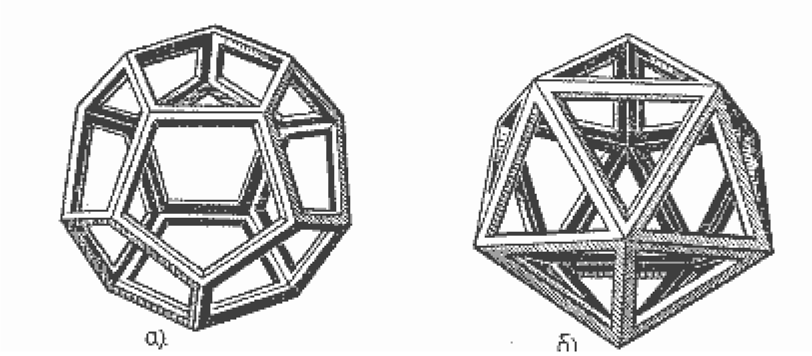
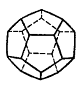
С.А.Алфёров

О взаимосвязях додекаэдра и икосаэдра

Двенадцатигранник из 12-и правильных пятиугольников и двадцатигранник из 20-и правильных треугольников, додекаэдр и икосаэдр. Сколько о них уже рассказано, начиная с Платона. А находят их в раскопках еще более ранних времен, предполагая в качестве игрушек детей и игральных костей.



Приведем их основные геометрические параметры через значение ребра «а» и величину Золотой пропорции φ_2=1,618…

	$\mathbf{R_{оп.}}$	$\mathbf{r_{вп.}}$	$\mathbf{S^*}$	**V**
Д 	$\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_2 \cdot a$	$\frac{\varphi_2{}^2}{2\tau} \cdot a$	$3\sqrt{5} \cdot \varphi_2{}^2 \cdot \tau \cdot a^2$	** $\frac{7}{4}(\varphi_2 + \frac{8}{7}) \cdot a^3$
И 	$\frac{\tau}{2}\varphi_2 \cdot a$	$\frac{\varphi_2 + 1}{2\sqrt{3}} \cdot a$	$5\sqrt{3} \cdot a^2$	$\frac{5}{6}(\varphi_2 + 1) \cdot a^3$

*) При равном объеме $S_и/S_д \approx 97\%$ при $a_и \approx 1{,}52 * a_д$

**) Или аналогичная формула: $\frac{7}{4}(\varphi_1 + \frac{22}{7}) \cdot a^3$. Интересно вспомнить, что Пифагор определял π=22/7.

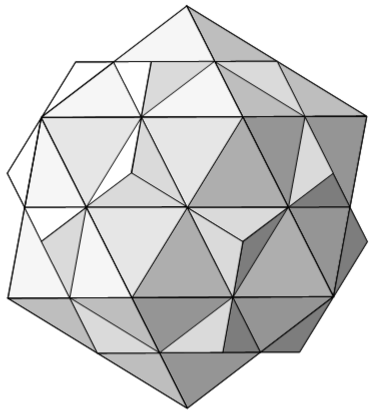
Додекаэдр и икосаэдр содержат в себе еще замечательные параметры, связывающие их с миром «Золотой пропорции». И заметьте, это только некоторые параметры; эти тела сплошь состоят из «золотых величин», построены на них.

Додекаэдр:		
1	Угол наклона соседних граней	$90° + \psi = 2(\varphi + \psi)$
2	Угол между продолженными гранями (связанными ребром)	$2\varphi°$
3	Соотношение сторон (ребро : L) внутреннего прямоугольника (ребро - центр - ребро)	$1 : \varphi_2{}^2$
4	Угол между осью и плоскостью внутреннего прямоугольника	$\varphi°$
5	Отношение расстояния между центрами соседних граней к расстоянию от центра до ребра	$1 : \varphi_0$
6	Расстояние от центра до ребра	$b = 0{,}5\varphi_2{}^2 \times a$
7	Ребро взаимопересеченного икосаэдра	$\varphi_1 \times b$

И к о с а э д р :		
1	Внутренний прямоугольник (отношение длины ребра к расстоянию между вершинами через одну)	$1 : \varphi_2$
2	Угол наклона ребра к плоскости внутреннего 5-угольника	$\varphi°$
3	Угол между плоскостями 2-х внутренних 5-угольников	$2\varphi°$
4	Внутренний центральный угол между вершинами ребра	$2\varphi°$

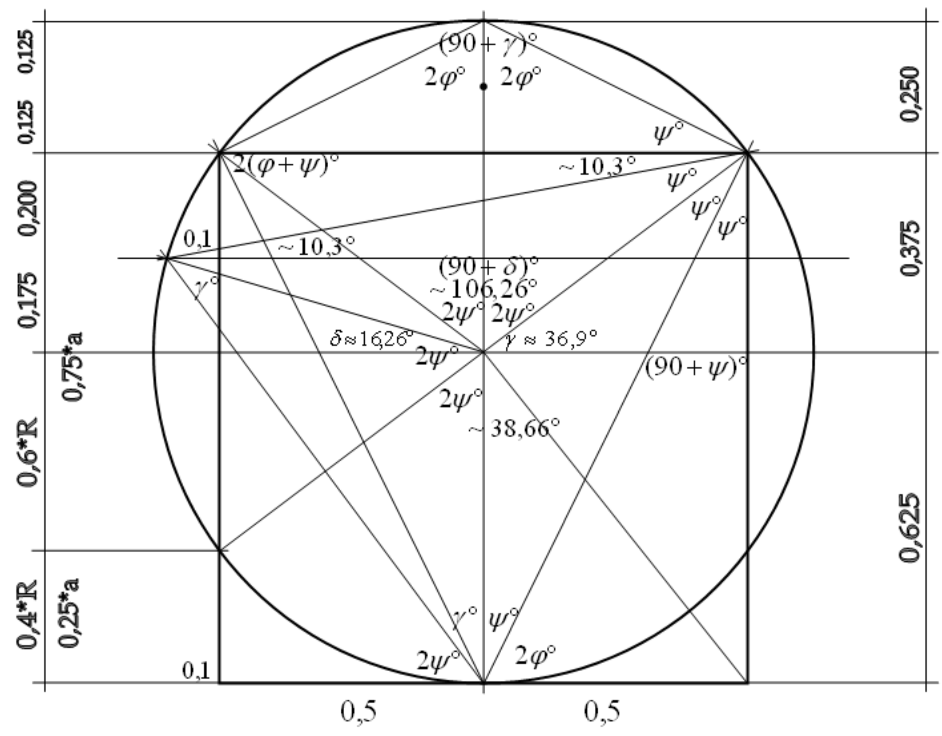
В этих таблицах $\varphi_0=\sqrt{1{,}25}=1{,}118\ldots$, $\varphi_1=0{,}618\ldots$, $\varphi°$ - угол, у которого $tg\varphi°=\varphi_1$, ψ - угол, связанный таким выражением: $2\varphi°+\psi°=90°$.

У взаимопересекающихся додекаэдра и икосаэдра, то есть у которых равны расстояния от их центров до ребер, их ребра имеют следующее соотношение: $a_д = \varphi_1 * a_и$.



Этот рисунок вложенных друг в друга додекаэдра и икосаэдра являются как бы символом их «тесного сосуществования». Имея равное количество ребер (30), они перекрестно обмениваются количествами вершин и граней, а также количествами углов на грани и в вершине. Последние количества входят в обозначение индекса Шлефли: (5,3) для додекаэдра и (3,5) для икосаэдра. То есть они взаимообратны и дополнительны (как и другая пара: куб и октаэдр).

Есть в математике один подобный объект: вписано-описанные прямоугольники. Взаимосвязанность пар правильных тел подобна вписанности-описанности. Посмотрите ВО-квадрат.

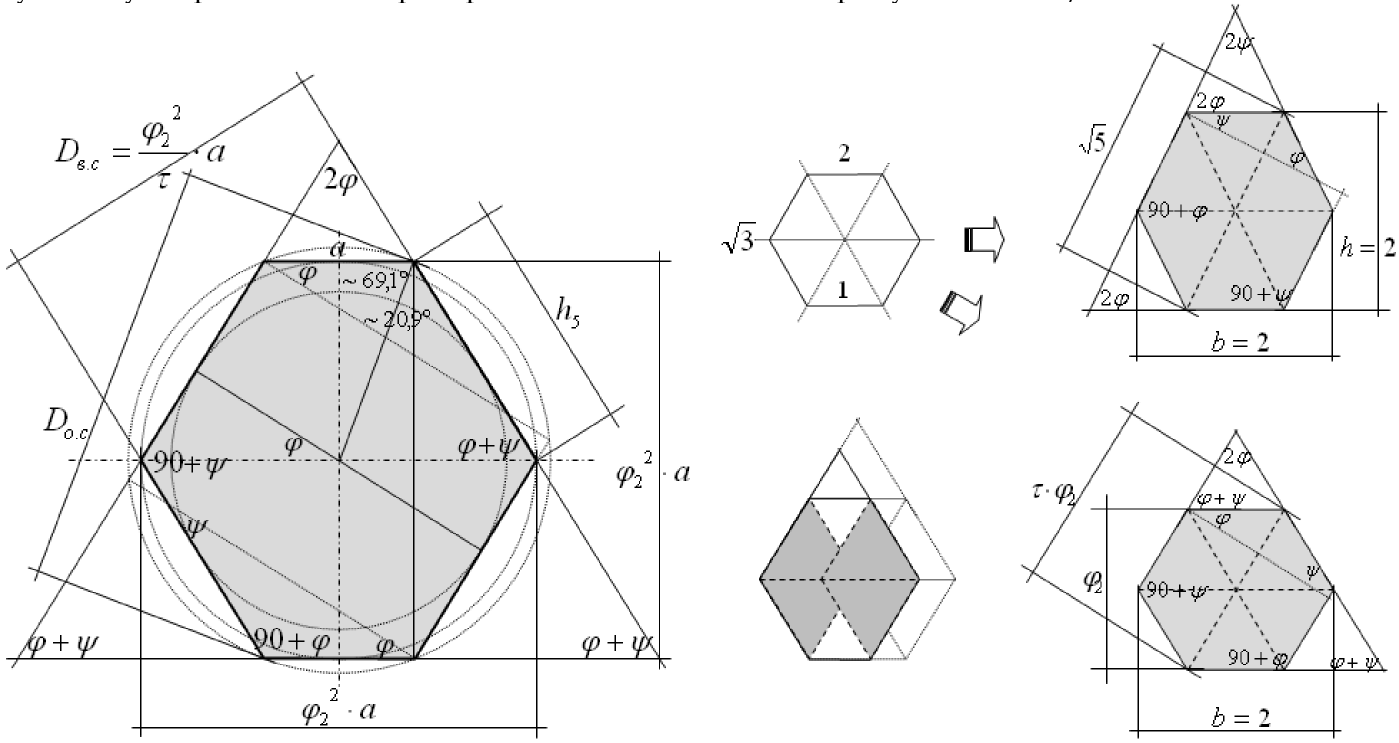


Напомню, $\varphi° \equiv \alpha_6 = 31{,}717\ldots°$ и $\psi° \equiv \alpha_5 = 26{,}565°$ так, что $2\varphi° + \psi° = 90°$. И все углы ВО-квадрата принадлежат одной линейке углов: $\alpha_i = \alpha_0 + i \cdot \varepsilon$, где $\alpha_0 = 0{,}802\ldots°$ и $\varepsilon = 5{,}152\ldots°$ (см. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320035.htm)

Мы говорим о подобности по сути отношений «угол (вершина) – линия (грань)». (Можно ВО-фигуры сдвинуть, сделав взаимопересеченными на одном центре.) Но еще и по глубине возникающих соотношений в таком ВО-положении. А пока запомним углы, появляющиеся и в ВО-квадрате, и у додекаэдра-икосаэдра, и пойдем дальше.

1. Посмотрите на левом рисунке поперечное сечение додекаэдра, проходящее через центр. Оно - одно, только повернуто может быть по-разному. На данном виде ребра с парами вершин находятся вверху и внизу, боковые линии - это высоты 5-угольников. Похоже на неправильную соту (6-угольник в центре), причем высота и ширина ее равны.

А на следующем рисунке (справа) - как раз сота, пропорционально "сжатая" так, что ее b=h. Ну, прикладывать к ней силу совсем не обязательно, можно посмотреть на нее под некоторым углом зрения. Вообще-то в "нормальной" соте (с равными углами и сторонами) отношение «h» к «b» равно $\sqrt{3}/2$. Так что, чтобы в нашей соте сделать равными «b» и «h» надо наклонить ее с угла на угол ровно на 30°, пропорционально "сжав" всю ширину в $\cos 30° = \sqrt{3}/2 = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}866$.



Конечно, интересно смотреть на игру наших трансцендентных углов в этой наклоненной соте; «заводила» игры - верхний треугольник, старый знакомый - с углом 2ψ при вершине. Ну а где же наш 2φ-треугольник, он что же - ни причем?.. А вот и он - ниже. Ну-тес, поглядим и на его игру.

Так, а он решил посмотреть на соту под другим углом зрения – перпендикулярном. В том же направлении, что и «2ψ», но «2φ» растянул соту с угла на угол! Гармонисты, да и только… «Растянул» или же «перестроил», но не на много (все-таки невелики отличия 2φ° от 60°), всего в $\sqrt{3} * \varphi_1$ раз. Но интересно здесь другое: то, что он "поглядывает" на поперечное сечение додекаэдра... А и понятно почему - посмотрите в сторону левого рисунка. Вот вам и додекаэдр, достаточно сжать только ребро "b" в φ_1 раз, то есть сдвинуть внутренние ромбики друг за друга.

А потом раздвинуть в φ_2, потом снова сдвинуть в φ_1, и снова раздвинуть – эх, играть, так играть, веселись народ...

Не веселящимся ж сегодня сообщаю: чтобы получить такую «2φ-соту», надо "нормальную" наклонить во втором направлении на $tg = \varphi_1^2$ (!см. следующий пункт!). И кстати, этой величине равно отношение сторон прямоугольника на рисунке поперечного сечения додекаэдра. Ну и для справки: высота пентагона (5-угольника грани) $h_5 = R_5 + r_5 = \frac{\tau}{2}\varphi_2^2 \cdot a$

2. Так, так… Шел я шел, да смотрю – что-то не то… Так-так. Вот те и на… Так и есть – ошибся! Хм-м - повеселился… В набросках на листках потерялся "τ"[1] в длине гипотенузы, угол стал другой. Не тот, который сразу бы насторожил и показал свою "неслучайность".

Тропа поиска побежала по другому маршруту. Но эта местность так устроена, так взаимопересечена, что подводит снова к поляне, где остались ошибки. Я прошел длинным окольным путем к выяснению взаимосвязи новых углов и к проверке значения угла наклона 6-угольника.
И сейчас мы пойдем коротким путем, маршрутные листы переписаны.
Коротким - не потому, что это быстрее, а потому, что это красивее, потому что в конце пути не будет ощущения прогулки по кругу.

Из-за потери "τ", угол наклона "соты" стал равен ничего не говорящему тогда углу ~37,4° ($tg=2\varphi_1^2$), его не видно было тогда внутри угла 69,1° при ребре в поперечном сечении додекаэдра. На самом деле угол наклона "соты" равнялся заметной величине 20,9°, которая явно выделялась в том же сечении додекаэдра.

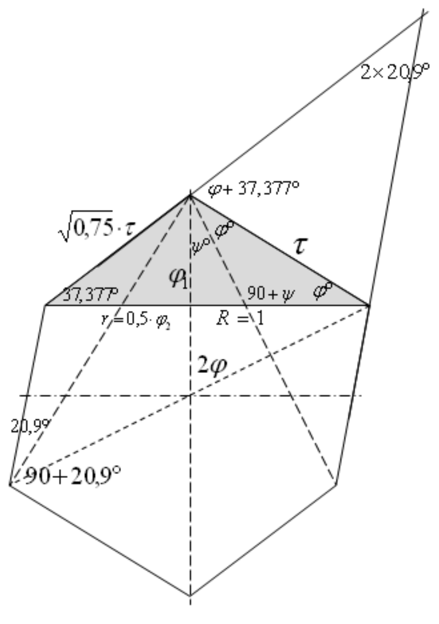
Что интересно, оба угла оказались потом "не случайными". Из-за этой ошибки я прошел по тропе, показавшей мне свои стороны местности. Ошибка тоже приносит пользу, надо только идти до конца... До понимания ошибки. Но сейчас мы идем коротким путем.

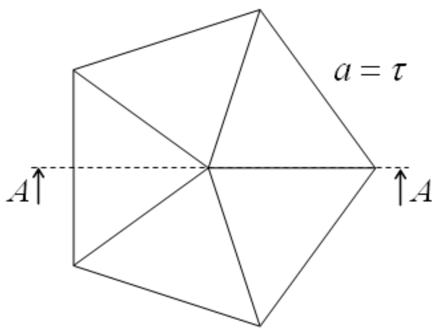
Итак, мы знаем, что для получения поперечного сечения додекаэдра из правильного 6-угольника необходимо сначала наклонить его на угол ~20,9° ($tg=\varphi_1^2$) относительно оси, проходящей через углы. В додекаэдре есть похожий угол, проверим его. Как мы знаем, $D_{o.c.}=\sqrt{3}*\varphi_2*a$, (примем a=1). Если искомый угол с $tg=\varphi_1^2$, и опирается он на ребро=1,

то гипотенуза $D_{o.c.} = \sqrt{\varphi_2^{\,4}+1} = \varphi_2\sqrt{\varphi_2^{\,2}+\varphi_1^{\,2}} = \varphi_2\sqrt{1-\varphi_1+\varphi_1+2} = \varphi_2\sqrt{3}$ (!)[2]

Это один и тот же угол ~20,9° , видимо, достаточно длинный после запятой.

Пройдем подальше и посмотрим углы и линейные размеры в поперечном сечении икосаэдра. На правой схеме верхних 5-ти граней показана линия сечения.





В сечении икосаэдра угол ~37,377° ($tg=2\varphi_1^2$) присутствует более явно (то есть, имея свои стороны на сторонах сечения), как, впрочем, и 20,9°. Он же есть (пока предположительно) в додекаэдре: ~69,1° = φ° + 37,377°. Похоже, что в икосаэдре и 52,623° = φ° + ~20,9°. Интересные "несистемные" углы...

Упростим выражение правого тупого угла в икосаэдре.

Левый тупой угол внутри икосаэдра равен 2φ+74,75°,

---

[1] $\tau = \sqrt{2-\varphi_1}$

[2] Здесь выход на еще одну тропинку, смотри ее описание в следующем «фантике».

сделаем так (по внешнему треугольнику): $2\varphi+74{,}75° = 180° - 41{,}8°$
или $2(\varphi+37{,}377) = 2(90°-20{,}9)$…

Та-а-а-ак,... а $90°=2\varphi+\psi$… Вот тебе и раз: $37{,}377° + 20{,}9° = \varphi + \psi$ (!)
Вот так "случайные, несистемные углы"!!

Мало того, что их сумма равна ($\varphi+\psi$), получается, что они отличаются то от "знаменитых углов" на какую-то одну величину: один через разность, другой через сумму.

$20{,}9° = \psi - \lambda$

$37{,}377° = \varphi + \lambda$

Сейчас мы эту "лямбду" то вычислим. Чему равняются более-менее точные значения самих углов? Давайте их как нибудь обозначим: пусть 20,9° будет ψ^-, а 37,377° - φ^+

Всё[3], вычисляем углы по $\varphi^+ = \mathrm{arctg}\, 2\varphi_1^2$ и $\psi^- = \mathrm{arctg}\, \varphi_1^2$

Опять звонок другу:

$\psi^- = 20{,}905\,157\,447\,8893°$

$\varphi^+ = 37{,}377\,368\,140\,6497°$

Нетрудно определить: $\lambda = 5{,}659\,893\,729\,1887°$

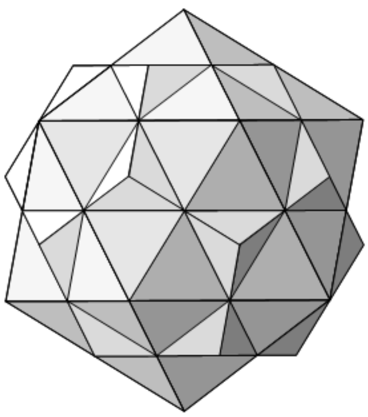
Она близка к "ε": $\lambda-\varepsilon = 0{,}507\,470\,494\,8057°$...

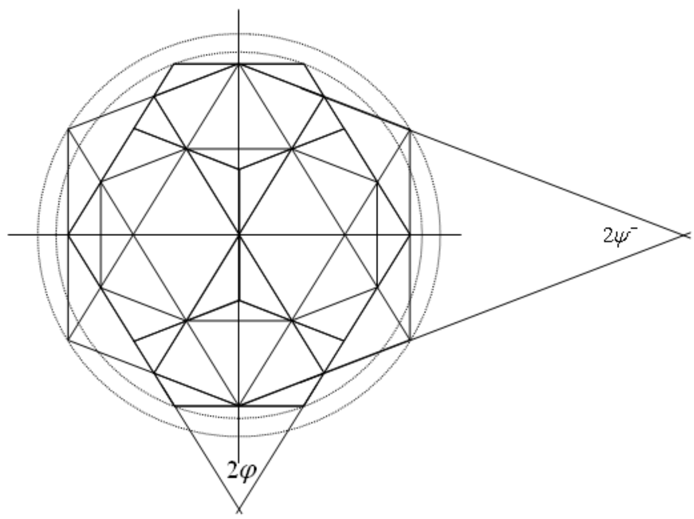
А это все-таки - случайные величины? И какая из них первична? Не знаю.

Пусть пока все останется так. Пусть останутся в этих фигурах тайны. В фигурах, в которых нет случайного, несистемного...

Пусть останется нам напутственная запись (где $\{a\}° \equiv \mathrm{arctg}\, a$): $\{\varphi_1^2\}° + \{2\varphi_1^2\}° = \{\varphi_1\}° + \{0{,}5\}°$

Посмотрим напоследок на красивые взаимопересекающиеся додекакэдр и икосаэдр (по рисунку Маурица Эсхера; только свет падает сверху-слева)… В центре его можно увидеть тот самый 6-угольник, что на рисунке в пункте-1 – справа внизу.





Эх, подарки то этих фигур все не кончаются, не отпускают.

Получается так, что угол 2φ, который центральный внутренний в икосаэдре на его ребре, он присутствует также в додекаэдре тоже на ребре, но как внешний. Мало того, теперь другой угол ~41,8°, внутренний на ребре в додекаэдре присутствует и в икосаэдре на ребре, но, являясь внешним.

У додекаэдра и икосаэдра - взаимообратные внешние и внутренние углы, опирающиеся на ребро. Если обе фигуры построены на одном ребре (с общей осью симметрии, проходящей

---

[3] Еще раз для проверки составим зависимости:
по внутреннему углу: $90+\varphi = \varphi + \psi^- + \varphi^+ + \varphi = 3\varphi + \psi = 90+\varphi$, сошлось по кругу.
по верхнему треугольнику: $180 = 2\varphi + 2\varphi^+ + 2\psi^- = 4\varphi + 2\psi = 180$, тоже правильно!

через ребро), то центр одной фигуры будет совпадать с пересечением высот граней, разделенных ребром, другой фигуры.

Из этих двойных углов 2φ и 41,8° знаменит, конечно, первый, и, если смотреть по нему, то додекаэдр получается как бы обращен во вне, это открытая фигура, "экстраверт", а икосаэдр - "интраверт"...

3. Пройдем ка еще до поворота, до следующего угла. Посмотрим ка еще раз эти углы φ^+ и ψ^- в сечениях додекаэдра и икосаэдра. Что-то мы не досмотрели...

Да, сами сечения замечательных фигур можно построить от наклона правильного 6-угольника («соты»). Давайте «обобщим» эти процессы. Получается, что во всех 3-х интересных нам случаях преобразования 6-угольника в результате этих преобразований его <u>высота и ширина становятся равны.</u> Вот так происходят действия, в результате которых угол 2х30° становится другим углом:

«2ψ» - за один наклон на 30° по $D_{\text{Описанной Окружности}}$ (с угла на угол, по направлению «b»)

Поперечное сечение додекаэдра:

«2φ» - наклон на $\psi^{-\circ}$ по $D_{\text{Вписаной Окружности}}$ до $b:h=2:\varphi_2$ и содвигание «$a \to \varphi_1 * a$»

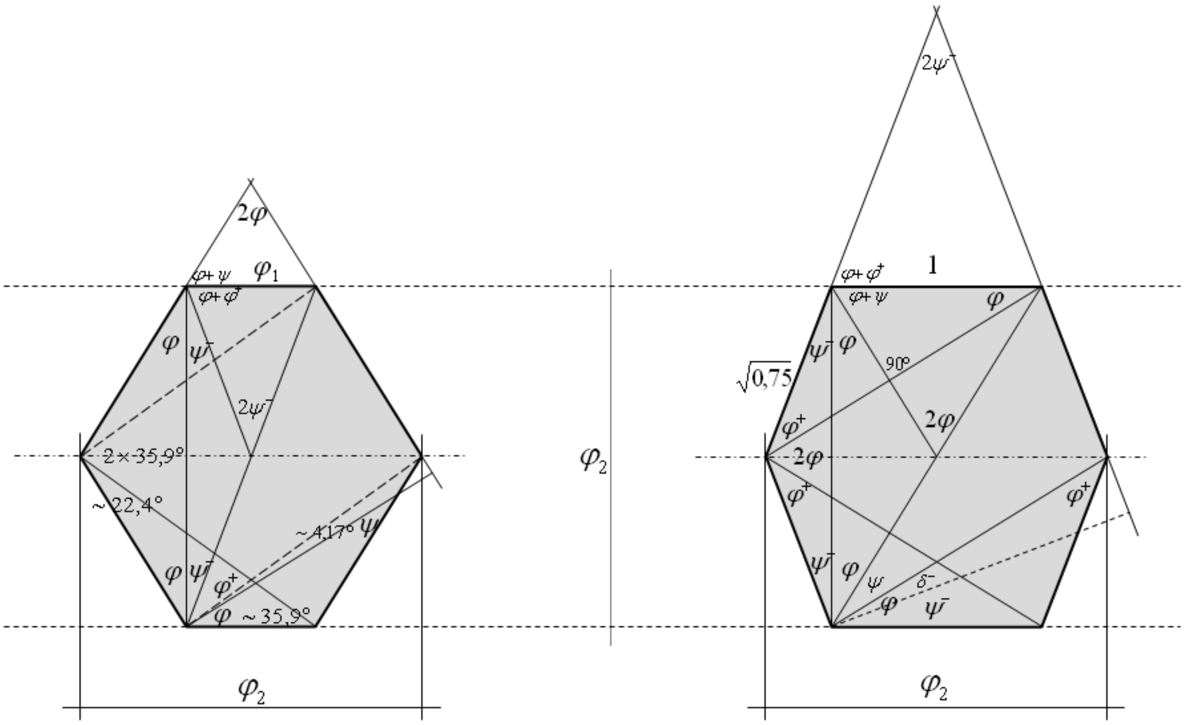
Поперечное сечение икосаэдра:

«$2\psi^-$» - наклон на ~48,6° по $D_{\text{Описанной Окружности}}$ до $b:h=2:\varphi_2^2$ и раздвигание «$a \to \varphi_2 * a$»

Кстати, наклон «соты» на 30° с превращением углов 2х30° в $2\cdot\psi°$, есть аналог «качания» (30°→ψ), помните?, в линии углов «С» ($C_2 \to C_3$). Увиделась та полянка с этого места - в просвете.

При формировании поперечных сечений замечательных фигур есть еще один «живой момент». Наклоненные (но еще не испытавшие движения) соты для поперечных сечений додекаэдра и икосаэдра, когда высота последних равна (как, например, при взаимном пересечении) имеют длину стороны «а», равную той, которая будет в итоге у ребра другой фигуры. То есть при преобразовании 6-угольники «обмениваются» сторонами-ребрами.

Посмотрим поперечные сечения додекаэдра и икосаэдра.



Мы уже знаем, что поперечное сечение додекаэдра имеет углы, как в 6-угольнике, наклоненном на угол ψ^-, и этот угол вместе с φ^+ присутствует в нем. Углы поперечного сечения икосаэдра соответствуют углам 6-угольника, наклоненного на «очередной» некий угол ~48,6°, и в нем еще более явно (то есть на линиях контура) присутствуют углы φ^+ и ψ^-.

Видя близость γ и φ^+, еще ранее (и на этом тогда все кончилось) они были сопоставлены: $\varphi^+ = 37{,}377°$, $\gamma = 36{,}87°$, а если добавить $\alpha_0 = 0{,}803°$, то $\gamma + \alpha_0 = 37{,}673°$…

Теперь можно увидеть: между γ и φ^+ те самые 0,507°: φ^+ заходит за γ на 0,507, ψ^- не доходит до α_4 на 0,507... Обозначим для себя этот угол, как (0,5)°.

У нас еще есть угол 20,9°… А 4ε, помнится, равнялось примерно 20,6°. То есть 20,9 отличается от 4ε примерно на 0,3°. А 0,803 от 0,507?.. На те же «0,3»?!

Достаточно проверить с большей точностью, чтобы увидеть "совпадение". В кавычках - потому что это просто вычисления, а наши дроби - бесконечны. Нам же нужен точный вывод. Пойдем ка логически.

Предположим, что это - так, что $\psi^- = 4\varepsilon + \alpha_0 - (0{,}5)° = 4\varepsilon + \alpha_0 - (\lambda - \varepsilon) = \alpha_0 + 5\varepsilon - \lambda$

А это ничто иное, как $\alpha_0 + 5\varepsilon - \lambda = \alpha_5 - \lambda = \psi - \lambda = \psi^-$ (!)

Значит, все так и есть. И (α_0 - 0,507…) имеет какой-то самостоятельный смысл?

Вычислим и обозначим эту величину: (0,3)° = 0, 295 464 510…°

Можно записать так: $\lambda = \alpha_0 + \varepsilon - (0{,}3)°$ Но что же является основным: λ, (0,5)°, или (0,3)°?

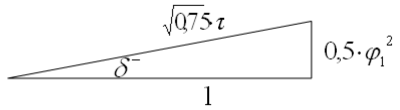
Пойдем дальше. Значит можно записать: $\psi^- = 4\varepsilon + (0{,}3)°$

Величина (0,3)°, участвуя в формулах непосредственно в паре с «ε» является, видимо, также исходной для углов. Напомню, что величина 4ε={0,[376068]}° является исходной для всех трансцендентных углов.

Кстати, на совмещенной схеме треугольников предыдущего "фантика" есть угол между φ и ψ^-. Чему он равняется? $\varphi - \psi^- = 6\varepsilon + \alpha_0 - 4\varepsilon - (0{,}3)° = 2\varepsilon + (0{,}5)° \approx 10{,}8°$…

При определении $\{\varphi_1^2\}°$ и $\{2\varphi_1^2\}°$ осталась на листочке «напрасно» определенная величина $\{0{,}5\varphi_1^2\}$... Вот этот листок, и $\operatorname{tg} 0{,}5\varphi_1^2$ = 10, 812 316 963 5717°…

Считаем верхние значения с максимальной точностью; попадание - полное. (Естес-с-с-твенно!) Придется ввести еще одно обозначение: $\delta^- = 2\varepsilon + (0{,}5)°$. И $\varphi = \psi^- + \delta^-$, и тогда $\psi = 5\varepsilon + \alpha_0 = \varphi^+ - \delta^-$.



И вывод такой, что (0,5)° является исходной величиной одного уровня с α_0 и (0,3)°; а вот λ - уже производное, дериват. И надо сказать, что хотя величины α_0, (0,3)°, (0,5)° и одного уровня, но первая и две последующие относятся к разным смыслам, к разному назначению. Может быть, есть еще более фундаментальный уровень, более фундаментальная величина, в которой соединятся эти величины...

Запишем еще раз, что получилось:

$$\alpha_0 = (0{,}3)° + (0{,}5)°$$
$$\lambda = \varepsilon + (0{,}5)° = \alpha_1 - (0{,}3)° = \delta^- - \varepsilon$$
$$\delta^- = 2\varepsilon + (0{,}5)° = \alpha_2 - (0{,}3)°$$
$$\psi^- = 4\varepsilon + (0{,}3)° = \alpha_4 - (0{,}5)°$$
$$\varphi^+ = 7\varepsilon + \alpha_0 + (0{,}5)° = \alpha_7 + (0{,}5)° = \psi^- + \delta^- + \lambda$$
$$\psi = \psi^- + \lambda = \varphi^+ - \delta^-$$
$$\varphi = \varphi^+ - \lambda = \psi^- + \delta^-$$
$$90° = 2\varphi^+ + \psi^- - \lambda = \varphi^+ + 2\psi^- + \delta^-$$

Ну не удивительно ли, как взаимосвязаны эти углы ?!

4. Угол δ^- = $\{0{,}5\varphi_1^2\}°$ присутствует на поперечном сечении икосаэдра. Аналогично расположен на поперечном сечении додекаэдра угол ~4,17°. Так, осталось посмотреть его.

Во-первых, он равен разности двух углов при вершине; воспользуемся уже использовавшейся формулой:

$$\{y\}° - \{x\}° = \left\{\frac{y-x}{1+xy}\right\}°, \text{ где } y = \frac{0{,}5\cdot\varphi_2}{\varphi_1 + 0{,}5} \text{ и } x = \varphi_1$$

После подстановки получаем:

$$\left\{\frac{0{,}5\cdot\varphi_2}{\varphi_1+0{,}5}\right\}^\circ-\{\varphi_1\}^\circ=\left\{\frac{2\varphi_1-1}{2\varphi_2}\right\}^\circ=\left\{\varphi_1^{\,2}-0{,}5\varphi_1\right\}^\circ=\left\{\frac{2-3\varphi_1}{2}\right\}^\circ=\left\{0{,}5\varphi_1^{\,4}\right\}^\circ$$

$0{,}5\varphi_1^4 \approx 0{,}07295$, и $\alpha=\{0{,}5\varphi_1^4\}^\circ \approx 4{,}17^\circ$

Два "числовых" угла в нижнем треугольнике, очевидно, связаны между собой так: $\varphi+\psi = (35{,}9)^\circ + (22{,}4)^\circ$, то есть аналогично случаю «$\varphi+\psi = \varphi^+ + \psi^-$».

И здесь мы сразу можем определить новую "λ", связывающую "числовые" углы с φ и ψ : из бокового угла $(90+\psi)^\circ$ сразу находим $\psi = (22{,}4)^\circ + (4{,}17^\circ)^\circ$.

И тогда:

$$\varphi+\psi = (35{,}9)^\circ + (22{,}4)^\circ \qquad (35{,}9)^\circ = \varphi + (4{,}17)^\circ$$

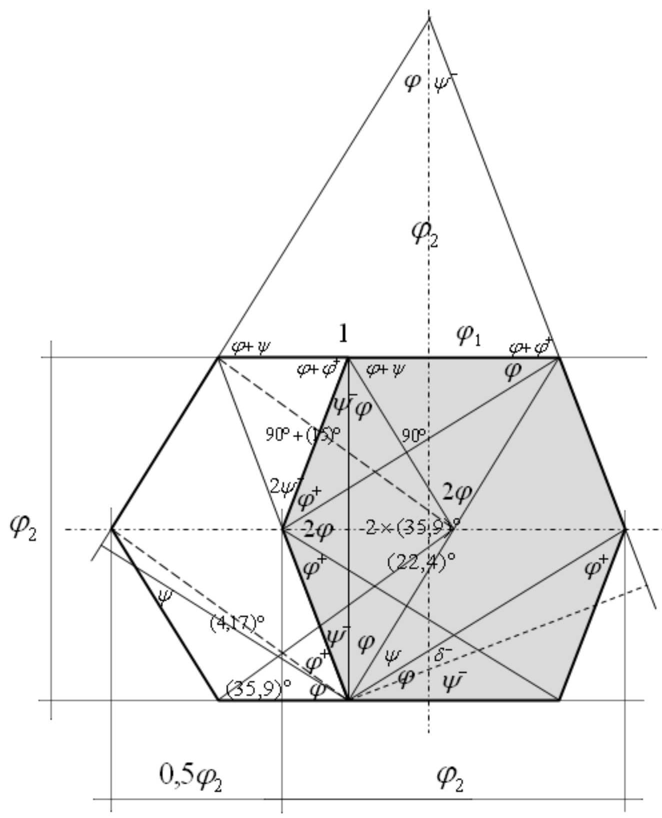
$$90^\circ = 2\times(35{,}9)^\circ + (22{,}4)^\circ - (4{,}17)^\circ \qquad (22{,}4)^\circ = \psi - (4{,}17)^\circ$$

А теперь более точное значение угла:

$\{0{,}5\varphi_1^4\}^\circ = 4{,}172\ 280\ 248\ 123\ 08\ldots^\circ$

И ε-$(4{,}17)^\circ = 0{,}980\ 142\ 986\ 260\ldots^\circ$ – настолько углы $(22{,}4)^\circ$ и $(35{,}9)^\circ$ отстоят от α_4 и γ в сторону φ и ψ соответственно. Напомним, что в обратную сторону (внешнюю от центральной области "φ-ψ") отстоят на $(0{,}5)^\circ$ от α_4 и γ соответственно углы ψ^- и φ^+.

Приведем совмещенные поперечные сечения додекаэдра и икосаэдра, а предварительно покажем еще раз значения системных углов через "arctg".



$\varphi = \{\varphi_1\}^\circ$

$\psi = 2\{\varphi_1^3\}^\circ = \{0{,}5\}^\circ$

$\varphi^+ = \{2\varphi_1^2\}^\circ$

$\psi^- = \{\varphi_1^2\}^\circ$

$\delta^- = \{0{,}5\varphi_1^2\}^\circ$

$(4{,}17)^\circ = \{0{,}5\varphi_1^4\}^\circ$

По известным формулам разности и суммы "arctg" (см. также ниже) находим:

$$(35{,}9)^\circ = \left\{0{,}2(\varphi_2^{\,2}+1)\right\}^\circ = \left\{\frac{\varphi_1+3}{5}\right\}^\circ \approx \{0{,}7236068\}^\circ$$

$$(22{,}4)^\circ = \left\{\frac{2\varphi_1-2/3}{2-\varphi_1}\right\}^\circ = \left\{\frac{6\varphi_1-2}{6-3\varphi_1}\right\}^\circ = \left\{\frac{2}{3}\varphi_1\right\}^\circ \approx \{0{,}4120\}^\circ$$

Видите, внутри поперечного сечения додекаэдра последний "непонятный" угол в ~15° в составе «90°+(15)°? Уж он то точно "несистемный"?..

Не может же такого быть, чтобы все до последнего угла внутри додекаэдра и икосаэдра были связаны непосредственно между собой и в конечном итоге – с «золотой пропорцией»! Ну не может быть, чтобы даже угол, встретившийся один раз, да и то не сам по себе, а в сумме с 90°, тоже оказался связан с «системой углов»!... Определять его или нет!? Что время то тратить, да и как его вычленить для определения?

Ну ладно, последний уж остался угол (вроде бы!?), посмотрим на него.
Найдем из разных треугольников его точное значение…
Но смотрите, что получается, если сравнить его с другими «системными углами»!

$(15)° = -\psi^- + (35{,}9)°$ $\qquad$ $(15)° = \delta^- + (4{,}17)°$ $\qquad$ (!)

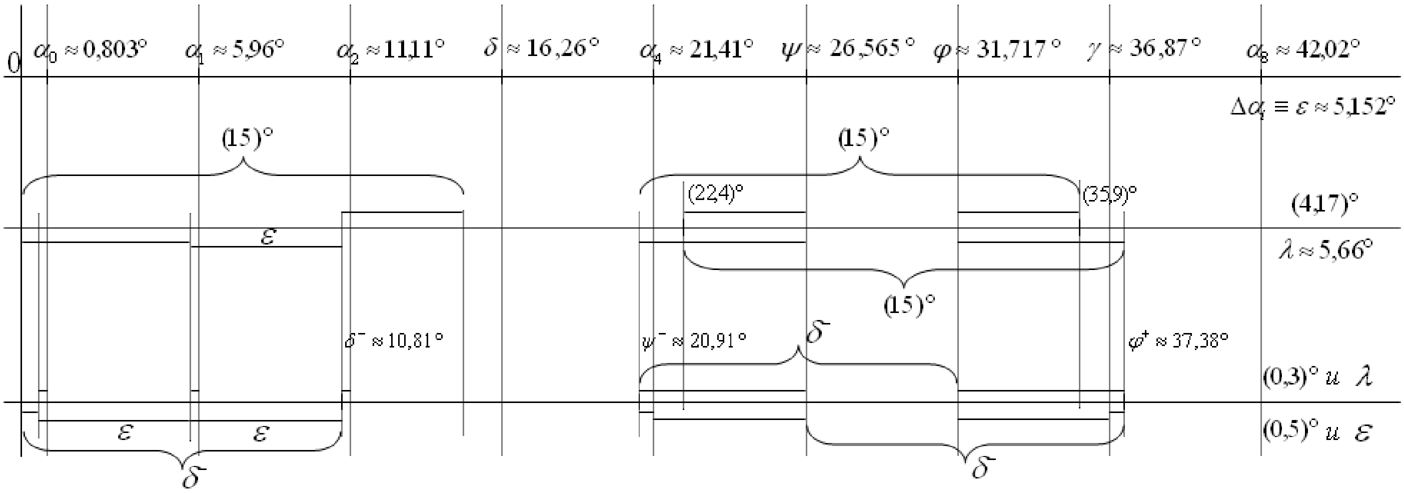
$(15)° = \varphi^+ - (22{,}4)°$ $\qquad$ $(15)° = 2\varepsilon + (4{,}17)° + (0{,}5)°$

$(15)° = \lambda + (4{,}17)° + \varepsilon$ $\qquad$ (! сумма 3-х "дельт")

А вот его выражение: $$(15)° = \left\{\frac{4-2\varphi_1}{7\varphi_1+6}\right\}^\circ = \left\{\frac{6\varphi_1-2}{7-\varphi_1}\right\}^\circ = \left\{\frac{6-8\varphi_1}{8\varphi_1-1}\right\}^\circ \approx \{0{,}26766\}^\circ$$

Как видим, (15)° - это некий связующий угол между линией углов «φ^+ - ψ^- - δ^- - λ» (икосаэдрической линией) и линией углов «(35,9)° - (22,4)° - (15)° - (4,17)°» (додекаэдрической линией). Причем величина (4,17)° является по смыслу и месту в аналогичных зависимостях одновременно и "λ" (при связывании с "φ" и "ψ"), и "δ^-" (по внутреннему дополнительному до 90° углу в своей фигуре Платона и по сумме 90° из углов своей линии)[4].

Кроме того, в додекаэдре присутствуют величины обеих линий углов, а в икосаэдре - только одной. Додекаэдр, действительно, является связующей фигурой, более "открытой" фигурой.



5. Мы знаем не только все (?) взаимосвязи всех (?) углов в додекаэдре и икосаэдре. Теперь по формулам для суммы и разности "arctg" мы можем определить алгебраические (с φ_1/φ_2) выражения для тангенсов интересных нам углов. То есть найти через "золотую пропорцию" выражения углов ε, λ, (0,3)°, (0,5)°, а также весь ряд α_i.

Итак, наши рабочие формулы:

$$\{x\}° - \{y\}° = \left\{\frac{x-y}{1+xy}\right\}^\circ \qquad \{x\}° + \{y\}° = \left\{\frac{x+y}{1-xy}\right\}^\circ$$

Очевидно, что для подсчета итоговых значений лучше брать простейшие выражения (x) и (y) с наименьшими числами[5] в них.

<u>Начнем с "ε":</u> $$\varepsilon = \varphi - \psi = \{\varphi_1\}° - \{0{,}5\}° = \left\{\frac{\varphi_1 - 0{,}5}{1+0{,}5\varphi_1}\right\}^\circ = \left\{\frac{2\varphi_1-1}{2+\varphi_1}\right\}^\circ = \left\{\frac{\varphi_1^3}{\varphi_2^2}\right\}^\circ = \{\varphi_1^5\}^\circ$$

То есть каждый угол нашего "знаменитого" ряда $\alpha_i = \alpha_0 + i*\{\varphi_1^5\}°$ образуется от φ_1?!..

---

[4] Все же (4,17)° ближе к "δ^-", так как последний также может участвовать в связывании с основными "φ" и "ψ", правда в зависимостях иной структуры (см.)

[5] При других исходных (x) и (y) можно получить другое выражение для одного и того же угла, и тоже правильное

Теперь "λ": $\lambda = \psi - \psi^- = \{0,5\}^\circ - \{\varphi_1^{\,2}\}^\circ = \left\{\dfrac{2\varphi_1 - 1}{3-\varphi_1}\right\}^\circ = \left\{\dfrac{\varphi_1^{\,3}}{\varphi_1^{\,2}+2}\right\}^\circ$

Деля "верх" и "низ" на φ_1^2, получаем также $\lambda = \left\{\dfrac{\varphi_1}{2\varphi_1+5}\right\}^\circ$

Определим (0,5)°: $(0{,}5)^\circ = \varphi^+ - \gamma = \{2\varphi_1^{\,2}\}^\circ - \{0{,}75\}^\circ = \left\{\dfrac{\varphi_1^{\,6}}{10-6\varphi_1}\right\}^\circ$

Деля "верх" и "низ" на φ_1 (или умножая на φ_2)[6], $(0{,}5)^\circ = \left\{\dfrac{\varphi_1^{\,5}}{10\varphi_1+4}\right\}^\circ = \left\{\dfrac{5\varphi_1 - 3}{10\varphi_1+4}\right\}^\circ$

Определим ка теперь 2ε, 4ε, 6ε:

$$2\varepsilon = \{\varphi_1^{\,5}\}^\circ + \{\varphi_1^{\,5}\}^\circ = \left\{\frac{2\cdot\varphi_1^{\,5}}{11\cdot\varphi_1^{\,5}}\right\}^\circ = \left\{\frac{2}{11}\right\}^\circ$$

$$4\varepsilon = \left\{\frac{2}{11}\right\}^\circ + \left\{\frac{2}{11}\right\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{44}{117}\right\}^\circ$$

$$6\varepsilon = \left\{\frac{2}{11}\right\}^\circ + \left\{\frac{44}{117}\right\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{718}{1199}\right\}^\circ = \left\{\frac{2}{11}\cdot\frac{359}{109}\right\}^\circ$$

Теперь по формуле для $\varphi^\circ \equiv \alpha_6$:

$$\alpha_0 = \{\varphi_1\}^\circ - 6\cdot\{\varphi_1^{\,5}\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{1199\cdot\varphi_1 - 718}{718\cdot\varphi_1 + 1199}\right\}^\circ \approx \left\{\frac{1{,}67\cdot\varphi_1 - 1}{\varphi_1 + 1{,}67}\right\}^\circ$$

$$(0{,}3)^\circ = \psi^- - 4\varepsilon = \{\varphi_1^{\,2}\}^\circ - \left\{\frac{44}{117}\right\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{73-117\varphi_1}{161-44\varphi_1}\right\}^\circ \qquad (0{,}3)^\circ = \left\{\frac{29-44\varphi_1}{278+117\varphi_1}\right\}^\circ$$

Последнее значение получено умножением «верха» и «низа» на φ_2.

И ряд исходных углов:

$$\gamma = \alpha_7 = \{\varphi_1\}^\circ + \{\varphi_1^{\,5}\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{3}{4}\right\}^\circ \qquad \delta = \alpha_3 = \left\{\frac{1}{2}\right\}^\circ - \left\{\frac{2}{11}\right\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{7}{24}\right\}^\circ = \left\{\frac{7}{2\cdot3\cdot4}\right\}^\circ$$

$$\alpha_4 = \{\varphi_1\}^\circ - \left\{\frac{2}{11}\right\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{11\varphi_1 - 2}{2\varphi_1 + 11}\right\}^\circ \qquad \alpha_2 = \{\varphi_1\}^\circ - \left\{\frac{44}{117}\right\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{117\varphi_1 - 44}{44\varphi_1 + 117}\right\}^\circ$$

$$\alpha_4 = \left\{\frac{1}{2}\right\}^\circ - \{\varphi_1^{\,5}\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{7-10\varphi_1}{5\varphi_1 - 1}\right\}^\circ \qquad \alpha_1 = \left\{\frac{7}{24}\right\}^\circ - \left\{\frac{2}{11}\right\}^\circ = \ldots = \left\{\frac{29}{278}\right\}^\circ$$

Кстати, катеты этих углов образуют определенные гипотенузы в своих треугольниках. У некоторых углов эти гипотенузы довольно интересны. У угла «*δ*» с катетами 7/24 гипотенуза равна 25. У угла «*γ*» с катетами 3/4 гипотенуза равна 5; или 25 для 15/20. У угла «***2ε***» с 2/11 – √125 (=10φ_0), у «***4ε***» с 44/117 – √125^2, у «***6ε***» с 718/1199 – √125^3, и так до «***16ε***»(~82,4°) и 125^4 …

[6] Идя так дальше можно получить, например, $(0{,}5)^\circ = \left\{\dfrac{1}{50\varphi_1 + 82}\right\}^\circ$

Помните, небольшой "спич" в конце 3-го пункта о фундаментальности, об исходности малых углов: начального α_0 для "знаменитого" ряда, а также его слагаемых (0,3)° и (0,5)°, отступая на которые от системных "α_i" или "i*ε" получаем внутренние углы додекаэдра и икосаэдра. Видимо, такой фундаментальной величиной является сама "золотая пропорция"…

Можно в конце записать через "arctg" известные уже суммы в 90° из разных углов:

$$\{\infty\}^\circ = \{\varphi_1\}^\circ + \{\varphi_1^2\}^\circ + \{2\varphi_1^2\}^\circ \qquad \{\infty\}^\circ = 2\{\varphi_1^2\}^\circ + \{\varphi_1^2\}^\circ + \{0{,}5\varphi_1^2\}^\circ$$

$$\{\infty\}^\circ = \{\varphi_1\}^\circ + \{\varphi_1^2\}^\circ + \{0{,}5\varphi_1^2\}^\circ + \{0{,}5\}^\circ \qquad \{\infty\}^\circ = 2\{\varphi_1\}^\circ + \{0{,}5\}^\circ$$

По аналогии можно

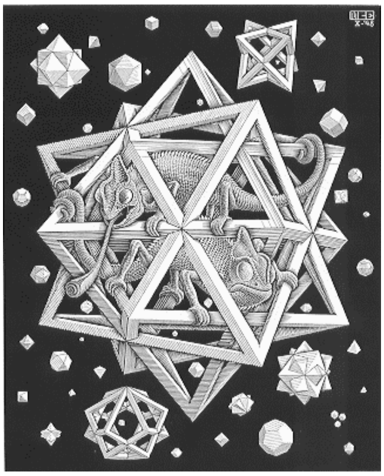
записать очевидное: $\{\infty\}^\circ = \{\varphi_1\}^\circ + \{\varphi_2\}^\circ$

$$\{\infty\}^\circ = 2\left\{\frac{3}{4}\right\}^\circ + \left\{\frac{7}{24}\right\}^\circ = \left\{\frac{24}{7}\right\}^\circ + \left\{\frac{7}{24}\right\}^\circ$$

...Впрочем, сделанные вычисления показали еще одно правило: ***сумма одинаковых углов, тангенсы которых имеют выражение с "φ_1", образуют угол, тангенс которого является чисто числовым.*** Отсюда следует то, что с одной стороны снова утверждает универсальность "золотой пропорции", а с другой – снова выделяет отдельно свойства наших "системных углов" самих по себе: *любую дробь можно представить алгебраическим выражением целых чисел и "φ_1/φ_2".*

Все предыдущие (и последующие) соотношения с φ_1/φ_2, вычисления и выражения, а также построения - это "*общие алгебра и геометрия золотой пропорции*".

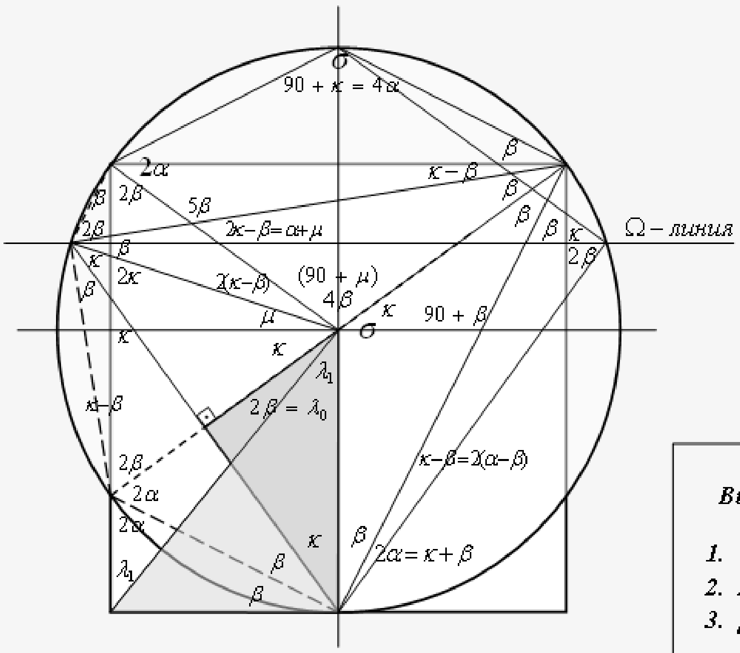
Мы не заметили, как прошли уже несколько поворотов. Мы дошли до очередного «уголышка», а за ним – следующий?...



Но на сегодня путешествие закончено.

Додекаэдр и икосаэдр «принадлежат» Золотой пропорции. Вписано-описанные прямоугольники «принадлежат» теореме Пифагора. Два сокровища есть в геометрии: теорема Пифагора и Золотая пропорция – так говорил Кеплер.

Обобщенный ВО-прямоугольник



Вычисление всех углов от $\lambda_0 = 2\beta$:

1. ***$\kappa = 90^o - 2\beta$*** ***(7 = 17 – 2×5)***
2. ***$2\alpha = \kappa + \beta$*** ***(2×6 = 7 + 5)***
3. ***$\mu = 2\beta - \kappa$*** ***(3 = 2×5 – 7)***

$$\left.\begin{aligned} tg\lambda_1 &= \sin\lambda_0 = \sin 2\beta \\ 2\frac{a}{b} &= ctg\beta = \frac{\cos 2\beta + 1}{\sin 2\beta} \end{aligned}\right\} \quad a/b = \frac{ctg\lambda_0 + \operatorname{cosec}\lambda_0}{2} = \frac{ctg\lambda_0 + ctg\lambda_1}{2}$$