. Труды Средневолжского математического общества. Материалы Второй Международной научной школы «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Саранск. Россия. **2005**, Т.7, №1, С.245-247.
4. **Воробьев Н.Н.** Числа Фибоначчи. Москва, Наука, **1978**.

5. **Hoggat, V. E.** Fibonacci and Lucas Numbers, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California, **1969**.
6. **Стахов А.П.** Коды золотой пропорции. Москва: Радио и связь, 1984.
7. **Стахов А.П., Ткаченко И.С.** Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, **1993**, Т. 208, № 7.
8. **Stakhov A, Rozin B.** On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals **2004**, 23(2): 379-389.
9. **Stakhov A. Rozin B.** The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, **2006**, V.8, No.3
<http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/stakhov/index.html>
10. **Боднар О.Я.** Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: «Свит», **1994**.
11. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. Москва, Наука, **1968**, 367 с.
12. **Stakhov A.** The “golden” matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals, **2007**, V.32, Issue 3, 1138-1146.
13. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** Современная геометрия: Методы и приложения. Москва, Наука, **1970**, 760 с.
14. **Рубин С.** Мир, рождённый из «ничего». Научный взгляд на сотворение мира.
<http://galspace.spb.ru/index60.html>
15. **Андреев Н.** После Большого Взрыва.
<http://galspace.spb.ru/index60-2.html>
16. **Нудельман Р.** Космология: конец или продолжение. Карта Уилкинсона. «Знание – сила». Москва, **2003**, №10.
http://www.znanie-sila.ru/issue_2410.html
17. **Нудельман Р.** Скорость света: исчерпаны ли парадоксы? «Знание – сила». Москва. **2003**, №11.
18. **Сахаров А.Д.** Космологические модели Вселенной с поворотом стрелы Времени. ЖЭТФ. Москва: Наука. **1980**, 79, с. 689-693.
19. **Сахаров А.Д.** Многолистные модели Вселенной. ЖЭТФ. Москва: Наука. **1982**, 83, с.1233-1240.
20. **Сахаров А.Д.** Космологические переходы с изменением сигнатуры метрики. ЖЭТФ. Москва: Наука. **1984**, 87, с.375-383.
21. **Александров П.С.** (общий редактор). Проблемы Гильберта. Москва, «Наука». **1969**, 240 с.
22. **Стахов А.П.** Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12. **2006**
<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm>
23. **Стахов А.П.** Металлические Пропорции – новые математические константы Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008 <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm>
24. **Vera W. de Spinadel.** From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
25. **Gazale Midhat J.** Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002).

26. **Татаренко А.А.** Золотые T_m – гармонии и D_m – фракталы — суть солитоноподобного T_m – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm>

27. **Stakhov A., Rozin B.** The Golden Shofar. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, Volume 26, Issue 3, 677-684.