Оглавление

Предисловие

Идея Гармонии и Золотого Сечения. Каждый из нас наверняка задумывался над тем, почему Природа способна создавать такие удивительные гармоничные структуры, которые восхищают и радуют глаз. Почему художники, поэты, композиторы, архитекторы создают восхитительные произведения искусства из столетия в столетие. В чем же секрет и какие законы лежат в основе этих гармоничных созданий? Никто не сможет однозначно ответить на этот вопрос, но в этой книге сделана попытка приоткрыть завесу и рассказать об одной из тайн «гармонии мироздания» – «Золотом Сечении» или, как его еще называют, Золотой или Божественной Пропорции. Золотое сечение называется числом PHI (Фи) в честь великого древнегреческого скульптора Фидия (Phidias), который использовал это число в своих скульптурах.

Научно-технический прогресс имеет длительную историю и прошел в своем историческом развитии несколько этапов (вавилонская и древнеегипетская культура, культура Древнего Китая и Древней Индии, древнегреческая культура, эпоха Средневековья, эпоха Возрождения, промышленная революция 18 в., великие научные открытия 19 в., научно-техническая революция 20 в.) и вошел в 21-й век, который открывает новую эпоху в истории человечества - эпоху Гармонии. Именно в античный период было сделано ряд выдающихся математических открытий, оказавших определяющее влияние на развитие материальной и духовной культуры и роль которых мы не всегда сознаем. К разряду таких открытий мы должны, прежде всего, отнести Вавилонскую 60-ричную систему счисления и открытый вавилонянами позиционный принцип представления чисел, лежащий в основе десятичной и двоичной систем счисления. В этот ряд мы должны поставить тригонометрию и геометрию Евклида, несоизмеримые отрезки, золотое сечение и Платоновы тела, начала теории чисел и теории измерения. И, хотя каждый из этих этапов имеет свою специфику, вместе с тем он обязательно включает содержание предшествующих этапов. В этом и состоит преемственность в развитии науки. Преемственность может осуществляться в различных формах. Одной из сущностных форм ее выражения являются фундаментальные научные идеи, которые пронизывают все этапы научно-технического прогресса и оказывают влияние на различные области науки, искусства, философии и техники. К разряду таких фундаментальных идей относится идея Гармонии, связанная с золотым сечением. По словам Б.Г. Кузнецова, исследователя творчества Альберта Эйнштейна, великий физик свято верил в то, что наука, физика в частности, всегда имела своей извечной фундаментальной целью "найти в лабиринте наблюдаемых фактов объективную гармонию". О глубокой вере выдающегося физика в существование универсальных законов гармонии мироздания свидетельствует и еще одно широко известное высказывание Эйнштейна: «Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии».

Высказывания Алексея Лосева и Иоганна Кеплера. Какая главная идея лежала в основе древнегреческой науки? Подавляющее число исследователей дают следующий ответ: идея Гармонии, связанная с «золотым сечением». Как известно, в древнегреческой философии Гармония противостояла Хаосу и означала организованность Вселенной, Космоса. Выдающийся русский философ Алексей Лосев, исследователь эстетики античности и эпохи Возрождения, так оценивает основные достижения древних греков в этой области:

«Космос античным мыслителям периода зрелой классики представляется не просто некоей отвлеченной неопределенностью, (в таком случае он был бы только чистой мыслью), но совершенно живым и единораздельным телом, содержащим в себе нерушимую цельность, несмотря на бесконечные различия всех его проявлений. С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения (то есть, целое относится в нем к большей части, как большая часть к меньшей). Этому закону, кстати сказать, древние греки подчиняли и свои архитектурные сооружения. Их систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

В этом высказывании Алексей Лосев достаточно убедительно сформулировал «золотую» парадигму античной космологии. В ее основе лежат важнейшие идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «курьезный результат безудержной и дикой фантазии». Прежде всего – это пифагорейская идея о числовой гармонии мироздания и космология Платона, основанная на Платоновых телах. Обратившись к геометрической структуре мироздания и арифметическим отношениям, выражающим гармонию, пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания оказалась бессмертной.

Таким образом, в центре созданного древними греками математического учения о природе стояла «концепция гармонии», а сама математика древних греков и была «математикой гармонии» (“the mathematics of harmony”), которая непосредственно связана с золотым сечением - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии.

А вот еще одно широко известное высказывание, касающееся золотого сечения. Оно принадлежит гениальному астроному Иоганну Кеплеру, автору трех знаменитых «Законов Кеплера». Свое восхищение золотым сечением Кеплер выразил в следующих словах:

«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Напомним, что старинная задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, которая упоминается в этом высказывании, – это и есть золотое сечение!

Огромный интерес к этой проблеме в современной науке подтверждается достаточно внушительным перечнем книг по этой проблеме, опубликованных во второй половине 20 в. и начале 21 в. [1-50].

Математическое учение о Природе древних греков. Согласно мнению выдающегося американского историка математики Мориса Клайна [51], главный вклад древних греков, «оказавший решающее влияние на всю последующую культуру, состоял в том, что они взялись за изучение законов природы». Основной вывод, вытекающий из книги Мориса Клайна [51], состоит в том, что древние греки предложили новаторскую концепцию космоса, в котором все было подчинено математическим законам. Возникает вопрос: когда эта концепция была разработана? Ответ на этот вопрос также содержится в книге [51]:

«Греки преисполнились решимости доискаться до истин и, в частности, до истин о математических основах природы. Как следует приступить к поиску истин и как при этом гарантировать, что поиск действительно приводит к истинам? Греки предложили «план» такого поиска. Хотя он создавался постепенно на протяжении нескольких веков (VI-III вв. до н.э.), в истории науки расходятся во мнении относительно того, когда и кем этот план был впервые задуман, к III в. до н.э. план поиска истин был доведен до совершенства».

Таким образом, по мнению Клайна, новаторская концепция космоса, основанного на математических законах, была разработана древними греками в период с VI до III вв. до н.э. Но согласно утверждению А.Н. Колмогорова [52], в этот же период в Древней Греции «возникает математика как самостоятельная наука с ясным пониманием своеобразия ее метода и необходимости систематического развития ее основных понятий и предложений в достаточно общей форме».

Но тогда возникает вопрос: существовала ли какая-либо взаимосвязь между процессом создания математического учения о природе, что считается главным достижением древнегреческой науки, и процессом создания математики, которые протекали в Древней Греции в один и тот же период. Или это разные процессы? Оказывается, что такая связь, безусловно, существовала. Более того. Можно утверждать, что эти процессы фактически совпадали, то есть, математика, созданная древними греками, и их учение о природе, основанное на математических принципах, - это одно и то же. И наиболее ярким воплощением процесса «Математизации Гармонии» являются «Начала» Евклида, написанные в III в. до н.э.

Гипотеза Прокла. Греческий философ Прокл Диадох (412-485) высказал необычную гипотезу, касающуюся «Начал» Евклида. Среди математических сочинений Прокла наиболее известным является его «Комментарий к первой книге «Начал» Евклида». В этом Комментарии он выдвигает следующую необычную гипотезу. Суть «гипотезы Прокла» состоит в следующем. Как известно, XIII-я, то есть, заключительная книга «Начал», посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в «Космологии Платона» и в современной науке известны под названием Платоновых тел. Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [13], по мнению Прокла, Евклид «создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики».

Именно для решения этой задачи (в частности, для создания геометрической теории додекаэдра) Евклид уже в Книге II вводит задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении («золотое сечение»), которая затем встречается и в других Книгах «Начал», в частности, в Книге XIII.

«Гипотеза Прокла» приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, из «Начал» Евклида берут свое начало два направления математической науки - «Классическая Математика», позаимствовавшая в «Началах», аксиоматический подход, теорию чисел, теорию иррациональностей и геометрические аксиомы, и «Математика Гармонии», которая акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотом сечении») и на теории Платоновых тел, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида.

Введение термина «математика гармонии». В конце 20 в. для обозначения математического учения о природе, созданного древними греками, был введен термин “the mathematics of harmony” (математика гармонии). Следует отметить, что этот термин выбран очень удачно, потому что он отражал главную идею античной науки – «Математизация Гармонии». Впервые этот термин был введен в небольшой статье “Harmony of spheres”, помещенной в The Oxford dictionary of philosophy [53]. В этой статье понятие «the mathematics of harmony» («математика гармонии») ассоциируется с «гармонией сфер», которая называлась также «гармонией мира» (harmonica mundi) или мировой музыкой (лат. musica mundana). Гармония сфер представляет собой античное и средневековое учение о музыкально-математическом устройстве космоса, восходящее к пифагорейской и платонической философской традиции.

Еще одно упоминание о «математике гармонии» применительно к древнегреческой математике мы встречаем в книге Vladimir Dimitrov. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics, опубликованной в 2005 г. [54]. Важно подчеркнуть, что в книге [54] понятие “the mathematics of harmony” («математика гармонии») непосредственно ассоциируется с «золотым сечением» - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии, которое в тот период называлось «делением отрезка в крайнем и среднем отношении».

Как вытекает из работ [53,54], в развитии «Математики Гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители, ученые и математики: Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн, а в 20-м веке – известные математики Коксетер, Воробьев, Хоггатт и Вайда. И мы никак не можем игнорировать этот исторический факт.

Числа Фибоначчи. С золотым сечением тесно связаны числа Фибоначчи, открытые в 13 веке итальянским математиком Леонардо из Пизы, по прозвищу Фибоначчи. Они составляют числовой ряд, начинающийся с двух единиц, в котором каждое последующее число является суммой двух предыдущих. Отношение соседних чисел ряда Фибоначчи в пределе стремится к золотому сечению. Математическая теория чисел Фибоначчи получила дальнейшее развитие в работах французских математиков 19-го века Бине («формулы Бине») и Люка («числа Люка»). Как упоминалось, во второй половине 20-го века эта теория получила развитие в работах канадского геометра Дональда Коксетера [1], советского математика Николая Воробьева [2], американского математика Вернера Хоггатта [3] и английского математика Стефана Вайды [4]. Развитие этого направления, в конечном итоге, привело к возникновению «Математики Гармонии» [47] - нового междисциплинарного направления современной науки, которое имеет отношение к современной математике, компьютерной науке, экономике, а также ко всему теоретическому естествознанию. Работы известных математиков Коксетера, Воробьева, Хоггатта и Вайды, а также исследования математиков-фибоначчистов, членов Американской Фибоначчи-Ассоциации, стали началом процесса «Гармонизации Математики», который активно продолжается и в 21-м веке. И этот процесс подтверждается огромным количеством книг в области «золотого сечения» и чисел Фибоначчи, опубликованных во второй половине 20 в. и начале 21 в. [1-50].

Источники настоящей книги. Настоящая книга является итогом более чем 40-летних исследований автора, связанных с «золотым сечением» и числами Фибоначчи, и основана на материале пяти книг, опубликованных автором в различные периоды своей научной деятельности. Первая книга «Введение в алгоритмическую теорию измерения» опубликована в 1977 г. [9] и посвящена изложению оригинальной математической теории измерения, касающейся теоретической метрологии и оснований математики. Фибоначчиевы алгоритмы измерения, синтезированные в рамках алгоритмической теории измерения [9], лежат в основе p-кодов Фибоначчи – новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы.

Вторая публикация – это брошюра «Алгоритмическая теория измерения» [10], опубликованная издательством «Знание» в престижной серии «Математика и кибернетика» в 1979 г.

Третья книга «Коды золотой пропорции» опубликована в 1984 г. [12] и посвящена изложению нового направления в теории систем счисления – систем счисления с иррациональными основаниями, называемых также кодами золотой пропорции. Системы счисления с иррациональными основаниями являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу «золотой» теории чисел [55]. Коды Фибоначчи и коды золотой пропорции могут быть положены в основу нового направления в компьютерной науке – "компьютеров Фибоначчи» как нового направления в компьютерной технике, направленного на повышение информационной надежности компьютеров и защищенных 65 патентами США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран.

Четвертая книга «Код да Винчи и ряды Фибоначчи», написанная в соавторстве с Анной Слученковой и Игорем Щербаковым, опубликована в 2006 г. [43] и представляет собой популярное изложение современной теории и приложений золотого сечения, чисел Фибоначчи и Платоновых тел.

Пятая книга "The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science" опубликована в 2009 г. [47] и посвящена изложению «математики гармонии» – нового междисциплинарного направления современной науки, которое, по мнению академика Юрия Митропольского, представляет собой «большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики». С другой стороны, математика гармонии представляет собой «золотую парадигму» современной науки и отражает важнейшую тенденцию в современной науке – возрождение «гармонических идей» Пифагора, Платона и Евклида.

Структура и цель книги. Книга состоит из трех частей:

Часть 1. Золотое сечение, числа Фибоначчи, и Платоновы тела в истории науки и культуры.

Часть 2. Коды Фибоначчи и золотой пропорции как альтернатива классической двоичной системе счисления

Часть 3. Математика гармонии как «золотая» парадигма современной науки

Главная цель книги – привлечь внимание широкой научной общественности и педагогических кругов к «математике гармонии» как новому типу «элементарной математики», представляющей интерес для современного математического образования, и как «золотой» парадигме современной науки, представляющей интерес для всей науки в целом, в том числе для информатики.

Книга написана популярно и рассчитана на широкий круг читателей, включая школьников, студентов, учителей школ, ученых различных специализаций, интересующихся историей математики, Платоновыми телами, золотым сечением, числами Фибоначчи и их приложениями в современной науке.

Благодарности. Заканчивая экскурс в предысторию возникновения этой книги, автор хотел бы поблагодарить всех, кто оказывал и оказывает огромную поддержку автору в развитии данного научного направления. Прежде всего, чувства глубокой благодарности автор испытывает к своему учителю профессору Александру Андреевичу Волкову (1924-2008), научному руководителю кандидатской (1966) и докторской (1972) диссертаций, а также выдающемуся украинскому математику академику Юрию Алексеевичу Митропольскому (1917-2008), который оказал огромную поддержку автору в развитии данного научного направления и способствовал публикации статей автора в академических изданиях Украины. И, конечно, огромная благодарность соратникам автора, членам Международного Клуба Золотого Сечения Эдуарду Сороко, Олегу Боднару, Сергею Петухову, Григорию Мартыненко, Самуилу Арансону, Борису Розину, Николаю Семенюте, Сергею Абачиеву, Валериану Владимирову, Виктору Цветкову, Анатолию Харитонову, Сергею Якушко, Олегу Когновицкому, Александру Южанникову, Анатолию Коновалову, Михаилу Быстрову, Александру Волошинову, Ирине Крючковой, Александру Иванусу, Леониду Тимошенко, Елене

Терешиной, Ивану Райляну, Алексею Борисенко, Денису Клещеву, Юрию Черепахину, Александру Чечику, Юрию Цымбалисту, Татьяне Егоровой-Гудковой, Юрию Вишнякову, Леониду Мараховскому, Антону Кононову и многим другим. Автору было нелегко устанавливать новые научные контакты после переезда в Канаду в 2004 г. И автор благодарен зарубежным ученым – аргентинскому математику Вере Шпинадель, американскому математику Джею Капраффу, чилийскому философу Дарио Саласу Соммеру, английскому физику Мохаммеду Ель-Нашие, немецкому ученому Волкмару Вейсу, канадским ученым Вадиму Геворкову и Льву Киришьяну за поддержку научных исследований автора. Особая благодарность американскому философу проф. Скотту Олсену, одному из ведущих американских ученых в области золотого сечения, автору замечательной книги "The Golden Section. Nature's Greatest Secret" (2006) [43]. Дружба с проф. Олсеном началась с 2005 г., когда Скотт Олсен приехал в Канаду специально для знакомства с автором настоящей книги. Проф. Скотт Олсен сыграл большую роль в публикации англоязычной книги автора "The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science" (2010) [47]. В 2010 г. он принял участие в работе Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 8-10 октября 2010 г.), а в августе 2011 г. он еще раз посетил Канаду, чтобы наметить перспективы совместной научной работы, обсудить с автором свою новую книгу и поддержать автора в связи с тяжелой болезнью супруги.

За постоянную поддержку и создание прекрасных условий для научного творчества особую благодарность и глубокие чувства любви и признательности автор выражает членам своей семьи, прежде всего, супруге Антонине, с которой прожито в любви и дружбе более 50 лет, и дочери Анне, без которой наша жизнь в Канаде была бы просто невозможной. И без их помощи, заботы и моральной поддержки эта книга никогда не была бы написана.

Введение к части 3

«Математика гармонии», изложению основ которой посвящена настоящая книга, является очень юной математической теорией. Впервые понятие «математика гармонии» (the harmony mathematics”) использовано автором в докладе «The Golden Section and Modern Harmony Mathematics», сделанном в 1996 г. на заседании 7-й Международной конференции по числам Фибоначчи (Австрия, Грац, 1996), организованной Американской Фибоначчи-Ассоциацией. Доклад был с большим интересом воспринят математиками-фибоначчистами и был отобран для публикации в сборнике трудов этой конференции “Applications of Fibonacci Numbers”, изданном престижным издательством “Kluwer Academic Publishers” в 1998 г. [55]. С тех пор развитие «математики гармонии» стало в центре научных интересов автора, что и привело к написанию книги [47].

Главная цель части 3 книги «Основы математики гармонии и ее приложения» - дать ответ на следующие два вопроса:

1. Какое место занимает «математика гармонии» в системе математических наук и каково ее влияние на развитие современной математики?
2. Является ли «математика гармонии» «золотой» парадигмой современной науки?

Часть 3 начинается с главы 13 «Математика гармонии как предпосылка «золотой» революции в математике и информатике». В главе обсуждается влияние «математики гармонии» на ход развития современной математики и информатики и ряд необычных идей, выдвинутых в первых двух частях настоящей книги. В частности, «гипотеза Прокла», которая обсуждалась в части 1 настоящей книги, рассматривается как предпосылка «золотой» революции в истории математики. Обсуждается влияние «математики гармонии» на развитие двух древнейших математических теорий – «теории измерения» и «элементарной теории чисел». Далее рассматриваются системы счисления с иррациональными основаниями (коды Фибоначчи и золотой пропорции) как предпосылка «золотой» революции в информатике, а также элементы «золотой» теории чисел, основанной на кодах золотой пропорции. Обсуждается также влияние математики гармонии на современное образование. В заключение обсуждается статья известного российского философа Сергея Абачиева «Математика гармонии глазами историка и методолога науки» [56].

Глава 14 «Математика гармонии и «золотые» гиперболические функции» посвящена обсуждению связи математики гармонии с «теорией элементарных функций», играющих основополагающую роль в математике и ее приложениях в теоретическом естествознании. Здесь вводится новый класс «элементарных функций», названных «золотыми» гиперболическими функциями или гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка [57,58]. В главе 15 обсуждаются приложения «золотых» гиперболических функций (новая геометрическая теория филлотаксиса, созданная украинским исследователем Олегом Боднаром [24], функция «Золотой Шофар» и «Шофароподобная модель Вселенной» [59], «золотые» матрицы [60] и «золотая» интерпретация специальной теории относительности [61]).

Глава 16 посвящены изложению теории $\lambda-$чисел Фибоначчи, которая является продуктом коллективного творчества сразу нескольких исследователей из разных стран: Vera de Spinadel, Аргентина [29]; Midhat Gazale, Франция [30]; Александр Татаренко, Россия [62]; Jay Kappraff, США [33,34]; Грант Аракелян, Армения [49,63]; Виктор Шенягин, Россия [64]; Николай Косинов, Украина [65]; Алексей Стахов, Канада [66]; Falcon Sergio, Plaza Angel, Испания [67]). В главе 17 обсуждаются приложения математики гармонии для решения проблем Гильберта – 10-й проблемы Гильберта (Юрий Матиясевич, 1970) и 4-й проблемы Гильберта (Алексей Стахов и Самуил Арансон [68-70]).

Глава 18-я «Математика гармонии: роль и место в системе математических наук» является центральной с точки зрения ответа на вопросы, поставленные в начале настоящего Введения. Здесь затрагивается широкий комплекс вопросов, касающихся математики и ее истории. Анализируется кризис в современной математике, описанный в книге выдающегося американского историка математика Мориса Клайна «Математика. Утрата определенности» [51]. Особое внимание в этой главе уделяется анализу стратегических ошибок в развитии математики, проведенному в статье Алексея Стахова [71]. Рассматриваются критерии эстетики и красоты математики, в частности, «принцип математической красоты» Дирака. С позиций этих критериев анализируются наиболее важные математические результаты, полученные в рамках «математики гармонии» [47].

Обсуждаются современные научные открытия, основанные на Платоновых телах (квазикристаллы и фуллерены), золотом сечении («золотые» геноматрицы Петухова) и числах Фибоначчи (фибоначчиевая закономерность Периодической таблицы Д.И. Менделеева) и др.

Обсуждаются три важнейших периода в развитии «математики гармонии» (древнегреческий период, эпоха Возрождения, современный период). Анализируется влияние американской Фибоначчи-Ассоциации и Славянской «золотой» группы на развитие этого направление в современной науке.

Проводится анализ «математики гармонии» как «золотой» парадигмы современной науки, обсуждается взаимосвязь смены научных парадигм в математике и естественных науках и делается попытка ответить на вопрос, какое место занимает «математика гармонии» в системе современных математических наук.

Глава 19 «Лики божественной пропорции» написана автором совместно с Иваном Райляном (Чили), научные интересы которого касаются гармонии и герметической философии. В главе прослеживается развитие понятия «гармонии» от античности до современной науки. Рассматриваются «тайны науки», на которые современная наука пока не нашла ответа (тайна происхождения мира, тайна возникновения разума, тайна генетического кода, тайна филлотаксиса и др.). Обсуждая истоки науки, автор обращается к работам чилийского философа Дарио Саласа Соммэра, который в своих трудах обращает внимание на связь «математики гармонии» с «герметической философией» - великом научном достижении древнеегипетской цивилизации. В главе анализируются основные принципы «герметической философии» и их связь с современной наукой. Анализируются основные научные достижения древних египтян, имеющих отношение к проблеме гармонии. При этом особо подчеркивется мысль российского архитектора Игоря Шмелева о том, что «теория гармонии была разработана задолго до того, как древнеегипетская цивилизация вступила в фазу наивысшего расцвета культуры. Не исключено, что совершенное применение методологии теории гармонии было тем прочным фундаментом, на котором покоилась цивилизация золотого века, когда в основе учения древних мудрецов лежала духовная материя (безинерциальная материя Информации). Правильное владение ею давало возможность человеку гармонично развиваться в едином потоке законов Природы...

Вероятно, сознавая важность теории гармонии, иерофанты Древнего Египта приняли решение зашифровать ее математические аспекты средствами геометрии для сохранения и передачи знания грядущим поколениям, что было блестяще исполнено гением Хеси-Ра».

В заключение главы 19 «космическое религиозное чувство» Альберта Эйнштейна, Макса Планка и Владимира Вернадского, как основа для сближения научного и религиозного мировоззрений.

Глава 13

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ КАК ПРЕДПОСЫЛКА «ЗОЛОТОЙ» РЕВОЛЮЦИИ В МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

13.1. «Гипотеза Прокла» как предпосылка «золотой» революции в истории математики

Значение «гипотезы Прокла» для развития математики. Эта удивительная гипотеза детально обсуждалась нами в части 1 настоящей книги. Ее значение для истории математики и ее будущего развития трудно переоценить. Главный вывод из «гипотезы Прокла» состоит в том, что знаменитые «Начала» - величайшее античное математическое сочинение, к которому в своих истоках восходит современная математика, были написаны Евклидом под непосредственным влиянием греческой идеи гармонии, которая ассоциировалась у древних греков с Платоновыми телами. Согласно этой гипотезе, "Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания» и «Космология Платона», основанная на правильных многогранниках, были воплощены в «Началах» Евклида – наиболее известном математическом сочинении древнегреческой математики,. С этой точки зрения, мы имеем полное право рассматривать «Начала» Евклида как первую попытку создать «Математическую теорию гармонии мироздания». Это и есть главная тайна «Начал» Евклида, которая приводит к пересмотру истории возникновения математики, начиная с древнегреческой математики.

К сожалению, оригинальная гипотеза Прокла, касающаяся истинных целей, которые преследовал Евклид при написании «Начал», по существу проигнорирована многими современными историками математики, что привело к искаженному взгляду на структуру математики и всего математического образования. И это является «стратегической ошибкой» в развитии математики.

«Гипотеза Прокла» оказала большое влияние на развитие науки и математики. Как утверждается в работах [72-74], Кеплер был убежден в правильности «гипотезы Прокла» И подтверждением этому является его «Космический кубок» – оригинальная модель Солнечной системы, основанная на Платоновых телах.

В 19 в. выдающийся математик Феликс Клейн выдвинул предположение, что икосаэдр, одно из важнейших тел Платона, является главной геометрической фигурой математики, которая позволяет объединить все важнейшие разделы математики: геометрию, теорию Галуа, теорию групп, теорию инвариантов и дифференциальные уравнения [75]. Эта идея Клейна не получила дальнейшего развития в математике, что также можно считать «стратегической ошибкой» в ее развитии.

«Гипотеза Прокла» и «ключевые» проблемы античной математики. В главе 1 (см. часть 1 настоящей книги) мы обсуждали новый взгляд на историю возникновения математики, который вытекает из «гипотезы Прокла». Как известно, академик Андрей Колмогоров в книге [52] выделил две главные, то есть, «ключевые» проблемы, которые стимулировали развитие математики на этапе ее зарождения: проблему счета и проблему измерения. Однако, из «гипотезы Прокла» вытекает еще одна «ключевая» проблема – проблема гармонии, оказавшая огромное влияние на развитие древнегреческой математики. Эта проблема была связана с «Платоновыми телами» и «золотым сечением» - выразителями гармонии и важнейшими математическими открытиями античной математики. Именно «проблема гармонии» была положена Евклидом в основу «Начал», главной целью которых, согласно «гипотезе Прокла», было создание геометрической теории «Платоновых тел», которые в «космологии Платона» выражали гармонию Мироздания. Эта идея приводит к новому взгляду на историю математики, изложенному нами в главе 1. Этот взгляд отражен на Рис.13.1, взятом из главы 1.

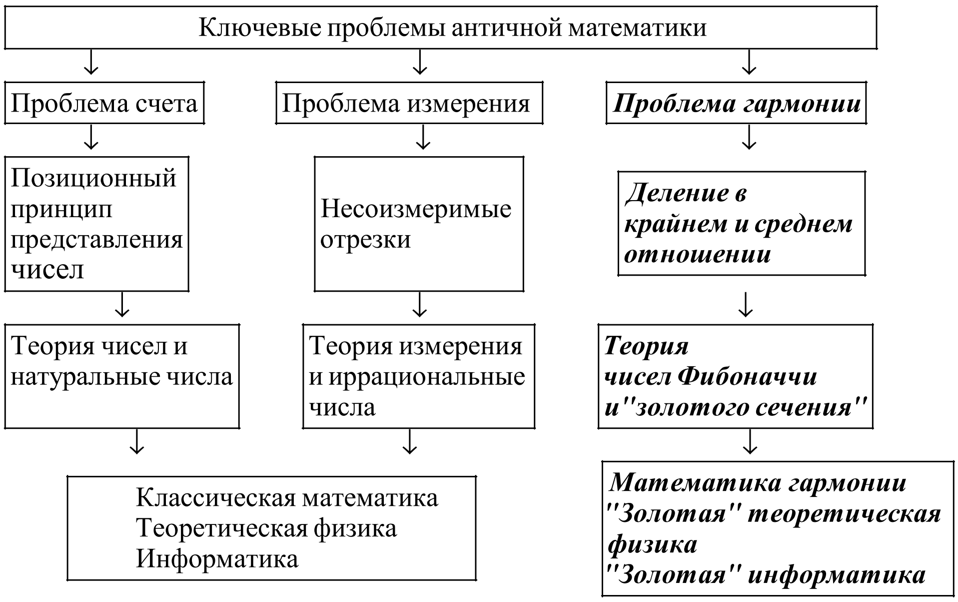


Рис.13.1. «Ключевые» проблемы античной математики и новые направления в математике, теоретической физике и информатике

Подход, вытекающий из Рис. 13.1, приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что параллельно с «Классической Математикой» в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – «Математика Гармонии» [53,54], которая, как и «Классическая Математика», восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Предложение II.11 Книги II «Начал» Евклида) и на теории правильных многогранников, изложенной в Книге XIII «Начал» Евклида. В развитии «Математики Гармонии» в течение нескольких тысячелетий принимали участие выдающиеся мыслители и ученые: Пифагор, Платон, Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Бине, Люка, Клейн, а в 20-м веке – Воробьев и Хогатт.

Ясно, что, если истина восторжествует и «гипотеза Прокла» будет признана историками математики, как это сделано в работах [72-74], то это станет предпосылкой для введения античной концепции Гармонии в современную математику. При этом «идея Гармонии» привносит в математику ту главную прикладную цель, ради которой древние греки и создавали «математическое учение о природе» [51] - создание полезных математических моделей “Гармонии Мироздания»; при этом Платоновы тела и полуправильные многогранники (Архимедовы тела и др.), «золотое сечение», числа Фибоначчи и их обобщения и должны лежать в основе этих моделей. Эти выдающиеся математические открытия античной и средневековой математики перестанут играть роль своеобразных «изгоев» в математике и займут в ней то место, которое они, безусловно, заслуживают. Этот процесс, который назван автором в статье [76] «гармонизацией математики», станет началом «золотой» революции в математике и завершится слиянием математики с теоретическим естествознанием, к чему и призывает Морис Клайн в заключительной главе «Авторитет природы» своей замечательной книги [51] Как подчеркивается в статье [76], процесс «гармонизации математики» начался во второй половине 20 в. с работ выдающихся математиков: канадского геометра Дональда Коксетера [1], советского математика Николая Воробьева [2], американского математика Вернера Хоггатта [3], английского математика Стефана Вайды [4] и других математиков. Учреждение американской Фибоначчи-ассоциации (1963), издание математического журнала «The Fibonacci Quarterly” (1963), создание так называемой Славянской «Золотой» Группы (Киев, 1992), которая в 2003 г. была преобразована в Международный Клуб Золотого Сечения, учреждение Института Золотого Сечения (Россия, Академия Тринитаризма) (2005), проведение Международных конференций «Fibonacci Numbers and Their Applications» (один раз в 2 года, начиная с 1984 г.), проведение Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 2010), наконец, публикация первой в истории науки фундаментальной книги по «математике гармонии» [47] – все это важные научные события, которые свидетельствуют о том, что в современной математике полным ходом идет процесс ее «гармонизации», то есть, возврата к идеям Пифагора, Платона и Евклида.

13.2. Математика гармонии и алгоритмическая теория измерения

Открытие несоизмеримых отрезков и возникновение математической теории измерения. Математика гармонии имеет отношение к двум античным математическим теориям – «теории измерения» и «элементарной теории чисел».

Начнем с «теории измерения», которая восходит в своих истоках к «несоизмеримым отрезкам», открытым пифагорейцами. Существуют различные легенды относительно доказательства несоизмеримости. В некоторых источниках утверждается, что первое доказательство существования «несоизмеримых отрезков» было сделано пифагорейцем Гиппасом из Метапонта (ок. 500 г. до н. э.), который нашёл это доказательство, изучая длины сторон пентаграммы. До открытия несоизмеримости считалось, что любые два геометрические отрезка «соизмеримы», то есть, для них существует единая единица длины, достаточно малая и неделимая, которая целое число раз входит в оба эти отрезка (это утверждение составляло содержание «принципа соизмеримости», который лежал в основе пифагорейской математики на ранних этапах ее развития). Однако Гиппас обосновал, что не существует единой единицы длины, поскольку предположение о её существовании приводит к противоречию. Он показал, что если отношение гипотенузы квадрата к его стороне представляет собой некоторое число, то это число должно быть одновременно и четным, и нечетным. Таким образом, изучение пентаграммы и квадрата привели к открытию несоизмеримых отрезков.

Греческие математики назвали такое отношение несоизмеримых величин «алогос» (невыразимое). Открытие Гиппаса поставило перед пифагорейской математикой серьёзную проблему, которая разрушила их «принцип несоизмеримости».

Большой вклад в разрешение кризиса в основаниях математики, связанного с открытием несоизмеримых отрезков, внес Евдокс Книдский (410 или 408 г. до н. э. — 355 или 347 г. до н. э.). Он развил теорию пропорций, которая принимала во внимание как рациональные, так и иррациональные отношения. Это послужило основанием для понимания фундаментальной сути иррациональных чисел. Величина стала считаться не числом, но обозначением геометрических сущностей (отрезки прямых, площади, объёмы, промежутки времени), которые могут изменяться непрерывно (в современном понимании этого слова). При этом величины были противопоставлены числам, которые могут изменяться лишь «прыжками» от одного числа к соседнему, например, с 4 на 5. Числа (рациональные) составляются из наименьшей неделимой величины, в то время как величины можно уменьшать бесконечно. По существу исследования Евдокса в области иррациональных величин дали начало развитию математической теории измерения – одной из древнейших математических теорий, которая лежит в основании математики. В 19 в. был достигнут, как казалось, существенный прогресс в развитии «математической теории измерения»: было доказано справедливость и единственность решения так называемого «основного уравнения измерения»:

$$Q = qV \ , \tag{13.1}$$

где Q - измеряемая величина, V - единица измерения, q - результат измерения (некоторое действительное число, рациональное или иррациональное).

Значение уравнения (13.1) состояло в том, что это уравнение как бы окончательно связывало между собой геометрию и арифметику, то есть, после доказательства (13.1) в основаниях математики наступила долгожданная гармония.

Как оказалось, эта теория никакой гармонии математике не принесла. Дело в том, что доказательство уравнения (13.1) основано на использовании двух аксиом – аксиомы Евдокса-Архимеда, основанной на так называемом методе «исчерпывания» Евдокса, и аксиомы Кантора, основанной на абстракции «актуальной бесконечности (описание этих аксиом дано в главе 1).

После обнаружения парадоксов в Канторовской теории множеств возникли сомнения в правомерности использования понятия «актуальной бесконечности» в математике, что привело к возникновению конструктивной математики, которая исключает из рассмотрения абстракцию «актуальной бесконечности» как внутренне противоречивое понятие («завершенная бесконечность») и использует значительно более «скромное» понятие бесконечности, названное «потенциальной бесконечностью». Эта идея лежит в основе новой (конструктивной) теории измерения, названной алгоритмической теорией измерения [9].

Алгоритмическая теория измерения. Изложение этой теории дано в части 2 настоящей книги. Ей посвящены главы 5 и 6 (см. часть 2 книги) Несмотря на то, что стимулом для создания этой теории было решение практических задач, возникших в технике аналого-цифрового преобразования, значение этой теории вышло далеко за пределы этой области техники. Наиболее неожиданными результатами этой теории стало открытие новых алгоритмов измерения, в частности, «биномиальных алгоритмов», основанных на «арифметическом квадрате» и биномиальных коэффициентах, и «фибоначчиевых алгоритмов», основанных на «обобщенных числах Фибоначчи, названных p-числами Фибоначчи. Основной результат этой теории задается Табл.13.1, которая взята из главы 6. В Табл.13.1 представлена «функция эффективности» $F_p(n,k)$ оптимального (n,k,S)-алгоритма измерения и ее частные случаи, соответствующие различным значениям $p\,(p=0,1,2,3,...)$ и $k\,(k=0,1,2,3,...)$.

Таблица 13.1. Основной результат алгоритмической теории измерения

	$p=0$	$0<p<\infty$	$p=\infty$
$k\geq 1$	$(k+1)^n$ $\downarrow$	$\leftarrow F_p(n,k)\rightarrow$ $\downarrow$	$C_{n+k}^{k}=C_{n+k}^{n}$ $\downarrow$
$k=1$	2^n	$\leftarrow F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-p-1)\rightarrow$	$n+1$
	Двоичные числа	$p-$числа Фибоначчи	Натуральные числа

Таким образом, «неожиданность» основного результата «алгоритмической теории измерения» (синтез бесконечного количества «оптимальных» алгоритмов измерения, «функция эффективности» которых выражается некоторым рекуррентным соотношением $F_p(n,k)$) заключается в том, что «функция эффективности» «оптимального» алгоритма измерения $F_p(n,k)$ (n-число шагов алгоритма, а k-число «индикаторных элементов») включает в качестве частных случаев ряд известных комбинаторных формул, в частности, формулы для числа размещений с повторениями $(k+1)^n$, для числа сочетаний $C_{n+k}^k = C_{n+k}^n$, для двоичных (2^n) и натуральных ($n+1$) чисел, а также рекуррентное соотношение для p-чисел Фибоначчи.

13.3. О расширении «элементарной» теории чисел»

Что такое «элементарная теория чисел»? Математика гармонии, восходящая к «Началам» Евклида, может оказать существенное влияние на развитие еще одной античной математической теории – «элементарной теории чисел», основы которой изложены в «Началах» Евклида. В Википедии мы находим следующий ответ на вопрос, что такое «элементарная теория чисел:

«В **элементарной теории чисел** целые числа изучаются без использования методов других разделов математики. Такие вопросы, как делимость целых чисел, алгоритм Евклида для вычисления наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного, разложение числа на простые множители, построение магических квадратов, совершенные числа, числа Фибоначчи, малая теорема Ферма, теорема Эйлера, задача о четырёх кубах относятся к этому разделу».

Важно подчеркнуть, что «числа Фибоначчи» также включены в состав «элементарной теории чисел».

Представленный в Табл.13.1 основной результат алгоритмической теории измерения сам по себе представляет интерес, как для комбинаторики, так и для теории чисел, однако он может привести к более глубоким выводам методологического характера, если учесть, что «при своем зарождении понятие числа, ставшее затем основой арифметики, не только имело конкретный характер, но и было неотделимо от понятия измерения, легшего позднее в основу геометрии. В процессе дальнейшего развития математики эти понятия все больше дифференцируются и вместе с тем каждый раз на новом, высшем этапе происходит их объединение» [77].

Как показано в главах 5 и 6, алгоритмическая теория измерения порождает не только огромное количество новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения и соответствующих им позиционных систем счисления, но также бесконечное число новых числовых последовательностей, в частности, такой новый класс рекуррентных числовых последовательностей, как p-числа Фибоначчи $\left(p=0,1,2,3,\ldots\right)$, частными случаями которых являются «двоичные» числа $\left(p=0\right)$ и классические числа Фибоначчи $\left(p=1\right)$. Эти и другие числовые последовательности и порождаемые ими новые системы счисления (p-коды Фибоначчи) и должны стать предметом изучения в обновленной «элементарной теории чисел».

***P*-коды Фибоначчи.** Подобно тому, как «двоичный» алгоритм измерения порождает двоичную систему счисления, «фибоначчиевые» алгоритмы измерения [9], порождают новые способы двоичного позиционного представления натуральных чисел, названных p-кодами Фибоначчи [9]:

$$N=a_nF_p\left(n\right)+a_{n-1}F_p\left(n-1\right)+\ldots+a_iF_p\left(i\right)+\ldots+a_nF_p\left(1\right), \tag{13.2}$$

где $a_i\in\left\{0,1\right\}$ – двоичная цифра i-го разряда позиционного представления (13.2); n – разрядность кода (13.2); $F_p\left(i\right)\left(i=1,2,3,\ldots,n\right)$ – вес i-го разряда, равный i-му p-числу Фибоначчи.

Важно подчеркнуть, что сумма (13.2) включает в себя бесконечное число различных позиционных представлений, потому что каждое $p\left(p=0,1,2,3,\ldots\right)$ «порождает» свое собственное позиционное представление типа (13.2). Как показано в главе 8, частными случаями (13.2) является классический двоичный способ представления натуральных чисел $\left(p=0\right)$:

$$N=a_n2^{n-1}+a_{n-1}2^{n-2}+\ldots+a_i2^{i-1}+\ldots+a_12^0, \tag{13.3}$$

классический код Фибоначчи $\left(p=1\right)$

$$N = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \ldots + a_i F_i + \ldots + a_1 F_1, \tag{13.4}$$

наконец, «Евклидово определение» натурального числа N $(p = \infty)$, лежащее в основе «элементарной теории чисел»:

$$N = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{N}. \tag{13.5}$$

Следует еще раз подчеркнуть важную роль алгоритмической теории измерения [9] в создании нового математического понятия - p-кодов Фибоначчи. Ясно одно. Не будь сформулированного автором принципа асимметрии измерения [78], и вытекающих их этого принципа фибоначчиевых алгоритмов измерения, вполне возможно, что p-коды Фибоначчи вообще никогда не появились бы в современной математике и информатике. Но ведь p-код Фибоначчи, задаваемый формулой (13.2), является обобщением двоичной системы (13.3)! Благодаря p-кодам Фибоначчи (13.2), мы теперь знаем, что существует бесконечное число двоичных позиционных представлений натуральных чисел, которые задаются некоторым общим математическим выражением (13.2)! И классическая двоичная система (13.3) является лишь частным случаем p-кодов Фибоначчи (13.2). И это существенно расширяет наши теоретико-числовые представления о двоичных позиционных системах счисления, что произошло благодаря алгоритмической теории измерения [9].

Коды золотой *p*-пропорции. Но еще больший теоретико-числовой интерес представляют коды золотой p-пропорции, введенные автором в 1980 г. [79]:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i, \tag{13.6}$$

где, Φ_p - основание системы счисления (13.5), совпадающее с золотой p-пропорцией, рассмотренной в главе 3, Φ_p^i - вес $i-$го разряда, $a_i \in \{0,1\}$ - двоичная цифра $i-$го разряда, $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Заметим, что выражение (13.6) можно трактовать как расширение p-кодов Фибоначи (13.2) на область действительных чисел, и с этой точки зрения коды золотой p-пропорции представляют особый теоретико-числовой интерес.

Коды золотой p-пропорции включают в себя бесконечное количество двоичных позиционных способов представления действительных чисел (систем счисления), так как каждому $p\left(p=0,1,2,3,...\right)$ соответствует своя система счисления типа (13.6). Заметим, что при $p=0$ основание $\Phi_p=\Phi_0=2$ и система счисления (13.6) сводится к классической двоичной системе:

$$A=\sum_i a_i 2^i\ . \qquad (13.7)$$

Рассмотрим случай $p=1$. Для этого случая основанием системы счисления (13.6) является классическая «золотая пропорция» $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и система (13.6) сводится к системе счисления с иррациональным основанием, предложенной в 1957 г. юным американским математиком Джорджем Бергманом [80]:

$$A=\sum_i a_i \Phi^i\ . \qquad (13.8).$$

Рассмотрим теперь предельный случай $p\to\infty$. Для этого случая основание Φ_p стремится к 1, а это означает, что в пределе выражение (13.6) стремится к классическому «Евклидовому определению», задаваемому (13.5), в котором под «единицей» («монадой») понимается бесконечно малый отрезок $\Delta\to 0$.

Таким образом, мы можем рассматривать позиционный способ представления чисел, задаваемый (13.6), как весьма широкое обобщение «Евклидового определения» (13.5) $\left(p\to\infty\right)$, конструктивного определения действительного числа, основанного на двоичной системе (13.7) $\left(p=0\right)$, наконец, системы счисления Бергмана (13.8) [80], первой в истории науки системы счисления с иррациональным основанием.

Коды золотой *p*-пропорции как новое конструктивное определение действительного числа. Как известно, «элементарная теория чисел» начинается с «Евклидового определения» натурального числа, задаваемого (13.5). Несмотря на кажущуюся простоту определения (13.5), оно сыграло большую роль в развитии «элементарное теории чисел» и лежит в основе многих полезных математических понятий, в частности, понятий простого и составного числа, умножения, деления, алгоритма Евклида, а также понятий делимости и сравнения, которые являются одними из основных понятий «элементарной теории чисел». Без всяких преувеличений можно сказать, что определение (13.5) «порождает» как сами натуральные числа, так и всю проблематику их теории.

О «золотой» теории чисел. В работе [81], опубликованной автором в “Украинском математическом журнале» по рекомендации академика Ю.А. Митропольского, коды золотой p-пропорции (13.6) и система Бергмана (13.8) рассмотрены с теоретико-числовых позиций как новый подход к геометрическому определению действительного числа. Согласно этому подходу, вся теория действительных чисел может быть построена на определениях (13.6), (13.8), которые порождают как сами действительные числа, так всю проблематику новой теории чисел, названной «золотой» теорией чисел.

Как показано в главе 9, свойства систем счисления с иррациональными основаниями, задаваемыми (13.6) и (13.8), являются уникальными с теоретико-числовой точки зрения. Они переворачивают не только наши традиционные представления о системах счисления, но и соотношение между рациональными и иррациональными числами. Благодаря системам счисления (13.6) и (13.8), «золотая пропорция» древних греков $\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и ее «гомологи» - «золотые p-пропорции» Φ_p - неожиданно вошли в «святую святых» математики – теорию чисел, и игнорировать этот факт после публикации статьи [81] было бы просто неразумным.

«В «золотой» теории чисел [81] получено ряд важных теоретико-числовых результатов, касающихся новых свойств натуральных чисел. В частности, доказано, что любое натуральное число N представляется в виде конечной суммы степеней «золотой» пропорции или «золотой p пропорции, то есть, представления натуральных чисел в виде:

$$N=\sum_i a_i\Phi^i . \qquad (13.9)$$

$$N = \sum_i a_i \Phi_p^i \tag{13.10}$$

всегда являются конечными для любого натурального числа N.

Но еще более неожиданными с теоретико-числовой точки зрения являются так называемые $Z-$ и Z_p-свойства натуральных чисел [81]. Суть этих свойств состоит в том, что если в выражении (13.9) все степени золотой пропорции $\Phi^i\,(i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$ заменить соответствующими числами Фибоначчи, $F_i\,(i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$, а в выражении (13.10) все степени золотой p-пропорции $\Phi_p^i\,(i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$ заменить соответствующими p-числами Фибоначчи $F_p(i)\,(i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$,то возникающие при этом суммы тождественно равны 0, независимо от исходного числа N,то есть,

$$\sum_i a_i F_i = 0 \tag{13.11}$$

$$\sum_i a_i F_p^i = 0, \tag{13.12}$$

причем (и это самое главное!) таким свойством обладают только натуральные числа.

Таким образом, спустя более двух тысячелетий после начала теоретического изучения свойств натуральных чисел, в «золотой» теории чисел [81] удалось обнаружить их новые теоретико-числовые свойства, что само по себе является научной сенсацией.

Конечно, можно просто проигнорировать новые математические результаты в области теории чисел, задаваемые (13.2), (13.4), (13.6), (13.8), (13.9) - (13.12), но это ни что иное, как «страусиная политика». Наверное, многим математикам-скептикам надо последовать примеру выдающегося математика современности, академика Украинской и Российской академий наук Юрия Алексеевича Митропольского, который внимательно изучил это научное направление и стал его поклонником [82].

Митропольский Ю.А. (1917-2008)

.- Доктор технических наук (1951)
- Профессор (1953)
- Действительный член Академии наук Украины (1961)
- Заслуженный деятель науки УССР (1967)
- Действительный член Академии наук СССР (1984)
- Действительный член Научного общества имени Тараса Шевченко (1992)
- Иностранный академик-корреспондент Академии наук в Болонье (Италия, 1971)

-. Герой Социалистического Труда и Герой Украины

, После внимательного изучения этого направления Ю.А. Митропольский в своем отзыве [82] выразил свое отношение к кодам золотой p-пропорции и «математике гармонии» в следующих словах:

«**Коды Золотой *p*-пропорции.** Используя понятие Золотой *p*-пропорции, Стахов затем вводит новое определение действительного числа в виде (13.6), которое он назвал «Кодом Золотой *p*-пропорции». Стахов показывает, что это понятие, которое является развитием известного «Ньютоновского определения» действительного числа, может быть положено в основу новой теории действительных чисел. Далее он показывает, что этот результат имеет важное прикладное значение и может привести к созданию принципиально новой компьютерной арифметики и новых компьютеров, компьютеров Фибоначчи. И Стахов не только провозглашает идею «компьютеров Фибоначчи», но и возглавляет и организует инженерные проекты по созданию таких компьютеров в Винницком политехническом институте (1977-1995). 65 зарубежных патентов на изобретения в области «компьютеров Фибоначчи», выданных государственными патентными ведомствами США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и др. стран, подтверждают приоритет украинской науки (и приоритет проф. Стахова) в этой важной компьютерной области»

13.4. Микропроцессоры Фибоначчи как предпосылка «золотой» революции в информатике

«Троянский конь» двоичной системы счисления. Математика гармонии опрокинула не только наши представления о «теории измерения» и «элементарной теории чисел», но радикально изменила информационные и арифметические основы компьютеров Как известно, в основе современных компьютеров лежит двоичная система, которая была введена в компьютерную технику в 1946 г. Джоном фон Нейманом совместно с его коллегами по Принстонскому институту перспективных исследований. Одним из «неймановских принципов» было обоснование использования в электронных компьютерах двоичной системы счисления. На тот период это было абсолютно правильное и взвешенное решение, так как двоичная система в наибольшей степени отвечала двоичному характеру электронных элементов и требованиям булевой логики. Кроме того, следует учитывать то обстоятельство, что в тот период других, альтернативных систем счисления в науке просто не существовало. Выбор был очень небольшой: десятичная система или двоичная система. Предпочтение было отдано двоичной системе. Однако вместе с двоичной системой в компьютерную технику был введен «троянский конь» в виде нулевой избыточности двоичной системы. Отсутствие избыточности означает, что все двоичные кодовые комбинации в рамках двоичной системы являются «разрешенными», что делает невозможным (в рамках двоичной системы) обнаружение каких-либо ошибок, которые неизбежно (с большей или меньшей вероятностью) могут возникнуть в элементах электронных систем под влиянием различных внешних и внутренних факторов (радиация, электромагнитные воздействия, помехи в шинах питания и т.д.).

Таким образом, из вышеизложенного вытекает далеко не оптимистичный вывод. Человечество становится заложником классической двоичной системы счисления, которая лежит в основе современных микропроцессоров и информационных технологий. Поэтому дальнейшее развитие микропроцессорной техники и основанной на ней информационной технологии, использующей двоичную систему счисления, следует признать неприемлемым направлением для определенных сфер приложений. Двоичная система не может служить информационной и арифметической основой специализированных компьютерных и измерительных систем (космос, управление транспортом и сложными технологическими объектами), а также наноэлектроннных систем, где проблемы надежности, помехоустойчивости, контролеспособности, стабильности, живучести систем выходят на передний план.

Современные микропроцессоры и микроконтроллеры, основанные на классической двоичной системе счисления, являются ненадежными с информационной точки зрения. На это уже обратили внимание ведущие специалисты в области компьютерной техники, в частности, выдающийся российский специалист в области компьютерной техники академик Я.А. Хетагуров.

Хетагуров Я.А.

- Доктор технических наук, профессор
- Главный научный сотрудник, Моринформсистема – АГАТ, МИФИ, НПФ "СКИБР"

1960 г. -Ленинская премия в области науки и техники

1982 г. – Премия Совета Министров СССР

В статье академика Я.А. Хетагурова «Обеспечение национальной безопасности систем реального времени» (BC/NW 2009; №2 (15):11.1) высказаны серьезные предостережения, касающиеся использования микропроцессоров и микроконтроллеров иностранного производства:

«Применение микропроцессоров, контроллеров и программного обеспечения вычислительных средств (ВС) иностранного производства для решения задач в системах реального времени (СРВ) военного, административного и финансового назначения таит в себе большие проблемы. Это своего рода «троянский конь», роль которого только стала проявляться. Потери и вред от их использования могут существенно повлиять на национальную безопасность России... Отсутствие в иностранных вычислительных средствах широкого профиля (ШП) контроля, необходимого для обеспечения требуемой достоверности выдаваемых данных в СРВ, приводит либо к использованию программных методов контроля, которые увеличивают быстродействие в 1,5-2,5 раза и потребление электроэнергии либо применению мажоритарного метода контроля, использующего 3 вычислительных устройства ШП, что повышает требования к быстродействию на 10-15%, однако увеличивает объём аппаратуры ВС в среднем в 3,3 раза и потребление электроэнергии в 3,4 раза».

Таким образом, микропроцессоры иностранного производства, широко используемые в современных российских разработках, по мнению Я.А. Хетагурова, являются «троянским конем», который угрожает национальной безопасности систем реального времени военного, административного и финансового назначения.

Высказывание известного ученого является особенно актуальным в связи с участившимися авариями, возникающими при запуске российских и американских ракет. Возможной причиной этих аварий являются сбои в цифровой системе управления, что уже официально подтверждено соответствующими комиссиям Роскосмоса [83,84].

Коды Фибоначчи и золотой пропорции как альтернатива классической двоичной системе счисления. Какой выход из создавшейся ситуации? Часть 2 настоящей книги посвящена изучению приложений кодов Фибоначчи (13.2), (13.4) и кодов золотой пропорции (13.6) и (13.8) для создания помехоустойчивых микропроцессоров. Показано, что эти коды обладают достаточно высокой ошибкообнаруживающей способностью (свыше 99%) и на их основе могут быть созданы помехоустойчивые микропроцессоры Фибоначчи для специализированных систем управления. [85]

Теория кодов Фибоначчи продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время. К разработкам «фибоначчиевой схемотехники» подключаются выдающиеся ученые и специалисты. И в этой связи уместно упомянуть о разработке счетчика Фибоначчи для минимальной формы (авторы Алексей Борисенко и Алексей Стахов [86]).

Схема разработанного счетчика приведена на Рис.13.2 (схема взята из главы 10). Счетчик является патентно-чистым техническим решением и находится в стадии патентования.

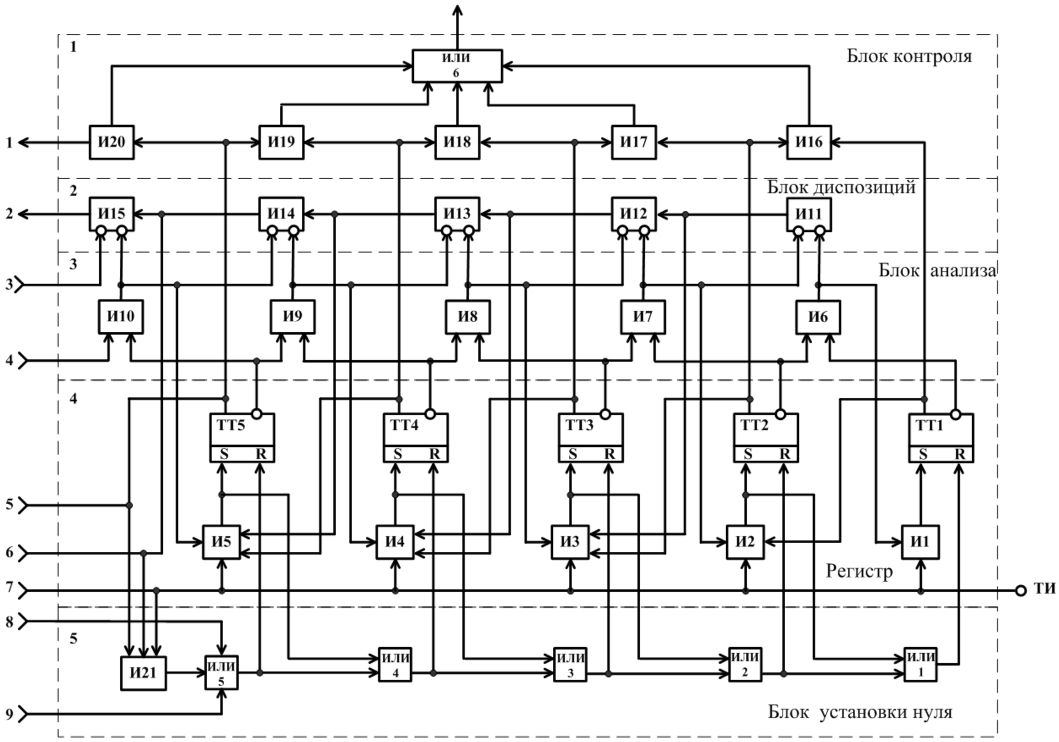


Рис.13.2. Счетчик Фибоначчи для минимальной формы

Работа счетчика Фибоначчи описана в главе 10. Разработанный счетчик Фибоначчи является в некотором смысле «прорывом» в области помехоустойчивых вычислений. В разработанном счетчике для представления чисел используется только «минимальная форма» кода Фибоначчи (двух единиц рядом в любой разрешенной кодовой комбинации не встречается). Все остальные кодовые комбинации, отличающиеся от «минимальной формы», являются «запрещенными Появление в счетчике «запрещенной кодовой комбинации, является признаком ошибки. Контроль ошибок в счетчике осуществляется непрерывно и не влияет на быстродействие счетчика

Таким образом, разработанный счетчик объединяет в себе два важных технических преимущества – высокое быстродействие и помехоустойчивость, то есть, разработанный счетчик является помехоустойчивым, достаточно быстродействующим, отличается регулярной структурой и высокой информационной надежностью. Поэтому его имеет смысл использовать для реализации в виде ПЛИС в различных схемах цифровых устройств, требующих высокого быстродействия, помехоустойчивости и надежности, таких, например, как частотомеры и управляющие устройства.

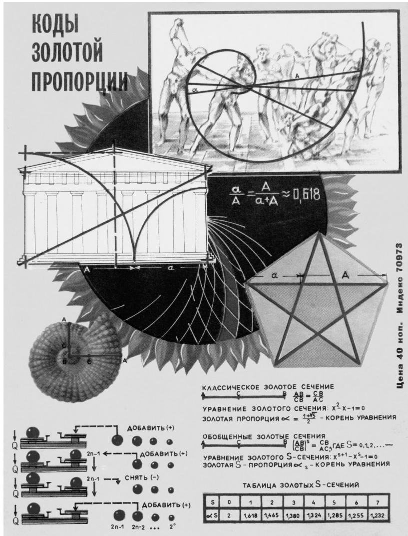
Но этот счетчик может стать также основой для разработки помехоустойчивых контроллеров для специальных систем управления, работающих в условиях агрессивной внешней среды.

Следует отметить большой вклад в эту разработку доктора технических наук, профессора Алексея Борисенко, который, по мнению автора, является одним из лучших схемотехников Украины.

	**БОРИСЕНКО А. А.** Закончил Харьковский институт радиоэлектроники в 1970 году (Украина). Доктор технических наук в области информационных систем, элементов и устройств вычислительной техники и систем автоматики (1991, Харьков). Профессор кафедры «Промышленная электроника» (1995, Сумы). Зав кафедрой электроники и компьютерной техники Сумского государственного университета (1992 - 2012) Профессор этой же кафедры (2012).

13.5. Сергей Абачиев: математика гармонии глазами историка и методолога науки

Публикация статьи в журнале «Техника - молодежи». Коды золотой пропорции, введенные в работах [12,79], всегда находились под пристальным вниманием широкой научной общественности. Широкой популяризации этого научного направления в СССР и за рубежом способствовала научно-популярная статья: «А.П. Стахов. Коды Золотой Пропорции, или системы счисления для ЭВМ будущего?», которая была опубликована в журнале "Техника-Молодежи" в июльском номере за 1985 год в связи с публикацией книги «Коды золотой пропорции» [12] (1984) Эта статья была "гвоздем" этого номера журнала, а задняя обложка журнала была полностью посвящена этому научному направлению.



Журнал "Техника - молодежи", №7, 1985

Пребывание в Дрезденском техническом университете (апрель-май 1998 г.) В 1988 г. автор был удостоен высокой чести. Руководство Дрезденского технического университета (ДТУ) пригласило автора для работы в качестве «Приглашенного профессора» ДТУ на специальной кафедре для «приглашенных профессоров» имени Генриха Баркгаузена. Такая кафедра была учреждена в Дрезденском техническом университете в 1981 г. в честь 100-летия со дня рождения Генриха Баркгаузена.

Инициатором этого приглашения стал известный немецкий кибернетик академик Кемпе, который возглавлял в тот период Институт кибернетики и информационных процессов Академии наук ГДР. Как потом оказалось, автор стал первым советским профессором, приглашенным для работы на этой знаменитой кафедре.

Но кто такой Генрих Баркгаузен? Генрих Георг Баркгаузен (1881 - 1956) – выдающийся немецкий учёный в области электронной физики и электротехники, основатель современной слаботочной техники и новейшей электроники. С 1911 года Генрих Баркгаузен работал профессором Высшей технической школы в Дрездене. В 1917 — 1918 годах Баркгаузен, независимо от других исследователей, создал теорию лампового генератора. В 1919 году открыл явление скачкообразности в ферромагнетизме, которое получило название эффект Баркгаузена. В 1928 году награждён медалью Генриха Герца, в 1949 году получил национальную премию ГДР.

Работа автора в ДТУ была достаточно насыщенной. Во-первых, для студентов и аспирантов ДТУ был прочитан курс лекций «Числа Фибоначчи и компьютеры». Во-вторых, автору удалось выступить с лекциями и докладами в различных университетах и научных учреждениях ГДР (Карлмарсштадт и Берлин).

Выступление в Техническом университете Карлмарксштадт. Одним из наиболее памятных стало выступление автора на семинаре секции информатики Технического университета Карлмарксштадт. По результатам этого выступления директор секции проф. Постофф направил в ДТУ письмо следующего содержания:

«22.04. 1988 г. в рамках коллоквиума нашей секции проф. Стахов А.П. из Винницы выступил с докладом "Числа Фибоначчи в информатике" на немецком языке. В соответствии с требованиями темы в докладе был рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с "золотым сечением", начиная от появления золотых сечений и чисел Фибоначчи в искусстве и биологических формах, геометрии, арифметике, и заканчивая их применением для создания простых, надежных, самокорректирующихся кодов и способов измерения в информатике. Тема представляет интерес для широкого круга слушателей, но как преподнести этот материал зависит во многом от докладчика; проф. Стахов А.П. прекрасно использовал все возможности и произвел глубокое впечатление.

Так как числа Фибоначчи играют важную роль в объяснении самых различных явлений в природе, искусстве, науке и технике, то нет ничего удивительного в том, что разные ученые независимо друг от друга пришли к этим зависимостям. Кроме проф. Стахова А.П., этими проблемами занимался также англичанин Тьюринг, основатель теоретической информатики. С другой стороны, эта тема никоим образом не является общедоступной с научной точки зрения, так как для ее изучения требуются ученые с взглядом на самое существенное, с необыкновенно обширными и гетерогенными знаниями необычайно обширных и разнородных фрагментов человеческой культуры. Такие ученые появляются редко, и их сотрудничество является необходимым и полезным, как ни в какой другой области.

Доктор технических наук, профессор Постофф,

директор секции информатики, Технического университета Карлмарксштадт

Публикация интервью в газете «Правда». В связи с успешным завершением 2-месячной работы автора в ДТУ в качестве «приглашенного профессора» руководство ДТУ наградило автора Мемориальной медалью Генриха Баркгаузена. На успешные результаты работы автора в ГДР обратили внимание советские средства массовой информации. Наиболее значительным событием стала публикация в газете «Правда» от 19 ноября 1988 г. Эта публикация представляла собой интервью автора корреспонденту газеты «Правда» В. Реуту. Публикация называлась «Вот вам и Фибоначчи! Стоит ли загонять в тупик новое научное направление?". В тот период газета "Правда" являлась основным печатным органом ЦК КПСС, и поэтому появление такой статьи не могло пройти мимо партийных органов, правительственных кругов и научной общественности СССР.

Это интервью вызвало большой интерес советской научной общественности. Около сотни восторженных откликов на эту публикацию пришло со всех уголков Советского Союза. Наибольший интерес автора вызвало письмо кандидата философских наук Сергея Абачиева (Москва). В этом письме он рассказал о своих уникальных исследованиях треугольника Паскаля, которые привели его к установлению так называемой «многоцветной гармонии треугольника Паскаля» [87,88]. Завязалась очень интересная переписка, которая, к сожалению, прервалась почти на 20 лет после дезинтеграции Советского Союза, последовавшей затем почти пятилетней работой автора в африканских университетах (Университет Аль Фатех, Ливия, Триполи,1995-1997: Университет Эдуардо Мондлане, Мозамбик, Мапуту, 1998-2000) и переездом автора в Канаду в 2004. Однако, в 2008 г. научные контакты автора с проф. Абачиевом были восстановлены.

Абачиев С.К.

Кандидат философских наук

- Профессор кафедры философии и мировоззренческой безопасности в Институте государственного управления, права и инновационных технологий (Москва).

Область исследовательских интересов С.К. Абачиева чрезвычайно широка – традиционная формальная логика и эволюционная теория познания, гносеологические аспекты труда и техники, современное научно-методологическое и духовное самопознание философии, православно ориентированные религиоведение и историософия.

Спустя 20 лет после начала нашего научного контакта, Сергей Абачиев остался таким же убежденным сторонником «математики гармонии». Он принял активное участие в обсуждении этого научного направления на страницах сайта «Академия Тринитаризма» и опубликовал серию глубоких статей, в которых проанализировал современное состояние и перспективы развития «математики гармонии» [89-92].

Комментарий статьи С.К. Абачиева «Математика гармонии глазами историка и методолога науки». В отличие от других авторов, которые приняли участие в обсуждении «математики гармонии», С.К. Абачиев в своих критических статьях акцентирует внимание на основном научном достижении автора – кодах золотой p-пропорции, p-кодах Фибоначчи, арифметике Фибоначчи и концепции «Компьютеров Фибоначчи» как нового направления в компьютерной технике В статье [91], анализируя причины трудной исторической судьбы «математики гармонии», С.К. Абачиев написал следующее:

«Научное направление, более сорока лет разрабатываемое А. П. Стаховым и его учениками, находится во власти объективных факторов именно такого рода. Оно представляется мне одним из редких образцов органического единства фундаментальной и прикладной направленностей. В этом плане его можно сравнить с теорией гомологических рядов Н. И. Вавилова в классической генетике. Его можно сравнить также с первоначально сугубо прикладной теорией голографии М. Вольфке (1920 г.), Д. Габора (1948 г.) и Ю. Н. Денисюка (1958–1962 гг.), которая в дальнейшем революционизировала фундаментальную физиологию зрения и мозга, а в последние годы революционизирует генетику, космологию, теорию чёрных дыр в астрофизике, квантовую теорию гравитации. Поэтому у нелёгкой судьбы творческой продукции А.П. Стахова и его последователей мне видятся прямые аналоги, в первую очередь, в истории техники. Они дают конкретные представления о тех специфических факторах научно-технического прогресса, которые не позволяли и не позволяют в исторически короткие сроки реализовать её мощный эвристический и экономический потенциал, прежде всего, в прикладной области цифровых информационных технологий...

Нечто прямо аналогичное произошло с прикладными разработками А. П. Стахова 70-х гг. XX в. Их трудная историческая судьба определилась своей исторической случайностью, которая не связана с основными законами развития науки и техники. Открытие 12-летним вундеркиндом Дж. Бергманом «золотой» иррациональной системы счисления никак не предопределялось такими законами. Оно могло быть сделано и на много десятилетий раньше, а могло и не быть сделано по сей день. Но уже в 1957 г., когда оно реально было сделано, раскручивался маховик индустрии цифровых информационных технологий на основе статистической теории информации К. Шеннона и двоичного кода Дж. фон Неймана. И уж в полной мере этот маховик был раскручен к началу 70-х гг., когда А.П. Стахов впервые по достоинству оценил «золотую» систему счисления в роли арифметической первоосновы цифровых информационных технологий.

Выбор фон Нейманом двоичного кода со всеми его недостатками по сравнению с избыточными кодами золотой пропорции не должен расцениваться как исторически неудачный и ошибочный. В конце 40-х гг. ему просто не было никаких альтернатив. В принципе, любительское открытие Бергмана, датируемое 1957-м годом, могло быть сделано кем-то другим на полвека раньше. Попади тогда первая «золотая» система счисления в поле зрения Хартли, Шеннона и фон Неймана, история цифровых информационных технологий могла бы начаться сразу же с кодов золотой пропорции. Но реальная история Мировой науки и техники распорядилась по-иному. Первым восприемником и профессиональным разработчиком этого любительского открытия стал А. П. Стахов в условиях раскрученного маховика информационных технологий на основе двоичного кода ...

Проученное горьким опытом былых гонений на генетику и кибернетику, Советское государство на этот раз быстро осознало, что отечественная наука обретает стратегически прорывные позиции на всеопределяющем направлении научно-технического прогресса. Свидетельством тому стало беспрецедентное патентование первых информационных технологий А. П. Стахова на качественно новой арифметической первооснове в СССР, на Западе и в Японии.... Тем не менее, такие технологии объективно не могли тогда быстро вытеснить безраздельно господствовавшие технологии на основе двоичного кода. В любом случае их экспансия была бы процессом сугубо поэтапным, длительностью во много десятилетий.

И в 80-х гг. этот естественный процесс в нашей тогда ещё единой стране начал осуществляться в сравнительно узкой области бортовой электроники военных самолётов и космических аппаратов, в которой экономические критерии эффективности техники отходят на задние планы по сравнению с функциональными .... При нормальном развитии к настоящему времени он позволил бы России и Украине быть Мировыми «законодателями» и производителями, по крайней мере, уникально надёжной авионики. Но катастрофический финал «перестройки» 1985–1991 гг. пресёк в начальной фазе этот процесс поэтапного отвоёвывания нашей страной ведущих Мировых позиций в области технической кибернетики и информационных технологий....

К настоящему времени уже несколько ключевых направлений развития информационных технологий настоятельно требуют перехода на избыточные, особо надёжные и помехоустойчивые коды золотой пропорции .... Для их поэтапной и более интенсивной экспансии складываются лучшие условия, чем в 70–80-х гг. прошлого века. Приблизилась перспектива тотального перехода информационных технологий на посттранзисторную элементную базу и аппаратную основу. Посттранзисторная революция потребует качественной смены всего математического и программного обеспечения. Его «золотая» арифметическая первооснова при этом станет востребованной сполна...

Данное направление развития информационных технологий вообще представляется одним из тех нескольких инновационных направлений, которые должны стать предметом особого государственного внимания и особой государственной заботы. Оно может и должно стать одним из ключевых в постсоветской научно-технической и экономической реинтеграции России и Украины, наряду с возрождением кооперации в авиакосмической области».

Глава 14

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ И «ЗОЛОТЫЕ» ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

14.1. О понятии «элементарная функция»

Среди огромного количества различных математических функций выделяется их особый класс, называемый «элементарными функциями». Значение этих функций для науки состоит в том, что они выражают некоторые устойчивые отношения, встречающиеся в окружающем нас мире. Примерами «элементарных функций» являются: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, гиперболические функции и т.д.

Возникает вопрос: какой смысл вкладывается в прилагательное «элементарные» в этом определении? Большинство «элементарных функций» изучаются в средней школе. Отсюда есть желание трактовать «элементарные функции» как нечто очень «простое», «школьное». Однако это не так. В английском языке слово “elementary” означает первоначальный, начальный, первичный, фундаментальный. Такой смысл это слово имеет, когда мы говорим Euclid’s “Elements” («Начала» Евклида) или “elementary particles” (элементарные частицы). Поэтому словосочетание «элементарные функции» необходимо понимать не как «простые», «школьные» функции, а как первичные, фундаментальные, основополагающие функции, то есть, функции, широко проявляющиеся в природе. Именно эти функции связывают математику с теоретическим естествознанием. Поэтому введение новых типов «элементарных функций», которые лежат в основе некоторых природных явлений и процессов, следует рассматривать как серьезное научное достижение.

Заметим, что такой же смысл имеет прилагательное «элементарный», когда мы говорим об «элементарной математике». «Элементарная математика» - это не «школьная математика», как принято считать, а начальный раздел математики, который содержит исходные, фундаментальные понятия математики, без которых «высшая математика» просто не могла бы существовать. Попробуйте исключить из математики такие «элементарные понятия» как натуральные и иррациональные числа, теорему Пифагора, фундаментальные математические константы – число π и Эйлерово число e, - и что тогда останется от «высшей математики»?

Поэтому получение новых математических результатов в области «элементарной математики», в частности, в «теории элементарных функций» представляет огромный интерес, как для «элементарной», так и для «высшей» математики. Именно обсуждению нового результата в области «элементарных функций» - гиперболических функций Фибоначчи и Люка (ГФФЛ) [57,58] - и их приложений в теоретическом естествознании (новая геометрическая теория филлотаксиса [24] и др.) и пойдет речь в настоящей главе.

14.2. Конические сечения и гипербола

«Конические сечения» Апполония. Главной целью настоящей главы является исследование нового класса гиперболических функций – «золотых» гиперболических функций, названных гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка [57,58]. Это – новый вид гиперболических функций, относящихся к «элементарным функциям». Их необычность состоит в том, что в отличие от классических гиперболических функций, основанием которых является Эйлерово число e, основанием «золотых» гиперболических функций является «золотая пропорция».

Начнем с истоков понятия «гиперболические функции». В этой связи уместно напомнить об одном великом математическом открытии античности - конических сечениях. Автором этого открытия считается один из величайших математиков древности Апполоний из Перги, живший в 3-2 вв. до н.э. Подобно Пифагору, он еще юношей отправился в Александрию, важнейший центр эллинистической культуры, где изучал математику у учеников Евклида. Он написал ряд работ по математике и оптике, но самым знаменитым считается его сочинение «Конические сечения». Этот фундаментальный математический труд состоял из восьми книг, из которых только первые четыре дошли до нас в оригинале, следующие три – в арабском переводе, последняя утеряна. В своей первой книге он рассматривает различные плоские сечения одного и того же кругового конуса («конические сечения»), полости которого простираются по обе стороны от его вершины (Рис.14.1).

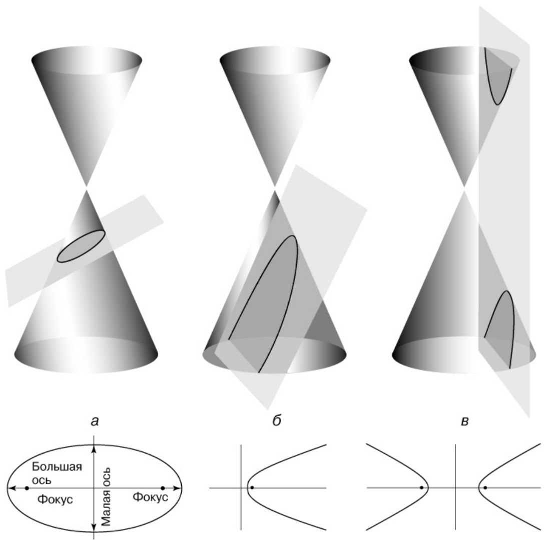


Рисунок 14.1. Три основных типа конических сечений: а – эллипс, б – парабола, в – гипербола.

В зависимости от того, пересекает ли плоскость одну только плоскость конуса, обе его плоскости или она параллельна одной из образующих конуса, Апполоний получает три замечательные кривые: эллипс (Рис.14.1-а), параболу (Рис.14.1-б) и гиперболу (Рис.14.1-в). Исходя из некоторых геометрических свойств «конических сечений», Апполоний выбрал для них соответствующие названия. Греческое слово parabole означает «приложение», греческое слово elleipsis означает «недостаток», греческий термин hyperbole означает «избыток», «преувеличение».

В древности применение конических сечений в науке и практической деятельности было ограниченным. Важнейшую роль в науке и технике конические сечения стали играть в новое время, когда Галилей установил, что свободно брошенное тело или снаряд, выпущенный из орудия, движется по параболе. Но особый интерес к коническим сечениям появился после того, как Кеплер сформулировал законы движения планет. Согласно первому закону Кеплера, каждая планета движется по эллипсу, в фокусе которого находится Солнце. Позднее было установлено, что некоторые кометы движутся по эллипсам, другие – по параболам и гиперболам.

Конические сечения широко используются в науке и технике. Параболическое зеркало обладает тем свойством, что все падающие лучи, параллельные его оси, сходятся в одной точке (фокусе). Это используется в большинстве телескопов-рефлекторов, где применяются параболические зеркала, а также в антеннах радаров и специальных микрофонах с параболическими отражателями. От источника света, помещенного в фокусе параболического отражателя, исходит пучок параллельных лучей. Поэтому в мощных прожекторах и автомобильных фарах используются параболические зеркала. Гипербола является графиком многих важных физических соотношений, например, закона Бойля (связывающего давление и объем идеального газа) и закона Ома, задающего электрический ток как функцию сопротивления при постоянном напряжении.

Гипербола. В дальнейшем изложении важную роль будет играть график обратной пропорциональной зависимости, то есть кривая, уравнение которой имеет вид:

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{или} \quad xy = a . \tag{14.1}$$

Эта кривая называется гиперболой.

Для описания свойств гиперболы воспользуемся рассуждениями, приведенными в брошюре [93].

График гиперболы изображен на Рис.14.2.

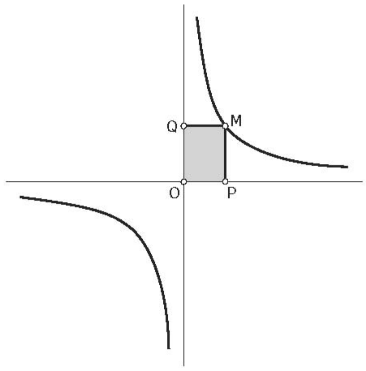


Рис.14.2. Гипербола и ее координатный прямоугольник

Как следует из формул (14.1) и графика на Рис.14.2, гипербола состоит из двух ветвей, которые при $a > 0$ расположены в первом квадранте системы координат (x и y положительны) и в третьем квадранте (x и y отрицательны). Геометрически гипербола неограниченно приближается к координатным осям, никогда с ними не пересекаясь. Это означает, что оси координат являются асимптотами гиперболы.

Заметим, что уравнение $xy = a$ имеет простой геометрический смысл: площадь прямоугольника $MQOP$, ограниченного осями координат и прямыми, проведенными через какую-либо точку M гиперболы параллельно осям координат (Рис.14.2), равна a, то есть, не зависит от выбора точки M. Если теперь назвать прямоугольник $MQOP$, площадь которого равна a, координатным прямоугольником точки M, то можно дать следующее геометрическое определение гиперболы:

«Гипербола есть геометрическое место точек, лежащих в первом и третьем квадрантах системы координат, координатные прямоугольники которых имеют постоянную площадь».

Легко увидеть, что начало координат O является центром симметрии гиперболы, то есть, ветви гиперболы симметричны друг другу относительно начала координат O. Гипербола также имеет оси симметрии, которыми являются биссектрисы координатных углов aa и bb (Рис.14.3).

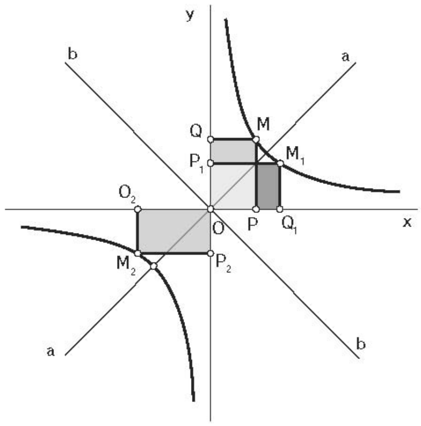


Рис.14.3. Оси гиперболы

Центр симметрии O и оси симметрии aa и bb часто называют просто центром и осями гиперболы; точки A и B, в которых гипербола пересекается с осью аа, называют вершинами гиперболы.

14.3. Гиперболический поворот

Сжатие к точке. В геометрии часто используют геометрическое преобразование, называемое «сжатием к точке» или «гомотетией». Сжатие к точке O, называемой центром сжатия, с коэффициентом сжатия k состоит в том, что каждая точка A плоскости переходит в точку A', которая лежит на луче OA, причем $OA' = kOA$. Если коэффициент сжатия $k > 1$, то $OA' > OA$; в этом случае преобразование следовало бы назвать «расширением от O». Доказано [93], что «сжатие к точке» обладает следующими свойствами:

1. Всякая фигура F при сжатии к точке переходит в фигуру F', подобную первоначальной. Если $k < 1$, то фигура при этом уменьшается, а если $k > 1$, то фигура увеличивается.

2. Всякая прямая при сжатии к точке переходит в прямую; параллельные прямые переходят в параллельные.

3. Всякая окружность при сжатии к точке переходит в окружность.

4. Все отрезки плоскости при сжатии к точке уменьшаются (или увеличиваются) в постоянном отношении k.

5. Площади всех фигур при сжатии к точке тоже уменьшаются (или увеличиваются) в постоянном отношении, равном k^2.

Сжатие к прямой. Часто в геометрии используется еще одно преобразование – «сжатие к прямой» [93]. Сжатие к прямой, называемой осью сжатия, с коэффициентом сжатия k состоит в том, что каждая точка A плоскости переходит в точку A', которая лежит на луче PA, перпендикулярном к оси сжатия, причем имеет место соотношение: $PA' = kPA$. Заметим, что если «коэффициент сжатия» $k > 1$, то $PA' > PA$; в этом случае преобразование следовало бы назвать «расширением от оси сжатия».

Установлены [93] следующие геометрические свойства «сжатия»:

1. При сжатии к прямой всякая прямая переходит в прямую.
2. При сжатии к прямой параллельные прямые переходят в параллельные.
3. При сжатии к прямой сохраняется отношение отрезков, лежащих на одной прямой.
4. При сжатии к прямой площади всех фигур изменяются в постоянном отношении (равном коэффициенту сжатия k).

Гиперболический поворот. Рассмотрим теперь гиперболу $xy = a$ (Рис.14.2). Произведем сжатие плоскости к оси x с коэффициентом сжатия k. При этом гипербола $xy = a$ перейдет в гиперболу $xy = ak$, ибо абсцисса x останется без изменения, а ордината y заменится на yk. Затем произведем еще одно сжатие теперь уже к оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$. При этом гипербола $xy = ak$ перейдет в гиперболу $xy = \frac{ak}{k} = a$: ордината y любой точки при новом сжатии к оси не меняется, а абсцисса x переходит в $\frac{x}{k}$. Таким образом, мы видим, что последовательное сжатие плоскости к оси x с коэффициентом k и к оси y с коэффициентом $\frac{1}{k}$ переводит гиперболу $xy = a$ в саму себя. Последовательность этих двух сжатий плоскости к осям координат x и y образует важное геометрическое преобразование, называемое «гиперболическим поворотом». Название «гиперболический поворот» отражает тот факт, что при таком преобразовании все точки гиперболы как бы «скользят по кривой», то есть, гипербола как бы «поворачивается».

Из рассмотренных выше свойств «сжатия» непосредственно вытекают следующие свойства гиперболического поворота [93]:

1. При гиперболическом повороте всякая прямая переходит в прямую.
2. При гиперболическом повороте оси координат (асимптоты гиперболы) переходят сами в себя.
3. При гиперболическом повороте параллельные прямые переходят в параллельные.
4. При гиперболическом повороте сохраняются площади фигур.

Очень важно подчеркнуть, что путем подбора соответствующего значения коэффициента сжатия k при помощи «гиперболического поворота» можно перевести каждую точку гиперболы в любую другую.

14.4. Тригонометрические функции

Геометрическое определение тригонометрических функций. Рассмотрим теперь тригонометрические функции - простейшие «элементарные функции», хорошо известные нам из средней школы. Обычно к этому классу «элементарных функций» относят синус $(\sin x)$, косинус $(\cos x)$, тангенс $(\mathrm{tg}x)$, котангенс $(\mathrm{ctg}x)$, секанс $(\sec x)$ и косеканс $(\mathrm{cosec}x)$, последняя пара функций в настоящее время сравнительно малоупотребительна.

Обычно тригонометрические функции определяются с помощью окружности (Рис.14.4). Будем измерять углы α, которые образуются в окружности путем поворота луча OB в направлении от оси абсцисс OX. При этом направление против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке - отрицательным. Абсциссу точки B обозначим через x_B, ординату – через y_B (см. Рис.14.4).

Тогда можно дать следующее геометрическое определение тригонометрических функций:

1. Синусом называется отношение $\sin\alpha = y_B / R$

2. Косинусом называется отношение $\cos\alpha = x_B / R$

3.Тангенс определяется как $\mathrm{tg}\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$

4.Котангенс определяется как $\mathrm{ctg}\alpha = \cos\alpha / \sin\alpha$

5.Секанс определяется как $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$

6.Косеканс определяется как $\mathrm{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha$

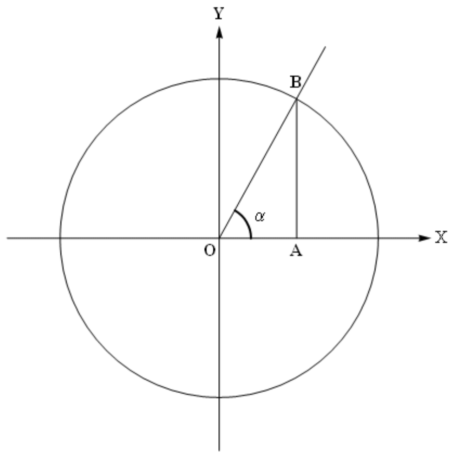


Рис.14.4. Геометрическое определение тригонометрических функций

Ясно, что значения тригонометрических функций не зависят от величины радиуса окружности R в силу свойств подобных фигур. Часто этот радиус принимают равным величине единичного отрезка, тогда синус равен просто ординате y_B, а косинус — абсциссе x_B. На Рис.14.5 показаны величины тригонометрических функций для единичной окружности.

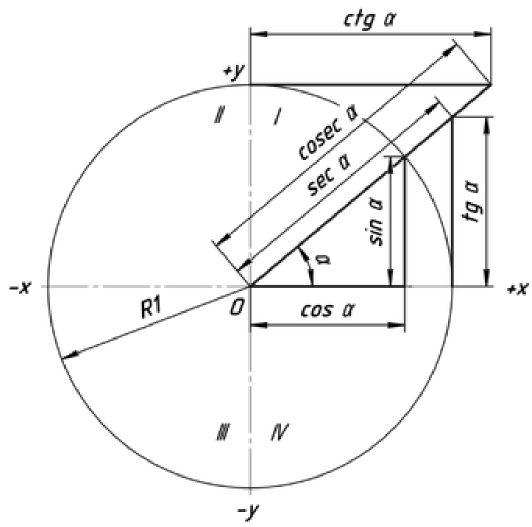


Рис.14.5. Тригонометрические функции угла α для единичной окружности

Простейшие тождества для тригонометрических функций. Так как синус и косинус являются соответственно ординатой и абсциссой точки, соответствующей на единичной окружности углу α (Рис.14.5), то, используя теорему Пифагора, мы можем получить первое замечательное тождество для тригонометрических функций:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \qquad (14.2)$$

Деля все члены тождества (14.2) на квадрат косинуса и затем на квадрат синуса, соответственно, получим еще два тождества для тригонометрических функций:

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (14.3)$$

Существует еще ряд тождеств, которые задают важное свойство четности тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} &\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ &\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha; \quad \mathrm{ctg}(-\alpha) = ctg\alpha \\ &\sec(-\alpha) = \sec\alpha; \quad \mathrm{cosec}(-\alpha) = -\mathrm{cosec}\alpha \end{aligned} \qquad (14.4)$$

Из (14.4) вытекает, что косинус и секанс — чётные функции, остальные четыре функции — нечётные.

14.5. Геометрические аналогии между тригонометрическими и гиперболическими функциями и основные тождества для гиперболических функций

Рассуждения ниже взяты из замечательной брошюры В.Г. Шерватова «Гиперболические функции» [93].

Уравнение гиперболы, отнесенное к осям. Пусть по-прежнему координаты точки M гиперболы в системе координат, оси которых совпадают с асимптотами, будут x и y, так что уравнение гиперболы будет иметь вид $xy = a$ (Рис.14.6).

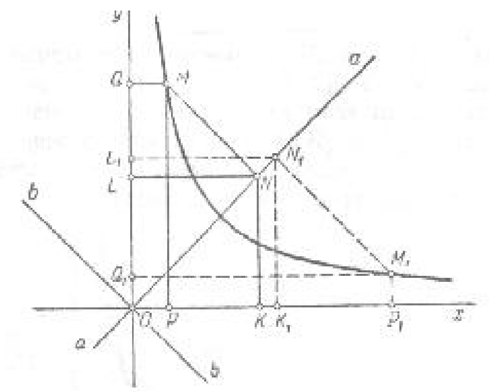


Рис.14.6. К выводу уравнения гиперболы, отнесенного к осям

Примем оси aa и bb гиперболы за новые оси координат; координаты точки M в новой системе координат обозначим через X и Y. Легко показать, что старые координаты x, y могут быть выражены через новые X и Y следующим образом:

$$x = (X - Y)\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad y = (X + Y)\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если теперь подставить полученные значения x, y в уравнение $xy = a$, то после проведения соответствующих преобразований получим уравнение:

$$X^2 - Y^2 = 2a.$$

Это и есть уравнение гиперболы, отнесенное к осям.

Гипербола

$$X^2 - Y^2 = 1 \qquad (14.5)$$

называется единичной гиперболой; ее уравнение аналогично уравнению единичной окружности (Рис.14.5):

$$X^2 + Y^2 = 1. \tag{14.6}$$

Геометрическая теория тригонометрических и гиперболических функций. Существует аналогия между гиперболой (Рис.14.2) и окружностью (Рис.14.4). На основании этой аналогии в [93] введено понятие диаметра гиперболы, под которым понимается всякая прямая, проходящая через центр гиперболы (аналогично тому, как диаметры окружности – это прямые, проходящие через ее центр). Введено также [93] понятие радиуса гиперболы, под которым понимается отрезок диаметра, идущий от центра гиперболы до точки пересечения диаметра с гиперболой (т.е. радиусы гиперболы определяются аналогично радиусам окружности).

Воспользовавшись изложенным выше геометрическим подходом к определению тригонометрических функций (Рис.14.4 и Рис.14.5), изложим геометрическую теорию тригонометрических и гиперболических функций, основываясь на аналогии между единичной окружностью (Рис.14.7-a), и единичной гиперболой (Рис.14.7-b).

Рассмотрим единичную окружность (Рис.14.7-a): $X^2 + Y^2 = 1$. Углом α (в радианной мере) между радиусами OA и OM окружности называется число, равное длине дуги AM или равное удвоенной площади сектора OAM, ограниченного этими радиусами и дугой окружности.

Опустим из точки M перпендикуляр MP на диаметр OA; в точке A проведем касательную к окружности до пересечения с диаметром OM в точке N. Отрезок PM перпендикуляра есть линия синуса, отрезок OP диаметра – линия косинуса и отрезок AN – линия тангенса. Длины отрезков PM, OP и AN равны синусу, косинусу и тангенсу угла α, то есть,

$$PM = \sin\alpha, OP = \cos\alpha, AN = \mathrm{tg}\alpha. \tag{14.7}$$

А теперь по аналогии введем понятия гиперболического синуса, гиперболического косинуса и гиперболического тангенса. Для этого рассмотрим единичную гиперболу (Рис.14.7-b): $X^2 - Y^2 = 1$. Тогда, по аналогии с углом α

между радиусами OA и OM (Рис.14.7-а), гиперболическим углом t между двумя радиусами OA и OM гиперболы (Рис.14.7-b) будем называть число, равное удвоенной площади сектора, ограниченного этими радиусами и дугой гиперболы.

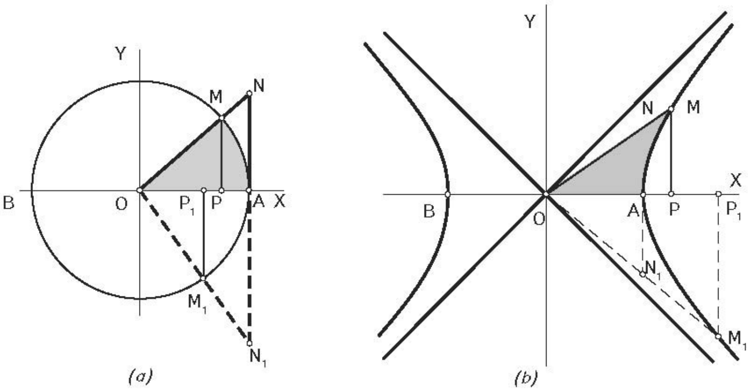


Рис. 14.7. Единичная окружность (а) и единичная гипербола (b)

Теперь опустим из точки M гиперболы на Рис.14.7-b перпендикуляр MP на диаметр OA – ось симметрии, пересекающую гиперболу в вершине A; проведем касательную к гиперболе до пересечения с диаметром OM в точке N. Отрезок PM перпендикуляра называется линией гиперболического синуса, отрезок OP диаметра – линией гиперболического косинуса и отрезок AN касательной – линией гиперболического тангенса. Длины отрезков PM, OP и AN называются соответственно гиперболическим синусом, гиперболическим косинусом и гиперболическим тангенсом угла t, то есть,

$$PM = \mathrm{sh}t, OP = \mathrm{ch}t, AN = \mathrm{th}t. \tag{14.8}$$

Известно, что тригонометрические функции (14.7) изменяются периодически с периодом 2π. В противоположность этому гиперболические функции (14.8) не периодичны. Как вытекает из Рис.14.7-b, гиперболический угол t может изменяться от 0 до ∞. Из определения гиперболических функций вытекает, что при изменении гиперболического угла от 0 до ∞ $\mathrm{sh}t$ изменяется от 0 до ∞, $\mathrm{ch}t$ изменяется от 1 до ∞ и $\mathrm{th}t$ изменяется от 0 до 1. Легко показать, что эти функции имеют графики, вид которых представлен на Рис.14.8.

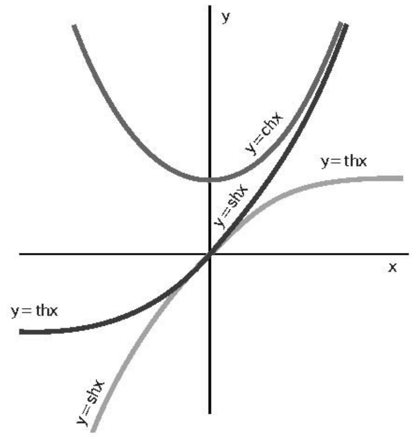


Рис.14.8. Графики гиперболических функций

Выведем теперь основные зависимости между тригонометрическими круговыми и гиперболическими функциями.

Из подобия треугольников OMP и ONA (Рис.14.7-а) вытекает: $\dfrac{AN}{OA}=\dfrac{PM}{OP}$.

Но $\dfrac{AN}{OA}=\text{tg}\alpha$ (ибо $OA=1$), а $\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Таким образом, получаем: $\text{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Далее, координаты точки M окружности равны $OP=X$, $PM=Y$. Но тогда из уравнения единичной окружности (14.7-а) вытекает:

$$OP^2+PM^2=1 \text{ или } \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Разделив обе части полученного тождества сначала на $\cos^2\alpha$, а затем на $\sin^2\alpha$, мы получим еще две замечательные формулы для тригонометрических функций, задаваемые выражениями (14.3).

А теперь выведем подобные же свойства для гиперболических функций (14.8). Из подобия треугольников OMP и ONA (Рис.14.7-b) вытекает: $\dfrac{AN}{OA}=\dfrac{PM}{OP}$.

Но $\dfrac{AN}{OA}=\text{th}t$ (ибо $OA=1$), а $\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{\text{sh}t}{\text{ch}t}$. Таким образом, получаем: $\text{th}t=\dfrac{\text{sh}t}{\text{ch}t}$.

Далее, координаты точки M гиперболы равны $OP=X, PM=Y$. Но тогда из уравнения единичной гиперболы (14.5) вытекает:

$$OP^2-PM^2=1$$

или

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1\,. \tag{14.9}$$

Разделив обе части полученного тождества сначала на $\mathrm{ch}^2 t$, а затем $\mathrm{sh}^2 t$, мы получим еще две замечательные формулы для гиперболических функций, которые являются аналогом формулам (14.3):

$$1 - \mathrm{th}^2 t = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 t}\,;\; \mathrm{ch}^2 t - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 t}\,. \tag{14.10}$$

Так же по аналогии могут быть доказаны и другие тождества для гиперболических функций, в частности:

$$\mathrm{sh}(t+u) = \mathrm{sh}t\mathrm{ch}u + \mathrm{ch}t\mathrm{sh}u$$

$$\mathrm{ch}(t+u) = \mathrm{ch}t\mathrm{ch}u + \mathrm{sh}t\mathrm{sh}u$$

$$\mathrm{sh}2t = 2\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t$$

$$\mathrm{ch}2t = \mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t\,.$$

Аналитические выражения для гиперболических функций. В отличие от тригонометрических функций, гиперболические функции могут быть выражены аналитически [65]. Их аналитические выражения имеют следующий вид:

<u>Гиперболический синус и косинус</u>

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};\quad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{14.11}$$

<u>Гиперболический тангенс и котангенс</u>

$$\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},\quad \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} \tag{14.12}$$

Аналитические выражения (14.11) позволяют доказать ряд важных тождеств для гиперболических функций, часть из которых мы установили раньше геометрическим путем, в частности:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1 \tag{14.13}$$

$$\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \mathrm{sh}(2x) \tag{14.14}$$

Используя (14.11), (14.12), мы можем доказать следующие тождества для гиперболических функций.

Четность:

$$\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}x; \quad \mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}x; \quad \mathrm{th}(-x) = -\mathrm{th}x \tag{14.15}$$

Формулы сложения:

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}y\mathrm{ch}x; \quad \mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}y\mathrm{sh}x; \quad \mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}x \pm \mathrm{th}y}{1 \pm \mathrm{th}x\mathrm{th}y}$$

Формулы двойного угла:

$$\mathrm{sh}(2x) = 2\mathrm{ch}x\mathrm{sh}x = \frac{2\mathrm{th}x}{1-\mathrm{th}^2 x}; \quad \mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = 2\mathrm{ch}^2 x - 1$$

Произведения:

$$\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y = \frac{\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)}{2}$$
$$\mathrm{sh}x\mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)}{2}$$
$$\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y = \frac{\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)}{2}.$$

Суммы:

$$\mathrm{sh}x \pm \mathrm{sh}y = 2\mathrm{sh}\frac{x \pm y}{2}\mathrm{ch}\frac{x \mp y}{2}$$
$$\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2\mathrm{ch}\frac{x+y}{2}\mathrm{ch}\frac{x-y}{2}$$
$$\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}y = 2\mathrm{sh}\frac{x+y}{2}\mathrm{sh}\frac{x-y}{2}.$$

Производные:

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x; \quad (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{ch}x; \quad (\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

Интегралы:

$$\int sh(x)dx = ch(x) + C; \quad \int ch(x)dx = sh(x) + C;$$

$$\int th(x)dx = \ln[ch(x)] + C; \quad \int \frac{1}{ch^2(x)}dx = th(x) + C;$$

$$\int \frac{1}{sh^2(x)}dx = -cth(x) + C$$

Применение гиперболических функций в геометрии. Считается, что гиперболические функции были введены итальянским математиком Винченцо Риккати (Vincenzo Riccati) в 1757 году. Он получил их из рассмотрения единичной гиперболы. Он же первым ввел обозначения sh и ch. Дальнейшее исследование свойств гиперболических функций было проведено Ламбертом.

Следует отметить, что интерес к гиперболическим функциям в математике резко повысился в 19 в., когда российский математик Николай Лобачевский разработал новый вид геометрии, основанной на гиперболических функциях и поэтому названной гиперболической геометрией.

Как известно, гиперболическая геометрия Лобачевского восходит в своих истоках к «Началам» Евклида и связана с новой формулировкой V-го постулата Евклида («постулата о параллельных»).

Мы не будем подробно останавливаться на всех особенностях геометрии Лобачевского. Важно подчеркнуть, что, исследуя тригонометрические соотношения своей геометрии, Лобачевский использовал введенные выше гиперболические функции (14.11), то есть, геометрия Лобачевского оказалась важным подтверждением фундаментального характера гиперболических функций применительно к окружающему нас геометрическому пространству.

14.6. Новый взгляд на формулы Бине

Расширенные числа Фибоначчи и Люка. В главе 2 мы ввели понятие расширенных чисел Фибоначчи и Люка. Напомним эти понятия. Числа Фибоначчи и Люка F_n и L_n, расширенные в сторону отрицательных значений индекса n, представлены в Табл.14.1.

Таблица 14.1. Расширенные числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	**1**	2	**3**	5	**8**	13	**21**	34	**55**
F_{-n}	0	1	**−1**	2	**–3**	5	**–8**	13	**–21**	34	**–55**
L_n	2	**1**	3	**4**	7	**11**	18	**29**	47	**76**	123
L_{-n}	2	**–1**	3	**–4**	7	**–11**	18	**–29**	47	**–76**	123

Подчеркнем, что расширенные числа Фибоначчи и Люка представляют собой две числовые последовательности, которые задаются в бесконечных пределах от $-\infty$ до $+\infty$, поскольку индекс n принимает значения из множества $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$.

Как вытекает из Табл.14.1, члены расширенных последовательностей F_n и L_n обладают рядом замечательных математических свойств. Например, для нечетных индексов $n = 2k+1$ члены последовательностей F_n и F_{-n} совпадают, то есть,

$$F_{2k+1} = F_{-2k-1}, \tag{14.16}$$

а для четных $n = 2k$ они противоположны по знаку, то есть,

$$F_{2k} = -F_{-2k}. \tag{14.17}$$

Заметим, что числа Фибоначчи с четными индексами $n = 2k$ в Табл.14.1 выделены жирным шрифтом.

Что касается чисел Люка L_n, то здесь все наоборот, то есть, для четных индексов $n = 2k$

$$L_{2k} = L_{-2k}, \tag{14.18}$$

а для нечетных индексов $n = 2k+1$

$$L_{2k+1} = -L_{-2k-1}. \tag{14.19}$$

Заметим, что числа Люка с нечетными индексами $n = 2k+1$ в Табл.14.1 выделены жирным шрифтом.

Вывод формул Бине. Для вывода формул Бине воспользуемся замечательным тождеством, связывающим соседние степени золотой пропорции:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}, \tag{14.20}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

Запишем сначала выражения для минус-первой, нулевой и первой степеней золотой пропорции в «явном виде»:

$$\Phi^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \Phi^0 = 1 = \frac{2+0\times\sqrt{5}}{2} \text{ и } \Phi^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{14.21}$$

Используя исходные значения для степеней золотой пропорции, задаваемые (14.21), и применяя тождество (14.20), мы можем представить вторую, третью и четвертую степени золотой пропорции в «явном виде»:

$$\Phi^2 = \Phi^1 + \Phi^0 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \; \Phi^3 = \Phi^2 + \Phi^1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}; \; \Phi^4 = \Phi^3 + \Phi^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}. \tag{14.22}$$

Можно ли усмотреть в формулах (14.21), (14.22) какую-либо закономерность? Прежде всего, заметим, что все выражения для любой степени золотой пропорции имеют одну и ту же форму:

$$\frac{A+B\sqrt{5}}{2}. \tag{14.23}$$

Что же собой представляют числовые последовательности A и B в этих формулах? Если начать с выражения для 0-й степени золотой пропорции Φ^0, то нетрудно убедиться, что ряд чисел A представляет собой последовательность чисел 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, …, а ряд чисел B представляет собой последовательность чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … . Но первая последовательность представляет собой числа Люка, а вторая – числа Фибоначчи! Из этих примеров мы можем предположить, что в общем виде формула, которая позволяет выразить любую (n-ю) степень золотой пропорции через числа Люка L_n и числа Фибоначчи F_n имеет следующий вид:

$$\Phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}. \tag{14.24}$$

Формула (14.24) легко доказывается методом индукции. Действительно, при

$n=1$ формула (14.24) справедлива, поскольку

$$\Phi^1 = \frac{L_1 + F_1\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (14.25)$$

Основание индукции доказано.

Если формула (14.24) справедлива для заданных целых $(n, n-1, n-2, ..., 1)$, то из этого индуктивного предположения вытекает ее справедливость и для целого $(n+1)$, поскольку

$$\Phi^{n+1} = \frac{L_{n+1} + F_{n+1}\sqrt{5}}{2} = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} + \frac{L_{n-1} + F_{n-1}\sqrt{5}}{2} = \Phi^n + \Phi^{n-1}, \qquad (14.26)$$

что соответствует тождеству (14.20), связывающему степени золотой пропорции Φ.

Используя формулу (14.24), можно также очень просто выразить расширенные числа Люка L_n и расширенные числа Фибоначчи F_n через золотую пропорцию. Для этого достаточно воспользоваться формулой (14.24) и записать выражения для суммы или разности n-х степеней золотой пропорции $\Phi^n + \Phi^{-n}$ и $\Phi^n - \Phi^{-n}$ в виде:

$$\Phi^n + \Phi^{-n} = \frac{(L_n + L_{-n}) + (F_n + F_{-n})\sqrt{5}}{2} \qquad (14.27)$$

$$\Phi^n - \Phi^{-n} = \frac{(L_n - L_{-n}) + (F_n - F_{-n})\sqrt{5}}{2}. \qquad (14.28)$$

Тогда, если учесть свойства «расширенных чисел Фибоначчи и Люка», задаваемые (14.16)-(14.19), то для четных $n = 2k$ мы можем переписать формулы (14.27), (14.28) в следующем виде:

$$\Phi^{2k} + \Phi^{-2k} = L_{2k} \qquad (14.29)$$

$$\Phi^{2k} - \Phi^{-2k} = F_{2k}\sqrt{5}. \qquad (14.30)$$

Для нечетных значений $n = 2k+1$ формулы (14.27), (14.28) сводятся к следующему:

$$\Phi^{2k+1} - \Phi^{-(2k+1)} = F_{2k+1}\sqrt{5} \qquad (14.31)$$

$$\Phi^{2k+1} + \Phi^{-(2k+1)} = L_{2k+1}. \qquad (14.32)$$

Формулы (14.29) – (14.32) могут быть представлены в более компактной форме:

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{14.33}$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k \end{cases} \tag{14.34}$$

Анализ формул (14.33), (14.34) дает нам возможность ощутить истинное эстетическое наслаждение и еще раз убедиться в мощи человеческого разума. Действительно, ведь мы знаем, что числа Фибоначчи и числа Люка всегда являются целыми числами. С другой стороны, любая степень золотой пропорции является иррациональным числом. Отсюда вытекает, что целые числа L_n и F_n с помощью формул (14.33), (14.34) очень просто выражаются через специальные иррациональные числа.

14.7. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка

Немного истории. Обычно в математике используется представление формул Бине в виде, несколько отличающемся от (14.33), (14.34). Традиционные представления для формул Бине представлены в главе 2. Впервые представление этих формул в виде (14.33), (14.34) было использовано автором в книге «Коды золотой пропорции» (1984) [12]. Но именно в таком виде четко прослеживается «гиперболический характер» расширенных чисел Фибоначчи и Люка, потому что формулы Бине, представленные в виде (14.33), (14.34), оказываются подобными по своей математической структуре формулам (14.11), задающим классические гиперболические функции. Вот эта аналогия и лежит в основе нового класса гиперболических функций, названных гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка.

Впервые новый класс гиперболических функций, основанных на формулах Бине, был введен украинскими математиками Алексеем Стаховым и Иваном Ткаченко в конце 80-х годов 20 в. Первая статья с описанием этого математического результата была опубликована в 1988 г. в виде препринта. В 1993 г. согласно рекомендации академика Митропольского в журнале «Доклады Академии наук Украины» была опубликована статья Алексея Стахова и Ивана Ткаченко «Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи» [57] и благодаря этой публикации научный мир узнал о новом классе гиперболических функций.

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка (ГФФЛ) получила дальнейшее развитие в статье Алексея Стахова и Бориса Розина, опубликованной в международном журнале "Chaos, Solitons & Fractals" [58]. В этой статье введены так называемые симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.

<u>Симметричный гиперболический синус Фибоначчи</u>

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{14.35}$$

<u>Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи</u>

$$cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{14.36}$$

<u>Симметричный гиперболический синус Люка</u>

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x} \tag{14.37}$$

<u>Симметричный гиперболический косинус Люка</u>

$$cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x} \tag{14.38}$$

где x – непрерывная переменная, принимающая значения в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$.

Сравнивая формулы Бине (14.33), (14.34) с формулами (14.35)-(14.38), нетрудно усмотреть, что в дискретных точках переменной x ГФФЛ совпадают с формулами Бине (14.33), (14.34), то есть,

$$F_n = \begin{cases} sFs(n) \text{ при } n = 2k \\ cFs(n) \text{ при } n = 2k+1 \end{cases} \tag{14.39}$$

$$L_n = \begin{cases} cLs(n) \text{ при } n = 2k \\ sLs(n) \text{ при } n = 2k+1 \end{cases} \tag{14.40}$$

где k принимает значение из множества $k \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$.

Из формулы (14.39) вытекает, что при всех четных значениях $n = 2k$ функция гиперболического синуса Фибоначчи $sFs(n) = sFs(2k)$ совпадает с числами Фибоначчи с четными индексами $F_n = F_{2k}$, а при всех нечетных значениях $n = 2k+1$ функция гиперболического косинуса Фибоначчи $cFs(n) = cFs(2k+1)$ совпадает с числами Фибоначчи с нечетными индексами $F_n = F_{2k+1}$. В то же время из формулы (14.40) вытекает, что при всех четных значениях $n = 2k$ функция гиперболического косинуса Люка $sLs(n) = sLs(2k)$ совпадает с числами Люка с четными индексами $L_n = L_{2k}$, а при всех нечетных значениях $n = 2k+1$ функция гиперболического синуса Люка $sFs(n) = sFs(2k+1)$ совпадает с числами Люка с нечетными индексами $L_n = L_{2k+1}$. То есть, числа Фибоначчи и Люка как бы вписываются в гиперболические функции Фибоначчи и Люка в «дискретных» точках непрерывной переменной x, что будет показано ниже.

Таким образом, согласно (14.39), числам Фибоначчи с четными индексами ($n = 2k$) всегда соответствует симметричный фибоначчиевый синус $sFs(x)$, а с нечетными индексами ($n = 2k+1$) – симметричный фибоначчиевый косинус $cFs(x)$, в то время как согласно (14.40) числам Люка с четными индексами всегда соответствует симметричный люковый косинус $cLs(x)$, а с нечетными индексами – симметричный люковый синус $sLs(x)$.

Заметим также, что введенные выше симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$sFs(x) \;=\; \frac{sLs(x)}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x) \;=\; \frac{cLs(x)}{\sqrt{5}} \tag{14.41}$$

По аналогии с классическими гиперболическими функциями (14.12) могут быть введены другие симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка, в частности, тангенс и котангенс Фибоначчи и Люка:

$$tFs(x) = \frac{sFs(x)}{cFs(x)}, \quad ctFs(x) = \frac{cFs(x)}{sFs(x)}; \tag{14.42}$$

$$tLs(x) = \frac{sLs(x)}{cLs(x)}, \quad ctLs(x) = \frac{cLs(x)}{sLs(x)}. \tag{14.43}$$

Свойство четности. Главным достоинством гиперболических функций (14.35)-(14.38), введенными в [58], по сравнению с подобными функциями, введенными в [57], является сохранение важного свойства четности, которое легко доказывается, если воспользоваться формулами (14.35)-(14.38). Действительно,

$$sFs(-x) \;=\; \frac{\Phi^{-x} \;-\; \Phi^{x}}{\sqrt{5}} = -\frac{\Phi^{x} - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} = -sFs(x), \tag{14.44}$$

то есть, симметричный гиперболический синус Фибоначчи является нечетной функцией.

Подобным же образом, легко доказать, что симметричный гиперболический косинус Фибоначчи является четной функцией, то есть,

$$cFs(-x) \;=\; \frac{\Phi^{-x} \;+\; \Phi^{x}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{x} + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} = cFs(x). \tag{14.45}$$

Таким же образом можно доказать, что

$$sL(-x) = -sL(x); \quad cL(-x) = cL(x). \tag{14.46}$$

Графики ГФФЛ. Графики функций (14.35)-(14.38), представленные на Рис.14.10 и Рис.14.11, согласно свойствам четности (14.41)-(14.43), имеют симметричный вид и подобны графикам классических гиперболических функций (Рис.14.9).

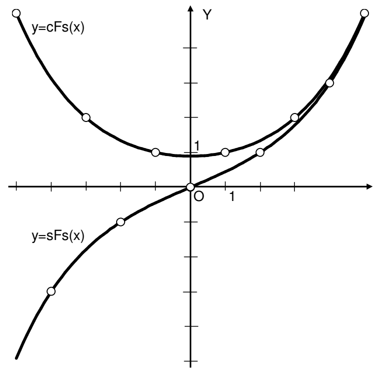


Рис.14.10. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи

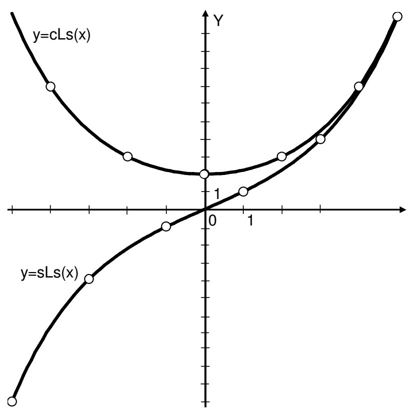


Рис.14.11. Симметричные гиперболические функции Люка

14.8. Рекуррентные свойства гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Аналоги рекуррентных соотношений для чисел Фибоначчи и Люка. В статье [58] проведено детальное исследование математических свойств нового класса гиперболических функций. При этом показано, что ГФФЛ, с одной стороны, обладают рекуррентными свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и

Люка, с другой стороны, гиперболическими свойствами, подобными свойствам классических гиперболических функций (14.11).

Докажем некоторые простейшие рекуррентные свойства ГФФЛ. Например, легко доказать, что рекуррентному соотношению Фибоначчи $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, соответствуют следующие тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи:

$$sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x); \quad cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x). \tag{14.47}$$

Действительно,

$$cFs(x+1) + sFs(x) = \frac{\Phi^{x+1} + \Phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^x(\Phi+1) - \Phi^{-x}(1-\Phi)}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\Phi^x \times \Phi^2 - \Phi^{-x} \times \Phi^{-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{x+2} - \Phi^{-(x+2)}}{\sqrt{5}} = sFs(x+2);$$

$$sFs(x+1) + cFs(x) = \frac{\Phi^{x+1} - \Phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^x(\Phi+1) + \Phi^{-x}(1-\Phi)}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{\Phi^x \times \Phi^2 + \Phi^{-x} \times \Phi^{-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{x+2} + \Phi^{-(x+2)}}{\sqrt{5}} = cFs(x+2).$$

Аналогично доказывается, что рекуррентному соотношению для чисел Люка $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ соответствуют следующие тождества для симметричных гиперболических функций Люка:

$$sLs(x+2) = cLs(x+1) + sLs(x); \quad cLs(x+2) = sLs(x+1) + cLs(x). \tag{14.48}$$

Аналог формулы Кассини. Как упоминалось в главе 2, одним из наиболее удивительных свойств, связывающих три соседних числа Фибоначчи, является формула Кассини:

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Докажем, что этой формуле соответствует два тождества для симметричных гиперболических функций Фибоначчи:

$$\begin{gathered}\left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x+1)cF(x-1) = -1;\\ \left[cFs(x)\right]^2 - sFs(x+1)sF(x-1) = 1.\end{gathered} \tag{14.49}$$

Действительно,

$$\left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x+1)cFs(x-1) = \left(\frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{\Phi^{x+1} + \Phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} \times \frac{\Phi^{x-1} + \Phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\Phi^{2x} - 2 + \Phi^{-2x} - \left(\Phi^{2x} + \Phi^2 + \Phi^{-2} + \Phi^{-2x}\right)}{5} = -1;$$

$$\left[cFs(x)\right]^2 - sFs(x+1)sFs(x-1) == \left(\frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{\Phi^{x+1} - \Phi^{-(x+1)}}{\sqrt{5}} \times \frac{\Phi^{x-1} - \Phi^{-(x-1)}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\Phi^{2x} + 2 + \Phi^{-2x} - \left(\Phi^{2x} - \Phi^2 - \Phi^{-2} + \Phi^{-2x}\right)}{5} = 1.$$

Заметим, что при доказательстве этих тождеств мы использовали формулу Бине для чисел Люка:

$$\Phi^2 + \Phi^{-2} = L_3 = 3.$$

Таблица рекуррентных свойств ГФФЛ. Таким же путем из известных тождеств для чисел Фибоначчи и Люка могут быть выведены новые тождества для гиперболических функций Фибоначчи и Люка [58]. Часть из них приведена в Табл. 14.2.

Из таблицы Табл.14.2 вытекает, что каждому тождеству для чисел Фибоначчи и Люка соответствует два тождества для ГФФЛ. Этот факт объясняется очень просто. Выбор одного из двух тождеств для ГФФЛ зависит от четности индекса n в числах Фибоначчи и Люка. Рассмотрим, например, простейшее тождества $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Если $n = 2k$, мы должны использовать первое тождество $sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x)$; в противном случае ($n = 2k+1$) мы должны использовать другое тождество $cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$.

Таблица 14.2. Рекуррентные свойства ГФФЛ

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для гиперболических функций Фибоначчи и Люка
$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$	$sFs(x+2)=cFs(x+1)+sFs(x);\, cFs(x+2)=sFs(x+1)+cFs(x)$
$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$	$sLs(x+2)=cLs(x+1)+sLs(x);\, cLs(x+2)=sLs(x+1)+cLs(x)$
$F_n=(-1)^{n+1}F_{-n}$	$sFs(x)=-sFs(-x);\, cFs(x)=cFs(-x)$
$L_n=(-1)^n L_{-n}$	$sLs(x)=-sLs(-x);\, cLs(x)=cLs(-x)$
$F_{n+3}+F_n=2F_{n+2}$	$sFs(x+3)+cFs(x)=2cFs(x+2);\, cFs(x+3)+sFs(x)=2sFs(x+2)$
$F_{n+3}-F_n=2F_{n+1}$	$sFs(x+3)-cFs(x)=2sFs(x+1);\, cFs(x+3)-sFs(x)=2cFs(x+1)$
$F_{n+6}-F_n=4F_{n+3}$	$sFs(x+6)-cFs(x)=4cFs(x+3);\, cFs(x+6)-sFs(x)=4cFs(x+3)$
$F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}=(-1)^{n+1}$	$[sFs(x)]^2-cFs(x+1)cFs(x-1)=-1;\, [cFs(x)]^2-sFs(x+1)sFs(x-1)=1$
$F_{2n+1}=F_{n+1}^2+F_n^2$	$cFs(2x+1)=[cFs(x+1)]^2+[sFs(x)]^2;\, sFs(2x+1)=[sFs(x+1)]^2+[cFs(x)]^2$
$L_n^2-2(-1)^n=L_{2n}$	$[sLs(x)]^2+2=cLs(2x);\, [cLs(x)]^2-2=cLs(2x)$
$L_n+L_{n+3}=2L_{n+2}$	$sLs(x)+cLs(x+3)=2sLs(x+2);\, cLs(x)+sLs(x+3)=2cLs(x+2)$
$L_{n+1}L_{n-1}-L_n^2=-5(-1)^n$	$sLs(x+1)sLs(x-1)-[cLs(x)]^2=-5;\, cLs(x+1)cLs(x-1)-[sLs(x)]^2=5$
$F_{n+3}-2F_n=L_n$	$sFs(x+3)-2cFs(x)=sLs(x);\, cFs(x+3)-2sFs(x)=cLs(x)$
$L_{n-1}+L_{n+1}=5F$	$sLs(x-1)+cLs(x+1)=5sFs(x);\, cLs(x-1)+sLs(x+1)=5cFs(x)$
$L_n+5F_n=2L_{n+1}$	$sLs(x)+5cFs(x)=2cLs(x+1);\, cLs(x)+5sFs(x)=2sLs(x+1)$
$L_{n+1}^2+L_n^2=5F_{2n+1}$	$[sLs(x+1)]^2+[cLs(x)]^2=5cFs(2x+1);\, [cLs(x+1)]^2+[sLs(x)]^2=5sFs(2x+1)$

Теория ГФФЛ как новый этап в развитии «теории чисел Фибоначчи. Важно подчеркнуть, что каждому «дискретному» тождеству для чисел Фибоначчи и Люка соответствуют два «непрерывных» тождества для ГФФЛ. И наоборот, используя соотношения (14.39), (14.40), каждому тождеству для ГФФЛ мы можем поставить в соответствие некоторое «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи и Люка. Поскольку числа Фибоначчи и Люка согласно (14.39), (14.40) являются «дискретным» случаем ГФФЛ, с которыми они совпадают для дискретных значений непрерывной переменной $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$, то это означает, что с введением ГФФЛ «классическая теория чисел Фибоначчи» [2-4] как бы «вырождается», поскольку она становится частным («дискретным») случаем более общей («непрерывной) теории ГФФЛ.

14.9. Гиперболические свойства ГФФЛ

Свойство четности. Введенные выше ГФФЛ обладают всеми известными свойствами, присущими классическим гиперболическим функциям (14.11). Первым из них является свойство четности (14.44)-(14.46), доказанное выше. Действительно, гиперболические синусы Фибоначчи и Люка являются нечетными функциями, в то время как гиперболические косинусы Фибоначчи и Люка являются четными функциями, то есть,

$$\begin{aligned} sFs(-x) &= -sFs(x); \quad cFs(-x) = cFs(x) \\ sLs(-x) &= -sLs(x); \quad cLs(-x) = cLs(x) \end{aligned} \qquad (14.50)$$

Основное тождество для ГФФЛ. Но существуют более глубокие математические связи между классическими гиперболическими функциями и ГФФЛ. Например, одним из важнейших свойств классических гиперболических функций является следующее тождество:

$$\left[ch(x)\right]^2 - \left[sh(x)\right]^2 = 1. \qquad (14.51)$$

Легко доказать, что в терминах ГФФЛ это тождество может быть представлено в виде двух тождеств (для гиперболических функций Фибоначчи и гиперболических функций Люка):

$$\left[cFs(x)\right]^2 - \left[sFs(x)\right]^2 = \frac{4}{5} \qquad (14.52)$$

$$\left[cLs(x)\right]^2 - \left[sLs(x)\right]^2 = 4. \qquad (14.53)$$

Докажем тождество (14.52):

$$\left[cFs(x)\right]^2 - \left[sFs(x)\right]^2 = \left(\frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$= \frac{\Phi^{2x} + 2 + \Phi^{-2x} - \Phi^{2x} + 2 - \Phi^{-2x}}{5} = \frac{4}{5}.$$

Тождество (14.53) доказывается аналогично.

Таблица тождеств для ГФФЛ. Нетрудно установить, что для каждого тождества для классических гиперболических функций существует аналог в виде соответствующего тождества для ГФФЛ. В Табл.14.3 приведены некоторые формулы для классических гиперболических функций и соответствующие им формулы для гиперболических функций Фибоначчи. Подобные же формулы для гиперболических функций Люка легко получить из Табл.14.3, если воспользоваться соотношениями (14.41), связывающими ГФФЛ между собой.

Таблица 14.3. «Гиперболические» свойства гиперболических функций Фибоначчи

Формулы дляклссических гиперболических функций	Формулы для гиперболических функций Фибоначчи
$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\ ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}};\ cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$ch^2(x)-sh^2(x)=1$	$\left[cFs(x)\right]^2-\left[sFs(x)\right]^2=\frac{4}{5}$
$sh(x+y)=sh(x)ch(x)+ch(x)sh(x)$ $sh(x-y)=sh(x)ch(x)-ch(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{5}}sFs(x+y)=sFs(x)cFs(x)+cFs(x)sFs(x)$ $\frac{2}{\sqrt{5}}sFs(x-y)=sFs(x)cFs(x)-cFs(x)sFs(x)$
$ch(x+y)=ch(x)ch(x)+sh(x)sh(x)$ $ch(x-y)=ch(x)ch(x)-sh(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(x+y)=cFs(x)cFs(x)+sFs(x)sFs(x)$ $\frac{2}{\sqrt{5}}cFs(x-y)=cFs(x)cFs(x)-sFs(x)sFs(x)$
$ch(2x)=2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{5}}cFs(2x)=sFs(x)cFs(x)$
$\left[ch(x)\pm sh(x)\right]^n=ch(nx)\pm sh(nx)$	$\left[cFs(x)\pm sFs(x)\right]^n=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}\left[cFs(nx)\pm sFs(nx)\right]$

14.10. Формулы для дифференцирования и интегрирования

Известны следующие формулы для дифференцирования классических гиперболических функций:

$$\left[ch\left(x\right)\right]^{(n)} = \begin{cases} sh(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ ch(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases};$$

$$\left[sh\left(x\right)\right]^{(n)} = \begin{cases} ch(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ sh(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}.$$

Нетрудно доказать следующие формулы для дифференцирования симметричных гиперболических функций Фибоначчи [58]:

$$\left[cFs\left(x\right)\right]^{(n)} = \begin{cases} \left(\ln\Phi\right)^{n} sFs(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ \left(\ln\Phi\right)^{n} cFs(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}$$

$$\left[sFs\left(x\right)\right]^{(n)} = \begin{cases} \left(\ln\Phi\right)^{n} cFs(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ \left(\ln\Phi\right)^{n} sFs(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}.$$

Формулы для интегрирования классических гиперболических функций имеют вид:

$$\underbrace{\iiint}_{n} ch(x)dx = \begin{cases} sh(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ ch(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases};$$

$$\underbrace{\iiint}_{n} sh(x)dx = \begin{cases} ch(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ sh(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}.$$

Легко вывести следующие формулы для интегрирования гиперболических функций Фибоначчи и Люка [58]:

$$\underbrace{\iiint}_{n} cFs(x)dx = \begin{cases} \left(\ln\Phi\right)^{-n} sFs(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ \left(\ln\Phi\right)^{-n} cFs(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}$$

$$\underbrace{\iiint}_{n} cLs(x)dx = \begin{cases} \left(\ln\Phi\right)^{-n} sLs(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ \left(\ln\Phi\right)^{-n} cLs(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}$$

$$\underbrace{\iiint}_{n} sFs(x)dx = \begin{cases} \left(\ln\Phi\right)^{-n} cFs(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ \left(\ln\Phi\right)^{-n} sFs(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}$$

$$\underbrace{\iiint}_{n} sLs(x)dx = \begin{cases} \left(\ln\Phi\right)^{-n} cLs(x), & \text{для} \quad n = 2k+1 \\ \left(\ln\Phi\right)^{-n} sLs(x), & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}.$$

Эстетика ГФФЛ. Таким образом, введенные выше симметричные гиперболические функции полностью сохраняют свойства классических гиперболических функций (Табл. 14.3), но при этом обладают новыми («рекуррентными») свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка (Табл.14.2). При этом, в отличие от классических гиперболических функций, новые гиперболические функции имеют «дискретный аналог» в виде чисел Фибоначчи и Люка, с которыми согласно (14.39), (14.40) указанные функции совпадают, когда непрерывная переменная x принимает «дискретные» значения: 0, ±1, ±2, ±3, … . Заметим, что соотношения (14.47) - (14.50), (14.52), (14.53), как и другие тождества, приведенные в Табл.14.2 и 14.3, обладают эстетическим совершенством, удовлетворяют принципу «математической красоты» Дирака, что подчеркивают фундаментальный характер введенных выше гиперболических функций Фибоначчи и Люка.

Глава 15

ПРИЛОЖЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

15.1. Новая геометрическая теория филлотаксиса («геометрия Боднара»)

Загадка филлотаксиса. В главе 2 мы описали ботаническое явление филлотаксиса, заключающееся в закономерном спирально-симметричном устройстве ботанических объектов. На поверхностях таких объектов его биоорганы (побеги растений и деревьев, семена на дисках подсолнечников, чешуйки хвойных шишек и ананасов и т.п.) располагаются в виде упорядоченного рисунка, закономерность которого определяют пересекающиеся лево- и правозакрученные спиральные линии – парастихи. Для характеристики филлотаксиса таких ботанических объектов обычно указывается количество левых и правых спиралей, наблюдаемых на поверхности филлотаксисных объектов; при этом закономерности филлотаксиса таких структур описываются отношениями соседних чисел Фибоначчи:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}:\quad \frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\ldots\,. \tag{15.1}$$

Эти отношения называются порядком симметрии филлотаксисного объекта и являются характерными для каждого филлотаксисного объекта [24]. Например, у подсолнечников порядки симметрии могут достигать значений $\frac{89}{55},\frac{144}{89}$ и даже $\frac{233}{144}$.

Наблюдая филлотаксисные объекты в завершенном состоянии и наслаждаясь упорядоченным рисунком на их поверхности, мы всегда задаем себе вопрос: как в процессе роста на его поверхности формируется фибоначчиевая решетка? Эта проблема и представляет собой одну из наиболее интригующих загадок филлотаксиса. Суть ее состоит в том, что у большинства видов биоформ в процессе роста происходит изменение числовых характеристик симметрии. Известно, например, что головки подсолнечника, находящиеся на разных уровнях одного и того же стебля, имеют разную симметрию: чем старше диск, тем выше порядок его симметрии (Рис.15.1). Это означает, что в процессе роста происходит закономерное изменение (возрастание) порядка симметрии и это изменение осуществляется по закону:

$$\frac{2}{1} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{3} \to \frac{8}{5} \to \frac{13}{8} \to \frac{21}{13} \to \ldots \qquad (15.2)$$

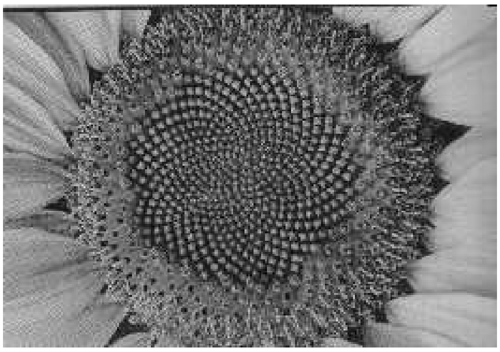


Рис.15.1. Филлотаксисная закономерность для головки подсолнечника

Изменение порядков симметрии филлотаксисных объектов в соответствии с (15.2) называется динамической симметрией [24]. Все вышеуказанные данные и составляют существо хорошо известной «загадки филлотаксиса». Ряд ученых, исследовавших эту проблему, предполагают, что явление филлотаксиса имеет фундаментальное междисциплинарное значение. По мнению В.И. Вернадского, проблема биологической симметрии является ключевой проблемой биологии.

Итак, явление динамической симметрии (15.2) обнаруживает свою особую роль в геометрической проблеме филлотаксиса. Напрашивается предположение, что за числовой закономерностью (15.2) скрываются определенные геометрические законы, которые, возможно, и составляют суть секрета ростового механизма филлотаксиса и их раскрытие имело бы большое значение е только для ботаники, но и для биологии.

Исследуя явление «динамической симметрии», украинский исследователь Олег Боднар совершил научное открытие [24]. Он доказал, что геометрия филлотаксиса является неевклидовой; она является особым видом гиперболической геометрии, основанной на «золотых» гиперболических функциях.

Структурно-числовой анализ филлотаксисной решетки. Рассмотрим в качестве характерного природного филлотаксисного объекта кедровую шишку (Рис.15.2-a). На поверхности шишки каждая чешуйка блокируется с себе подобными в трех направлениях; в результате создается рисунок из трех типов спиралей, количество которых равно числам Фибоначчи: 3,5,8. Для упрощения геометрической модели филлотаксисного объекта на Рис.15.2-a представим его в виде цилиндра (Рис.15.2-c). Мозаичный орнамент, создаваемый расположением чешуек, представим в виде решетки, построенной на центрах чешуек. Разрезав цилиндр по вертикальной прямой (образующей) и развернув его на плоскость, получим фрагмент филлотаксисной решетки, ограниченной двумя параллельными прямыми – следами линии разреза (Рис.15.2-d). Трем типам спиралей цилиндрической поверхности решетки соответствуют три группы параллельных прямых: три прямые 0-21, 1-16, 2-8 имеют правый наклон, пять прямых 3-8, 1-16, 4-19, 7-27, 0-30 имеют левый наклон и еще восемь крутых прямых 0-24, 3-27, 6-30, 1-25, 4-25, 7-28, 2-18, 5-21 имеют правый наклон.

Используем следующий способ нумерации узловых точек решетки. Примем прямую, проходящую через точки O и O' за ось абсцисс, а след вертикального разреза, проходящего через точку O, - за ось ординат. Примем теперь за единицу длины ординату точки 1, тогда номер любой точки решетки будет равен ее ординате. Пронумерованная указанным способом плоская решетка обладает рядом характерных свойств. Произвольная пара вершин задает в системе решетки определенное направление и, в конечном счете, – множество параллельных направлений, для которых характерно постоянство разницы d между номерами соседних вершин. Значение d становится показателем качества спиралей, которые соответствуют рассматриваемому направлению решетки на поверхности цилиндра. Так, для направлений, заданными сторонами элементарного треугольника филлотаксисной решетки, значения d равны 3,5,8, что соответствует количественному составу трех групп спиралей цилиндрической поверхности. Примечательно, что номера точек, непосредственно соседствующих с O, также равны числам 3,5,8. Таким образом, порядок симметрии находит свое отражение в системе числовой нумерации решетки.

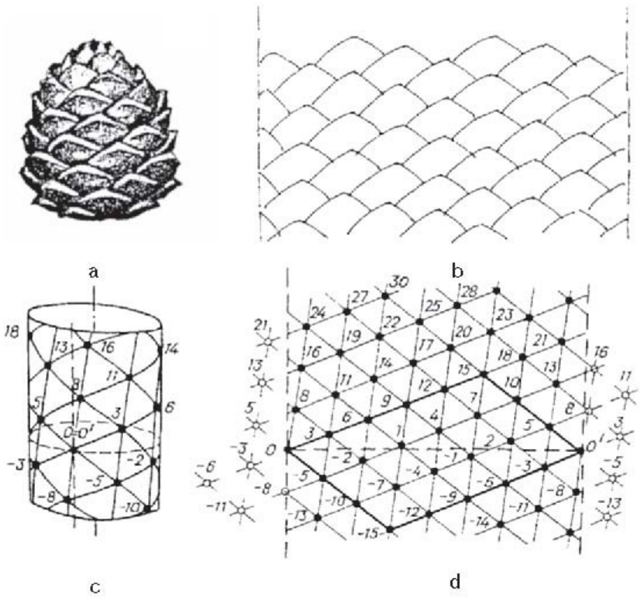


Рис.15.2. Анализ структурно-числовых свойств филлотаксисной решетки

Наконец, обратим внимание, что отрезок OO' может рассматриваться как диагональ параллелограмма, построенного на базе направлений, для которых d равно 5 и 3. Размеры сторон этого параллелограмма, выраженные в количестве интервалов между узлами решетки, равны соответственно 3 и 5. Таким образом, данный параллелограмм позволяет оценить симметрию решетки, не прибегая к цифровой нумерации. Назовем этот параллелограмм координатным. Решеткам с различной симметрией соответствуют координатные параллелограммы различных размеров.

Ключевой принцип динамической симметрии. Приступим теперь к непосредственному анализу явления динамической симметрии. Идея анализа сводится к сравнению серии решеток (разверток цилиндрической решетки), обладающих различной симметрией. На Рис.15.3 иллюстрируется вариант фибоначчиевого филлотаксиса, при котором соблюдается природная последовательность изменения симметрии:

$$1:2:1 \to 2:3:1 \to 2:5:3 \to 5:8:3 \to 5:13:8.$$

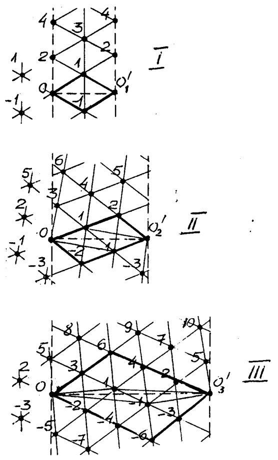
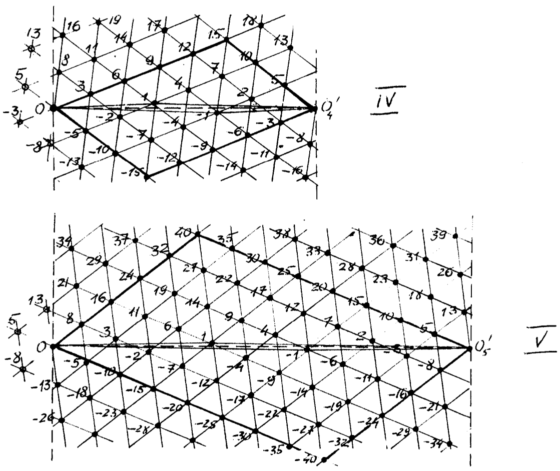


Рис.15.3. Анализ динамической симметрии филлотаксисного объекта



Представленные на Рис.15.3 решетки рассматриваются как последовательные стадии преобразования одного и того же филлотаксисного объекта в процессе его роста. Вопрос заключается в том, как происходит трансформация решетки, т.е. каким геометрическим движением можно обеспечить последовательное прохождение решеткой всех проиллюстрированных состояний.

Проанализируем стадии I и II. Для этого нам понадобятся понятия сжатия (растяжения) плоскости, которое мы ввели выше (глава 5) при анализе важного понятия гиперболической геометрии – гиперболического поворота. На этом этапе решетка может быть трансформирована за счет сжатия плоскости вдоль направления $O-3$ до положения, при котором отрезок $O-3$ достигает длины ребра решетки. Одновременно должно происходить растяжение плоскости по направлению 1-2, перпендикулярном направлению сжатия. При переходе от стадии II к стадии III сжатие должно производиться вдоль направления $O-5$, а растяжение – вдоль направления 2-3. Следующий переход сопровождается аналогичной деформацией плоскости по направлениям $O-8$ (сжатие) и 3-5 (растяжение).

Рассмотрим теперь параллелограмм $O1O_1'\bar{1}$ на Рис.15.3-I. Ясно, что в процессе преобразования этот параллелограмм последовательно трансформируется в параллелограммы $O1O_2'\bar{1}, O1O_3'\bar{1}$, $O1O_4'\bar{1}$, $O1O_5'\bar{1}$ на последующих стадиях трансформации филлотаксисных решеток.

Мы не будем углубляться в детальный анализ научного открытия Олега Боднара, отсылая читателей к его книге [24]. Сформулируем только ключевой принцип явления динамической симметрии. Боднар доказывает, что таким принципом является гиперболический поворот. В соответствии с этим принципом рост филлотаксисного объекта, сопровождающийся изменением динамической симметрии, может быть смоделирован как последовательный переход от объекта с меньшим порядком симметрии к объекту с большим порядком симметрии (Рис.15.3), осуществляемый с помощью гиперболического поворота плоскости. Этими рассуждениями Боднар доказал гиперболический характер ботанического явления филлотаксиса!

«Золотые» гиперболические функции. Таким образом, анализ механизма изменения динамической симметрии в процессе роста филлотаксисного объекта (Рис.15.3) привел Боднара к заключению, что геометрия филлотаксиса по своей природе является гиперболической. Однако, она отличается от гиперболической геометрии, основанной на классических гиперболических функциях, в том отношении, что она реализуется на основе другого типа гиперболических функций, введенных Боднаром [24]. Эти функции он назвал «золотыми» гиперболическими функциями:

<u>«Золотой» гиперболический синус</u>

$$\mathrm{Gsh}n = \frac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{2} \tag{15.3}$$

<u>«Золотой» гиперболический косинус</u>

$$\mathrm{Gch}n = \frac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{2}. \tag{15.4}$$

Преобразование координат, называемое гиперболическим поворотом, в терминах «золотых» гиперболических функций (15.3), (15.4) описывается следующими формулами:

$$x' = X\mathrm{Gch}n + Y\mathrm{Gsh}n, \quad y' = X\mathrm{Gsh}n + Y\mathrm{Gch}n.$$

Далее Боднар устанавливает фундаментальную связь введенных им «золотых» гиперболических функций (15.3), (15.4) с числами Фибоначчи:

$$F_{2k-1} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{Gch}(2k-1); \tag{15.5}$$

$$F_{2k} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{Gsh}\ 2k. \tag{15.6}$$

Используя соотношения (15.5), (15.6), Боднар дает удивительно простое объяснение «загадки филлотаксиса»: почему числа Фибоначчи с упорным постоянством появляются на поверхности филлотаксисных объектов. Главная причина состоит в том, что геометрия живой природы является неевклидовой; при этом она существенно отличается от геометрии Лобачевского и четырехмерного пространства Минковского, основанных на классических гиперболических функциях, прежде всего тем, что основные соотношения этой геометрии описываются с помощью «золотых» гиперболических функций (15.3), (15.4), связанных с числами Фибоначчи простыми соотношениями (15.5), (15.6).

Именно с использованием формул (15.5) и (15.6) Боднар строит оригинальную геометрическую теорию филлотаксиса, связанную с «золотым сечением» и числами Фибоначчи.

Связь «золотых» гиперболических функций Боднара с гиперболическими функциями Фибоначчи. Выше (глава 14) мы ввели в рассмотрение так называемые симметричные гиперболические функции Фибоначчи, которые определяются выражениями (14.35), (14.36).

Сравнивая эти выражения с выражениями для «золотых гиперболических функций», задаваемых формулами (15.3), (15.4), можно установить следующую связь между указанными группами формул:

$$\mathrm{Gsh}(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}sFs(x) \tag{15.7}$$

$$\mathrm{Gch}(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}cFs(x). \tag{15.8}$$

Анализ соотношений (15.7), (15.8) позволяет сделать заключение, что «золотые синусы и косинусы», введенные Боднаром [24], и симметричные гиперболические функции Фибоначчи, введенные в работе [58], по существу являются одними и теми же функциями, отличающиеся только постоянными коэффициентами. При этом при исследовании геометрии филлотаксиса Боднар осуществляет умножение своих «золотых» гиперболических функций (15.3), (15.4) на поправочный коэффициент $\frac{2}{\sqrt{5}}$, тем самым превращая свои «золотые» гиперболические функции в симметричные гиперболические функции Фибоначчи. Только благодаря такому преобразованию, в его теории появляются числа Фибоначчи, связанные с «золотыми» гиперболическими функциями соотношениями (15.5), (15.6).

Немного истории. Не имеет принципиального значения вопрос о приоритете и авторстве нового класса гиперболических функций. Открытие «золотых гиперболических функций» и «гиперболических функций Фибоначчи и Люка» было сделано примерно в одно и то же время (конец 80-х годов) независимо друг от друга украинскими учеными Олегом Боднаром [24], с одной стороны, и Алексеем Стаховым и Иваном Ткаченко [57], с другой стороны. Дальнейшее их развитие (введение симметричных ГФФЛ) дано в статье Алексея Стахова и Бориса

Розина [58]. Однако, пути к этому открытию были различными. Стахов, Ткаченко и Розин [57,58] использовали строго математический подход: для этой цели были привлечены формулы Бине (14.33), (14.34), связывающие числа Фибоначчи и Люка с золотой пропорцией; к «золотым гиперболическим функциям» Боднара привела его блестящая научная интуиция и логика научного изучения филлотаксиса, подсказавшие ему, что именно «золотые» гиперболические функции (15.3), (15.4) отражают сущность явления филлотаксиса и что именно они должны быть положены в основу геометрического исследования этого уникального ботанического явления. В любом случае приоритет в открытии нового класса гиперболических функций принадлежит представителям украинской науки.

Таким образом, итогом исследований, проведенных украинским ученым О. Боднаром [24], можно считать создание новой геометрической теории филлотаксиса, которую по праву можно назвать «геометрией Боднара». Открытие Боднара обнаруживает непосредственную связь с пространственно-временными, то есть, фундаментальными законами живой и неживой природы и свидетельствует о единстве этих законов. Из этого открытия вытекает, что гиперболическая геометрия является универсальной моделью пространственно-временных процессов, имеющих место, как в живой, так и неживой природе. При этом фундаментальным принципом преобразования в естественных процессах является гиперболический поворот. Однако, существует определенное различие между гиперболическими геометриями для живой и неживой природы. Гиперболическая геометрия неживой природы, скорее всего, основывается на классических гиперболических функциях, которые лежат в основе геометрии Лобачевского. Сущность этой геометрии выражается с помощью числа e, которое наряду с числом π является одной из важнейших математических констант. Гиперболическая геометрия живой природы основывается на другом классе гиперболических функций, «золотых гиперболических функциях» и «гиперболических функциях Фибоначчи и Люка», сущностью которых является золотая пропорция, которая является фундаментальной константой живой природы.

15.2. «Золотой Шофар» и шофароподобная модель Вселенной

Квазисинусоидальные функции Фибоначчи и Люка. Рассмотрим формулы Бине для чисел Фибоначчи и Люка, представленные в следующей форме:

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} \tag{15.9}$$

$$L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}, \tag{15.10}$$

где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - золотая пропорция, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Сравнивая формулы Бине (15.9), (15.10) с симметричными гиперболическими функциями (14.35)-(14.38), мы можем видеть, что непрерывные функции Φ^x и Φ^{-x} в формулах (14.35)-(14.38) соответствуют дискретным последовательностям Φ^n и Φ^{-n} в формулах Бине (15.9), (15.10). Поэтому мы можем поставить в соответствие альтернативной последовательности $(-1)^n$ в формулах Бине (15.9), (15.10) некоторую непрерывную функцию, которая принимает значения (-1) и $(+1)$ в дискретных точках ($x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Наиболее простой из таких функций является тригонометрическая функция $\cos(\pi x)$. Эти рассуждения, проведенные в статье Алексея Стахова и Бориса Розина [59], стали основой для введения новой непрерывной функции, связанной с числами Фибоначчи и Люка.

Определение 15.1. Следующая непрерывная функция называется квази-синусоидальной функцией Фибоначчи (КСФФ):

$$Q_F(x) = \frac{\Phi^x - \cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{15.11}$$

Существует следующая связь между числами Фибоначчи F_n, задаваемыми (15.9), и квазисинусоидальной функцией Фибоначчи, задаваемой (15.11):

$$F_n = Q_F(n) = \frac{\Phi^n - \cos(\pi n)\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} \qquad (15.12)$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Определение 14.2. Следующая непрерывная функция называется квазисинусоидальной функцией Люка (КСФЛ):

$$Q_L(x) = \Phi^x + \cos(\pi x)\Phi^{-x} \qquad (15.13)$$

График КСФФ является квазисинусоидальной кривой, которая проходит через все точки, соответствующим числам Фибоначчи, задаваемым (15.9), на координатной плоскости (Рис.15.4). Как показано штрих-пунктиром на Рис.15.4, симметричные гиперболические функции Фибоначчи (14.35) и (14.36) являются огибающими квазисинусоидальной функции Фибоначчи (15.11).

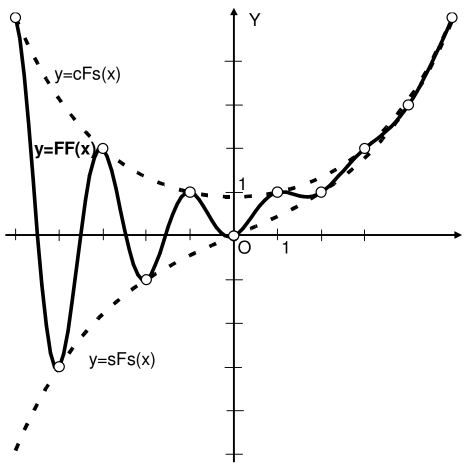


Рис.15.4. График квазисинусоидальной функции Фибоначчи

График КСФЛ является квазисинусоидальной кривой, которая проходит через все точки, соответствующим числам Люка, задаваемым (15.10), на координатной плоскости (Рис.15.5). Симметричные гиперболические функции Люка (14.37) и (14.38) (Рис.15.5) являются огибающими квазисинусоидальной функции Люка (15.13).

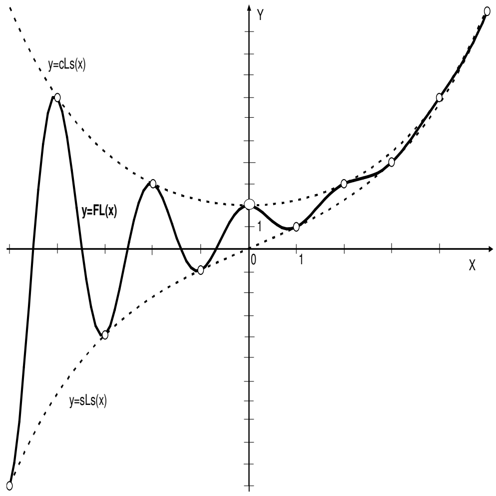


Рис.15.5. График квазисинусоидальной функции Люка

Рекуррентные свойства квазисинусоидальных функций Фибоначчи и Люка. Приведем некоторые теоремы для квазисинусоидальных функций Фибоначчи и Люка, доказанные в [59].

Теорема 14.1. Для квазисинусоидальной функции Фибоначчи имеет место соотношение, подобное рекуррентному соотношению для чисел Фибоначчи $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$:

$$Q_F(x+2) = Q_F(x+1) + Q_F(x) \tag{15.14}$$

Доказательство:

$$Q_F(x+1) + Q_F(x) = Q_F(x) = \frac{\Phi^{x+1} - \cos[\pi(x+1)]\Phi^{-x-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^x - \cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\Phi^{x+1} + \cos(\pi x)\Phi^{-x-1}}{\sqrt{5}} + \frac{\Phi^x - \cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^x(\Phi+1) + \cos(\pi x + 2\pi)\Phi^{-x}(1-\Phi)}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\Phi^x\Phi^2 + \cos[\pi(x+2)]\Phi^{-x}\Phi^{-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{x+2} + \cos[\pi(x+2)]\Phi^{-(x+2)}}{\sqrt{5}} = Q_F(x+2)$$

Теорема 15.2. Для квазисинусоидальной функции Люка имеет место соотношение, подобное рекуррентному соотношению для чисел Люка $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$:

$$Q_L(x+2) = Q_L(x+1) + Q_L(x). \tag{15.15}$$

Доказательство теоремы 15.2 аналогично доказательству теоремы 15.1.

Теорема 15.3. Для квазисинусоидальной функции Фибоначчи имеет место соотношение, подобное формуле Кассини $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$:

$$\left[Q_F(x)\right]^2 - Q_F(x+1)Q_F(x-1) = -\cos(\pi x). \tag{15.16}$$

Доказательство:

$$\left[Q_F(x)\right]^2 - Q_F(x+1)Q_F(x-1) =$$

$$\left(\frac{\Phi^x - \cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{\Phi^{x+1} - \cos[\pi(x+1)]\Phi^{-x-1}}{\sqrt{5}} \times \frac{\Phi^{x-1} - \cos[\pi(x-1)]\Phi^{-x+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\Phi^{2x} - 2\cos(\pi x) + [\cos(\pi x)]^2 \Phi^{-2x} - \left[\Phi^{2x} + \cos(\pi x)\Phi^2 + \cos(\pi x)\Phi^{-2} + [\cos(\pi x)]^2 \Phi^{-2x}\right]}{5} =$$

$$\frac{-\cos(\pi x)\left(2 + \Phi^2 + \Phi^{-2}\right)}{5} = -\cos(\pi x).$$

Заметим, что при доказательстве теоремы 15.3 использовано соотношение $L_2 = \Phi^2 + \Phi^{-2} = 3$, которое является частным случаем формулы Бине для чисел Люка.

По аналогии с теоремами 15.1-15.3 мы можем доказать другие тождества для квазисинусоидальных функций Фибоначчи и Люка. Эти тождества подобны тождествам для чисел Фибоначчи и Люка.

Трехмерная спираль Фибоначчи. Хорошо известно, что тригонометрический синус и косинус могут быть определены как горизонтальные проекции поступательного движения точки на поверхности бесконечного вращающегося цилиндра с радиусом 1 и осью симметрии, которая совпадает с осью OX. Такая трехмерная спираль описывается комплексной функцией $f(x) = \cos x + i \sin x$, где $i = \sqrt{-1}$. Функция синуса является ее проекцией на плоскость.

По аналогии с такой трехмерной спиралью в работе [59] введена трехмерная спираль Фибоначчи:

$$S_F(x) = \frac{\Phi^x - \cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} + i\frac{\sin(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}. \tag{15.17}$$

Как показано на Рис.15.6, эта функция, по своей форме, напоминает спираль, напоминающую собой кратер с загнутым концом.

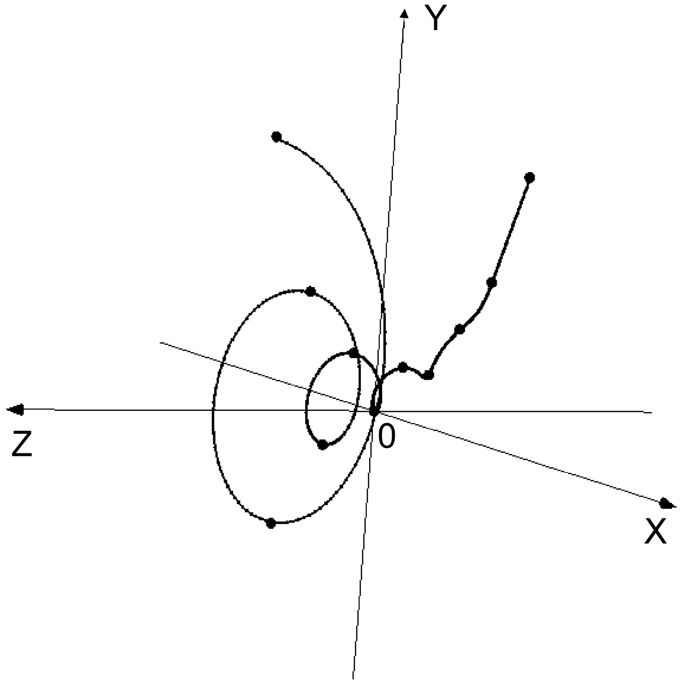


Рис.15.6. Трехмерная спираль Фибоначчи

В работе [59] доказано следующее свойство функции (15.17).

Теорема 15.4. Для трехмерной спирали Фибоначчи справедливо следующее свойство, подобное рекуррентному соотношению для чисел Фибоначчи $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$:

$$S_F(x+2) = S_F(x+1) + S_F(x). \tag{15.18}$$

Золотой Шофар. Проведенные выше рассуждения стали основой для введения важной функции, названой в [59] «Золотым Шофаром».

Обозначим действительную и мнимую части трехмерной спирали Фибоначчи (15.17), соответственно, через $y(x)$ и $z(x)$, то есть,

$$y(x) = \mathrm{Re}\left[S_F(x)\right] = \frac{\Phi^x - \cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^x}{\sqrt{5}} - \frac{\cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{15.19}$$

$$z(x)=\mathrm{Im}\left[S_F(x)\right]=\frac{\sin(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}. \qquad (15.20)$$

Воспользовавшись (15.19), (15.20), можно сформировать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y(x)-\dfrac{\Phi^x}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\cos(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \\ z(x)=\dfrac{\sin(\pi x)\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \end{cases} \qquad (15.21)$$

Возведем в квадрат оба уравнения системы (15.21) и затем просуммируем их. Принимая y и z как независимые переменные, мы можем получить некоторую функцию:

$$\left(y-\frac{\Phi^x}{\sqrt{5}}\right)^2+z^2=\left(\frac{\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2. \qquad (15.22)$$

В трехмерном пространстве функция (15.22) соответствует криволинейной поверхности 2-го порядка, названной в [59] «Золотым Шофаром» (Рис.15.7).

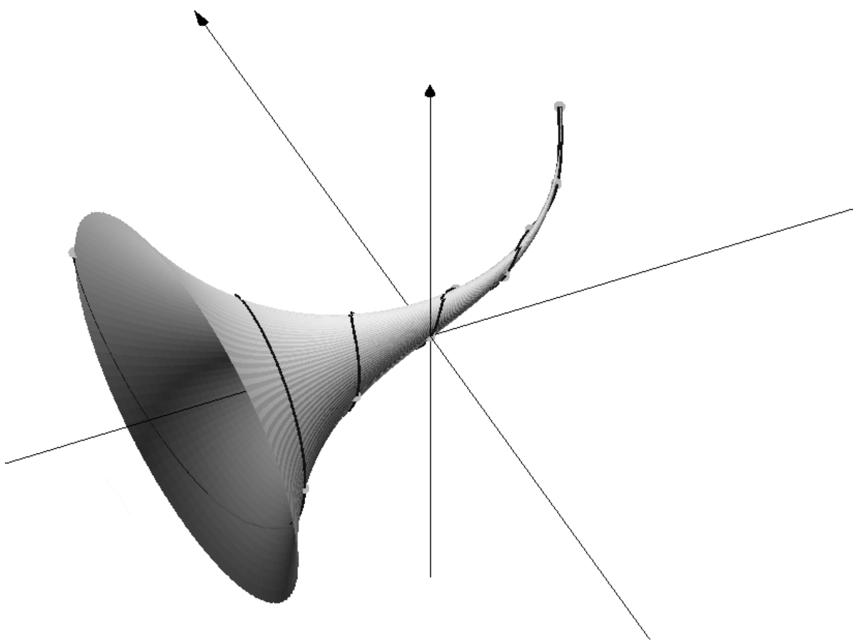


Рис.15.7. Золотой Шофар

Полученная трехмерная поверхность похожа на рог или кратер с узким концом. В переводе с иврита слово "шофар" означает рог, который является символом власти и могущества.

Нетрудно показать, что функция (15.22) непосредственно связана с гиперболическими функциями Фибоначчи (14.35), (14.36) Проделав несложные преобразования [59], можно представить функцию (15.22), задающую «Золотой Шофар», в следующем виде:

$$z^2 = \left[cFs(x) - y\right]\left[sFs(x) + y\right], \tag{15.23}$$

где $sFs(x)$ - гиперболический синус Фибоначчи (14.35) и $cFs(x)$ - гиперболический косинус Фибоначчи (14.36).

Проекция Золотого Шофара, на плоскость XOY показана на Рис.15.8. Проекция показана в виде штрих-пунктирной кривой, находящейся между графиками симметричных гиперболических синуса и косинуса Фибоначчи.

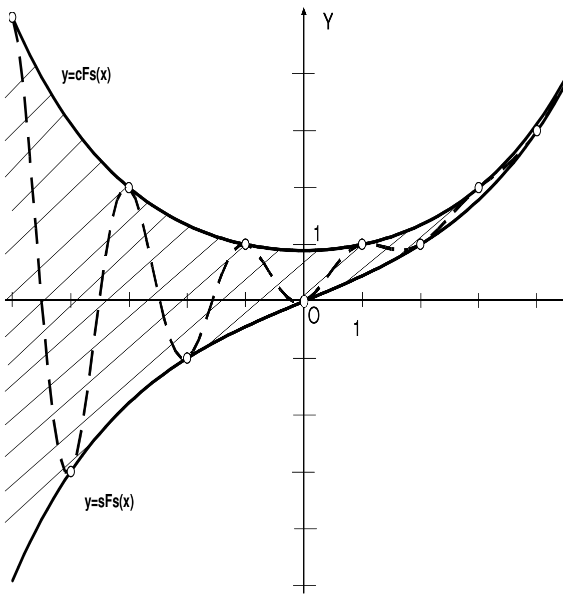


Рис.15.8. Проекция Золотого Шофара на плоскость XOY

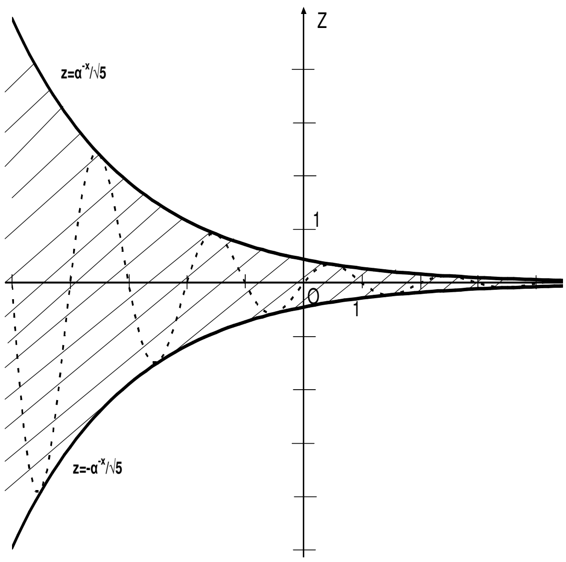


Рис.15.9. Проекция Золотого Шофара на плоскость XOZ

График функция (15.23) «лежит» на Золотом Шофаре и пронизывает плоскость XOY в точках, соответствующих числам Фибоначчи (Рис.15.8).

Проекция Золотого Шофара на плоскость XOZ показана на Рис.15.9. Проекция показана в виде штрих-пунктирной кривой, находящейся между двумя экспоненциальными функциями $\frac{-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$.

В 2004 г. в весьма авторитетном международном журнале “Classical Quantum Gravity” опубликована сенсационная статья в области космологии. Статья называется “Hyperbolic Universes with a Horned Topology and the CMB Anisotropy» («Гиперболические Вселенная с конической (рогоподобной) топологией и анизотропия реликта» (авторы Ralf Aurich, Sven Lustig, Frank Steiner, Holger Then). Ее популярное изложение дано в статье Максима Борисова «Немецкие математики установили, что Вселенная по форме напоминает дудку». Статья опубликована на сайте «Академия Тринитаризма» [94]. Анализ новейших астрофизических данных, и особенно данных по космическому микроволновому фону (реликтовое излучение), которые являются своего рода «снимком» Вселенной, которой было всего 380 тысяч лет отроду, позволил вывести уравнения, определяющие кривизну и топологию Вселенной в больших масштабах. И эти уравнения привели к сенсационному заключению, что Вселенная может иметь форму рога или горна. Точнее говоря, весь наш космос оказывается вытянут в этакую длинную трубку, с узким концом с одной стороны и «раструбом» с другой (Рис.15.10).

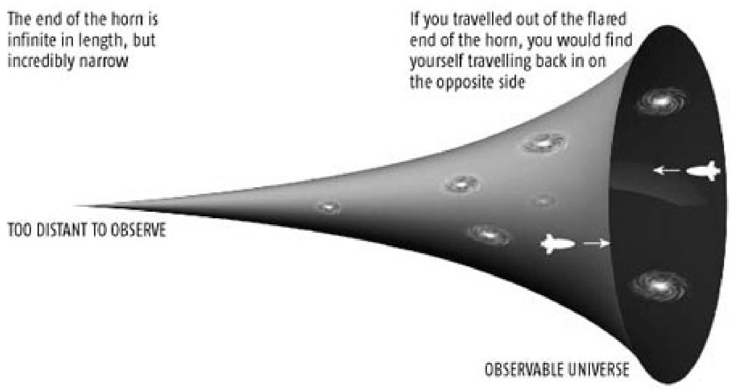


Рис.15.10. Форма Вселенной

Такая «конструкция» нашей Вселенной кроме всего прочего подразумевает, что она конечна, а в каких-то ее местах встречаются области, где можно увидеть собственный затылок. Возможно, для «здравомыслящих» людей все это прозвучит как полный бред или мечта сюрреалиста, однако выкладки математика Франка Штайнера из германского Университета Ульма и его коллег основаны на авторитетных экспериментальных данных, полученных в 2003 году знаменитым зондом WMAP (NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe).

Сравнивая Рис.15.7 и 15.10, нетрудно заметить большую схожесть поверхности «Золотой Шофар», полученной путем исследований гиперболических функций Фибоначчи, с формой Вселенной, основанной на экспериментальных данных. Отсюда вполне резонной является гипотеза, что по своей форме Вселенная является «шофароподобной». На Рис.15.11 приведены «шофароподобная топология», которая, возможно, и лежит в основе модели гиперболической Вселенной.

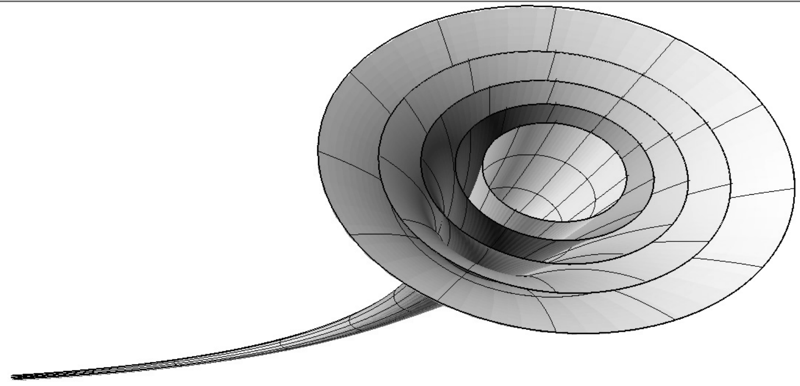


Рис.15.11. «Шофароподобная» топология

Конечно, это всего лишь гипотеза, но она заслуживает внимания, а ее развитие может привести исследователей к новым взглядам на строение Вселенной.

15.3. «Золотые» Q-матрицы

Определение «золотых» $Q-$матриц. В главе 2 были введены так называемые $Q-$матрицы Фибоначчи, представляющие собой квадратные $(2\times 2)-$матрицы следующего вида:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{15.24}$$

где F_{n-1}, F_n, F_{n+1} – числа Фибоначчи.

В работе [60] введены так называемые «золотые» $Q-$матрицы, которые являются расширением $Q-$матриц Фибоначчи (15.24) на непрерывную область.

Представим матрицу (15.24) в виде двух матриц для четных $(n = 2k)$ и нечетных $(n = 2k+1)$ значений n:

$$Q^{2k} = \begin{pmatrix} F_{2k+1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k-1} \end{pmatrix} \tag{15.25}$$

$$Q^{2k+1} = \begin{pmatrix} F_{2k+2} & F_{2k+1} \\ F_{2k+1} & F_{2k} \end{pmatrix}. \tag{15.26}$$

Обратимся теперь к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи, задаваемым выражениями (14.35), (14.36). Напомним, что эти функции обладают замечательными свойствами, задаваемыми выражениями (14.49), которые являются обобщением формулы Кассини на непрерывную область. Напомним также, что числа Фибоначчи F_n связаны с функциями (14.35) и (14.36) простыми соотношениями (14.39).

Используем соотношения (14.39) для представления матриц (15.25), (15.26) в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи (14.35), (14.36):

$$Q^{2k} = \begin{pmatrix} cFs(2k+1) & sFs(2k) \\ sFs(2k) & cFs(2k-1) \end{pmatrix} \tag{15.27}$$

$$Q^{2k+1} = \begin{pmatrix} sFs(2k+2) & cFs(2k+1) \\ cFs(2k+1) & sFs(2k) \end{pmatrix}, \tag{15.28}$$

где k – дискретная переменная, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Если мы заменим дискретную переменную k в матрицах (15.27) и (15.28) на непрерывную переменную x, мы получим две необычные матрицы, которые являются функциями непрерывной переменной x:

$$Q_0(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \tag{15.29}$$

$$Q_1(x)=\begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix}. \tag{15.30}$$

Ясно, что матрицы (15.29) и (15.30) являются обобщением Q-матрицы Фибоначчи (15.24) на непрерывную область.

Обратные «золотые» $Q-$матрицы. В главе 2 также были введены «обратные» $Q-$матрицы Фибоначчи:

$$Q^{-2k}=\begin{pmatrix} F_{2k-1} & -F_{2k} \\ -F_{2k} & F_{2k+1} \end{pmatrix} \quad Q^{-2k-1}=\begin{pmatrix} -F_{2k} & F_{2k+1} \\ F_{2k+1} & -F_{2k+2} \end{pmatrix}. \tag{15.31}$$

Используя (14.29), представим «обратные» $Q-$матрицы Фибоначчи (15.31) в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи (14.35), (14.36) в следующем виде:

$$Q_0^{-1}=\begin{pmatrix} cFs(2k-1) & -sFs(2k) \\ -sFs(2k) & cFs(2k+1) \end{pmatrix} \tag{15.32}$$

$$Q_1^{-1}=\begin{pmatrix} -sFs(2k) & cFs(2k+1) \\ cFs(2k+1) & -sFs(2k+2) \end{pmatrix}, \tag{15.33}$$

где k – дискретная переменная, $k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$.

Если мы заменим дискретную переменную k в матрицах (15.32) и (15.33) на непрерывную переменную x, мы получим две необычные матрицы, которые являются функциями непрерывной переменной x:

$$Q_0^{-1}(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x-1) & -sFs(2x) \\ -sFs(2x) & cFs(2x+1) \end{pmatrix} \tag{15.34}$$

$$Q_1^{-1}(x)=\begin{pmatrix} -sFs(2x) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & -sFs(2x+2) \end{pmatrix}. \tag{15.35}$$

Нетрудно доказать, что матрицы (15.34) и (15.35) являются «обратными» к матрицам (15.29) и (15.30), соответственно. Для этого достаточно перемножить матрицу (15.29) на (15.34) и затем матрицу (15.30) на (15.35) и убедиться, что результатом их умножения является единичная матрица $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Действительно, умножая матрицу (15.29) на (15.34), мы получим:

$$Q_0(x)\times Q_0^{-1}(x)=\begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x)\\ sFs(2x) & cFs(2x-1)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} cFs(2x-1) & -sFs(2x)\\ -sFs(2x) & cFs(2x+1)\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix} cFs(2x+1)cFs(2x-1)-\left[sFs(2x)\right]^2 & -cFs(2x+1)sFs(2x)+sFs(2x)cFs(2x+1)\\ sFs(2x)cFs(2x-1)-cFs(2x-1)sFs(2x) & -\left[sFs(2x)\right]^2+cFs(2x-1)cFs(2x+1)\end{pmatrix}. \quad (15.36)$$

Если теперь использовать тождества (14.49), то легко убедиться, что матрица (15.36) представляют собой единичную матрицу, то есть,

$$Q_0(x)\times Q_0^{-1}(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Таким же образом можно доказать, что

$$Q_1(x)\times Q_1^{-1}(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\ .$$

Из проведенных рассуждений вытекает, что матрицы $Q_0^{-1}(x)$ и $Q_1^{-1}(x)$ являются «обратными» матрицам $Q_0(x)$ и $Q_1(x)$, соответственно.

Детерминанты «золотых» $Q-$матриц. Вычислим теперь детерминанты «золотых» $Q-$матриц (15.29) и (15.30):

$$\det Q_0(x)=cFs(2x+1)cFs(2x-1)-\left[sFs(2x)\right]^2 \quad (15.37)$$

$$\det Q_1(x)=cFs(2x+2)cFs(2x)-\left[sFs(2x+1)\right]^2. \quad (15.38)$$

Сравним выражения (15.37) и (15.38) с тождествами (14.47). Так как тождества (14.47) справедливы для любых значений переменной x, в частности, для значения $2x$, то из (15.37), (15.38) и (14.47) вытекают следующие выражения для детерминантов матриц (15.29) и (15.30), которые справедливы для любого значения непрерывной переменной x:

$$\det Q_0(x)=+1 \quad (15.39)$$

$$\det Q_1(x) = -1. \tag{15.40}$$

Такой же вывод мы можем сделать и для «обратных» матриц (15.34), (15.35), то есть,

$$\det Q_0^{-1}(x) = +1 \tag{15.41}$$

$$\det Q_1^{-1}(x) = -1. \tag{15.42}$$

Таким образом, в результате проведенных рассуждений мы пришли к квадратным матрицам (15.29), (15.30), (15.34), (15.35), названных «золотыми» $Q-$матрицами [60]. Эти матрицы являются функциями непрерывной переменной x и обладают уникальными математическими свойствами (15.39)-(15.42).

Не вызывает никаких сомнений, что «золотые» матрицы (15.29), (15.30), (15.34), (15.35) эстетически совершенны и тогда, согласно Дираку, они должны проявить себя в теоретической физике. И «золотая» интерпретация специальной теории относительности, приведенная в статье [61], является этому безусловным подтверждением.

15.4. Преобразования Фибоначчи-Лоренца и «золотая» интерпретация специальной теории относительности

Является ли скорость света в вакууме физической константой? В 2005 г. произошло замечательное событие: исполнилось сто лет со дня опубликования в 1905 году Альбертом Эйнштейном (1879-1955) его специальной теории относительности (СТО). С момента появления этой теории и до настоящего времени не прекращается критика СТО и споры относительно её научного статуса. С одной стороны, критики неопровержимо доказывают несостоятельность СТО. С другой стороны, апологеты СТО с не меньшим упорством защищают эту теорию, обвиняя своих оппонентов в некомпетентности. Обе стороны приводят свои неотразимые аргументы. Основной спор, касающийся СТО, в основном, идёт относительно принципа постоянства скорости света в вакууме. В последние годы ряд ученых в области космологии выдвинули гипотезу, согласно которой для наблюдаемой материальной Вселенной ставится под сомнение постоянство фундаментальной величины, на которую опираются основные законы современной физики – скорости света с в вакууме.

По мнению группы учёных, возглавляемых физиком-теоретиком Полом Дэвисом (Paul Davis) из Университета Macquarie в Сиднее, скорость света c не является физической константой [95]. Согласно новой гипотезе, значение величины c скорости света в вакууме, которое сейчас считается постоянным параметром, с увеличением возраста Вселенной уменьшается. Новая гипотеза базируется на информации, собранной астрономом Джоном Веббом (John Webb). Он обнаружил, что характеристики света от квазара, удалённого от Земли приблизительно на 3,7 миллиона парсеков, не соответствуют ожидаемым. Как отмечают астрофизики, из этого наблюдения возможны два вывода – либо о непостоянстве скорости света, либо о переменной величине заряда электрона. Однако последнее предполагает нарушение принципа неуменьшения энтропии, т.е. второго начала термодинамики.

Поэтому учёные сделали заключение, что для нашей наблюдаемой материальной Вселенной, скорее всего, скорость света c в вакууме не является физической константой и уменьшается с увеличением времени.

О самоорганизации Вселенной. Другой фундаментальной идеей, которая может повлиять на СТО, является учет фактора самоорганизации Вселенной в процессе ее эволюции, начиная от Большого Взрыва. Согласно современным представлениям [96,97] в развитии нашей материальной Вселенной можно выделить ряд процессов самоорганизации и деградации:

1) исходный вакуум; 2) возникновение суперструн; 3) рождение частиц; 4) разделение вещества и излучения; 5) рождение Солнца, звезд, галактик; 6) возникновение цивилизации; 7) гибель Солнца; 8) гибель Вселенной.

Новые гипотезы в развитии СТО и теории эволюции Вселенной. В связи с вышеизложенным, в работе Алексея Стахова и Самуила Арансона [61] возникла идея пересмотреть СТО и теорию эволюции Вселенной на основе следующих идей и гипотез:

1. **Первая гипотеза** состоит в том, что скорость света c в вакууме в процессе эволюции, как для нашей материальной Вселенной, так и для гипотетической антиматериальной Вселенной, не является постоянной величиной и не равна эйнштейновской скорости света в вакууме

$$c_{эйн} = 3\times 10^8 \left[м.сек^{-1} \right] \text{ (более точно } c_{эйн} = 2.998\times 10^8 \left[м.сек^{-1} \right]\text{),}$$

используемой в СТО, хотя, априори, скорость c может быть и сколь угодно близка к $c_{эйн}$.

2. **Вторая идея** состоит в том, чтобы связать процессы самоорганизации Вселенной с «золотой пропорцией», которая с античных времен считается количественным выразителем гармонии Вселенной.

3. **Следующая идея** состоит в том, чтобы связать скорость света в вакууме c с некоторым параметром самоорганизации ψ по формуле:

$$c = c(\psi) = \bar{c}(\psi)\times c_0 . \qquad (15.43)$$

Здесь приняты следующие обозначения и терминология:

$c\left[м.сек^{-1} \right] \neq const$ – скорость света в вакууме;

$c_0\left[м.сек^{-1} \right] = const = \frac{c_{эйн}}{\Phi}$ - некоторый нормирующий множитель;

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ - золотая пропорция (безразмерная величина);

$\psi(-\infty < \psi < +\infty)$ - параметр самоорганизации (безразмерный коэффициент);

$\bar{c} = \bar{c}(\psi) \neq const$ - собственная нормированная фибоначчиевая скорость света в вакууме (безразмерная величина).

Вид функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ будет конкретизирован ниже.

4. В работе [61] безразмерный параметр самоорганизации ψ связывается со временем $T\left[млд.\ лет \right]$, отсчитываемый от момента «Большого Взрыва» $(T = 0)$, по формуле:

$$T = a\times\psi, \qquad (15.44)$$

где $a[\text{млд. лет}]$ – коэффициент пропорциональности. Как будет показано ниже, с учётом периода «Тёмных веков» (0.2 [млрд. лет]) и соответствующему этому периоду значению $\psi = 2$, получаем, что величина $a = 0.1[\text{млд. лет}]$. Но тогда для современного времени $T = 13.7[\text{млд. лет}]$ существования нашей материальной Вселенной, из формулы (15.44) получаем «Вселенскую константу»

$$\psi = \frac{13.7}{0.1} = 137\,. \tag{15.45}$$

Преобразования Лоренца. Как известно, СТО основывается на двух принципах: принципе относительности и принципе независимости скорости света в вакууме от скорости источника. Классические преобразования Галилея несовместимы с постулатами СТО. Поэтому в основу СТО были положены другие преобразованиями, названные преобразованиями Лоренца, названные в честь их первооткрывателя — нидерландского физика Х.А. Лоренца (1853–1928), который вывел их, чтобы устранить противоречия между электродинамикой Максвелла и механикой Ньютона. Преобразования Лоренца были впервые опубликованы в 1904 г., но в то время их форма была несовершенна. К современному, полностью самосогласованному виду их привёл французский математик А. Пуанкаре (1854-1912).

Преобразования Лоренца устанавливают связь между пространственными координатами (x_1, x_2, x_3) и моментом времени t события, наблюдаемого в инерциальной системе отсчёта (ИСО) $K = (x_0 = ct, x_1, x_2, x_3)$, и пространственными координатами $(x_0' = ct', x_1', x_2', x_3')$ и моментом времени t' этого же события, наблюдаемого в другой ИСО $K' = (x_0' = ct', x_1', x_2', x_3')$.

Здесь $c[\text{м.сек}^{-1}]$ - скорость света в вакууме, $t[\text{сек}]$ – время, x_0, x_1, x_2, x_3 - пространственные координаты, имеющие размерность [м]. Для случая, когда ИСО K' движется относительно ИСО K со скоростью $v[\text{м.сек}^{-1}]$ вдоль оси x_1, преобразования Лоренца имеют вид [98]:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) & 0 & 0 \\ sh(\theta) & ch(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \qquad (15.46)$$

где угол $\theta\left(-\infty < \theta < +\infty\right)$ называется углом гиперболического поворота, при этом

$$sh\left(\theta\right) = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad ch(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad . \qquad (15.47)$$

Четырёхмерное пространство R_1^4 с координатной системой $K = \left(x_0 = ct, x_1, x_2, x_3\right)$ соответствует знакопеременной метрике

$$\left(ds\right)^2 = \left(dx_0\right)^2 - \left(dx_1\right)^2 - \left(dx_2\right)^2 - \left(dx_3\right)^2, \qquad 15.48)$$

где ds – элемент дуги.

Пространство R_1^4 называется четырёхмерным пространством Минковского, а метрика (15.45) – метрикой Минковского [98] .

Рассмотрим двумерные преобразования Лоренца

$$\begin{pmatrix} x_0 = ct \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\left(\theta\right) & sh\left(\theta\right) \\ sh\left(\theta\right) & ch\left(\theta\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} , \qquad (15.49)$$

где $sh\left(\theta\right), ch\left(\theta\right)$ удовлетворяют условию (15.47).

Заметим, что детерминант матрицы

$$A = \begin{pmatrix} ch(\theta) & sh(\theta) \\ sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}, \qquad (15.50)$$

используемой в преобразования (15.49), равен $\det A = ch^2\left(\theta\right) - sh^2\left(\theta\right) = 1$, а метрика Минковского (15.48) при этом имеет вид:

$$\left(ds\right)^2 = \left(dx_0\right)^2 - \left(dx_1\right)^2. \qquad (15.51)$$

Преобразования (15.49) названы в [98] собственными двумерными преобразованиями Лоренца.

Собственные двумерные преобразования Фибоначчи-Лоренца. В работе [61] «золотая пропорция» вводится в СТО через рассмотренные выше «золотые» $Q-$матрицы.

Обратимся вновь к формулам (15.47). Назовём величину $\bar{v} = \dfrac{v}{c}$ нормированной относительной скоростью и тогда из соотношений (15.47) вытекает следующее выражение для $\bar{v}$:

$$\bar{v} = \frac{sh(\theta)}{ch(\theta)} = th(\theta),\ \left|\bar{v}\right| < 1,\ -\infty < \theta < +\infty. \tag{15.52}$$

Перепишем также преобразования Лоренца (15.46) в виде:

$$\begin{cases} (ct) = ch(\theta)(ct') + sh(\theta)x_1' \\ x_1 = sh(\theta)(ct') + ch(\theta)x_1' \end{cases} \tag{15.53}$$

Предположим теперь, что в соотношениях (15.53) параметр $c \neq const$, а определяется соотношением (15.43).

Обозначим через $\xi = c_0 t,\ \xi' = ct' -$ величины , имеющие размерность [м].

Тогда (15.53) может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \bar{c}(\psi)\xi = \bar{c}(\psi)ch(\theta)\xi' + sh(\theta)x_1' \\ x_1 = \bar{c}(\psi)sh(\theta)\xi' + ch(\theta)x_1' \end{cases} \tag{15.54}$$

Разделим верхнее выражение в (15.54) на $\bar{c}(\psi)$, тогда получим преобразование вида:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\theta) & \dfrac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} \\ \bar{c}(\psi)sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi' \\ x_1' \end{pmatrix} \tag{15.55}$$

Преобразованию (15.55) соответствует матрица вида

$$\bar{\Omega}(\theta,\psi) = \begin{pmatrix} ch(\theta) & \dfrac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)} \\ \bar{c}(\psi)sh(\theta) & ch(\theta) \end{pmatrix}, \tag{15.56}$$

зависимая от двух параметров θ и ψ, где ψ является аргументом пока что неизвестной функции $\bar{c}(\psi)$.

Для того, чтобы конкретизировать функцию $\bar{c}(\psi)$ и найти связь между θ и ψ, приравняем матрицу (15.56) поэлементно к «золотой» матрице

$$\Omega(\psi)=\begin{pmatrix} cFs(\psi-1) & sFs(\psi-2) \\ sFs(\psi) & cFs(\psi-1) \end{pmatrix}, \quad \det\Omega(\psi)=1, \tag{15.57}$$

то есть, введём в рассмотрение матричное уравнение $\overline{\Omega}(\theta,\psi)=\Omega(\psi)$, где элементами матрицы (15.57) являются симметричные гиперболические функции Фибоначчи sFs, cFs вида (14.35), (14.36).

Матрицу (15.57) назовём собственной двумерной матрицей Фибоначчи – Лоренца, а преобразование

$$\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cFs(\psi-1) & sFs(\psi-2) \\ sFs(\psi) & cFs(\psi-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi' \\ x_1' \end{pmatrix} \tag{15.58}$$

собственным двумерным преобразованием Фибоначчи-Лоренца

Осуществляя поэлементное сравнение матриц (15.57) и (15.55), получим следующие выражения:

$$\begin{cases} ch(\theta)=cFs(\psi-1) \\ \dfrac{sh(\theta)}{\bar{c}(\psi)}=sFs(\psi-2) \\ \bar{c}(\psi)sh(\theta)=sFs(\psi) \end{cases}, \tag{15.59}$$

откуда вытекают соотношения:

$$\begin{cases} ch(\theta)=cFs(\psi-1) \\ sh(\theta)=\bar{c}(\psi)sFs(\psi-2)=\dfrac{sFs(\psi)}{\bar{c}(\psi)} \end{cases} \tag{15.60}$$

Из второго соотношения в формуле (15.60) получаем, что нормированная фибоначчиевая скорость света $\bar{c}(\psi)$ в вакууме для двумерного собственного преобразования Фибоначчи-Лоренца имеет вид:

$$\bar{c}(\psi)=\sqrt{\frac{sFs(\psi)}{sFs(\psi-2)}}. \tag{15.61}$$

Используя формулу для гиперболического синуса Фибоначчи, задаваемую (14.35), мы можем представить выражение (15.61) в виде:

$$\bar{c}(\psi)=\sqrt{\frac{\Phi^{\psi}-\Phi^{-\psi}}{\Phi^{\psi-2}-\Phi^{-(\psi-2)}}}. \tag{15.62}$$

Отметим две «бифуркационные» точки, соответствующие различным значениям ψ. Первая «бифуркационная» точка соответствует значению $\psi = 0$. В этой точке числитель подкоренного выражения функции (15.62) становится равным нулю, и сама функция (15.62) становится равной нулю, то есть, $\bar{c}(0) = 0$.

Вторая «бифуркационная» точка соответствует значению $\psi = 2$. В этой точке знаменатель подкоренного выражения функции (15.62) становится равным нулю, а функция (15.62) становится равной бесконечности, то есть, $\bar{c}(2) = \infty$.

Для отрицательных значений ψ, функция (15.62) принимает вид:

$$\bar{c}(-\psi) = \sqrt{\frac{\Phi^{-\psi} - \Phi^{\psi}}{\Phi^{-\psi-2} - \Phi^{\psi+2}}} = \sqrt{\frac{\Phi^{\psi} - \Phi^{-\psi}}{\Phi^{\psi+2} - \Phi^{-(\psi+2)}}} \qquad (15.63)$$

Ясно, что по мере увеличения ψ по абсолютной величине, то есть, при устремлении параметра ψ к $-\infty$, функция (15.63) будет возрастать, ее пределом является величина

$$\bar{c}(-\infty) = \sqrt{\frac{1}{\Phi^2}} = \frac{1}{\Phi}. \qquad (15.64)$$

Рассмотрим теперь поведение функции (15.62) по мере увеличения параметра ψ в сторону положительных значений ψ. Ясно, что при $0 < \psi < 2$ значение подкоренного выражения функции (15.62) будет отрицательным и, следовательно, значение функции (15.62) будет мнимым. Как установлено выше, при $\psi = 2$ $\bar{c}(2) = \infty$. По мере дальнейшего увеличения ψ значение функции (15.62) будет уменьшаться до некоторого предельного значения

$$\bar{c}(+\infty) = \sqrt{\frac{1}{\Phi^{-2}}} = \sqrt{\Phi^2} = \Phi. \qquad (15.65)$$

График функции (15.62) представлен на Рис.15.12.

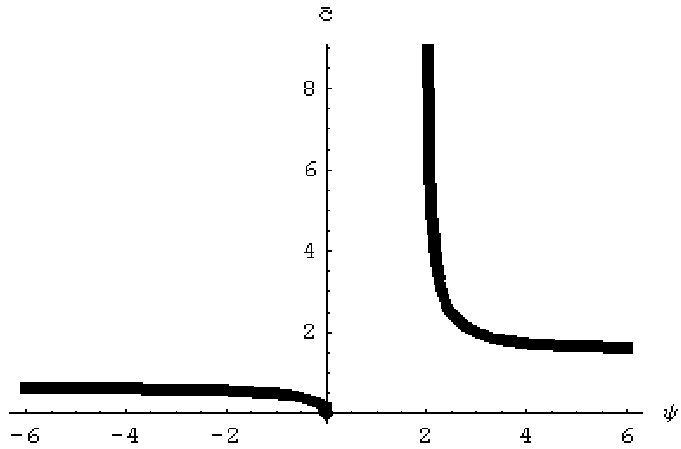


Рис.15.12. График функции $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$

График функции $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$ имеет три асимптоты, из которых две - для ветви $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$ при $2<\psi<+\infty$ (вертикальная асимптота $\psi=2$ и горизонтальная асимптота $\bar{c}=\Phi\approx 1.61803$) и одна – для ветви $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$ при $-\infty<\psi<0$ (горизонтальная асимптота $\bar{c}=\Phi^{-1}\approx 0.61803$), где Φ - «золотая пропорция».

Космологическая интерпретация. Как это не покажется парадоксальным, но график функции $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$, задающей изменение собственной нормированной фибоначчиевой скорости света в вакууме в зависимости от параметра самоорганизации ψ (Рис.15.12), качественно согласуется с современными представлениями об эволюции нашей «материальной» Вселенной от ее рождения $(\psi=0)$ («Большой Взрыв») до настоящего времени и прогнозами, касающимися ее будущего развития. Кроме того, график $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$ (Рис.15.12) даёт информацию не только о нашей «материальной» Вселенной ($0<\psi<+\infty$), но и информацию об одновременно родившейся с ней после «Большого Взрыва» гипотетической «антиматериальной» Вселенной при $0>\psi>-\infty$ от её рождения $(\psi=0)$ («Большой Взрыв») и прогнозами её будущего развития при $\psi\to-\infty$.

На Рис.15.12 для «материальной» Вселенной мы видим две бифуркационные точки: $\psi = 0$ и $\psi = 2$. Мы будем использовать космологическую интерпретацию, чтобы дать описание явлений, вытекающих из качественного и количественного анализа графика функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ (Рис.15.12) путем сравнения результатов этого анализа с данными современной космологии [99-101] и принимая во внимание изменение реальной скорости света в вакууме $c = c(T)$ во времени T, начиная с Большого Взрыва $(T = 0)$ до настоящего времени и в будущем.

Для определенности, согласуем шкалы параметров T и ψ с помощью формулы:

$$T = a \times \psi, \tag{15.66}$$

где ψ - безразмерный параметр самоорганизации, a - некоторый коэффициент, который может быть вычислен с использованием данных современной космологии.

Первую бифуркационную точку $\psi = 0$ для «материальной» Вселенной ($0 < \psi < +\infty$) мы будем относить к «Большому Взрыву». С другой стороны, период между бифуркационными точками $\psi = 0$ и $\psi = 2$ может быть отнесен к явлению, которое в современной космологии называется «темными веками».

При этом вторая бифуркация $\psi = 2$ относится к моменту перехода от «темных веков» к «светлому периоду». Согласно современным космологическим представлениям [99-101], долгое время Вселенная, остыв после Большого Взрыва, оставалась темной и холодной - ничто ее не освещало. Этот период, названный «Темными веками», закончился, когда сформировались звезды. Очень ранний возраст Вселенной, к которому относят начало формирования первого поколения звезд, впервые осветивших ее спустя всего 0.2 [млрд. лет] после «Большого Взрыва», привел к идее о том, что таинственный тип невидимой материи собрал газ вместе вскоре после рождения Вселенной, позволив сформироваться первым звездам и галактикам.

Если интерпретировать для «материальной» Вселенной график, изображённый на Рис.15.12, в космологическом плане, как эволюцию собственной нормированной фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ в вакууме при изменении параметра самоорганизации ψ от $\psi=0$ до $\psi=+\infty$, то наблюдаемую картину изменения нормированной фибоначчиевой скорости света можно разбить на несколько периодов.

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено отдельно, то для удобства восприятия и сокращения текста вместо термина «собственная нормированная фибоначчиевая скорость света $\bar{c}$ в вакууме» будем употреблять термин «фибоначчиевая скорость света $\bar{c}$ ».

Первая бифуркация. Большой Взрыв $(\psi=0)$.

Точка $\psi=0$ на Рис.15.12 является первым бифуркационным значением для «фибоначчиевой скорости света $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$.

Согласно современным космологическим данным [99-101], «Большой Взрыв» возник 13.7 миллиардов лет назад, что соответствует возрасту нашей материальной Вселенной.

После «Большого Взрыва» материальная Вселенная остается «темной», но очень горячей и плотной. Но как только эта Вселенная начала расширяться, ее температура начала уменьшаться. Данные взяты из [99-101].

«Темные века» $(0<\psi<2)$. В этот период у фибоначчиевой скорости света $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$ подкоренное выражение в формуле (15.63) является отрицательным. Поэтому фибоначчиевая скорость света $\bar{c}=\bar{c}(\psi)$, согласно формуле (15.63), есть чисто мнимая функция.

Согласно данным современной космологии, Вселенная быстро охлаждалась после «Большого Взрыва» и в течение длительного времени оставалась «темной» и «холодной» и ничто ее не освещало. Этот период, называемый «Темными Веками», закончился, когда начали формироваться первые звёзды, осветившие Вселенную примерно через 0.2 миллиарда лет после «Большого Взрыва». Эта гипотеза привела к идее, что в этот период загадочный вид невидимой материи, собранный вместе в виде газа, вскоре после возникновения Вселенной привел к формированию первых звезд и галактик. Данные взяты из [99-101].

Вторая бифуркация. Переход от «Темных Веков» к «Светлому Периоду». Точка $\psi = 2$ является вторым бифуркационным значением для фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$. Слева от точки $\psi = 2$ значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются мнимыми, но справа от точки $\psi = 2$ значения $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ являются вещественными и положительными, стремящимися к “$+\infty$” для $\psi \to 2+0$.

Эта вторая бифуркация связана с тем, что в момент, когда параметр самоорганизации становится равным $\psi = 2$, для фибоначчиевой скорости света $\bar{c}$ осуществляется переход от чисто мнимой величины к бесконечно большой величине.

Современный период $(2 < \psi < +\infty)$**.** Этот период характеризуется стабильностью существования вещественной фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi) > \Phi$ (Φ - золотая пропорция).

После некоторого периода релаксации (переходного периода) от значения параметра самоорганизации $\psi = 2$, соответствующего $T = 0.2[\textit{млд. лет}]$, до значения параметра самоорганизации $\psi = \psi_{наст}$, соответствующему настоящему времени $T = 13.7[\textit{млд. лет}]$ существования Вселенной, фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ уменьшается от бесконечно большого значения до величины, близкой к золотой пропорции $\Phi \approx 1.61803.$). При $\psi \to +\infty$ коллапса не наблюдается, так как $\bar{c} \to \Phi$.

Космологическая интерпретация эволюции «антиматериальной» Вселенной. На Рис.15.12 «антиматериальная» Вселенная соответствует параметру самоорганизации $\psi < 0$ (левая ветвь графика функции $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$). Для этой Вселенной стрела времени T повернута в отрицательную сторону $(T < 0)$ по сравнению с «материальной» Вселенной, для которой $\psi > 0$, и, следовательно, $T > 0$, где $T[\textit{млд. лет}]$ – время, отсчитываемое с момента «Большого Взрыва» $(T = 0)$.

Для фибоначчиевой скорости света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ «антиматериальной» Вселенной имеется только одно бифуркационное значение - точка $\psi = 0$, соответствующая «Большому Взрыву», при этом $\lim_{\psi \to 0-0} \bar{c}(\psi) = 0$. Затем, по мере эволюции этой Вселенной, то есть, при дальнейшем увеличении параметра самоорганизации ψ (то есть, и времени T) в отрицательном направлении, фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$ возрастает и при дальнейшем увеличении ψ (то есть, и времени T) в отрицательном направлении фибоначчиевая скорость света $\bar{c} = \bar{c}(\psi)$) медленно стремится снизу к предельному значению $\frac{1}{\Phi}$, где Φ - золотая пропорция.

Комментарий. Конечно, изложенная выше «золотая» интерпретация СТО и новый взгляд на теорию Большого Взрыва выглядят скорее, как «научная фантастика», чем научное исследование. Но наука очень часто начинается с «научной фантастики». Кстати, гипотеза Большого Взрыва – также относится скорее к «научной фантастике», чем, собственно, к науке. Тем не менее, научный мир поверил в эту «фантастическую гипотезу» и был даже построен Большой адронный коллайдер для проверки гипотезы Большого Взрыва и других экзотических теорий современной физики.

Глава 16

ТЕОРИЯ ЛЯМБДА-ЧИСЕЛ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

16.1. Лямбда-числа Фибоначчи

Немного истории. Современная «математика гармонии» [47] является активно развивающимся направлением современной науки и математики. В конце 20-го и начале 21-го вв. сразу несколько исследователей из разных стран – аргентинский математик Вера Шпинадель [29], французский математик египетского происхождения Мидхат Газале [30], американский математик Джей Каппрафф [34], российский исследователь Александр Татаренко [62], армянский философ и физик Грант Аракелян [63], российский исследователь Виктор Шенягин [64], украинский физик Николай Косинов [65], украинско-канадский исследователь Алексей Стахов [66], испанские математики Falcon Sergio, Plaza Angel [67] и др. независимо друг от друга начали изучать новый класс рекуррентных числовых последовательностей, которые являются обобщением классических чисел Фибоначчи. Эти числовые последовательности, названные в [66, 68-70] λ-числами Фибоначчи, привели к открытию нового класса математических констант, названных аргентинским математиком Верой Шпиналель «металлическими пропорциями» [29]. Количество металлических пропорций теоретически бесконечно, а их частным случаем является классическая золотая пропорция. В книге Мидхата Газале [30], а позже в работе Алексея Стахова [66] были введены так называемые «формулы Газале», которые задают аналитическое выражение для λ-чисел Фибоначчи и λ-чисел Люка через металлические пропорции. С использованием формул Газале Алексей Стахов в 2006 г. разработал гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка [66]. Используя эти функции, Алексей Стахов и Самуил Арансон пришли к оригинальному решению 4-й проблемы Гильберта [68-70].

Интерес большого количества исследователей из разных стран (США, Аргентина, Франция, Россия, Армения, Украина) не может быть случайным. Это означает, что «проблема созрела». И ученые разных стран начали ее изучать независимо друг от друга.

Настоящая глава является популярным введением в теорию λ-чисел Фибоначчи и λ-чисел Люка и гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка. Эта теория приводит к введению новых математических констант, которые являются обобщением классической «золотой пропорции», и новых «элементарных функций», которые являются обобщением рассмотренных выше гиперболических функций Фибоначчи и Люка. Эти математические результаты представляют фундаментальный интерес как для математики в целом (в частности, для гиперболической геометрии), так и для всего теоретического естествознания. Приведенное в главе 17 оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта лишь подчеркивает важность полученных результатов для математики.

Рекуррентное соотношение для λ-чисел Фибоначчи. Зададимся действительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \qquad (16.1)$$

Рекуррентное соотношение (16.1) «генерирует» бесконечное количество новых числовых последовательностей, так как каждому $\lambda > 0$ соответствует своя числовая последовательность. Важно подчеркнуть, что их частными случаями являются некоторые числовые последовательности, получившие широкую известность в современной науке.

В частности, для случая $\lambda = 1$ рекуррентное соотношение (16.1) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_1(n+2) = F_1(n+1) + F_1(n); \quad F_1(0) = 0, F_1(1) = 1, \qquad (16.2)$$

которое задает числа Фибоначчи: $0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$. Основываясь на этом факте, числовые последовательности, генерируемые рекуррентным соотношением (16.1), были названы λ-числами Фибоначчи [66, 68-70].

При $\lambda=2$ рекуррентное соотношение (16.1) сводится к рекуррентному соотношению

$$F_2(n+2)=2F_2(n+1)+F_2(n);\quad F_2(0)=0,\, F_2(1)=1, \tag{16.3}$$

которое задает так называемые числа Пелля: $0,1,2,5,12,29,70,\ldots$

При $\lambda=3,4$ рекуррентное соотношение (15.1) сводится к следующим рекуррентным соотношениям:

$$F_3(n+2)=3F_3(n+1)+F_3(n);\quad F_3(0)=0,\, F_3(1)=1 \tag{16.4}$$

$$F_4(n+2)=4F_4(n+1)+F_4(n);\quad F_2(0)=0,\, F_2(1)=1. \tag{16.5}$$

Лямбда-числа Фибоначчи обладают многими замечательными свойствами, подобными свойствам классических чисел Фибоначчи. Доказано, что λ-числа Фибоначчи так же, как классические числа Фибоначчи, могут быть «расширены» в сторону отрицательных значений дискретной переменной n.

В Табл.16.1 приведены четыре расширенные последовательности λ-чисел Фибоначчи, соответствующие значениям $\lambda=1,2,3,4$.

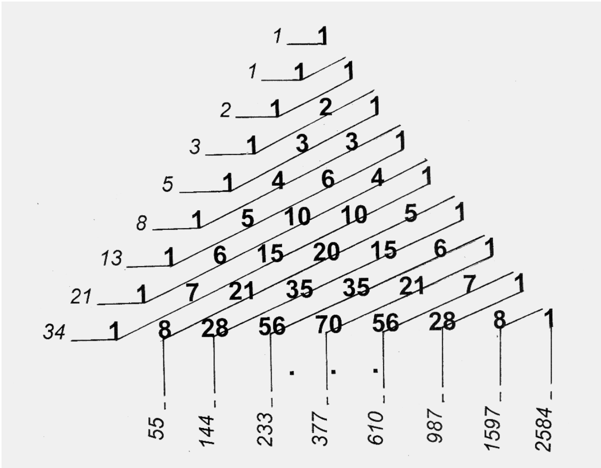
Таблица 15.1. Расширенные λ-числа Фибоначчи ($\lambda=1,2,3,4$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_1(-n)$	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21
$F_2(n)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408
$F_2(-n)$	0	1	–2	5	–12	29	–70	169	–408
$F_3(n)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927
$F_3(-n)$	0	1	–3	10	–33	109	–360	1199	–3927
$F_4(n)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184
$F_4(-n)$	0	1	–4	17	–72	305	–1292	5473	–23184

16.2. Представление λ-чисел Фибоначчи через биномиальные коэффициенты

В Главе 2 мы рассмотрели «диагональные суммы» треугольника Паскаля, которые совпадают с классическими числами Фибоначчи (Табл.16.2)

Таблица 15.2. Диагональные суммы треугольника Паскаля



Представим теперь треугольник Паскаля из Табл.16.2 в виде прямоугольного треугольника, как показано в Табл.16.3.

Таблица 16.3. Прямоугольный треугольник Паскаля

(a)

	0	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
0	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	$\cdots$	C_n^0	$\cdots$
1		C_1^1	C_2^1	C_3^1	$\cdots$	C_n^1	$\cdots$
2			C_2^2	C_3^2	$\cdots$	C_n^2	$\cdots$
3				C_3^3	$\cdots$	C_n^3	$\cdots$
$\vdots$						$\vdots$	$\vdots$
n						C_n^n	$\cdots$

(b)

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1		1	2	3	4	5	6
2			1	3	6	10	15
3				1	4	10	20
4					1	5	15
5						1	6
6							1
	1	2	4	8	16	32	64

Строки треугольника Паскаля будем нумеровать сверху вниз, причем верхнюю строку, состоящую из одних единиц, будем считать нулевой. Столбцы треугольника будем нумеровать слева направо, причем левый крайний столбец, состоящий из одной единицы ($C_0^0 = 1$) будем считать нулевым столбцом.

Известно, что сумма биномиальных коэффициентов, составляющих n-й столбец треугольника Паскаля, равна:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n \tag{16.6}$$

Теперь сдвинем каждую строку треугольника Паскаля на один столбец вправо относительно предыдущей строки. В результате получим следующую таблицу биномиальных коэффициентов, которую назовем «деформированным» треугольником Паскаля (Табл.16.4).

Таблица 15.4. «Деформированный» треугольник Паскаля

(a)

	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	$2m$	$2m+1$
0	C_0^0	C_1^0	C_2^0	C_3^0	C_4^0	C_5^0	$\cdots$	C_{2m}^0	C_{2m+1}^0
1			C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1	$\cdots$	C_{2m-1}^1	C_{2m}^1
2					C_2^2	C_3^2	$\cdots$	C_{2m-2}^2	C_{2m-1}^2
								$\vdots$	$\vdots$
m								C_m^m	C_{m+1}^m

(b)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1			1	2	3	4	5	6	7	8	9
2					1	3	6	10	15	21	28
3							1	4	10	20	35
4									1	5	15
5											1
	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты по столбцам в «деформированном» треугольника Паскаля (Табл.16.4-a,b), то мы неожиданно придем к числам Фибоначчи! Этот результат впервые был получен в книге «Математическое открытие» американского математика Джорджа Пойа [102].

Из Табл.16.4 нетрудно установить, что сумма биномиальных коэффициентов, входящих в n-й столбец «деформированного» треугольника Паскаля, равна числу Фибоначчи F_{n+1}. Пусть $n = 2m + r$, где m-частное, а r - остаток от деления n на 2. Тогда

$$F_{n+1} = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \ldots + C_{m+r}^m . \tag{16.7}$$

В частности, согласно (16.7) начальные числа Фибоначчи могут быть выражены через биномиальные коэффициенты следующим образом:

$$\begin{aligned}
&F_1 = 1 = C_0^0 \\
&F_2 = 1 = C_1^0 \\
&F_3 = 2 = 1 + 1 = C_2^0 + C_1^1 \\
&F_4 = 3 = 1 + 2 = C_3^0 + C_2^1 \\
&F_5 = 5 = 1 + 3 + 1 = C_4^0 + C_3^1 + C_2^2 \\
&F_6 = 8 = 1 + 4 + 3 = C_5^0 + C_4^1 + C_3^2 . \\
&F_7 = 13 = 1 + 5 + 6 + 1 = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3 ; \\
&F_8 = 21 = 1 + 6 + 10 + 4 = C_7^0 + C_6^1 + C_5^2 + C_4^3 .
\end{aligned} \tag{16.8}$$

Вычислим начальные λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$, воспользовавшись рекуррентным соотношением (15.1):

$$\begin{aligned}
&F_\lambda(1) = 1 \\
&F_\lambda(2) = \lambda \\
&F_\lambda(3) = \lambda^2 + 1 \\
&F_\lambda(4) = \lambda^3 + 2\lambda \\
&F_\lambda(5) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 \\
&F_\lambda(6) = \lambda^5 + 4\lambda^3 + 3\lambda \\
&F_\lambda(7) = \lambda^6 + 5\lambda^4 + 6\lambda^2 + 1 \\
&F_\lambda(8) = \lambda^7 + 6\lambda^5 + 10\lambda^3 + 4\lambda .
\end{aligned} \tag{16.9}$$

А теперь сравним выражения (16.8) и (16.9). Для сравнения сведем результаты (16.8) и (16.9) в Табл.16.5.

Таблица 16.5. Сравнение чисел Фибоначчи и λ-чисел Фибоначчи

n	F_n	$F_\lambda(n)$
1	$F_1=1=C_0^0$	$F_\lambda(1)=1=C_0^0$
2	$F_2=1=C_1^0$	$F_\lambda(2)=\lambda=C_1^0\lambda$
3	$F_3=2=1+1=C_2^0+C_1^1$	$F_\lambda(3)=\lambda^2+1=C_2^0\lambda^2+C_1^1$
4	$F_4=3=1+2=C_3^0+C_2^1$	$F_\lambda(4)=\lambda^3+2\lambda=C_3^0\lambda^3+C_2^1\lambda$
5	$F_5=5=1+3+1=C_4^0+C_3^1+C_2^2$	$F_\lambda(5)=\lambda^4+3\lambda^2+1=C_4^0\lambda^4+C_3^1\lambda^2+C_2^2$
6	$F_6=8=1+4+3=C_5^0+C_4^1+C_3^2$	$F_\lambda(6)=\lambda^5+4\lambda^3+3\lambda=C_5^0\lambda^5+C_4^1\lambda^3+C_3^2\lambda$
7	$F_7=13=1+5+6+1=C_6^0+C_5^1+C_4^2+C_3^3$	$F_\lambda(7)=\lambda^6+5\lambda^4+6\lambda^2+1=C_6^0\lambda^6+C_5^1\lambda^4+C_4^2\lambda^2+C_3^3$
8	$F_8=21=1+6+10+4=C_7^0+C_6^1+C_5^2+C_4^3$	$F_\lambda(8)=\lambda^7+6\lambda^5+10\lambda^3+4\lambda=C_7^0\lambda^7+C_6^1\lambda^5+C_5^2\lambda^3+C_4^3\lambda$

Из сравнения представлений чисел Фибоначчи в виде сумм биномиальных коэффициентов (16.8) с представлениями λ-чисел Фибоначчи в виде суммы степеней λ (16.9) вытекает неожиданный вывод: коэффициенты при степенях числа λ в выражениях (16.9) в точности совпадают с биномиальными коэффициентами в соответствующих представлениях чисел Фибоначчи (16.8).

Из Табл.16.5 вытекает, что при заданном $\lambda>0$ существует простой алгоритм получения аналитической формулы для любого λ-числа Фибоначчи в виде суммы степеней числа λ, взятых с биномиальными коэффициентами из «деформированного» треугольника Паскаля (Табл.16.4). Общее правило получения такой формулы состоит в следующем. Для получения аналитической формулы для λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n+1)$ используется n-й столбец «деформированного» треугольника Паскаля (Табл.16.4). В этом столбце выделяются биномиальные коэффициенты $C_n^0, C_{n-1}^1, C_{n-2}^2, C_{n-3}^3, \ldots$, которые используются в качестве коэффициентов при следующих степенях числа λ: $\lambda^n, \lambda^{n-2}, \lambda^{n-4}, \lambda^{n-6}, \ldots$.

В качестве примера рассмотрим получение формулы для числа $F_\lambda(11)=F_\lambda(10+1)$. Поскольку в данном случае $n=10$, то используется 10-й столбец Табл.16.4-b), в котором содержатся следующие биномиальные коэффициенты:

$$C_{10}^0=1, C_9^1=9, C_8^2=28, C_7^3=35, C_6^4=15, C_4^4=1\,. \tag{16.10}$$

Эти биномиальные коэффициенты умножаются на следующие степени числа λ:

$$\lambda^{10}, \lambda^8, \lambda^6, \lambda^4, \lambda^2, \lambda^0. \tag{16.11}$$

В результате получаем аналитическое выражение для λ-числа Фибоначчи:

$$F_\lambda(11) = \lambda^{10} + 9\lambda^8 + 28\lambda^6 + 35\lambda^4 + 15\lambda^2 + 1. \tag{16.12}$$

Используя (16.12), нетрудно подсчитать, что при $\lambda = 1$ «диагональная сумма» (16.12) равна числу Фибоначчи

$$F_{11} = 1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1 = 89,$$

а при $\lambda = 2$ - числу Пелля

$$P_{11} = 2^{10} + 9\times 2^8 + 28\times 2^6 + 35\times 2^4 + 15\times 2^2 + 1 = 4287.$$

Выше мы рассматривали λ-числа Фибоначчи, соответствующие целочисленным значениям $\lambda > 0$. Однако, число λ может быть и дробным. В Табл.16.6 приведены значения λ-чисел Фибоначчи, соответствующие дробным значениям $\lambda = 0.1; 0.2; 0.5$.

Таблица 16.6. Расширенные λ-числа Фибоначчи для дробных значений λ ($\lambda = 0.1; 0.2; 0.5$)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_\lambda(n)$	0	1	λ	λ^2+1	$\lambda^3+2\lambda$	$\lambda^4+3\lambda^2+1$	$\lambda^5+4\lambda^3+3\lambda$	$\lambda^6+5\lambda^4+6\lambda^2+1$	$\lambda^7+6\lambda^5+10\lambda^3+4\lambda$
$F_\lambda(-n)$	0	1	$-\lambda$	λ^2+1	$-(\lambda^3+2\lambda)$	$\lambda^4+3\lambda^2+1$	$-(\lambda^5+4\lambda^3+3\lambda)$	$\lambda^6+5\lambda^4+6\lambda^2+1$	$-(\lambda^7+6\lambda^5+10\lambda^3+4\lambda)$
$F_{\lambda=0.1}(n)$	0	1	0.1	1.01	0.201	1.0301	0.30401	1.060501	0.4100601
$F_{-\lambda=-0.1}(-n)$	0	1	−0.1	1.01	−0.201	1.0301	−0.30401	1.060501	−0.4100601
$F_{\lambda=0.2}(n)$	0	1	0.2	1.04	0.408	1.1216	0.63232	1.248064	0.883138
$F_{-\lambda=-0.2}(-n)$	0	1	−0.2	1.04	−0.408	1.1216	−0.63232	1.248064	−0.8819328
$F_{\lambda=0.5}(n)$	0	1	0.5	1.25	1.125	1.875	2.0625	1.8691408	2.9970703
$F_4(-n)$	0	1	−0.5	1.25	−1.125	1.875	−2.0625	1.8691408	−2.9970703

16.3. Формула Кассини для λ-чисел Фибоначчи

Напомним, что формула Кассини

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}, \tag{16.13}$$

связывающая три соседних числа Фибоначчи F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, является одним из наиболее замечательных тождеств для чисел Фибоначчи.

Оказывается, что такое свойство присуще и λ-числам Фибоначчи:

$$F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1} \qquad (16.14)$$

Докажем это свойство индукцией по n. При $n=1$ λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n-1), F_\lambda(n), F_\lambda(n+1)$ в формуле (16.8) согласно (16.9) принимают следующие значения: $F_\lambda(0)=0, F_\lambda(1)=1, F_\lambda(2)=\lambda$, откуда вытекает справедливость тождества (16.14) для случая $n=1$:

$$(1)^2 - 0\times1 = (1)^2. \qquad (16.15)$$

Основание индукции доказано.

Сделаем следующее индуктивное предположение. Предположим, что тождество (16.14) справедливо для любого заданного целого n и докажем, что из этого индуктивного предположения вытекает его справдливость и для целого $n+1$.

Докажем, что, если выполняется тождество (16.14) для заданного целого n, то тождество

$$F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda(n)F_\lambda(n+2) = (-1)^{n+1} \qquad (16.16)$$

также выполняется.

Для этого представим левую часть тождества (16.16) в виде:

$$\begin{aligned}
&F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda(n)F_\lambda(n+2) = F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda(n)\left[F_\lambda(n) + \lambda F_\lambda(n+1)\right] = \\
&F_\lambda^2(n+1) - F_\lambda^2(n) - \lambda F_\lambda(n)F_\lambda(n+1) = F_\lambda(n+1)\left[F_\lambda(n+1) - \lambda F_\lambda(n)\right] = \\
&F_\lambda(n+1)F_\lambda(n-1) - F_\lambda^2(n) = -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}.
\end{aligned} \qquad (16.17)$$

Таким образом, в результате не очень сложных математических рассуждений мы установили далеко не тривиальный математический результат. Оказывается, что для любого заданного $\lambda>0$ последовательность λ-чисел Фибоначчи, задаваемых рекуррентным соотношением (16.1), обладает замечательным математическим свойством (16.14), которое является обобщением формулы Кассини (16.13), справедливой для классических чисел Фибоначчи. Эта формулы была выведена в 17 в. знаменитым французским астрономом Кассини. Формула (16.14) является так называемым «родовым признаком», которое объединяет λ-числа Фибоначчи с классическими числами Фибоначчи. Более детально мы обсудим это уникальное свойство ниже в параграфе, посвященном изучению. «родовых признаков» для обобщенных золотых сечений и обобщенных чисел Фибоначчи.

16.4. Лямбда-матрицы Фибоначчи

В главе 2 мы ввели в рассмотрение так называемую Q-матрицу Фибоначчи, которая связана с числами Фибоначчи, причем ее детерминант этой матрицы, возведенной в n-ю стпень, представляет собой ни что иное, как тождество Кассини (16.13).

Зададимся действительным числом $\lambda > 0$ и введем в рассмотрение квадратную матрицу следующего типа

$$Q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16.18}$$

которую будем называть λ-матрицей Фибоначчи.

Вычислим детерминант матрицы (16.18):

$$\det Q_\lambda = \lambda \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1. \tag{16.19}$$

λ-матрица Фибоначчи (16.18) связана с λ-числами Фибоначчи $F_\lambda(n)$ следующим соотношением:

$$Q_\lambda^n = \begin{pmatrix} F_\lambda(n+1) & F_\lambda(n) \\ F_\lambda(n) & F_\lambda(n-1) \end{pmatrix}, \tag{16.20}$$

где $F_\lambda(n-1), F_\lambda(n), F_\lambda(n+1)$ – λ-числа Фибоначчи.

Выражение (16.20) легко доказывается методом математической индукции. Действительно, для случая $n = 1$, матрица (16.20) сводится к λ-матрице Фибоначчи (16.18), поскольку

$$Q_\lambda^1 = \begin{pmatrix} F_\lambda(2) & F_\lambda(1) \\ F_\lambda(1) & F_\lambda(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Основание индукции доказано.

Сделаем следующее индуктивное предположение: для произвольного целого k справедливо следующее выражение:

$$Q_\lambda^k = \begin{pmatrix} F_\lambda(k+1) & F_\lambda(k) \\ F_\lambda(k) & F_\lambda(k-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q_\lambda^{k+1} = Q_\lambda^k \times Q_\lambda = \begin{pmatrix} F_\lambda(k+1) & F_\lambda(k) \\ F_\lambda(k) & F_\lambda(k-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \lambda F_\lambda(k+1) + F_\lambda(k) & F_\lambda(k+1) \\ \lambda F_\lambda(k) + F_\lambda(k-1) & F_\lambda(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\lambda(k+2) & F_\lambda(k+1) \\ F_\lambda(k+1) & F_\lambda(k) \end{pmatrix}.$$

Утверждение (16.20) доказано.

Вычислим теперь детерминант матрицы (16.20). С одной стороны, используя известное свойство степеней квадратных матриц, мы можем записать:

$$\det\left(Q_\lambda^n\right) = \left(\det Q_\lambda\right)^n. \tag{16.21}$$

С другой стороны, используя (16.19), мы можем переписать (16.21) в следующем виде:

$$\det\left(Q_\lambda^n\right) = (-1)^n \tag{16.22}$$

Вычислим теперь детерминант матрицы (16.20):

$$\det Q_\lambda^n = F_\lambda(n-1) F_\lambda(n+1) - F_\lambda^2(n). \tag{16.23}$$

Объединяя результаты (16.22) и (16.23), окончательно запишем:

$$\det Q_\lambda^n = F_\lambda(n-1) F_\lambda(n+1) - F_\lambda^2(n) = (-1)^n. \tag{16.24}$$

Выражение (16.24) может быть переписано следующим образом:

$$\det Q_\lambda^n = F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1) F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1}. \tag{16.25}$$

Сравнивая выражение (16.25) с обобщенной формулой Кассини (16.14), мы приходим к неожиданному заключению: детерминант λ-матрицы Фибоначчи совпадает с обобщенной формулой Кассини (16.14)!

Воспользовавшись рекуррентной формулой для λ-чисел Фибоначчи (16.1), мы можем представить матрицу (16.20) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
Q_\lambda^n &= \begin{pmatrix} \lambda F_\lambda(n) + F_\lambda(n-1) & \lambda F_\lambda(n-1) + F_\lambda(n-2) \\ \lambda F_\lambda(n-1) + F_\lambda(n-2) & \lambda F_\lambda(n-2) + F_\lambda(n-3) \end{pmatrix} = \\
&\lambda \begin{pmatrix} F_\lambda(n) & F_\lambda(n-1) \\ F_\lambda(n-1) & F_\lambda(n-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_\lambda(n-1) & F_\lambda(n-2) \\ F_\lambda(n-2) & F_\lambda(n-3) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{16.26}
$$

откуда вытекает представление матрицы (16.20) в рекуррентной форме:

$$Q_\lambda^n = \lambda Q_\lambda^{n-1} + Q_\lambda^{n-2}. \tag{16.27}$$

Мы можем представить рекуррентное соотношение (16.27) в следующем виде:

$$Q_\lambda^{n-2} = Q_\lambda^n - \lambda Q_\lambda^{n-1}. \tag{16.28}$$

Используя рекуррентные соотношения (16.27) и (16.28), мы можем для каждого $\lambda > 0$ представить все λ-матрицы Фибоначчи типа Q_λ^n и обратные к ним матрицы Q_λ^{-n} в явном виде. Ниже в таблицах 16.7, 16.8 и 16.9 представлены λ-матрицы Фибоначчи, соответствующие случаям $\lambda = 1, 2, 3$.

Таблица 16.7. λ-матрицы Фибоначчи для случая λ=1

n	0	1	2	3	4	5
$Q_{\lambda=1}^n$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
$Q_{\lambda=1}^{-n}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

Таблица 16.8. λ-матрицы Фибоначчи для случая λ=2

n	0	1	2	3	4	5
$Q_{\lambda=2}^n$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix}$
$Q_{\lambda=2}^{-n}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12 & 29 \\ 29 & -70 \end{pmatrix}$

Таблица 16.9. λ-матрицы Фибоначчи для случая λ=3

n	0	1	2	3	4	5
$Q^n_{\lambda=3}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}33 & 10\\10 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}109 & 33\\33 & 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}360 & 109\\109 & 33\end{pmatrix}$
$Q^{-n}_{\lambda=3}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -3\\-3 & 10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 10\\10 & -33\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}10 & -33\\-33 & 109\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-33 & 109\\109 & -360\end{pmatrix}$

Таблицы 16.7-16.9 содержит прямые λ-матрицы Q^n_λ и обратные к ним матрицы Q^{-n}_λ. Из таблиц 16.7-16.9 вытекает очень простое правило вычисления обратной матрицы Q^{-n}_λ из прямой матрицы Q^n_λ. Они различны для λ-матриц Q^n_λ с четными ($n = 2k$) и нечетными ($n = 2k+1$) степенями:

$$Q^{2k}_\lambda = \begin{pmatrix} F_\lambda(2k+1) & F_\lambda(2k) \\ F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k-1) \end{pmatrix} \tag{16.29}$$

$$Q^{2k+1}_\lambda = \begin{pmatrix} F_\lambda(2k+2) & F_\lambda(2k+1) \\ F_\lambda(2k+1) & F_\lambda(2k) \end{pmatrix}. \tag{16.30}$$

Как следует из таблиц 16.7-16.9, в случае λ-матрицы с четными степенями ($n = 2k$), задаваемой (16.29), для получения обратной матрицы Q^{-2k}_λ необходимо члены $F_\lambda(2k)$ взять с обратным знаком, а члены $F_\lambda(2k+1)$ и $F_\lambda(2k-1)$ поменять местами, то есть,

$$Q^{-2k}_\lambda = \begin{pmatrix} F_\lambda(2k-1) & -F_\lambda(2k) \\ -F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k+1) \end{pmatrix}. \tag{16.31}$$

Для получения обратной матрицы Q^{-2k-1}_λиз матрицы (16.30), необходимо члены $F_\lambda(2k+2)$ и $F_\lambda(2k)$ поменять местами и взять их с обратным знаком, то есть,

$$Q^{-2k-1}_\lambda = \begin{pmatrix} -F_\lambda(2k) & F_\lambda(2k+1) \\ F_\lambda(2k+1) & -F_\lambda(2k+2) \end{pmatrix}. \tag{16.32}$$

16.5. Металлические пропорции

Алгебраическое уравнение для «металлических пропорций». Разделим обе части рекуррентного соотношения (16.1) на $F_\lambda(n+1)$ и представим его в следующем виде:

$$\frac{F_\lambda(n+2)}{F_\lambda(n+1)}=\lambda+\frac{F_\lambda(n)}{F_\lambda(n+1)}=\lambda+\frac{1}{\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}}. \qquad (16.33)$$

Если обозначить через x предел отношения $\frac{F_\lambda(n+1)}{F_\lambda(n)}$ при $n\to\infty$, то, осуществляя предельный переход в выражении (16.33), мы получим следующее квадратное уравнение:

$$x^2=\lambda x+1. \qquad (16.34)$$

Мы будем пользоваться также следующей традиционной формой записи квадратного уравнения (16.34):

$$x^2-\lambda x-1=0 \qquad (16.35)$$

Нам хорошо известно из средней школы, что квадратное уравнение (16.35) имеет два корня:

$$x_1=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2} \qquad (16.36)$$

$$x_2=\frac{\lambda-\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \qquad (16.37)$$

Установим некоторые свойства корней (16.36), (16.37), используя так называемые формулы Виета, рассмотренные нами в главе 1. Согласно этим формулам, сумма корней квадратного уравнения (16.35) равна коэффициенту λ при переменной x, то есть,

$$x_1+x_2=\lambda, \qquad (16.38)$$

а произведение корней равно свободному члену уравнения (16.35):

$$x_1x_2=-1. \qquad (16.39)$$

Свойства (16.38) и (16.39) проверяются непосредственно путем использования выражений (16.36) и (16.37).

Если мы подставим корни (16.36), (16.37) в уравнение (16.34) вместо x, мы получим следующие тождества:

$$x_1^2 = \lambda x_1 + 1 \quad (16.40)$$

$$x_2^2 = \lambda x_2 + 1. \quad (16.41)$$

Если теперь мы умножим или разделим многократно выражения (16.40) и (16.41) на x_1 и x_2, соответственно, то получим следующие тождества:

$$x_1^n = \lambda x_1^{n-1} + x_1^{n-2} \quad (16.42)$$

$$x_2^n = \lambda x_2^{n-1} + x_2^{n-2}, \quad (16.43)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Обозначим через Φ_λ положительный корень x_1, задаваемый (16.36), и рассмотрим новый класс математических констант, задаваемых следующим выражением:

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2}. \quad (16.44)$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ формула (16.44) сводится к выражению для классической золотой пропорции:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (16.45)$$

Уже этот факт должен привлечь наше внимание к формуле (16.44), которая является ни чем иным, как обобщением формулы (16.45) для золотой пропорции.

Аргентинский математик Вера Шпинадель [29] назвала математические константы, задаваемые выражением (16.44), «металлическими пропорциями». Если в (16.44) мы примем $\lambda = 1, 2, 3, 4$, тогда мы получим следующие математические константы, имеющие, согласно Шпинадель, следующие названия:

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\text{золотая пропорция}, \lambda = 1\right); \quad \Phi_2 = 1 + \sqrt{2} \left(\text{серебряная пропорция}, \lambda = 2\right);$$

$$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \left(\text{бронзовая пропорция}, \lambda = 3\right); \quad \Phi_4 = 2 + \sqrt{5} \left(\text{медная пропорция}, \lambda = 4\right).$$

Остальные металлические пропорции ($\lambda \geq 5$) не имеют специальных названий:

$$\Phi_5 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}; \quad \Phi_6 = 3+2\sqrt{10}; \quad \Phi_7 = \frac{7+2\sqrt{14}}{2}; \quad \Phi_8 = 4+\sqrt{17}.$$

Нетрудно доказать, что корень x_2 может быть выражен через «металлическую пропорцию» (16.44) следующим образом:

$$x_2 = -\frac{1}{\Phi_\lambda} = \frac{\lambda - \sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \qquad (16.46)$$

Ясно, что количество «металлических пропорций», задаваемых (16.44), теоретически бесконечно, так каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответсвует своя металлическая пропорция типа (16.44). И наиболее важным является тот факт, что «металлические пропорции» (16.44) являются «естественным» обобщением одной из важнейших математических констант - золотой пропорции (16.45) ($\lambda = 1$). Это дает нам основание предположить, что «металлические пропорции» (16.44) представляют собой новый класс математических констант, которые, возможно, представляют такой же интерес для математики и теоретического естствознания, как и золотая пропорция.

Любопытно подчеркнуть, что простейшее квадратное уравнение типа (16.35) известно более двух тысячелетий (Вавилон, Древняя Индия, Древний Китай). И тем не менее только в конце 20-го века – начале 21-го века ученые разных стран (Шпинадель, Газале, Каппрафф, Татаренко, Аракелян, Шенягин, Косинов и др.) обратили внимание на уникальность квадратного уравнения (16.35), изучение которого привело к открытию нового класса математических констант – «металлических пропорций» (16.44).

Представление в радикалах. Учитывая, что $\Phi_\lambda = x_1$, мы можем представить выражение (16.40) в следующем виде:

$$\Phi_\lambda^2 = \lambda\Phi_\lambda + 1. \qquad (16.47)$$

Из выражения (16.47) непосредственно вытекает ряд замечательных свойств «металлических пропорций» (16.44). Например, выражение (16.47) можно представить в виде:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\Phi_\lambda}. \qquad (16.48)$$

Если теперь вместо Φ_λ в подкоренном выражении (16.48) подставить выражение для Φ_λ, задаваемое (16.48), то получим следующее представление, которое мы будем называть «фрактальным представлением»:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\Phi_\lambda}}\ .$$

Продолжая процесс такой подстановки до бесконечности, мы получим следующее «фрактальное представление» металлических пропорций в радикалах, справедливое для любого $\lambda > 0$:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\ldots}}}}\ . \tag{16.49}$$

Заметим, что при $\lambda = 1$ выражение (16.49) сводится к широко известному свойству золотой пропорции:

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}\ . \tag{16.50}$$

Представление в виде цепной дроби. Теперь представим выражение (16.47) в виде:

$$\Phi_\lambda = \lambda + \frac{1}{\Phi_\lambda}. \tag{16.51}$$

Если теперь вместо Φ_λ в правой части выражения (16.51) многократно подставлять выражение для Φ_λ, задаваемое (16.51), и устремить этот процесс до бесконечности, то мы получим еще одно «фрактальное представление» для Φ_λ в виде цепной дроби:

$$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}}\ . \tag{16.52}$$

Заметим, что при $\lambda = 1$ выражение (16.52) сводится к широко известному свойству золотой пропорции:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}. \tag{16.53}$$

Как упоминалось в главе 1, это свойство выделяет «золотую пропорцию» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ среди других иррациональных чисел, то есть, «золотая пропорция» является «уникальным» иррациональным числом. Но свойство (16.52) является обобщением «уникального» свойства (16.53) и поэтому «металлические пропорции» (16.44) также могут быть отнесены к разряду «уникальных» иррациональных чисел.

Запишем еще некоторые важные тождества для «металлической пропорции» Φ_λ:

$$\Phi_\lambda + \frac{1}{\Phi_\lambda} = \sqrt{4+\lambda^2} \qquad (16.54)$$

$$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2}, \qquad (16.55)$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Таким образом, проведенные выше рассуждения являются еще одним подтверждением того, что «металлические пропорции» (16.44), действительно, являются «уникальными» математическими константами, обладающими математическими свойствами, подобными свойствам «золотой пропорции». Поэтому изучение свойств «металлических пропорций» (16.44) и поиск их приложений в теоретическом естествознании является одной из важнейших задач.

16.6. Формулы Газале

Формулы Газале для λ-чисел Фибоначчи. Формулы (16.1) задают λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ рекурсивно. Однако, λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ могут быть выражены в аналитической форме через металлические пропорции Φ_λ, подобно тому как числа Фибоначчи представляются аналитически через золотую пропорцию с использование формул Бине.

Используя корни x_1 и x_2 алгебраического уравнения (16.35), мы будем искать аналитическое выражение для λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n)$ в виде:

$$F_\lambda\left(n\right)=k_1x_1^n+k_2x_2^n \tag{16.56}$$

где k_1 и k_2 – постоянные коэффициенты, которые являются решениями следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} F_\lambda(0)=k_1x_1^0+k_2x_2^0=k_1+k_2 \\ F_\lambda(1)=k_1x_1^1+k_2x_2^1=k_1\Phi_\lambda-k_2\dfrac{1}{\Phi_\lambda} \end{cases} \tag{16.57}$$

Принимая во внимание, что $F_\lambda\left(n\right)=0$ и $F_\lambda\left(1\right)=1$, мы можем переписать систему (16.57) в следующем виде:

$$\begin{cases} k_1=-k_2 \\ k_1\Phi_\lambda+k_1\dfrac{1}{\Phi_\lambda}=k_1\left(\Phi_\lambda+\dfrac{1}{\Phi_\lambda}\right)=1 \end{cases} \tag{16.58}$$

Из системы уравнений (16.58) легко найти следующие выражения для коэффициентов k_1 и k_2:

$$k_1=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}};\quad k_2=-\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}} \tag{16.59}$$

Используя (16.59), мы можем представить выражение (16.56) следующим образом:

$$F_\lambda(n)=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}x_1^n-\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}x_2^n=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left(x_1^n-x_2^n\right) \tag{16.60}$$

Принимая во внимание, что $x_1=\Phi_\lambda$ и $x_2=-\dfrac{1}{\Phi_\lambda}$, мы можем представить формулу (16.60) в следующем виде:

$$F_\lambda(n)=\frac{\Phi_\lambda^n-(-1/\Phi_\lambda)^n}{\sqrt{4+\lambda^2}} \tag{16.61}$$

или

$$F_\lambda(n)=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^n-\left(\frac{\lambda-\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^n\right] \tag{16.62}$$

Заметим, что впервые формула (16.62) была выведена Мидхатом Газале в книге [30].

Рассмотрим частные случаи формулы (16.62). Для случая $\lambda = 1$ формула (16.62) сводится к формуле Бине для классических чисел Фибоначчи F_n:

$$F_n = F_1(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (16.63)$$

Для случая $\lambda = 2$ формула (16.62) принимает следующий вид:

$$F_2(n) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right]. \qquad (16.64)$$

Считается, что впервые формула (16.64) выведена английским математиком Пелли (1610-1685) и задает так называемые числа Пелля.

Учитывая авторство Мидхата Газале в доказательстве формулы (16.62), Алексей Стахов в статье [66] назвал формулу (16.62) формулой Газале для λ-чисел Фибоначчи. Заметим, что формула Газале (16.62) после несложных преобразований может быть записана в виде

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\ , \qquad (16.65)$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Важно еще раз подчеркнуть, что формула Газале (16.65) для λ-чисел Фибоначчи является обобщением широко известной формулы Бине для чисел Фибоначчи. При этом формула Газале (16.65) порождает бесконечное количество формул типа (16.65), так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует своя формула Газале типа (16.65).

Формула Газале для λ-чисел Люка. Рассмотрим снова формулу (16.56), задающую аналитически λ-числа Фибоначчи через корни алгебраического уравнения (16.35). По аналогии с формулой Бине для классических чисел Люка мы рассмотрим следующую формулу, которая, как показано ниже, задает еще одну интересную числовую последовательность [66]:

$$L_\lambda(n) = x_1^n + x_2^n, \qquad (16.66)$$

где x_1 и x_2 - корни алгебраического уравнения (16.35).

Как было установлено выше, выражение (16.56) в общем случае ($\lambda > 0$)

задает λ-числа Фибоначчи (16.1), которые для случая $\lambda = 1$ сводятся к классическим числам Фибоначчи. По аналогии с числами Люка, мы можем предположить, что в общем случае формула (16.66) задает новый класс числовых последовательностей, которые мы назовем λ-числами Люка.

Вычислим начальные значения λ-чисел Люка (16.66), соответствующие значениям $n = 0$ и $n = 1$:

$$L_\lambda(0) = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2; \qquad (16.67)$$

$$L_\lambda(1) = x_1^1 + x_2^1 = \lambda. \qquad (16.68)$$

Используя тождества (16.42) и (16.43), мы можем представить формулу (16.66) в следующем виде:

$$L_\lambda(n) = x_1^n + x_2^n = \lambda x_1^{n-1} + x_2^{n-2} + \lambda x_1^{n-2} + x_2^{n-2} = \lambda\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) + \left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right) \qquad (16.69)$$

Тогда, используя определение (16.66), а также начальные значения (16.67) и (16.68), мы можем представить выражение (16.69) в рекуррентной форме:

$$L_\lambda(n) = \lambda L_\lambda(n-1) + L_\lambda(n-2); \quad L_\lambda(0) = 2,\, L_\lambda(1) = \lambda \qquad (16.70)$$

Если мы подставим в формулу (16.66) вместо x_1 и x_2 их выражения $x_1 = \Phi_\lambda$ и $x_2 = -\dfrac{1}{\Phi_\lambda}$, тогда выражение (16.66) примет следующий вид:

$$L_\lambda(n) = \left[\Phi_\lambda^n + \left(\frac{-1}{\Phi_\lambda}\right)^n\right]. \qquad (16.71)$$

После несложных преобразований формулу (16.71) можно записать в следующем виде:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}. \qquad (16.72)$$

Формула (16.72) впервые выведена в работе [66] и названа формулой Газале для λ-чисел Люка.

Важно подчеркнуть, что формула Газале (16.72) для λ-чисел Люка является обобщением широко известной формулы Бине для чисел Люка. При этом формула Газале (16.72) порождает бесконечное количество формул типа (16.72), так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует своя формула Газале типа (16.72).

Свойства расширенных λ-чисел Фибоначчи и Люка. Исследуя числа Фибоначчи и Люка, расширенные в сторону отрицательных значений индекса n, в главе 2 мы установили ряд интересных свойств таких «расширенных» последовательностей Фибоначчи и Люка. Исследуем λ-числа Фибоначчи и Люка, расширенные в сторону отрицательных значений дискретной переменной n, и установим свойства «расширенных» λ-последовательностей Фибоначчи и Люка. Для этого представим формулу Газале (16.65) для λ-чисел Фибоначчи для случая отрицательных значений n в виде:

$$F_\lambda(-n)=\frac{\Phi_\lambda^{-n}-(-1)^{-n}\Phi_\lambda^{n}}{\sqrt{4+\lambda^2}} \tag{16.73}$$

Сравнивая выражения (16.73) и (16.65), мы обнаруживаем, что для нечетных $n=2k+1$ λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(2k+1)$ и $F_\lambda(-2k-1)$ совпадают, а для четных $n=2k$ противоположны по знаку, то есть,

$$F_\lambda(2k)=-F_\lambda(-2k) \text{ и } F_\lambda(2k+1)=F_\lambda(-2k-1). \tag{16.74}$$

Это означает, что последовательность λ-чисел Фибоначчи в диапазоне $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ является симметричной последовательностью относительно λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(0)=0$, если принять во внимание то обстоятельство, что λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(2k)$ и $F_\lambda(-2k)$ противоположны по знаку.

Проведем подобные рассуждения для λ-чисел Люка. Для этого представим формулу (16.72) для отрицательных значений n, то есть,

$$L_\lambda(-n)=\Phi_\lambda^{-n}+(-1)^{-n}\Phi_\lambda^{n}. \tag{16.75}$$

Сравнивая выражения (16.75) и (16.72) для четных $n=2k$ и нечетных $n=2k+1$ значений n, мы можем сделать следующее заключение:

$$L_\lambda(2k)=L_\lambda(-2k) \text{ и } L_\lambda(2k+1)=-L_\lambda(-2k-1). \tag{16.76}$$

Это означает, что последовательность λ-чисел Люка в диапазоне $n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ является симметричной последовательностью относительно λ-числа Люка $L_\lambda(0)=2$, если принять во внимание то обстоятельство, что λ-числа Люка

$L_\lambda(2k+1)$ и $L_\lambda(-2k-1)$ противоположны по знаку.

Свойства (16.74) и (16.76) можно непосредственно наблюдать в примерах, приведенных в Табл.16.1.

Таким образом, в результате проведенных выше несложных математических рассуждений мы пришли к открытию двух замечательных математических формул (16.65) и (16.72), которые выражают в аналитической форме два новых класса рекуррентных числовых последовательностей - λ-числа Фибоначчи и λ-числа Люка - через новые математические константы – «металлические пропорции», задаваемые (16.44).

16.7. Гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка

Определение гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка. Формулы Газале (16.65) и (16.72) являются исходными для определения нового класса гиперболических функций – гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, введенных в [66]. Рассмотрим эти функции.

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Фибоначчи

$$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right], \qquad (16.77)$$

$$cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}\left[\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}\right]. \qquad (16.78)$$

Гиперболический λ-синус и λ-косинус Люка

$$sL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x} \qquad (16.79)$$

$$cL_\lambda(x)=\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}=\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}\right)^{-x}, \qquad (16.80)$$

где x – непрерывная переменная и $\lambda>0$ - заданное положительное действительное число.

λ-числа Фибоначчи и Люка определяются через гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F_\lambda(n) \quad = \quad \begin{cases} sF_\lambda(n), & n=2k \\ cF_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}; \tag{16.81}$$

$$L_\lambda(n) \quad = \quad \begin{cases} cL_\lambda(n), & n=2k \\ sL_\lambda(n), & n=2k+1 \end{cases}. \tag{16.82}$$

Из формулы (16.81) вытекает, что при четных значениях $n=2k$ функция гиперболического λ-синуса Фибоначчи $sF_\lambda(n)=sF_\lambda(2k)$ совпадает с λ-числом Фибоначчи $F_\lambda(n)=F_\lambda(2k)$, а при всех нечетных значениях $n=2k+1$ функция гиперболического λ-косинуса Фибоначчи $cF_\lambda(n)=cF_\lambda(2k+1)$ совпадает с λ-числом Фибоначчи $F_\lambda(n)=F_\lambda(2k+1)$. В то же время из формулы (16.82) вытекает, что при четных значениях $n=2k$ функция гиперболического λ-косинуса Люка $cF_\lambda(n)=cF_\lambda(2k)$ совпадает с λ-числом Люка $L_\lambda(n)=L_\lambda(2k)$, а при нечетных значениях $n=2k+1$ функция гиперболического λ-синуса Люка $sFs(n)=sFs(2k+1)$ совпадает с λ-числом Люка $L_\lambda(n)=L_\lambda(2k+1)$. То есть, λ-числа Фибоначчи и Люка как бы вписываются в гиперболические функции Фибоначчи и Люка, что будет показано ниже.

Таким образом, согласно (16.81), λ-числам Фибоначчи с четными индексами ($n=2k$) всегда соответствует λ-синус Фибоначчи $sF_\lambda(x)$, а с нечетными индексами ($n=2k+1$) $-\lambda$-косинус Фибоначчи $cF_\lambda(x)$, в то время как согласно (16.72) λ-числам Люка с четными индексами всегда соответствует λ-косинус Люка $cL_\lambda(x)$, а с нечетными индексами – λ-синус Люка $sL_\lambda(x)$.

Нетрудно видеть, что функции (16.77)-(16.80) связаны друг с другом простыми соотношениями:

$$sF_\lambda(x) \quad = \quad \frac{sL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}; \qquad cF_\lambda(x) \quad = \quad \frac{cL_\lambda(x)}{\sqrt{4+\lambda^2}}. \tag{16.83}$$

Это означает, что функции (16.77) и (16.78) отличаются от функций (16.79) и (16.80) только постоянным коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}$.

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (16.77)-(16.80) сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка (14.35)-(14.38), введённым в работе [58].

Олег Боднар показал [24], что ГФФЛ, основанные на классической золотой пропорции, лежат в основе ботанического явления филлотаксиса. Но тогда мы можем предположить, что гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (16.77)-(16.80) могут лежать в основе других физических или биологических явлений.

Графики гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка. Графики гиперболических $\lambda -$функций Фибоначчи и Люка имеют форму, подобную графикам симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка (Рис.14.10, 14.11). Отличие состоит в том, что в точке $x = 0$, гиперболический λ-косинус Фибоначчи (16.78) принимает значение $cF_\lambda(0) = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}$, а гиперболический λ-косинус Люка (16.80) принимает значение $cL_\lambda(0) = 2$.

Важно также подчеркнуть, что λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с четными значениями $n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$ «вписываются» в график гиперболического λ-синуса Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ в «дискретных» точках непрерывной переменной $x = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$, в то же время λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ с нечетными значениями $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ «вписываются» в график гиперболического λ-косинуса Фибоначчи $sF_\lambda(x)$ в «дискретных» точках непрерывной переменной $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$.

С другой стороны, λ-числа Люка $L_\lambda(n)$ с четными значениями $n = 2k$ «вписываются» в график гиперболического λ-косинуса Люка $cL_\lambda(x)$ в точках

$x = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots$, и λ-числа Люка $L_\lambda(n)$ с нечетными значениями $n = 2k + 1$ «вписываются» в график гиперболического λ-синуса Люка $sL_\lambda(x)$ в точках $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$.

По аналогии с симметричными гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка (см. главу 14), мы можем ввести другие виды гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, в частности, гиперболические λ-тангенсы, λ-котангенсы, λ-секансы и λ-косекансы и т.д.

16.8. Частные случаи гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка

«Золотые», «серебряные», «бронзовые» и «медные» гиперболические $\underline{\lambda}$-функции Фибоначчи и Люка. Формулы (16.77)-(16.80) задают бесконечное количество различных гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, поскольку каждое число $\lambda > 0$ генерирует свой собственный вариант гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка типа (16.77)-(16.80).

Рассмотрим характерные случаи гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка (16.77)-(16.80), соответствующие различным значениям λ.

Для случая $\lambda = 1$ золотая пропорция (16.45) является основанием гиперболических 1-функций Фибоначчи и Люка ($\lambda = 1$), которые для этого случая совпадают с симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка (14.35)-(14.38). В дальнейшем мы будем называть функции (14.35)-(14.38) «золотыми» гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка.

Для случая $\lambda = 2$ серебряная пропорция $\Phi_2 = 1 + \sqrt{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть «серебряными» гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка:

$$sF_2(x) = \frac{\Phi_2^x - \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \tag{16.84}$$

$$cF_2(x) = \frac{\Phi_2^x + \Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right], \tag{16.85}$$

$$sL_2(x) = \Phi_2^x - \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x - \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}, \tag{16.86}$$

$$cL_2(x) = \Phi_2^x + \Phi_2^{-x} = \left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}. \tag{16.87}$$

Для случая $\lambda = 3$ бронзовая пропорция $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть «бронзовыми» гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка:

$$sF_3(x) = \frac{\Phi_3^x - \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right] \tag{16.88}$$

$$cF_3(x) = \frac{\Phi_3^x + \Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right] \tag{16.89}$$

$$sL_3(x) = \Phi_3^x - \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x - \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x} \tag{16.90}$$

$$cL_3(x) = \Phi_3^x + \Phi_3^{-x} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}. \tag{16.91}$$

Для случая $\lambda = 4$ медная пропорция $\Phi_4 = 2+\sqrt{5}$ является основанием нового класса гиперболических функций, которые мы будем называть «медными» гиперболическими λ-функциями Фибоначчи и Люка:

$$sF_4(x) = \frac{\Phi_4^x - \Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^x - \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}\right] \tag{16.92}$$

$$cF_4(x) = \frac{\Phi_4^x + \Phi_4^{-x}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\left(2+\sqrt{5}\right)^x + \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}\right] \tag{16.93}$$

$$sL_4(x) = \Phi_4^x - \Phi_4^{-x} = \left(2+\sqrt{5}\right)^x - \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x} \tag{16.94}$$

$$cL_4(x) = \Phi_4^x + \Phi_4^{-x} = \left(2+\sqrt{5}\right)^x + \left(2+\sqrt{5}\right)^{-x}. \tag{16.95}$$

Связь с классическими гиперболическими функциями. Сравним теперь гиперболические λ-функции Люка (16.79) и (16.80) с классическими гиперболическими функциями (14.11). Доказано [66], что для случая

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} = e \qquad (16.96)$$

гиперболические λ-функции Люка (16.79) и (16.80) совпадают с классическими гиперболическими функциями (14.11) с точностью до постоянного коэффициента 1/2, то есть,

$$sh(x) = \frac{sL_\lambda(x)}{2} \quad \text{и} \quad ch(x) = \frac{cL_\lambda(x)}{2}. \qquad (16.97)$$

Используя (16.96), после несложных преобразований мы можем вычислить значение λ_e, для которого выражение (16.96) является верным:

$$\lambda_e = e - \frac{1}{e} = 2sh(1) \approx 2.35040238. \qquad (16.98)$$

Таким образом, согласно (16.97) классические гиперболические функции (14.11) является частным случаем гиперболических λ-функций Люка для случая (16.96).

Числа Пелля. Числа Пелля P_n определяются следующим рекуррентным соотношением:

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2};\, P_0 = 0,\, P_1 = 1. \qquad (16.99)$$

Первые несколько чисел Пелля выглядят так: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378 ... . Другими словами, последовательность чисел Пелля начинается с 0 и 1, а каждое последующее число Пелля равно сумме удвоенного предыдущего $2P_{n-1}$ и стоящего перед ним числа Пелля P_{n-2}.

Ясно, что если числа Пелля «расширить» в сторону отрицательных значений индекса n, получим последовательность чисел, совпадающих с λ-числами

Фибоначчи, соответствующими случаю $\lambda = 2$. Таблица расширенных чисел Пелля приведена ниже.

Таблица 16.10. Расширенные числа Пелля

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2738
P_{-n}	0	1	–2	5	–12	29	–70	169	–408	985	–2738

Используя формулу Газале (16.64) для случая $\lambda = 2$, числа Пелля можно представить в виде следующей аналитической формулы:

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n\right], \tag{16.100}$$

где $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ - серебряная пропорция.

Используя выражение (16.52), мы можем представить серебряную пропорцию $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$, $(\lambda = 2)$, в виде следующей цепной дроби:

$$\Phi_2 = 1+\sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}} \tag{16.101}$$

Доказано, что числа Пелля имеют свойства, подобные числам Фибоначчи. В частности, для них справедливо следующее тождество, подобное формуле Кассини для чисел Фибоначи:

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n. \tag{16.102}$$

Числа Пелля возникли исторически при решении задачи рациональной аппроксимации корня квадратного из 2, то есть, $\sqrt{2}$. Если два больших целых числа x и y образуют решение Диофантового уравнения Пелля

$$x^2 - 2y^2 = \pm 1, \tag{16.103}$$

тогда их отношение $\frac{x}{y}$ обеспечивает аппроксимацию числа $\sqrt{2}$.

Доказано, что последовательность правильных дробей

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \ldots \tag{16.104}$$

образуют аппроксимацинную последовательность $\sqrt{2}$.

Заметим, что в последовательности дробей (16.104) знаменатель каждой дроби является числом Пелля, а числитель представляет собой сумму числа Пелля в знаменателе этой дроби с числом Пелля в знаменателе предшествующей дроби, то есть, каждая дробь может быть представлена в виде: $\frac{P_{n-1} + P_n}{P_n}$.

Считается, что название «уравнение Пелля» восходит к Эйлеру, который ошибочно приписал его математику Джону Пелли. Эйлер был информирован о работах математика Брункера (Brouncker), который получил общее решение уравнения (16.103), но по ошибке перепутал Брункера с Пелли. К слову сказать, уравнение (16.103) имеет глубокие исторические корни. Оно впервые было изучено в Древней Индии еще до н.э. В частности, приближение

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408}, \tag{16.105}$$

где 577=408+169, было известно индийским математикам в 3-м или 4-м веке до н.э. Греческие математики 5-го столетия до н.э. также знали последовательность приближений (16.104).

Последовательность (16.104) может быть использована для аппроксимации числа $\sqrt{2}$. Действительно, из (16.101) вытекает:

$$\sqrt{2} = \Phi_2 - 1 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}. \qquad (16.106)$$

Тогда, используя (16.106), можно вычислить все члены последовательности (16.104). В частности, приближение (16.105), которое было известно индийским и греческим математикам до новой эры, может быть представлено следующим образом:

$$\frac{577}{408} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}}. \qquad (16.107)$$

16.9. Важнейшие формулы и тождества для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка

Соотношения, связывающие «металлические пропорции» с «золотой пропорцией». Еще раз подчеркнем, что число гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (16.77)-(16.80), можно продолжить до бесконечности. Важно подчеркнуть, что они имеют прямое отношение к некоторым широко известным числовым последовательностям: числам Фибоначчи, числам Люка и числам Пелля. Эти функции сохраняют все важнейшие свойства классических гиперболических функций и рассмотрепнных выше симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка [58], при этом они обладают, с одной стороны, такими же рекуррентными свойствами, как и λ-числа Фибоначчи и Люка, с другой стороны, гиперболическими свойствами, аналогичными свойствам классических гиперболических функций, которые, как было показано выше, являются частным случаем гиперболических λ-функций Люка.

Основанием этих функций являются «металлические пропорции», которые являются обобщением классической «золотой пропорции». Начнем с соотношений, связывающих «металлические пропорции» с «золотой пропорции». Эти соотношения приведены в Табл.16.11.

Таблица 16.11. Связь «золотой пропорции» с «металлическими пропорциями»

Золотая пропорция ($\lambda = 1$)	Металлические пропорции ($\lambda > 0$)
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}$	$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{\ldots}}}}$
$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	$\Phi_\lambda = \lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\ldots}}}$
$\Phi^n = \Phi^{n-1}+\Phi^{n-2} = \Phi\times\Phi^{n-1}$	$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1}+\Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda\times\Phi_\lambda^{n-1}$
$F(n) = \frac{\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n-(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$L(n) = \Phi^n+(-1)^n\Phi^{-n}$	$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n+(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}$
$sFs(x) = \frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$ $cFs(x) = \frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$ $cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sLs(x) = \Phi^x-\Phi^{-x}$ $cLs(x) = \Phi^x+\Phi^{-x}$	$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}$ $cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}$

Рекуррентные свойства. Докажем теперь некоторые рекуррентные свойства введенных выше гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка.

Теорема 16.1. Следующие соотношения, которые подобны рекуррентному соотношению для λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1)+F_\lambda(n)$, справедливы для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка:

$$sF_\lambda(x+2) = \lambda cF_\lambda(x+1)+sF_\lambda(x) \qquad (16.108)$$

$$cF_\lambda(x+2) = \lambda sF_\lambda(x+1)+cF_\lambda(x)\ . \qquad (15.109)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}&\lambda cF_\lambda(x+1)+sF_\lambda(x)=\lambda\frac{\Phi_\lambda^{x+1}+\Phi_\lambda^{-x-1}}{\sqrt{4+\lambda^2}}+\frac{\Phi_\lambda^{x}-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\\&\frac{\Phi_\lambda^{x}(\lambda\Phi+1)-\Phi_\lambda^{-x}\left(1-\lambda\Phi_\lambda^{-1}\right)}{\sqrt{4+\lambda^2}}\end{aligned}\qquad(16.110)$$

Поскольку $\lambda\Phi_\lambda+1=\Phi_\lambda^2$ и $1-\Phi_\lambda^{-1}=\Phi_\lambda^{-2}$, мы можем представить (16.110) в следующем виде:

$$\lambda cF_\lambda(x+1)+sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^{x+2}-\Phi_\lambda^{-x-2}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=sF_\lambda(x+2),$$

что доказывает справедливость тождества (16.108).

По аналогии может быть доказано тождество (16.109).

Выше мы доказали обобщенную формулу Кассини для λ-чисел Фибоначи. Она задается выражением (16.14). Эта формула может быть распространена на непрерывную область для случая гиперболических λ-функций Фибоначчи.

Теорема 16.2 (обобщение формулы Кассини). Следующие соотношения, которые подобны обобщенной формуле Кассини для λ-чисел Фибоначи $F_\lambda^2(n)-F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1)=(-1)^{n+1}$, справедливы для гиперболических λ-функций Фибоначчи:

$$\left[sF_\lambda(x)\right]^2-cF_\lambda(x+1)cF_\lambda(x-1)=-1\qquad(16.111)$$

$$\left[cF_\lambda(x)\right]^2-sF_\lambda(x+1)sF_\lambda(x-1)=1.\qquad(16.112)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}&\left[sF_\lambda(x)\right]^2-cF_\lambda(x+1)cF_\lambda(x-1)=\\&\left(\frac{\Phi_\lambda^{x}-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\right)^2-\frac{\Phi_\lambda^{x+1}+\Phi_\lambda^{-x-1}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\times\frac{\Phi_\lambda^{x-1}+\Phi_\lambda^{-x+1}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\\&\frac{\Phi_\lambda^{2x}-2+\Phi_\lambda^{-2x}-\left(\Phi_\lambda^{2x}+\Phi_\lambda^{2}+\Phi_\lambda^{-2}+\Phi_\lambda^{-2x}\right)}{4+\lambda^2}=\frac{-2-\left(\Phi_\lambda^{2}+\Phi_\lambda^{-2}\right)}{4+\lambda^2}\end{aligned}\qquad(16.113)$$

Используя формулу (16.72), для случая $n = 2$ мы можем записать:

$$L_\lambda(2) = \Phi_\lambda^2 + \Phi_\lambda^{-2}. \qquad (16.114)$$

Используя рекуррентное соотношение (16.70) и начальные условия (16.67), (16.68), мы можем представить λ-число Люка $L_\lambda(2)$ в следующем виде:

$$L_\lambda(2) = \lambda L_\lambda(1) + L_\lambda(0) = \lambda \times \lambda + 2 = 2 + \lambda^2. \qquad (16.115)$$

Принимая во внимание (16.114) и (116.115), мы можем сделать вывод, что тождество (16.111) выполняется для любого действительного числа $\lambda > 1$.

По аналогии можно доказать также справедливость тождества (16.112). Теорема 16.2 доказана.

Заметим, что теоремы 16.1 и 16.2 являются примерами доказательств так называемых рекуррентных свойств гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка.

Гиперболические свойства. Докажем теперь некоторые гиперболические свойства λ-функций Фибоначчи и Люка (16.77)-(16.80).

Начнем со свойства четности, которому удовлетворяют классические гиперболические функции. Как известно, гиперболический косинус является четной функцией, а гиперболический синус – нечетной функцией. Докажем, что гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка также обладают этим важным свойством.

Теорема 16.3. Гиперболические λ-синусы Фибоначчи и Люка являются нечетными функциями, а гиперболические λ-косинусы Фибоначчи и Люка являются четными функциями.

Доказательство:

$$sF_\lambda(-x) = \frac{\Phi_\lambda^{-x} - \Phi_\lambda^{x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = -\frac{\Phi_\lambda^{x} - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} = -sF_\lambda(x), \qquad (16.116)$$

откуда вытекает, что гиперболический λ-синус Фибоначчи является нечетной функцией.

С другой стороны, симметричный гиперболический λ-косинус Фибоначчи является четной функцией, так как

$$cF_{\lambda}(-x)=\frac{\Phi_{\lambda}^{-x}+\Phi_{\lambda}^{x}}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}=\frac{\Phi_{\lambda}^{x}+\Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}=cF_{\lambda}(x). \qquad (16.117)$$

Таким же образом можно доказать, что

$$sL_{\lambda}(-x)=-sL_{\lambda}(x);\ cL_{\lambda}(-x)=cL_{\lambda}(x) \qquad (16.118)$$

Теорема 16.4. Следующие тождества, подобные тождеству для классических гиперболических функций $[ch(x)]^{2}-[sh(x)]^{2}=1$ справедливы для λ-функций Фибоначчи и Люка:

$$\left[cF_{\lambda}(x)\right]^{2}-\left[sF_{\lambda}(x)\right]^{2}=\frac{4}{4+\lambda^{2}} \qquad (16.119)$$

$$\left[cL_{\lambda}(x)\right]^{2}-\left[sL_{\lambda}(x)\right]^{2}=4. \qquad (16.120)$$

Доказательство

Докажем сначала тождество (16.119):

$$\left[cF_{\lambda}(x)\right]^{2}-\left[sF_{\lambda}(x)\right]^{2}=\left(\frac{\Phi_{\lambda}^{x}+\Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}\right)^{2}-\left(\frac{\Phi_{\lambda}^{x}-\Phi_{\lambda}^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}\right)^{2}=$$

$$\frac{\Phi_{\lambda}^{2x}+2+\Phi_{\lambda}^{-2x}-\Phi_{\lambda}^{2x}+2-\Phi_{\lambda}^{-2x}}{4+\lambda^{2}}=\frac{4}{4+\lambda^{2}}$$

Тождество (16.120) легко доказывается, если воспользоваться соотношениями (16.83), связывающими λ-функциями Фибоначчи с λ-функциями Люка. Подставляя вместо λ-функций Фибоначчи $cF_{\lambda}(x)$ и $sF_{\lambda}(x)$ их представления через λ-функции Люка, задаваемые (16.83), получим:

$$\left[\frac{cL_{\lambda}(x)}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}\right]^{2}-\left[\frac{sL_{\lambda}(x)}{\sqrt{4+\lambda^{2}}}\right]^{2}=\frac{4}{4+\lambda^{2}}. \qquad (16.121)$$

После выполнения простейших алгебраических преобразований в (16.121) получим тождество (16.120).

Теорема 16.4 доказана.

Теорема 16.5. Следующее тождество, подобное тождеству для классических гиперболических функций $ch(x+y)=ch(x)ch(y)+sh(x)sh(y)$, справедливо для гиперболических λ-функций Фибоначчи:

$$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x+y)=cF_\lambda(x)cF_\lambda(y)+sF_\lambda(x)sF_\lambda(y) \qquad (16.122)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}
&cF_\lambda(x)cF_\lambda(y)+sF_\lambda(x)sF_\lambda(y)=\\
&\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\times\frac{\Phi_\lambda^y+\Phi_\lambda^{-y}}{\sqrt{4+\lambda^2}}+\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}\times\frac{\Phi_\lambda^y-\Phi_\lambda^{-y}}{\sqrt{4+\lambda^2}}=\\
&\frac{\Phi_\lambda^{x+y}+\Phi_\lambda^{x-y}+\Phi_\lambda^{-x+y}+\Phi_\lambda^{-x-y}+\Phi_\lambda^{x+y}-\Phi_\lambda^{x-y}-\Phi_\lambda^{-x+y}+\Phi_\lambda^{-x-y}}{4+\lambda^2}=\\
&\frac{2\left(\Phi_\lambda^{x+y}+\Phi_\lambda^{-x-y}\right)}{\sqrt{4+\lambda^2}\times\sqrt{4+\lambda^2}}=\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x+y)
\end{aligned} \qquad (16.123)$$

Теорема 16.6. Следующее тождество, подобное тождеству для классических гиперболических функций $ch(x-y)=ch(x)ch(y)-sh(x)sh(y)$, справедливо для гиперболических λ-функций Фибоначчи:

$$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x-y)=cF_\lambda(x)cF_\lambda(y)-sF_\lambda(x)sF_\lambda(y) \qquad (16.124)$$

Теорема доказывается аналогично Теореме 16.5.

По аналогии мы можем доказать следующие теоремы для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка**.**

Теорема 16.7. Следующие тождества, подобные тождеству для классических гиперболических функций $ch(2x)=[ch(x)]^2+[sh(x)]^2$, являются действительным для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка:

$$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(2x)=\left[cF_\lambda(x)\right]^2+\left[sF_\lambda(x)\right]^2 \qquad (16.125)$$

$$2cL_\lambda(2x)=\left[cL_\lambda(x)\right]^2+\left[sL_\lambda(x)\right]^2. \qquad (16.126)$$

Теорема 16.8. Следующие тождества, подобное тождеству для классических гиперболических функций $sh(2x)=2sh(x)ch(x)$, справедливо для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка:

$$\frac{1}{\sqrt{4+m^2}}sF_\lambda(2x)=sF_\lambda(x)cF_\lambda(x) \tag{16.127}$$

$$sL_\lambda(2x)=sL_\lambda(x)cL_\lambda(x). \tag{16.128}$$

Теорема 16.9. Следующие формулы, подобное формулам Муавра для классических гиперболических функций $[ch(x)\pm sh(x)]^n=ch(nx)\pm sh(nx)$, справедливы для гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка:

$$\left[cF_\lambda(x)\pm sF_\lambda(x)\right]^n=\left(\frac{2}{\sqrt{4+m^2}}\right)^{n-1}\left[cF_\lambda(nx)\pm sF_\lambda(nx)\right]; \tag{16.129}$$

$$\left[cL_\lambda(x)\pm sL_\lambda(x)\right]^n=2^{n-1}\left[cL_\lambda(nx)\pm sL_\lambda(nx)\right]. \tag{16.130}$$

В Табл.16.12 приведены основные формулы, связывающие гиперболические функции λ-функции Фибоначчи с классическими гиперболическими функциями. Эти формулы задают гиперболические свойства гиперболических λ-функций Фибоначчи.

Заметим, что таблица формул для гиперболических λ-функций Люка легко может быть получена из Табл.16.12, если воспользоваться соотношениями (16.83), связывающими гиперболические λ-функции Люка с гиперболическими λ-функциями Фибоначчи.

Таблица 16.12. Гиперболические свойства λ-функций Фибоначчи

Формулы для классических гиперболических функций	**Формулы для гиперболических λ - функций Фибоначчи**
$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\ ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$sF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}};\ cF_\lambda(x)=\frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sh(x+2)=2sh(1)ch(x+1)+sh(x)$ $ch(x+2)=2sh(1)sh(x+1)+ch(x)$	$sF_\lambda(x+2)=\lambda cF_\lambda(x+1)+sF_\lambda(x)$ $cF_\lambda(x+2)=\lambda sF_\lambda(x+1)+cF_\lambda(x)$
$sh^2(x)-ch(x+1)ch(x-1)=-ch^2(1)$ $ch^2(x)-sh(x+1)sh(x-1)=ch^2(1)$	$\left[sF_\lambda(x)\right]^2-cF_\lambda(x+1)cF_\lambda(x-1)=-1$ $\left[cF_\lambda(x)\right]^2-sF_\lambda(x+1)sF_\lambda(x-1)=1$
$ch^2(x)-sh^2(x)=1$	$\left[cF_\lambda(x)\right]^2-\left[sF_\lambda(x)\right]^2=\frac{4}{4+\lambda^2}$
$sh(x+y)=sh(x)ch(x)+ch(x)sh(x)$ $sh(x-y)=sh(x)ch(x)-ch(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}sF_\lambda(x+y)=sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)+cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}sF_\lambda(x-y)=sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)-cF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(x+y)=ch(x)ch(x)+sh(x)sh(x)$ $ch(x-y)=ch(x)ch(x)-sh(x)sh(x)$	$\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x+y)=cF_\lambda(x)cF_\lambda(x)+sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$ $\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(x-y)=cF_\lambda(x)cF_\lambda(x)-sF_\lambda(x)sF_\lambda(x)$
$ch(2x)=2sh(x)ch(x)$	$\frac{1}{\sqrt{4+\lambda^2}}cF_\lambda(2x)=sF_\lambda(x)cF_\lambda(x)$
$\left[ch(x)\pm sh(x)\right]^n=ch(nx)\pm sh(nx)$	$\left[cF_\lambda(x)\pm sF_\lambda(x)\right]^n=\left(\frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}}\right)^{n-1}\left[cF_\lambda(nx)\pm sF_\lambda(nx)\right]$

16.10. «Родовые признаки» для обобщенных золотых сечений (по мотивам работ Гранта Аракеляна)

Можно ли обобщать золотое сечение? На страницах сайта «Академия Тринитаризма» в свое время разгорелась бурная дискуссия на тему «Можно ли обобщать числа Фибоначчи и «золотое сечение»?» В частности, можно ли называть p-числа Фибоначчи и золотые p-сечения обобщенными числами Фибоначчи и обобщенными золотыми сечениями? То же самое касается λ-чисел Фибоначчи и «металлических пропорций». Для этого используются следующие рассуждения. Противники таких обобщений категорически утверждают, что нельзя обобщать классическое «золотое сечение» и классические числа Фибоначи, потому что эти математические объекты уникальны и неповторимы. В качестве аргумента против «обобщений», как правило, приводятся два «неотразимых примера».

Первый пример состоит в том, что «уравнение золотого сечения»

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{16.131}$$

корнем которого является знаменитая «золотая пропорция» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, является частным случаем общего алгебраического уравнения n-й степени:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0. \tag{16.132}$$

Следовательно, все корни уравнения (16.132) можно трактовать как обобщения «золотой попорции», что является абсурдным утверждением.

Но тогда у нас нет никаких оснований называть «золотые p-пропорции» которые являются положительными корнями алгебраического уравнения

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0, \tag{16.133}$$

обобщенными золотыми пропорциями.

Это же замечание касается «металлических пропорций», которые являются корнями следующего квадратного уравнения:

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0, \tag{16.134}$$

где $\lambda > 0$ - заданное действительное число.

Еще один «неотразимый пример» связан с представлением иррациональных чисел в виде цепных дробей:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}. \tag{16.135}$$

Но «золотая пропорция» также может быть представлена в виде следующей цепной дроби:

$$\Phi = [1; 1, 1, 1, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}. \tag{16.136}$$

Оказывается, что выражение (16.136) имеет глубокий математический смысл. Оно выделяет золотую пропорцию Φ среди других иррациональных чисел, так как согласно (16.136) золотая пропорция наиболее медленно апроксимируется рациональными дробями. Это означает, что, с точки зрения цепных дробей, золотая пропорция является уникальным иррациональным числом. Но ведь выражение (16.136) является частным случаем выражения (16.135), откуда вытекает, что любая цепная дробь является обобщением «золотой пропорции», что является абсурдом.

Как подчеркивается в одной из работ, пример с цепной дробью приведен с целью показать, что цепная форма «золотой пропорции» «позволяет легко вскрыть логику псевдонаучного обобщения золотого сечения, которой изобилуют работы отдельных авторов».

Так что все работы, направленные на обобщение золотого сечения, одним росчерком пера отнесены к «псевдонаучным обобщениям».

Возникает вопрос: являются ли золотые p-пропорции и «металлические пропорции» Веры Шпинадель или T_m – гармонии Александра Татаренко обобщениями золотой пропорции. Другими словами, является ли теория золотых p-пропорций и «металлических пропорций» или T_m – гармоний, активно развиваемая в рамках «математики гармонии», обобщением теории классической «золотой пропорции»?

Блестящая идея Гранта Аракеляна. Для ответа на эти вопросы обратимся к замечательной статье Гранта Аракеляна «О мировой гармонии, теории золотого сечения и ее обобщениях» [108]

Аракелян пишет:

«История удачных, неудачных и уводящих в дальние дали обобщений числовых множеств (не путать это стандартное словосочетание с теоретико-множественными фантазиями на тему "всё есть множество") подсказывает нам долгожданные правила обобщения применительно к интересующему нас случаю теории золотого сечения.

Правило 1. Обобщаемое есть частный случай обобщённого.

Правило 2. Обобщённое отличается от обобщаемого новыми объектами и константами.

Правило 3. Фундаментальные особенности обобщаемого сохраняются в обобщённом.

Правило 1 выполняется практически во всех обобщениях, правило 2 более конструктивно и работает, как мы видели, в случае замены двух начальных членов классического ряда Фибоначчи произвольными комплексными числами, но “зарыта собака” всё же в правиле 3».

Правило 3 Гранта Аракеляна. И далее Аракелян раскрывает суть Правила 3, в котором и «зарыта собака». Аракелян приводит пример обобщения «уравнения золотого сечения» (16.131), который может быть сделан с использованием уравнения (16.132). Если в общем алгебраическом уравнении (16.132) положить $a_0 = 1$, а остальные множители $a_1 = a_2 ... = a_{n-1} = a_n = -1$, и заменить n на k,то получим уравнение k-ой степени:

$$x^k - x^{k-1} - ... - x^2 - x - 1 = 0, \tag{16.137}$$

которое кажется «естественным обобщением» золотого уравнения (15.131), так как по форме эти уравнения совпадают.

Однако, значит ли это, что корни любых уравнений (16.132) и (16.137) могут претендовать на роль обобщенных золотых пропорций? Аракелян отвечает:

«Мы видим, что все эти константы k-наччи имеют мало общего с золотым числом и едва ли могут удовлетворять Правилу 3, требующему сохранения фундаментальных признаков константы Φ. Хотя выявление этих признаков, один из ключевых моментов всей работы, ещё впереди, и так ясно, хотя бы на интуитивном уровне, что говорить об узах кровного родства здесь вряд ли приходится».

Наиболее удачно роль Правила 3 Аракелян раскрывает при анализе «металлических пропорций». А далее приведем цитату из работы Аракеляна [108]:

«**Правило 3.** Мы, наконец, добрались до кульминационной для настоящей работы точки, когда решается вопрос о том, можно ли обобщать теорию ЗС и если да, то как. Надо, уточним, попытаться отыскать фундаментальный родовой признак, имманентно присущий числам определенного типа и только им и реально объединяющих их в единое золотое семейство. Найти некое формальное свойство, настолько убедительное, что оно способно проломить самый толстый лёд недоверия наиболее “упёртых” противников обобщения, фидианцев, нечто такое, что можно сравнить с ДНК-тестом, выявляющим кровное родство между людьми. После такой прелюдии может создаться ложное представление об искомом признаке как о чём-то совершенно необычном. “Таинственный” признак действительно необычен, уникален, но вместе с тем прост, небезызвестен и лежит на поверхности.

Сравним десятичные дробные части (мантиссы) константы Φ и её обратной величины:

$$\Phi = 1.6180339887... \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Phi} = 0.6180339887... \qquad (16.138)$$

Они совпадают. Разумеется не только в десятичной, но и в любой другой системе счисления. Назовём это свойство Правилом сохранения мантиссы (ПСМ)».

Напомним, что «правило сохранения мантиссы» для классичесой «золотой пропорции» Φ задается следующим широко известным соотношением, свяывающем величину Φ со своей обратной величиной $\frac{1}{\Phi}$:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1. \qquad (16.139)$$

Правило сохранения мантиссы как родовой признак «металлических пропорций». Возникает вопрос: а нельзя ли найти другие математические константы типа Φ, которые удовлетворяют «Правилу сохранения мантиссы»?

Аракелян предлагает следующее решение поставленной задачи. Если обозначить через x искомые константы, удововлетворяющие ПСМ, то для их нахождения может быть составлено уравнение:

$$\frac{1}{x} = x - m, \qquad (16.140)$$

где m - некоторое целое число. Из (16.140) вытекает квадратное уравнение

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad (16.141)$$

с корнями

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2} \quad (16.142)$$

Аракелян заключает: «Вот, собственно говоря, и всё».

Таким образом, согласно Аракеляну, существует уникальное свойство, объединяющее «золотую пропорцию» со всеми «металлическими пропорциями», задаваемыми (16.141) – «правило сохранения мантиссы» (ПСМ). Это правило Аракелян демонстрирует с помощью нижеследующей таблицы, в которой с помощью x_+ и x_- обозначены положительные и отрицательные корни уравнения (16.141), десятичные значения корней и их обратных величин.

Таблица 16.13.Демонстрация «првила сохранения мантисс»

m	Корни	x_+	$\frac{1}{x_+}$	x_-	$\frac{1}{x_-}$
2	$1 \pm \sqrt{2}$	2.41435623...	0.41435623...	–0.41435623...	–2.41435623...
3	$\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$	3.3027756377...	0.3027756377...	–0.3027756377...	–3.3027756377...
4	$2 \pm \sqrt{5}$	4.2360679775...	0.2360679775...	–0.2360679775...	–4.2360679775...
5	$\frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$	5.19258224035...	0.19258224035...	–0.19258224035...	–5.19258224035...
24	$12 \pm \sqrt{145}$	24.0415945787...	0.0415945787...	–0.0415945787...	–24.0415945787...
137	$\frac{137 \pm \sqrt{18773}}{2}$	137.0072988812...	0.0072988812...	–0.0072988812...	–137.0072988812...

Автор вспоминает, с каким восторгом подобную таблицу ему демонстрировал Александр Татаренко во время нашей первой встречи в Таганроге (2001), а затем и во время второй встречи в Виннице (2003), где Татаренко сделал замечательный доклад по T_m – гармониям на пленарном заседании «золотой» конференции.

Таким образом, уравнение (16.141) – это обобщение «уравнения золотого сечения» (16.131) в том смысле, что оно порождает семейство уникальных математических констант - «металлических пропорций», сохраняющих «родовой признак» - «правило сохранения мантиссы» (ПСМ).

Обобщенная Формула Кассини как «родовой признак» λ-чисел Фибоначчи. Блестящая идея Гранта Аракеляна вызвала ряд публикаций на сайте АТ [109-112] и привела к установлению новых «родовых прзнаков» для обобщенных чисел Фибоначчи и обобщенных золотых пропорций.

Один из таких признаков предложен в работе [109] Что является «родовым признаком», который объединяет классические числа Фибоначчи и $\lambda-$числа Фибоначчи, задаваемые рекуррентной формулой (16.1)

Очевидно, что таким «родовым признаком» является «обобщенная формула Кассини», которая для любых трех соседних $\lambda-$чисел Фибоначчи имеет вид:

$$F_{\lambda}^{2}(n+1)-F_{\lambda}(n)F_{\lambda}(n+2)=(-1)^{n+1}. \qquad (16.143)$$

Заметим, что при $\lambda=1$ эта формула совпадает с классической формулой Кассини:

$$F_{n}^{2}-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}. \qquad (16.144)$$

Ниже в таблице приведены так называемые расширенные λ-числа Фибоначчи для значений $\lambda=1,2,3,4$.

Таблица 16.14. Расширенные λ-числа Фибоначчи

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F_1(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21
$F_1(-n)$	0	1	−1	2	−3	5	−8	13	−21
$F_2(n)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408
$F_2(-n)$	0	1	−2	5	−12	29	−70	169	−408
$F_3(n)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927
$F_3(-n)$	0	1	−3	10	−33	109	−360	1199	−3927
$F_4(n)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184
$F_4(-n)$	0	1	−4	17	−72	305	−1292	5473	−23184

Приведем примеры выполнения тождества (16.143) для различных последовательностей, приведенных в таблице. Для случая $\lambda=2$ рассмотрим следующую тройку чисел: $F_2(6)=70, F_2(7)=169, F_2(8)=408$, взятых из

Табл.16.14. Произведя вычисления над ними согласно (16.143), получим следующий результат:

$$(169)^2 - 70 \times 408 = 28561 - 28560 = 1,$$

что соответствует тождеству (16.143), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^8 = 1$.

Теперь рассмотрим $F_3(n)$ – последовательность соответствующую случаю $n = 6$. Для этого мы должны рассмотреть следующую тройку чисел из Табл.16.14:

$$F_3(5) = 109,\ F_3(6) = 360,\ F_3(7) = 1189.$$

Произведя вычисления над ними согласно (16.143), получим следующий результат:

$$(360)^2 - 109 \times 1189 = 129600 - 129601 = -1,$$

что соответствует тождеству (16.143), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^7 = -1$.

Наконец, рассмотрим $F_4(-n)$ – последовательность для случая $n = -5$. Для этого мы должны рассмотреть следующую тройку чисел из Табл.16.14:

$$F_4(-4) = -72,\ F_4(-5) = 305,\ F_4(-6) = -1292.$$

Произведя вычисления над ними согласно (16.143), получим следующий результат:

$$(305)^2 - (-72) \times (-1292) = 93025 - 93024 = 1,$$

что соответствует тождеству (16.143), поскольку $(-1)^{n+1} = (-1)^{-4} = 1$.

Таким образом, в случае λ-чисел Фибоначчи (для целых значений λ) мы имеем бесконечное количество целочисленных последовательностей, простирающихся от $+\infty$ до $-\infty$, обладающих уникальным математическим свойством, выражаемым формулой Кассини (16.143), которая гласит:

Квадрат некоторого λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1)$ и $F_\lambda(n+1)$, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа n; если число n является четным числом, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

Заметим, что это свойство λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n)$ является обобщением такого же свойства для классических чисел Фибоначчи F_n. Но если раньше мы считали, что только классические числа Фибоначчи обладают таким уникальным свойством, задаваемым (16.144), то сейчас мы доказали, что количество таких числовых последовательностей бесконечно, поскольку все множество числовых последовательностей, задаваемых рекуррентным соотношением (16.1) обладают подобным свойством, задаваемым (16.143). Доказательство существования бесконечного количества числовых последовательностей, обладающих свойством (16.143), является новым математическим результатом, представляющим несомненный интерес для «элементарной теории чисел».

Родовые признаки для p-чисел Фибоначчи. Эти рекуррентные числовые последовательности изучены нами в главе 3. Что объединяет классические числа Фибоначчи с p-числами Фибоначчи? Не вызывает сомнений, что таким объединяющим их «родовым признаком» является треугольник Паскаля, поскольку все без исключения p-числа Фибоначчи равны его «диагональным суммам», то есть, все они «порождаются» треугольником Паскаля.

«Родовые признаки» для «золотых *p*-пропорций». Возникает вопрос: какими общими «родовыми признаками» обладают классическая «золотая пропорция» и «золотые p-пропорции»? Эти признаки хорошо известны и многократно описаны в работах автора, начиная с книги [9]. Пепрвый «родовой признак» - это следующее тождество, связывающее «золотые p-пропорции» Φ_p:

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \qquad (16.145)$$

Заметим, что для случая $p = 0\left(\Phi_0 = 2\right)$ тождество (16.145) сводится к следующему тривиальному тождеству для двоичных чисел:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots .$$

Для $p = 1$ имеем: $\Phi_1 = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; тогда тождество (16.145) сводится к следующему известному тождеству для «золотой пропорции»:

$$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots . \qquad (16.146)$$

Еще одним «родовым признаком», связывающим «золотую пропорцию» с «золотыми p-пропорциями» можно считать «обобщенную формулу Кеплера»:

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p \left(p = 0,1,2,3,\dots \right), \qquad (16.147)$$

частным случаем которой является классическая формула Кеплера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Еще один интересный подход к установлению «родовых признаков» для обобщенного и классического уравнений золотого сечения для рекурсий 2-го порядка и 2-й степени предложен в статье Валериана Владимирова [112].

Итоги дискуссии о «родовых» признаках» обобщенных чисел Фибоначчи и золотых сечений подведены в статьях Алексея Стахова [109] и Гранта Аракеляна [112]. Основываясь на этих статьях, эти итоги можно сформулировать следующим образом:

1. Удивляет стремление некоторых авторов ввести искусственные запреты на обобщения теории золотого сечения по принципу «этого нельзя делать, потому что этого нельзя делать никогда». Между тем, обойтись без обобщений математика не может, это любимое занятие математиков, здесь с ними могут поспорить разве что философы. И такая предрасположенность вовсе не бравада, не злоупотребление растущими возможностями постоянно усовершенствуемого формального инструментария, а нечто вытекающее из самой природы математического познания. Скалярные величины обобщаются векторами, те в свою очередь тензорами, и каждый раз открываются такие перспективы, которые немыслимы на начальной ступени.
2. Другое дело, что всему есть мера, «красная черта», к которой можно подходить вплотную, но нельзя переступать. Классический пример –

последовательное, растянувшееся на тысячелетия обобщение натуральных чисел египтян, халдеев и пифагорейцев до уровня комплексных величин, как естественного предела для понятия числа. А далее оказывается, что “пуповина” – связь с фундаментальными характеристиками числа уже не существует и всё то, что по инерции называют числами (числа Келли, кватернионы, гиперкомплексные числа и т.п., не говоря уже о трансфинитных числах теории множеств) являются математическими сущностями иного рода. Но остановить, посредством непродуманных табу само движение к «красной черте» никак не получится. Уникальность золотой пропорции, золотой константы, к которой любят апеллировать блюстители её «принципиальной необобщаемости», может и повод для восхищения, но только не для ограничений. К тому же тот, кто говорит об обобщении константы или числа, занимается откровенным словоблудием. Обобщается не число, а теория, принцип, конструкция, модель, теоретическое построение, к константе приводящие. Вдоволь насладившись красотой, уникальностью пропорции и её константы, исследователь, если только он не «теоретизирующий пустозвон», ищет истоки этой самой уникальности, пытается дать ей разумное объяснение, включить в общий теоретический контекст.

3. Таков обычный метод научного поиска, характерный, между прочим, не только для математики. Когда же разум погружается в сон, ему всякое может присниться, например, связанный с цепной дробью мнимый парадокс. Константа Φ, как и всякое иррациональное число, записывается посредством бесконечной цепной дроби, составленной из одних единиц, а потому и наиболее медленно сходится к пределу последовательность её подходящих дробей. В этом один из основных формальных показателей универсальности ЗС, с далеко идущими последствиями для теории золотого сечения. Меняя какие-то числа в бесконечной цепной дроби, мы просто получаем другое иррациональное число. Подобно тому, как изменение хотя бы одного знака в десятичной записи иррационального числа приводит к совершенно другому числу. Ещё раз повторим, что любое изменение в

цепной дроби, в частности золотой константы, это попросту переход к другому числу, геометрически – к другой точке на числовой оси. А конкретные числа, или точки на оси, не обобщаются. Это, кстати, элементарные сведения из начальных классов математического ликбеза. К обобщениям золотого сечения они отношения не имеют и парадоксы здесь ни при чём. Хотя, приходится признать, что наряду с логическими парадоксами встречаются парадоксы, высосанные из пальца. Видимо, есть немногочисленная, надо надеяться, категория исследователей, сделавшая “божественную пропорцию” объектом культового поклонения и до помрачнения рассудка ненавидящая идею её обобщения, которую они к тому же неверно себе представляют и не имеют для отстаивания своей позиции серьезной аргументации.

4. Даже если забыть о наиболее надёжных примерах (филлотаксис, фуллерены, квазикристаллы) приложений «математики гармонии» (теории золотого сечения) к природе, сегодня это, по сути, целая область математики, в которую вовлечены сотни профессионалов и тысячи любителей и которой интересуются сотни тысяч, если не миллионы, любопытствующих. Центральный числовой элемент теории золотого сечения это, пожалуй, константа Ф с «гомологами» («золотые p-пропорции», «металлические пропорции»); теоретическая первооснова – принцип минимума (оптимума, экстремума, наименьшего действия); конструктивное начало – рекурсия, экспонента, алгебраическое уравнение и некоторые другие правила построения математических моделей и алгоритмов; наиболее плодотворная сфера исследования – свойства числовых последовательностей, частным случаем которых является классический ряд Фибоначчи; “высший пилотаж” – связь золотой константы с фундаментальными математическими константами и появление константы Ф в задачах поиска и на нахождение экстремума; наглядная демонстрация значимости золотого сечения – геометрические фигуры и тела, включая пентаграмму, золотую логарифмическую спираль, платоновы, архимедовы, каталановы и

некоторые другие тела; исторический первоисточник – деление отрезка в среднем и крайнем отношении.

5. Среди бесчисленнного множества линейных рекуррентных соотношений, частным случаем которых является рекуррентное соотношение Фибоначчи $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}; F_0 = 0, F_1 = 1$, можно выделить два типа рекуррентных соотношений, которые активно используются в «математике гармонии» [47]. Первое – это рекуррентное соотношение для p-чисел Фибоначчи: $F_p(n+1) = F_p(n+1) + F_p(n-p-1); F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p) = 1$; второе – это рекуррентное соотношение для λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n+1) = \lambda F_\lambda(n) + F_\lambda(n-1); F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1$ «Родовым признаком» для p-чисел Фибоначчи является «треугольник Паскаля», который их порождает («диагональные суммы» треугольника Паскаля); «родовым признаком» для λ-чисел Фибоначчи является «обобщенная формула Кассини».
6. Среди бесчисленного множества алгебраических уравнений типа $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ можно выделить, по меньшей мере, два вида алгебраических уравнений типа $x^{p+1} - x^p = 1, (p = 1, 2, 3, ...)$, порождающие «золотые p-пропорции», и $x^2 - \lambda x - 1 = 0$, порождающие «металлические пропорции». Применительно к «золотым p-пропорциям» «родовым признаком» является «обобщенная формула Кеплера»; в то время как для «металлических пропорций» «родовым признаком» является «правило сохранения мантиссы». Таким образом, в современной «математике гармонии» [47] успешно развиваются две обобщенные теории «золотого сечения: первая основана на «золотых p-пропорциях» , вторая – на «металлических пропорциях».
7. Это не означает, что не может возникнуть других обобщенных теорий «золотого сечения», но при этом должно быть строго соблюдено правило 3 Гранта Аракеляна – существование уникальных математических свойств,

объединяющих новые «обобщенные золотые пропорции» с классической «золотой пропорцией»».

Глава 17

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ И ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

17.1. Проблемы Гильберта

Как известно, в докладе «Математические проблемы», сделанном на II Международном Конгрессе Математиков, происходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 года, Давид Гильберт (1862-1943) сформулировал свои знаменитые 23 математические проблемы, которые в значительной степени определили развитие математики 20-го века. Этот доклад, охватывающий проблемы математики в целом, был несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах и является уникальным явлением в истории математики и в математической литературе.

Не подлежит сомнению, что «Проблемы Гильберта» оказали исключительное влияние на развитие современной математики. Эти проблемы охватывают почти все направления математической мысли; это объясняется тем, что Гильберт был математиком, в котором сила математической мысли соединялась с редкой широтой и разносторонностью.

Разносторонность эта была, если так можно выразиться, вполне сознательной: Гильберт постоянно делает упор на то, что математика едина, что различные ее части находятся в постоянном взаимодействии между собой и с науками о природе и что в этом взаимодействии не только ключ к пониманию самой сущности математики, но и лучшее средство против расщепления математики на отдельные, не связанные друг с другом части, - опасности, которая в наше время огромного количественного роста и устрашающей специализации математических исследований постоянно заставляет о себе думать.

В Википедии можно найти список всех 23 Проблем Гильберта (см. Табл.17.1).

Таблица 17.1. Проблемы Гильберта

1	нет консенсуса	Проблема Кантора о мощности континуума (Континуум-гипотеза)
2	нет консенсуса	Непротиворечивость аксиом арифметики.
3	решена	Равносоставность равновеликих многогранников
4	слишком расплывчатая	**Перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими**
5	решена	Все ли непрерывные группы являются группами Ли?
6	не математическая	Математическое изложение аксиом физики
7	решена	Доказать, что число $2^{\sqrt{2}}$ является трансцендентным (или хотя бы иррациональным).
8	открыта	Проблема простых чисел (гипотеза Римана и проблема Гольдбаха)
9	частично решена	Доказательство наиболее общего закона взаимности в любом числовом поле
10	решена	Задача о разрешимости диофантовых уравнений
11	решена	Исследование квадратичных форм с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами
12	открыта	Распространение теоремы Кронекера об абелевых полях на произвольную алгебраическую область рациональности
13	решена	Невозможность решения общего уравнения седьмой степени с помощью функций, зависящих только от двух переменных
14	решена	Доказательство конечной порождённости алгебры инвариантов алгебраической группы
15	частично решена	Строгое обоснование исчислительной геометрии Шуберта
16	частично решена	Топология алгебраических кривых и поверхностей
17	решена	Представление определённых форм в виде суммы квадратов (см. Семнадцатая проблема Гильберта)
18	решена	Конечность числа кристаллографических групп; нерегулярные заполнения пространства конгруэнтными многогранниками; наиболее плотная упаковка шаров(решена???)
19	решена	Всегда ли решения регулярной вариационной задачи Лагранжа являются аналитическими?
20	решена	Общая задача о граничных условиях
21	решена	Доказательство существования линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии
22	решена	Униформизация аналитических зависимостей с помощью автоморфных функций
23	решена	Развитие методов вариационного исчисления

Анализ этой таблицы показывает, что на данный момент решены 16 проблем из 23. По 1-й и 2-й проблемам у математиков нет консенсуса, 4-я проблема сформулирована слишком расплывчато и нечётко поставлена, чтобы судить о том, решена она или нет, 6-я проблема не является математической, 8-я проблема открыта, 9-я проблема решена только частично, 12-я проблема открыта, 15-я и 16-я проблемы решены только частично.

17.2. Еще раз о решении 10-й проблемы Гильберта

Диофантовы уравнения. Как известно, 10-я проблема Гильберта называется "Задачей о разрешении диофантовых уравнений" и для того, чтобы объяснить суть этой проблемы, мы должны возвратиться на 17 веков назад к античному математику Диофанту. Мы очень мало знаем о Диофанте, который считается последним великим математиком античности. Предполагается, что он жил в середине 3-го столетия н.э. и прожил 84 года. Его творчество сыграло настолько большую роль в истории алгебры, что многие историки математики потратили немало усилий, чтобы определить время его жизни. Основным произведением Диофанта была "Арифметика". Именно это фундаментальное математическое сочинение, состоящее из 13 книг, явилось поворотным пунктом в развитии алгебры и теории чисел. Именно в этой книге произошел окончательный отказ от так называемой "геометрической алгебры" (когда решение алгебраической задачи сводилось к геометрическому построению с помощью циркуля и линейки) и переход к новому математическому языку, так называемой "буквенной алгебре".

Как известно, одной из важнейших задач алгебры всегда было решение алгебраических уравнений, к которым сводятся многие задачи математики. Решения уравнений первой и второй степени "в радикалах" не представляли особых трудностей для математиков (по крайней мере, любой школьник знает общую формулу для вычисления корней алгебраического уравнения второй степени), решение уравнений третьей степени оказалось более сложным и общая формула для вычисления корней такого уравнения была найдена только в 16-м веке итальянскими математиками Ферро и Тарталья. Одной из самых важных задач теории алгебраических уравнений в 17-18-м веках стало отыскание формулы для решения уравнений 5-й степени. Эти исследования были завершены работами французского математика Эвариста Галуа и привели к созданию новой алгебры.

Что же нового в развитие этой области внес Диофант и почему его имя до сих пор не сходит со страниц математических учебников? Диофант одним из первых начал заниматься решением "алгебраических уравнений в области целых чисел". Обозначим такое уравнение через $P(x, y,...) = 0$, где $P(x, y,...)$ является полиномом с целыми коэффициентами и одним, двумя, тремя и более переменными ("неизвестными"). Примерами таких уравнений могут быть: $7x^2 - 5xy - 3y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$ или $x^3 + y^3 = z^3$. Проблема состоит в следующем: дано алгебраическое уравнение $P(x, y,...) = 0$, как определить - имеет ли оно решения в области целых чисел, и если имеет, то как их найти наиболее эффективно? Такие уравнения называются Диофантовыми уравнениями.

Великая теорема Ферма. Рассмотрим, алгебраическое уравнение $x^2 + y^2 = z^2$, связывающее стороны x, y, z прямоугольного треугольника. Натуральные числа x, y, z, являющиеся решениями этого уравнения, называются "пифагоровыми тройками". Таковы, например числа $3, 4, 5$. Треугольник с такими сторонами назывался "священным" или "египетским" и был положен древними египтянами в основу Пирамиды Хефрена. Ясно, что уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ является простейшим примером «диофантового уравнения». В главе 2, изучая приложения чисел Фибоначчи и Люка, мы показали, как с помощью чисел Фибоначи и Люка задать бесконечное число «пифагоровых троек».

К работам Диофанта имеют непосредственное отношение и математические исследования французского математика Пьера Ферма. Считается, что именно с работ Ферма началась новая волна в развитии теории чисел. И одна из его задач - это знаменитое "уравнение Ферма": $x^n + y^n = z^n$. Это уравнение Ферма привел на полях принадлежащей ему книги Диофанта, где он сделал следующую приписку:

«Невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, большую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля слишком узки».

Другими словами, согласно утверждению Ферма, уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет решений в натуральных числах. С вышеуказанного высказывания и начинается одна из самых волнующих историй в математике - история «Великой теоремы Ферма»" (так стали называть это утверждение). И то, что Ферма не оставил доказательства, никого не удивило - он почти не оставлял доказательств своих арифметических теорем.

Многие великие математики (Эйлер, Лежандр, Куммер) участвовали в доказательстве «Великой теоремы Ферма» и привели довольно сложные доказательства ее справедливости для частных случаев. В этой связи утверждение Ферма о том, что его доказательство этой теоремы "не уместилось на полях", кажется просто невероятным.

Считается, что последнюю точку в решении «Великой теоремы Ферма» поставил в 1993 году Andrew Wiles, английский математик, работающий в Принстонском университете (США).

Десятая проблема Гильберта В своей лекции, прочитанной 8-го августа 1900 г. в Париже на заседании Второго Математического Конгресса Математиков известный математик Давид Гильберт изложил свои знаменитые 23 математические проблемы для математиков наступающего 20-го столетия. При этом 10-я проблема Гильберта была сформулирована следующим образом.

«Задано Диофантово уравнение с некоторым числом неизвестных и рациональными целыми коэффициентами. Необходимо придумать процедуру, которая могла определить за конечное число операций - является ли уравнение разрешимым в рациональных целых числах».

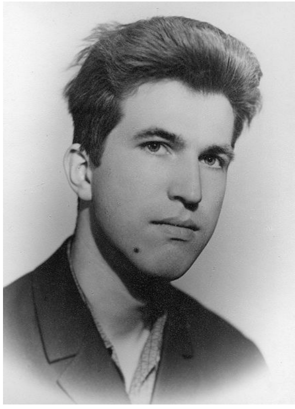
Заметим, что 10-я проблема Гильберта относится к так называемым "decision problem", то есть, проблема состоит из бесконечного количества индивидуальных проблем, каждая из которых требует определенного ответа: ДА или НЕТ. Суть этой проблемы состоит в том, чтобы найти единый метод, который давал бы ответ о разрешимости для любой индивидуальной суб-проблеме. Со времени Диофанта специалисты в теории чисел нашли решения для большого количества Диофантовых уравнений, а также установили неразрешимость большого числа других Диофантовых уравнений. К сожалению, для различных классов уравнений и даже для различных частных уравнений необходимо было изобретать различные специфические методы. В своей "Десятой Проблеме" Гильберт ставил вопрос об универсальном методе для определения разрешимости Диофантовых уравнений.

Джулия Робинзон. Имя американского математика Джулии Робинзон не может быть отделено от 10-й проблемы Гильберта. Рассмотрим научную биографию Джулии Робинзон. Она родилась 8-го декабря 1919 г. и умерла 30-го июля 1985 г. в США. После окончания средней школы в Сан Диего она поступила в государственный колледж Сан Диего. Затем она перевелась в Калифорнийский университет в Беркли. Робинзон получила докторскую степень в 1948 г. и в этом же году она начала работать над 10-й проблемой Гильберта: найти эффективный способ, чтобы определить: является ли разрешимым Диофантово уравнение. Вместе с Мартином Девисом и Хиллари Путман она получила ряд математических результатов, которые являлись существенным вкладом в решение десятой проблемы Гильберта. Она также сделала важную работу по этой проблеме вместе с Матиясевичем, после того как он дал решение десятой проблемы Гильберта в 1970 г.

Джулия Робинзон получила много почетных наград. Она была первой женщиной, которая была выбрана в Национальную Академию наук США в 1975 г., первой женщиной, которая стала в 1978 г. должностным лицом Американского математического общества, и первой женщиной - Президентом этого Общества в

1982 г. Она была избрана в Американскую Академию искусств и наук в 1984. Она была награждена MacArthur Fellowship в 1983 г. в честь признания ее вклада в развитие математики.

Юрий Матиясевич. В главе 2, обсуждая примеры эффективного использования чисел Фибоначчи в современной математике, в качестве примера мы привели решение 10-й проблемы Гильберта. Это решение было получено в 1970 г. молодым советским математиком Юрием Матиясевичем.



Ю́рий Матиясевич— советский и российский математик, исследователь Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, член экспертной комиссии РСОШ по математике, академик РАН, доктор физико-математических наук. Внёс существенный вклад в теорию вычислимости, завершив решение десятой проблемы Гильберта

Юрий Матиясевич родился 2-го марта 1947 г. в Ленинграде. В 1969 г. он закончил кафедру математики и механики Ленинградского государственного университета и продолжил свою учебу в качестве аспиранта в Институте математики им. Стеклова (Ленинградское отделение). С 1970 г. и до настоящего времени он работает в этом институте в настоящее время в качестве заведующего Лаборатории математической логики. Имя Юрия Матиясевича стало широко известным в 1970 г., когда он завершил последний недостающий шаг в "негативном решении" 10-й проблемы Гильберта.

Юрий Матиясевич является почетным доктором Universite d'Auvergne (Франция, 1966) и член-корреспондентом Российской Академии наук (1997 г.). Историю своего открытия и историю своего сотрудничества с Джулией Робинзон он изложил в своих двух замечательных статьях "Десятая проблема Гильберта: двусторонний мост между теорией чисел и компьютерной наукой" и "Мое сотрудничество с Джулией Робинзон" (http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/Julia/). Как следует из этих статей, он начал изучать десятую проблему Гильберта в 1965 г., когда он еще был второкурсником кафедры математики и механики Ленинградского государственного университета. Именно в этот период он познакомился со статьей Мартина Девиса, Джулии Робинзон и Хилари Путман по десятой проблеме Гильберта. Эта и другие статьи Джулии Робинсон, а также персональный контакт с Джулией Робинзон оказали огромное влияние на работы Матиясевича.

О решении 10-й проблемы Гильберта. Естественно, мы не можем рассказать нашим читателем все математические детали рассуждений Юрия Матиясевича, которые привели его к решению 10-й проблемы Гильберта. Мы попытаемся изложить только те общие идеи этого решения, которые связаны с числами Фибоначчи. Для этого предоставим слово Юрию Матиясевичу:

"Идея состояла в следующем. В компьютере для представления информации используются двоичные слова вместо чисел. Существует много способов представления слов с помощью чисел. Один из таких методов естественным способом связан с Диофантовыми уравнениями. А именно, нетрудно показать, что каждая матрица размером (2×2): $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ с элементами m, являющимися неотрицательными целыми числами и детерминантом, равным 1, может быть представлена единственным способом как произведение матриц $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Очевидно, что всякое произведение таких матриц имеет в качестве своих элементов неотрицательные целые числа и детерминант, равный 1. Отсюда вытекает, что мы можем единственным образом представить двоичное слово с помощью четырех чисел ($(m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22})$таких, что $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = M_{i_1} \ldots M_{i_m}$; при этом эти числа удовлетворяют следующему Диофантовому уравнению:

$m_{11} \times m_{22} - m_{21} \times m_{12} = 1$. При таком представлении слов с помощью матрицы, последовательное соединение слов соответствует матричному умножению и таким образом оно может быть легко выражено как система Диофантовых уравнений. Такой подход открывает путь преобразования произвольной системы уравнений для двоичных слов в эквивалентные Диофантовы уравнения. Многие "проблемы разрешимости" относительно двоичных слов являются неразрешимыми, так что естественно было бы попытаться атаковать 10-ю проблему Гильберта путем проверки на неразрешимость систем уравнений для слов".

Из этих рассуждений вытекает основная идея Матииясевича - свести решение проблемы неразрешимости Диофантовых уравнений к проверке неразрешимости систем уравнений для двоичных слов!

И сейчас мы приблизились к использованию чисел Фибоначчи для решения 10-й проблемы Гильберта. Матиясевич пишет:

«Мой следующий шаг состоял в том, чтобы рассмотреть широкий класс уравнений для двоичных слов дополнительными условиями. Так как конечной целью всегда была 10-я проблема Гильберта, я мог бы рассматривать только такие условия, которые (при подходящем кодировании) были бы представлены Диофантовыми уравнениями. Таким путем я пришел к таким уравнениями, которые я назвал "equations in words and length" (уравнениями с ограниченными длинами серий). Приведение к таким уравнениям было основано на знаменитых числах Фибоначчи. Хорошо известно, что каждое натуральное число может быть представлено единственным образом как сумма различных чисел Фибоначчи, в которой нет двух соседних чисел Фибоначчи (так называемое представление Цекендорфа). Таким образом, мы можем рассматривать натуральные числа как двоичные слова с дополнительным условием, что в таких двоичных словах две 1 рядом не встречаются. Я изловчился показать, что при таком представлении чисел двоичными словами как последовательности слов, так и уравнения, равные длине двух слов, могут быть выражены Диофантовыми уравнениями».

Представление Цекендорфа. Вряд ли бельгийский врач Эдуард Цекендорф (1901-1983) мог предполагать, что его увлечение математикой окажется настолько серьезным, что один из его математических результатов будет использован при решении 10-й проблемы Гильберта. Речь идет о знаменитых "суммах Цекендорфа" или "представлении Цекендорфа". В 1939 г. Цекендорф опубликовал статью, в которой доказал теорему о том, что каждое положительное целое число имеет единственное представление в виде суммы чисел Фибоначчи, в которой два соседних числа Фибоначчи никогда не используются. Поясним эту теорему на простом примере. Предположим, что требуется представить в коде Фибоначчи число 30. Выберем в качестве весов разрядов для такого представления следующие числа Фибоначчи: $\{1,1,2,3,5.8.13,21\}$. Тогда существует несколько способов представления числа 30 в виде суммы чисел Фибоначчи:

$$30 = 21+8+1 = 21+5+3+1 = 13+8+5+3+1 = 13+8+5+2+1+1.$$

Но среди них можно выделить только одно представление $30 = 21+8+1$, в котором два соседних числа Фибоначчи никогда рядом не встречаются. Цекендорф доказал, что этот результат носит общий характер и справедлив для любого натурального числа.

Заметим, что указанное выше "представление Цекендорфа" называется "минимальной формой". Именно идея "минимальной формы" лежит в основе рассмотренной в части 2 "Фибоначчиевой арифметики". Заметим также, что исследование "сумм Цекендорфа" явилось предметом многих статей, опубликованных в "The Fibonacci Quarterly".

Озарение Джулии Робинзон. Однако идея использования чисел Фибоначчи и "представления Цекендорфа" была лишь некоторым важным шагом в решении 10-й проблемы Гильберта. Матиясевич вспоминает: "однако, я был не способен показать неразрешимость уравнений "in words and length" (и эта проблема оставалась открытой)". Нужна была новая идея, которая могла бы продвинуть вперед решение проблемы. И автором такой идеи стала Джулия Робинзон. Однако предоставим слово Юрию Матиясевичу:

"Однажды осенью 1969 г. кто-то из моих коллег сказал мне: "Беги в библиотеку. В последнем издании трудов Американского математического общества опубликована новая статья Джулии Робинзон!" Но я твердо решил отложить 10-ю проблему Гильберта на потом. И я сказал себе: "Хорошо, что Джулия Робинзон продолжает заниматься этой проблемой, но я не могу тратить свое время на ее решение". И поэтому я не побежал в библиотеку. Но где-то в "математических небесах" был Бог или Богиня, которые не позволили мне отказаться от чтения новой статьи Джулии Робинзон. С учетом моих предыдущих публикаций по этой проблеме, меня рассматривали как специалиста по этой проблеме и поэтому статья была прислана мне на отзыв в связи с ее публикацией в "Реферативном журнале Математика", советском аналоге "Mathematical Reviews". Таким образом, я вынужден был прочитать статью Джулии Робинзон и 11 декабря я представил ее на нашем семинаре в Математическом институте имени Стеклова. 10-я проблема Гильберта вновь захватила меня. Я сразу же увидел, что Джулия Робинзон имела свежую и чудесную идею. Эта идея была связана со специальной формой уравнения Пэлли»

Мы не хотели бы углубляться в далеко не тривиальные математические рассуждения Джулии Робинзон и примем на веру ее выдающийся математический результат и снова обратимся к статье Юрия Матиясевича, чтобы оценить влияние этого результата на его математическое открытие. Самое главное, что основные идеи Джулии Робинзон и Юрия Матиясевича в решении 10-й проблемы Гильберта свелись к использоваанию чисел Пелли и чисел Фибоначчи.

Почему именно Юрию Матиясевичу удалось решить 10-ю проблему Гильберта? Ответ на этот вопрос дал сам Юрий Матиясевич:

Благодаря моей предыдущей работе, я понимал важность чисел Фибоначчи для решения 10-й проблемы Гильберта. Вот почему в течение лета 1969 года я читал с огромным интересом третье расширенное издание популярной книги по числам Фибоначчи, написанной Н.Н. Воробьевым из Ленинграда. Кажется невероятным, что в 20-м столетии можно было найти что-то новое о числах, введенных Фибоначчи еще в 13-м столетии в связи с размножением кроликов. Однако, новое издание книги содержало, кроме традиционного материала, некоторые оригинальные результаты автора. На самом деле Воробьев получил на четверть столетия раньше, но он никогда их не публиковал. Его результаты привлекли мое внимание сразу же, но я был еще не способен использовать их непосредственно для построения Диофантовых представлений экспоненциального типа».

Оценивая влияние Воробьева и Робинзон на его решение 10-й проблемы Гильберта, Матиясевич пишет:

«В период, когда я уже не думал о Диофантовых уравнениях, теорема Воробьева и новые идеи Джулии Робинзон привели меня к отрицательному решению 10-й проблемы Гильберта. В январе 1970 г. я впервые выступил с докладом по Диофантовым уравнениям экспоненциального типа ... Удивительно, для того, чтобы сконструировать Диофантово представление я нуждался в доказательстве уже нового чисто теоретико-числового результата, касающегося чисел Фибоначчи, а именно, что k-е число Фибоначчи делится квадратом l-го числа Фибоначчи, тогда и только тогда, когда k делится l-м числом Фибоначчи. Это свойство нетрудно доказать; однако поразительно то, что этот замечательный факт не был открыт даже экспериментально со времени Фибоначчи».

И далее Юрий Матиясевич высоко оценил роль Николая Воробьева и Джулии Робинзон в решении 10-й проблемы Гильберта:

«Мое оригинальное доказательство ... основывалось на теореме, доказанной в 1942 г. советским математиком Николаем Воробьевым, но опубликованной только в третьем расширенном издании его популярной книги. ... После того, как я прочитал статью Джулии Робинзон, я сразу же увидел, что теорема Воробьева может быть очень полезной. Джулия Робинзон не видела 3-го издания книги Воробьева до тех пор, пока она не получила копию от меня в 1970 г. Кто мог сказать, что бы случилось, если бы Воробьев включил свою теорему в первое издание своей книги? Возможно, что 10-я проблема Гильберта была решена на десять лет раньше!»

Джулия Робинзон и Юрий Матиясевич. Первая встреча Джулии Робинзон и Юрия Матиясевича, двух выдающихся математиков современности, состоялась в Бухаресте, где Матиясевич докладывал свои результаты на IV-м Международном Конгрессе по логике, методологии и философии науки. Их первая встреча стала началом их дружбы, которая оказалась весьма продуктивной в творческом отношении. В 1973 г., выдающийся советский математик А.А. Марков праздновал свое семидесятилетие. Его коллеги из Компьютерного Центра Академии наук СССР решили издать научный сборник в его честь. Юрий Матиясевич был приглашен принять участие в сборнике. По его инициативе его первая совместная с Джулией Робинзон статья была представлена в сборник и издатели согласились с таким предложением. Их вторая совместная статья была опубликована в Acta Arithmetica. В 1974 г. Американское математическое общество организовало Симпозиум "Развитие математики после проблем Гильберта". Юрий Матиясевич был приглашен чтобы сделать доклад по 10-й проблеме Гильберта., но его участие в этом Семинаре не получило необходимой поддержки в бывшем СССР, и поэтому Джулия Робинзон сделала доклад по этой проблеме.

Фото ниже сделано в Калгари в конце 1982 г., когда Юрий Матиясевич находился три месяца в Канаде в качестве участника программы научного обмена между Математическим институтом имени Стеклова и Queen's University at Kingston, Ontario. Джулия Робинзон в то время была очень занята своими новыми обязанностями Президента Американского математического общества, но она посетила Калгари на пути на заседание общества. Мартин Дэвис также прибыл в Калгари на несколько дней.

Слева направо: Мартин Дэвис, Джулия Робинзон, Юрий Матиясевич (Калгари, 1982 г.)

И мы хотели закончить эту статью по истории одного из выдающихся математических открытий словами из письма Джулии Робинзон к Юрию Матиясевичу:

«Действительно, мне очень приятно, что, работая вместе (будучи разделенные тысячами миль), мы делаем, очевидно, больший прогресс, чем если бы каждый из нас работал один».

Заканчивая драматическую историю решения одной из сложнейших математических проблем – 10-й проблемы Гильберта, мы должны еще раз подчеркнуть тот факт, что именно числа Фибоначчи – одно из выдающихся математических открытий средневековой математики – стало причиной этого выдающегося математического открытия. Как показали дальнейшие события, не только 10-ю проблему Гильберта, но также 4-ю проблема Гильберта, которая в течение 20-го столетия была камнем преткновения для математиков, удалось решить, основываясь на достижениях «математики гармонии» [47].

17.3. История 4-й проблемы Гильберта

Естественно, что Гильберт не мог пройти мимо нерешенных математических проблем, связанных с неевклидовой геометрией. В качестве геометрий, наиболее близких к евклидовой геометрии, Гильберт называет геометрию Лобачевского (гиперболическую геометрию) и геометрию Римана (эллиптическую геометрию). Саму же 4-ю проблему Гильберт формулирует так:

«Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли ещё с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии».

Детальный анализ всех попыток решения 4-й проблемы Гильберта дан в статье «Еще раз о 4-й проблеме Гильберта» [104], автором которой является известный российский математик доктор физико-математических наук Самуил Арансон. Арансон подчеркивает, что решением 4-й проблемы Гильберта занимались многие математики. История вопроса о научных результатах, относящихся к 4-ой проблеме Гильберта, на русском языке подробно изложена как в самом докладе Гильберта, так и в комментариях этому докладу, сделанных И.М. Ягломом «К четвёртой проблеме Гильберта» в сборнике «Проблемы Гильберта» [105] (эта книга в дальнейшем была переиздана), а также в статье американского геометра Г. Буземана [106].

Первым вкладом в решение этой проблемы считается диссертация немецкого математика Гамеля, защищённая в 1901 г. под руководством Гильберта (на русском языке результаты Гамеля и комментарии к нему читатель может найти в вышеуказанных статьях Г.Буземана и И.М. Яглома). Как указано в этих статьях, «работа Гамеля, разумеется, не исчерпала всего, что можно сказать о четвёртой проблеме Гильберта, другие подходы к которой неоднократно предлагались и позже».

По-видимому, наибольший вклад в решение 4-й проблемы Гильберта был внесен выдающимся советским математиком А.В. Погореловым, автором книги «Четвертая проблема Гильберта» [107]. Аннотация к книге А.В. Погорелова гласит следующее:

«Книга содержит решение известной проблемы Гильберта об определении всех с точностью до изоморфизма реализаций систем аксиом классических геометрий (Евклида, Лобачевского, эллиптической), если в них опустить аксиомы конгруэнтности, содержащие понятие угла, и пополнить эти системы аксиомой «неравенство треугольника». Книга рассчитана на студентов-геометров старших курсов, аспирантов и научных работников».

К сожалению, мировое математическое сообщество не восприняло решение, сделанное А.В. Погореловым, в качестве окончательного решения 4-й проблемы Гильберта, что и отражено в Табл.17.1, взятой из Википедии. Детальный анализ причин, по которым фамилии Гамеля и Погорелова отсутствуют в строке 4 Табл. 17.1, дан в работе Арансона [104].

Несмотря на критическое отношение математиков к 4-й проблеме Гильберта, необходимо подчеркнуть ее чрезвычайную важность для развития математики, в частности, геометрии. Без всякого сомнения, интуиция Гильберта привела его к выводу, что геометрии Лобачевского, Римана и другие известные Гильберту неевклидовые геометрии не исчерпывают все варианты возможных неевклидовых геометрий. 4-я проблема Гильберта нацеливает исследователей на поиск новых неевклидовых геометрий, которые являются ближайшими геометриями к обыкновенной евклидовой геометрии. Именно поэтому решение 4-й проблемы Гильберта, полученное в работах [68-70], можно рассматривать как существенный вклад в решении этой сложнейшей математической проблемы.

17.4. Оригинальное решение 4-й проблемы Гильберта, основанное на гиперболических λ-функциях Фибоначчи

Самуил Арансон. Первая декада 21-го века ознаменовалась беспрецедентным повышением интереса к античной проблеме гармонии и «золотого сечения» На постсоветском пространстве это научное направление начало интенсивно развиваться благодаря деятельности так называемой «Славянской «Золотой» Группы», учрежденной в Киеве в 1992 г., во время проведения 1-го Международного семинара «Золотая Пропорция и Проблемы Гармонии Систем». В 2003 г. эта группа была преобразована в Международный Клуб Золотого Сечения (МКЗС). В 2005 г., по инициативе этого Клуба, на сайте «Академия Тринитаризма» был организован Институт Золотого Сечения. К деятельности МКЗС подключились многие действительно выдающиеся ученые. Одним из них стал доктор физико-математических наук, профессор Самуил Арансон.

Самуил Арансон

В 1990 г. защитил докторскую диссертацию и получил степень доктора физико-математических наук по двум специальностям: дифференциальные уравнения, геометрия и топология. Тема докторской диссертации: «Глобальные задачи качественной теории динамических систем на поверхностях». В 1994 г. присвоено ученое звание профессора по кафедре высшей математики. В 1995 году Указом Президента России присвоено Почётное звание «Заслуженный деятель науки РФ». В 1997 году избран академиком Российской Академии Естествознания.

Самуил Арансон является автором многих оригинальных книг и статей и его публикации охватывают период с 1963 года по 2006 год. Им опубликовано (лично или совместно с другими авторами) более 200 научных работ, среди которых монографии, изданные в России, США, Германии и в других странах, обзоры, статьи, и другие научные материалы, имеющие большое теоретическое и прикладное значение.

К исследованиям в области «золотого сечения» и «математики гармонии» Самуил Арансон подключился в 2007 г. При этом его сразу же заинтересовали математические результаты в области «золотого сечения», которые имели определенное отношение к области его предыдущей профессиональной деятельности, в частности, исследования по гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка [58], «золотым» матрицам» [60], «металлическим пропорциям и гиперболическим λ-функциям Фибоначчи и Люка [66]. Именно эти результаты привели его к «золотой» интерпретации специальной теории относительности и эволюции Вселенной, начиная с «Большого Взрыва» [61] и оригинальному решению 4-й проблемы Гильберта, касающейся гиперболической геометрии [68-70]. Эти необычные результаты заинтересовали западное математическое сообщество и были опубликованы в математических журналах "Congressus Numerantium" [61] и "Applied Mathematics" [68-70]

Классическая модель плоскости Лобачевского. Как известно, классическая модель плоскости Лобачевского в псевдосферических координатах $(u,v), 0<u<+\infty, 0<v<+\infty$, имеющей гауссову кривизну $K=-1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$(ds)^2=(du)^2+sh^2(u)(dv)^2, \tag{17.1}$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус. Как вытекает из (17.1), ключевую роль в (17.1) играет гиперболический синус.

Выше мы использовали понятие «гауссова кривизна». Что это такое? Чтобы дать наиболее популярное объяснение этого довольно сложного математического понятия, мы рассмотрим различные поверхности, изображенные на Рис.17.1.

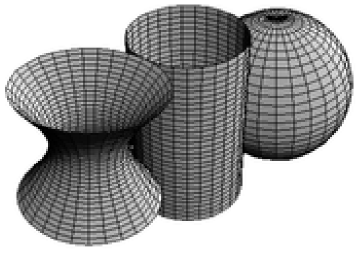


Рис.17.1. Поверхности с различной кривизной

Поверхность слева (однополостный гиперболоид) имеет отрицательную кривизну, поверхность в центре (цилиндр) не имеет кривизны или является поверхностью с нулевой кривизной, наконец, поверхность справа (сфера) является поверхностью с положительной кривизной. Для измерения кривизны поверхности в заданной точке предложены различные подходы. Один из них разработан Гауссом. Геометрия Лобачевского приводят к поверхностям с отрицательной кривизной, в частности, с гауссовой кривизной $K=-1$.

«Золотые» метрические λ-формы плоскости Лобачевского. Как было доказано выше, существует бесконечное количество гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых выражениями (16.77)-(16.80). Их частными случаями (для $\lambda=1$) являются симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка, введенные в работе [58], а также классические гиперболические функции, соответствующие значению $\lambda_e = e - \frac{1}{e} = 2sh(1) \approx 2.35040238.$ При этом, как показано выше, гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка (16.77)-(16.80) сохраняют все известные свойства классических гиперболических функций и поэтому могут быть использованы для введения новых метрических форм плоскости Лобачевского. Эта идея и лежит в основе статей Алексея Стахова и Самуила Арансона [68-70].

Развивая идею метрической формы плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (17.1), в работах [68-70] предложено бесконечное множество метрических форм плоскости Лобачевского, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи (16.77), (16.78). Доказано [68-70], что эти метрические формы, задаваемые в координатах $(u,v), 0<u<+\infty, -\infty<v<+\infty$, имеют гауссову кривизну $K=-1$ и представляются в виде:

$$(ds)^2=\ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2+\frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \qquad (17.2)$$

где $\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - металлическая пропорция и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи (16.77). Формы (17.2) названы в [68-70] метрическими λ-формами плоскости Лобачевского.

Опуская промежуточные доказательства, приведенные в [68-70], мы рассмотрим только наиболее характерные частные случаи метрических λ-форм плоскости Лобачевского, задаваемых (17.2).

«Золотая» метрическая форма плоскости Лобачевского. Для случая $\lambda=1$ мы имеем $\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803$ – золотая пропорция, и, следовательно, метрическая форма (17.2) сводится к следующему:

$$(ds)^2=\ln^2(\Phi_1)(du)^2+\frac{5}{4}\left[sFs(u)\right]^2(dv)^2, \qquad (17.3)$$

где $\ln^2(\Phi_1)=\ln^2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\approx 0.231565$ и $sFs(u)=\frac{\Phi^u-\Phi^{-u}}{\sqrt{5}}$ - симметричный гиперболический синус Фибоначчи, задаваемый (14.35).

Будем называть метрическую форму (17.3) «золотой» метрической формой плоскости Лобачевского.

«Серебряная» метрическая форма плоскости Лобачевского. Для случая $\lambda=2$ мы имеем $\Phi_2=1+\sqrt{2}\approx 2.1421$ (серебряная пропорция), и, следовательно, метрическая форма (17.2) сводится к следующему:

$$\left(ds\right)^2 = \ln^2\left(\Phi_2\right)\left(du\right)^2 + 2\left[sF_2\left(u\right)\right]^2\left(dv\right)^2, \tag{17.4}$$

где $\ln^2\left(\Phi_2\right) \approx 0.776819$ и $sF_2\left(u\right) = \frac{\Phi_2^u - \Phi_2^{-u}}{2\sqrt{2}}$ - гиперболический 2-синус Фибоначчи, задаваемый (16.84).

Будем называть метрическую форму (17.4) «серебряной» метрической формой плоскости Лобачевского.

«**Бронзовая» метрическая форма плоскости Лобачевского.** Для случая $\lambda = 3$ мы имеем $\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$ (бронзовая пропорция), и, следовательно, форма (17.2) сводится к следующему:

$$\left(ds\right)^2 = \ln^2\left(\Phi_3\right)\left(du\right)^2 + \frac{13}{4}\left[sF_3\left(u\right)\right]^2\left(dv\right)^2, \tag{17.5}$$

где $\ln^2\left(\Phi_3\right) \approx 1.42746$ и $sF_3\left(u\right) = \frac{\Phi_3^u - \Phi_3^{-u}}{\sqrt{13}}$ - гиперболический 3-синус Фибоначчи, задаваемый (16.88).

Будем называть метрическую форму (17. 5) «бронзовой» метрической формой плоскости Лобачевского.

«**Медная» метрическая форма плоскости Лобачевского.** Для случая $\lambda = 4$ мы имеем $\Phi_4 = 2 + \sqrt{5} \approx 4.23607$ (медная пропорция), и, следовательно, форма (17.2) сводится к следующему:

$$\left(ds\right)^2 = \ln^2\left(\Phi_4\right)\left(du\right)^2 + 5\left[sF_4\left(u\right)\right]^2\left(dv\right)^2, \tag{17.6}$$

где $\ln^2\left(\Phi_4\right) \approx 2.08408$ и $sF_4\left(u\right) = \frac{\Phi_4^u - \Phi_4^{-u}}{2\sqrt{5}}$ - гиперболический 4-синус Фибоначчи, задаваемый (16.92).

Будем называть метрическую форму (17.6) «медной» метрической формой плоскости Лобачевского.

Классическая метрическая форма плоскости Лобачевского. Для случая $\lambda = \lambda_e = 2sh(1) \approx 2.350402$ мы имеем $\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$ (число Непера), и, следовательно, форма (17.2) сводится к выражению (17.1), то есть, к известной классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой в псевдогеодезических координатах $(u, v),\ 0 < u < +\infty,\ 0 < v < +\infty,$.

В Табл.17.2 сведены выражения для всех рассмотренных выше частных случаев метрических λ-форм плоскости Лобачевского.

Таблица 17.2. Метрические $\lambda -$формы Лобачевского

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая $\lambda -$форма Лобачевского	$\lambda > 0$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}[sF_\lambda(u)]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda = 1$	$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_1)(du)^2 + \frac{5}{4}[sFs(u)]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda = 2$	$\Phi_2 = 1+\sqrt{2} \approx 2.1421$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_2)(du)^2 + 2[sF_2(u)]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda = 3$	$\Phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3.30278$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_3)(du)^2 + \frac{13}{4}[sF_3(u)]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda = 4$	$\Phi_4 = 2+\sqrt{5} \approx 4.23607$	$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_4)(du)^2 + 5[sF_4(u)]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e \approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e} = e \approx 2.7182$	$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2$

Общий итог исследования, выполненного в работах [68-70], состоит в том, что получено бесконечное множество метрических $\lambda -$форм плоскости Лобачевского ($\lambda > 0$-заданное положительное число), задаваемых выражением (17.2). Все эти формы изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (17.1). А это означает, что полученные в работах [68-70] новые модели плоскости Лобачевского, основанные на «металлических пропорциях» (16.44), вместе с классическими геометриями Лобачевского, Римана и другими известными неевклидовыми геометриями “могут рассматриваться как ближайшие геометрии к обыкновенной геометрии Евклида» (Давид Гильберт).

Таким образом, результаты, полученные в работах [68-70], являются определенным вкладом в решение 4-й проблемы Гильберта, которая считается одной из сложнейших проблем Гильберта. Ясно, что это решение не может рассматриваться как окончательное решение этой важной математической проблемы. И оно, несомненно, будет стимулировать математиков в поисках ее новых решений.

17.5. Новая задача для теоретического естествознания

Возникает вопрос: имеет ли решение 4-й проблемы Гильберта какое-либо прикладное значение? Перед тем, как дать ответ на этот вопрос, заметим, что все формулы, приведенные в Табл.16.12, так же, как и формулы, приведенные в Табл.16.11 и другие замечательные тождества (16.108), (16.109), (16.111), (16.112), (16.116)-(16.118), вызывают чувство эстетического наслаждения. Математическая красота этих формул завораживает, то есть, они в полной мере удовлетворяют «принципу математической красоты» Дирака. Теоретическое значение этих формул не вызывает сомнений. Возникает однако вопрос: в чем состоит прикладное значение введенных выше гиперболических λ-функции Фибоначчи и Люка и вытекающего из них решения 4-й проблемы Гильберта? Для ответа на этот вопрос мы должны еще раз обратиться к «геометрии Боднара» [24]. Новая геометрическая теория филлотаксиса, основанная на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи, вселяет надежду, что гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка и новые «геометрии Лобачевского», вытекающие из решения 4-й проблемы Гильберта, найдут практические приложения в современной науке. «Геометрия Боднара» показывает, что «мир филлотаксиса», одного из самых удивительных явлений ботаники, является «гиперболическим миром», основанным на ГФФЛ, основанием которых является классическая «золотая пропорция». При этом, к этому гиперболическому миру относится огромное количество ботанических объектов, с которыми мы сталкивемся в окружающей на природе: сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника, корзинки цветов, деревья и т.д.. Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте». Эта гипотеза, выдвинутая Боднаром, оказалась весьма плодотворной и привела к созданию новой геометрической теории филлотаксиса, имеющей огромное междисциплинарное значение [24].

Однако, иперболичесие функции Фибоначчи и Люка являются частным случаем гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка (16.77)-(16.80). Последние основываются на «металлических пропорциях» (16.44), в частности, на «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим видам «металлических пропорций». В этой связи у нас есть все основания высказать предположение, что и другие типы гиперболических λ-функций, задаваемых (16.77)-(16.80), могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке были неизвестны гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка и перед ней никто не ставил такой задачи. Основываясь на блестящий успех «геометрии Боднара» [24], мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на других классах гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (16.77)-(16.80).

При этом, возможно, первым кандидатом на «революцию» в естествознании может стать «серебряная пропорция» $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ и основанные на ней «серебряные» гиперболические функции, задаваемые (16.84)-(16.87).

Интерес к «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ и «серебряным» гиперболическим функциям значительно возрос в последние годы. В этой связи особый интерес представляет статья Олега Боднара «Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций» [103] и статья [62] известного российского исследователя Александра Татаренко. В статье [62] Александр

Татаренко развивает теорию T_m-гармоний, которые по существу совпадают с «металлическими пропорциями». При этом особую роль в дальнейшем развитии теоретического естествознания он отводит «серебряной» пропорции $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$, которую он называет T_2-гармонией:

«Важнейшим и неожиданным результатом исследований T_m-гармоний было установление двух фактов:

1) вторая Золотая $T_{m=\pm 2} = \sqrt{2} \pm 1$- гармония (а не первая — согласно нумерации в ряде $T_{\pm m}$-чисел — классическая «золотая пропорция» Ф) является доминантой, царствующей в беспредельном мире T_m-гармоний.

2) «функцией» второй Золотой $T_{m\pm 2}$-гармонии является число $\sqrt{2}$ - реликтовое число – корень из двух, встречающийся в архи-громадном множестве формул и закономерностей различных областей естествознания, что равнозначно причастности T_2 непосредственно или косвенно ко множеству (а возможно и ко всем) законов Природы и ее констант. Таким образом T_2 буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам.

Установление факта доминантности T_2-гармонии, а с ней и особого статуса ее «функции» $\sqrt{2}$ является заключительным аккордом — важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птоломеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника.

Требуется кардинально новое мышление о Гармонии Мира».

Таким образом, Татаренко обращает особое внимание на «серебряную» пропорцию $T_2 = 1+\sqrt{2}$, которая «буквально пронизывает все мироздание, являясь его несущим каркасом – суперфундаментальной константой, не знающей ограничений, свойственных всем без исключения известным физическим константам». Более того, он считает введение «серебряной» пропорции»

$T_2 = 1+\sqrt{2}$ в современную науку «важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птолемеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника».

Комментарии к главам 16 и 17. Исследования, выполненные в работах [68-70], затрагивают широкий комплекс фундаментальных проблем современной науки, которые восходят в своих истоках к Началам Евклида. Эти исследования привели к следующим результатам:

1. Первый результат касается неожиданной взаимосвязи двух математических проблем, сформулированных в «Началах» Евклида – V-го постулата Евклида и задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении. Эта взаимосвязь никак не изучалась ранее. Каждая из этих проблем оказала существенное влияние на развитие математики и науки в целом.

Изучение V-го постулата Евклида привело в 19-м веке к созданию геометрии Лобачевского, которая отнсится к разряду крупнейших математических открытий 19-го века [52]. Геометрия Лобачевского основана на классических гиперболических функциях и может рассматриваться как «прорыв» гиперболических представлений в математике и теоретической физике.

Задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении (Теорема II.11 «Начал» Евклида), позже названная золотым сечением, привела в начале 21-го века к созданию так называемым гиперболическим λ-функциям Фибоначчи и Люка [66], основанным на золотой пропорции и ее обобщении – металлических пропорциях.

Таким образом, две древние математические проблемы - V-й постулат Евклида, который привел к открытию гиперболической геометрии, и золотое сечение, которое привело к созданию нового класса гиперболических функций, – объединились в рамках теории гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка [66]. И этот факт является главным историческим и методологическим результатом работ [68-70].

2. Второй результат касается создания нового класса гиперболических функций [66], которые могут быть использованы для моделирования новых «гиперболических миров» природы. Гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка ставят перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи и Люка.

3. Третий результат касается решения 4-й проблемы Гильберта – одной из 23 математических проблем, сформулированных в 1900 г. Давидом Гильбертом. Интерес к гиперболической геометрии, которая, начиная с Лобачевского, изучалась в течение 19-го века многими выдающимися математиками Больяи, Гауссом, Бельтрами, Клейном, Пуанкаре, Риманом, настолько повысился в конце 19-го столетия, что выдающийся математик Давид Гильберт в своей лекции «Математические проблемы», прочитанной на Втором Международном Конгрессе Математиков (Париж, 1900), выделил проблему гиперболической геометрии в отдельную математическую проблему – 4-ю проблему Гильберта.

В течение 20-го столетия предпринимались попытки ее решения (Гамель, 1901; Погорелов, 1974). В конечном итоге, математики пришли к выводу, что эта проблема была сформулирована Гильбертом весьма расплывчато, что делает затруднительным ее окончательное решение, то есть, математики переложили ответственость за решение 4-й проблемы на самого Гильберта.

Один из основных результатов работ [68-70] состоит в том, что, основываясь на гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка [66], Алексей Стахов и Самуил Арансон получили бесконечное количество метрических $\lambda-$форм плоскости Лобачевского ($\lambda>0$-заданное положительное число), задаваемых выражением (17.2). Все эти формы изометричны классической метрической форме плоскости Лобачевского, задаваемой выражением (17.1). А это означает, что теоретически получено бесконечное количество новых неевклидовых геометрий, которые вместе с геометриями Лобачевского, Римана и другими известными неевклидовыми геометриями (в частности, «геометрией Минковского» и «геометрией Боднара» [24]), “с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии» (Давид Гильберт).

Глава 18

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ: РОЛЬ И МЕСТО В СИСТЕМЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

18.1. Математика: утрата определенности и авторитет природы

Книга Мориса Клайна. В 1980 г. издательство Oxford University Press (New York) опубликовало книгу ”Mathematics. The Loss of Certainty”, автором которой является известный американский историк математики Морис Клайн, Почетный Профессор математики Курантовсого Института математических наук Нью-Йоркского университета. В 1984 г. эта книга была переведена на русский язык [51]. Книга М. Клайна заставила задуматься математиков над плачевным состоянием современной математики, в котором она оказалась после возникновения нового кризиса в ее основаниях, который возник в начале 20 в. в связи с обнаружением парадоксов в канторовской теории множеств и не разрешен до настоящего времени. Об этом Морис Клайн написал следующее:

«В настоящий момент положение дел в математике можно обрисовать примерно так. Существует не одна, а много математик, и каждая из них по ряду причин не удовлетворяет математиков, принадлежащих к другим школам. Стало ясно, что представление о своде общепринятых, незыблемых истин – величественной математике начала XIX в., гордости человека – не более чем заблуждение. На смену уверенности и благодушию, царившим в прошлом, пришла неуверенность и сомнения в будущем математики. Разногласия по поводу оснований самой «незыблемой» из наук вызвали удивление и разочарование (чтобы не сказать больше). Нынешнее состояние математики – не более чем жалкая пародия на математику прошлого с ее глубоко укоренившейся и широко известной репутацией безупречного идеала истинности и логического совершенства».

Авторитет природы. Возникает вопрос: как преодолеть кризис в современной математике? На этот вопрос Морис Клайн отвечает в заключительной главе «Авторитет природы» своей книги. Суть предложений, изложенных в этой главе, сводится к следующему. Для развития тех или иных направлений математики вынуждены «руководствоваться внешними соображениями». При этом наиболее важным соображением «остается традиционный и наиболее объяснимый довод в пользу создания новой и развития уже существующей математики – ее ценность для других наук».

Клайн подчеркивает:

«Приложения служат своего рода практическим критерием, которым мы проверяем математику... Почему бы и теперь не судить о правильности математики в целом по тому, насколько хорошо она продолжает описывать и предсказывать природные феномены?».

По мнению Джона Стюарта Миля (1806-1873), «глубоко заблуждаются те, кто считает, что математические теоремы качественно отличаются от подтвержденных гипотез и теорий других наук».

На этих же позициях находился один из выдающихся специалистов по основаниям математики поляк Анджей Мостовский. Он утверждает, что «математика – естественная наука. Ее понятия и методы восходят к опыту, и любые попытки обосновать математику безотносительно к ее естественно научному происхождению, приложениям и даже истории обречены на провал».

Такой же точки зрения придерживается Герман Вейль, который, как подчеркивается в [51], «открыто выступает за то, чтобы рассматривать математику как одну из естественных наук».

Джон фон Нейман в знаменитой статье «Математик» попытался объяснить, почему большинство математиков продолжают пользоваться классической математикой (цитата взята из [51]):

«В конце концов, именно классическая математика позволяет получить результаты, которые как полезны, так и красивы, и хотя прежней уверенности в ее надежности не стало, классическая математика покоится на столь же прочном основании, как, например, существование электрона. Следовательно, тот, кто принимает естественные науки, не может не принять классическую систему математики».

Клайн заключает [51]:

«Итогом всей этой бурной и разнообразной деятельности стал вывод о том, что правильная математика должна определяться не основаниями..., безошибочность которых можно и оспаривать, - о «правильности» математики следует судить по ее применимости к реальному миру. Математика – такая же эмпирическая наука, как и ньютоновская механика. Математика правильна, лишь покуда она действует, а если что-то не срабатывает, то в нее необходимо вводить надлежащие поправки. Математика не свод априорных знаний, каковой ее считали в течение более чем двух тысячелетий, она не абсолютна и не неизменна».

Обращение к истокам математики. Преодоление кризиса в современной математике требует обращения к истокам математики. Согласно мнению выдающегося советского математика А.Н. Колмогорова [52], «ясное понимание самостоятельного положения математики как особой науки, имеющий собственный предмет и метод, стало возможным только после накопления достаточно большого фактического материала и возникает впервые в Древней Греции в 6-5 вв. до н.э. Развитие математики до этого времени естественно отнести к периоду зарождения математики, а к 6-5 вв. до н.э. приурочить начало периода элементарной математики».

Морис Клайн пишет [51]:

«Подлинной целью греков было исследование природы. Этой цели служило все – даже геометрические истины высоко ценились лишь постольку, поскольку они были полезны при изучении физического мира. Греки понимали, что в структуре Вселенной воплощены геометрические принципы, первичным компонентом которых является пространство. Именно поэтому исследование пространства и пространственных фигур явилось существенным вкладом в изучение природы. Геометрия входила составной частью в более широкую программу космологических исследований... Подобные факты и более полное знание того, как происходило развитие математики в последующие времена, позволяют утверждать, что у греков к постановке математических проблем приводили естественнонаучные исследования и что математика была неотъемлемой частью изучения природы».

В книге [54] эти идеи Мориса Клайна конкретизируются следующим образом:

«Гармония была ключевой концепцией греков, с помощью которой осуществлялась связь трех значений. Его корневое значение было **aro**, соединение, гармония было то, что соединяет. Другое значение было пропорция, баланс вещей, который позволял простое соединение. Качество соединения и пропорции позже стали рассматриваться в музыке и других видах искусства.

Предпосылка для гармонии для греков была выражена во фразе "ничего лишнего". Эта фраза содержала таинственные положительные качества, которые стали объектом исследования лучших умов. Мыслители, такие как Пифагор, стремились раскрыть тайну гармонии как нечто невыразимое и освещенное математикой. Математика гармонии, изученная древними греками, по-прежнему является вдохновляющей моделью для современных ученых. Решающее значение для этого имело открытие количественного выражение гармонии, во всем удивительном разнообразии и сложности природы, через золотое сечение Φ (фи): $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$, что приблизительно равно 1,618. Золотое сечение описано Евклидом в Книге V его «Начал»: "Говорят, что прямая линия, может быть разделена в крайнем и среднем отношении, когда, вся линия так относится к большей части, как большая часть к меньшей".

Таким образом, в центре созданного древними греками математического учения о природе стояла «концепция гармонии», а сама математика древних греков и была «математикой гармонии» (“the mathematics of harmony”), которая непосредственно была связана с «золотым сечением» - важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии.

И если мы хотим построить новую математику, лишенную противоречий, мы должны решительно ввести в математику идею гармонии и «золотого сечения».

18.2. Стратегические ошибки в развитии математики: взгляд со стороны

Отход математики от теоретического естествознания. Что такое математика? Каково ее происхождение и история? В чем состоит связь математики с другими научными дисциплинами и в чем состоит отличие математики от других наук? Все эти вопросы всегда интересовали как математиков, так и представителей других наук. Математику всегда было принято считать образцом научной строгости. Ее часто называли «царицей наук», тем самым подчеркивая ее особый статус в науке. Именно поэтому появление книги «Математика. Утрата определенности» [51], о которой мы упоминали выше, оказалось настоящим шоком для математиков. Книга посвящена анализу глобального кризиса, в котором оказалась математика в 20-м столетии в результате ее «нелогичного развития».

Настоящий параграф основывается на статье автора «Роль «золотого сечения» и «математики гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики», опубликованной в престижном научном сборнике “The way to harmony: ART+MATHEMATICS” [71]. Эта статья является развитием идей, изложенных в книге [51]. Главная цель статьи [71] состоит в том, чтобы развить новый взгляд на историю математики и показать, что в процессе развития математики в ней было допущено ряд «стратегических ошибок», которые повлияли на развитие математики и ее структуру.

В книге [51] Морис Клайн пишет:

«История математики знает не только величайшие взлеты, но и глубокие падения ... Осознание того, что сверкающая великолепием витрина человеческого разума далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, нанесло еще один дар по статусу математики. Но бедствия, обрушившиеся на математику, были вызваны и другими причинами. Тяжелые предчувствия и разногласия между математиками были обусловлены самим ходом развития математики за последние сто лет. Большинство математиков как бы отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах, возникающих внутри самой математики, - по существу, они порвали с естествознанием».

И далее:

«Естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками. Математики охотно сотрудничали с физиками, астрономами, химиками и инженерами в решении различных научно-технических проблем, а часто и сами являлись выдающимися физиками и астрономами. В 17-18 вв., а также на протяжении большей части 19 в. различие между математикой и теоретическим естествознанием отмечалось крайне редко. Многие ведущие математики, работая в области астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили здесь несравненно более важные результаты, чем в собственно математике. Математика была царицей и одновременно служанкой естественных наук».

Клайн подчеркивает, что задачи «чистой математики», которые выдвинулись на передний план в математике 20-го века, не очень сильно интересовали наших великих предшественников. Клайн приводит мнение Френсиса Бэкона по поводу «чистой математики»:

«Критику чистой математики – математики ради математики - можно найти в сочинении Френсиса Бэкона «О достоинстве и приумножении наук» (1620). Бэкон возражал против чистой, мистической и самодовольной математики, «полностью абстрагированной от материи и физических аксиом», сетуя на то, что таково уж свойство человеческого ума: не имея достаточных сил для решения важных проблем, он тратит себя на всякие пустяки».

В 1895 г. Феликс Клейн, бывший в то время признанным главой математического мира, также счел необходимым выразить протест против тяги к абстрактной, чистой математики (цитата взята из книги [51]):

«Трудно отделиться от ощущения, что быстрое развитие современной математики таит в себе для нашей науки опасность все более усиливающейся изоляции. Тесная взаимосвязь между математикой и теоретическим естествознанием, существовавшая к вящей выгоде для обеих сторон, с возникновением современного анализа грозит прерваться».

Рихард Курант, возглавлявший Институт Математических наук при Нью-Йоркском университете, также неодобрительно относился к увлечению чистой математикой. В 1939 г. он писал (цитата взята из книги [51]):

«Серьезная угроза самой жизни науки проистекает из утверждения, будто математика представляет собой не что иное, как систему заключений, выводимых из определений и постулатов, которые должны быть непротиворечивыми, а в остальном произвольными порождениями свободной воли математиков. Если бы подобное описание соответствовало действительности, то в глазах любого сколько-нибудь разумного человека математика не обладала бы никакой привлекательностью. Она была бы ничем не мотивированной бесцельной игрой с определениями, правилами и силлогизмами. Представление о том, будто разум по своему произволу может создавать осмысленные аксиоматические системы, - полуправда, способная лишь вводить неискушенных людей в заблуждение. Только сдерживаемый дисциплиной ответственности перед органическим целым свободный разум, руководствуясь внутренней необходимостью, может создавать результаты, имеющие научную ценность».

Таким образом, вслед за Бэконом, Фурье, Клейном, Курантом и другими выдающимися математиками, Морис Клайн усматривает причину современного кризиса в математике в ее отходе от естествознания, которое в течение многих столетий было главным источником развития математики. Отход математики от теоретического естествознания является крупнейшей «стратегической ошибкой» математики 20-го века и главной причиной ее современного кризиса. Но в истории математики имели место и другие «стратегические ошибки», анализ которых приведен ниже.

Пренебрежение «началами». А.Н. Колмогоров в предисловии к книге А.Лебега «Об измерении величин» [113] замечает, что «у математиков существует склонность, уже владея законченной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная уже с готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений. Все здание школьной алгебры и весь математический анализ могут быть воздвигнуты на понятии действительного числа без всякого упоминания об измерении конкретных величин (длин, площадей, промежутков времени и т.д.). Поэтому на разных ступенях обучения с разной степенью смелости проявляется одна и та же тенденция: возможно скорее разделаться с введением чисел и дальше уже говорить только о числах и соотношениях между ними. Против этой тенденции и протестует Лебег».

В этом высказывании Колмогоров подметил одну особенность математиков – стыдливое отношение к «началам» математической науки, а точнее - пренебрежение «началами» («на разных ступенях обучения и с разной степенью смелости»). Задолго до Колмогорова на эту тенденцию в развитии математики обратил внимание Николай Лобачевский. В одной из своих работ он написал:

«Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами вначале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою».

И именно Лобачевский своими исследованиями показал, что «начала» математической науки, в частности, «Начала» Евклида, являются неисчерпаемым источником новых математических идей и открытий. Свои знаменитые «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (1840) Лобачевский начинает следующими словами:

«В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука ... до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий ...».

Как известно, Лобачевский, в отличие от других математиков, не пренебрегал «началами». Тщательное изучение V-го постулата Евклида («важный пробел в теории параллельных линий») привело Лобачевского к созданию неевклидовой геометрии, которая, по мнению А.Н. Колмогорова [52], считается наиболее крупным математическим достижением 19-го века.

Пренебрежение «идеей гармонии» и «золотым сечением». Как упоминалось в главе 1, особую роль в учении пифагорейцев, в том числе и Платона, играло «золотое сечение», которое в тот период называлось «делением в крайнем и среднем отношении». «Золотое сечение» буквально пронизывает «Начала» Евклида, начиная с книги II и заканчивая Книгой XIII. Возникает вопрос: а как обстоит дело с «золотым сечением» в современной математике, которая, как утверждают современные историки математики, начинается с «Начал» Евклида? К сожалению, ответ пессимистичный – явно в недостаточной степени. К сожалению, многие современные математики считают «золотое сечение» неким едва ли не «эзотерическим понятием», недостойным для изучения в серьезной математике, а сами «гармонические идеи» Пифагора и Платона считают, по выражению Алексея Лосева, результатом «безудержной и дикой фантазии». Пренебрежение «золотым сечением» мы находим не только в математике, но и в теоретической физике. В 2006 г. издательство «БИМОН» (Москва) опубликовало научный сборник «Метафизика. Век 21» [114]. В предисловии составитель и редактор сборника профессор Ю.С. Владимиров (Московский университет) написал следующее:

«Третья часть сборника посвящена осмыслению многочисленных примеров проявления «золотой пропорции» в искусстве, биологии и в окружающей нас действительности. Однако, как это не парадоксально, в современной теоретической физике «золотая пропорция» никак не отражена. Чтобы убедиться в этом, достаточно пролистать 10-томник теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Назрело время заполнить этот пробел в физике, тем более, что «золотая пропорция» тесно связана с метафизикой, с тринитарностью».

Очень интересное объяснение причины пренебрежительного (в некотором смысле даже враждебного) отношения со стороны официальной академической науки к «гармонии» и «золотому сечению», содержится в статье Дениса Клещева [115]. Клещев пишет:

«Безусловный успех теории Менделеева, который современные жрецы науки упорно ретушируют, объясняется именно тем, что «спекулятивное» разбиение периодической таблицы на семь периодов отражает объективное существование в строении атома семи энергетических уровней («оболочек»), которые вместе с ядром образуют гармоническую «октаву», заполняемую электронами, причем переход электрона с одного из внешних уровней на более близкий к ядру всегда связан с излучением кванта света, поэтому язык спектра был и остается одним из важных инструментов атомной физики. Эффективность введения квантовых чисел настолько поражала первопроходцев физики атома, что Зоммерфельд в первом издании своего фундаментального труда «Строение атома и спектральные линии» (1919) писал следующее:

«То, что мы слышим сегодня на языке спектров, и есть подлинная музыка сфер атомов, созвучие целочисленных отношений, одно из многих проявлений все возрастающего порядка и гармонии. <...> Все целочисленные закономерности спектральных линий и атомистики берут свое начало, в конечном счете, из квантовой теории. Она есть тот таинственный орган, на котором природа исполняет музыку спектров, и ее ритму подчиняется строение атома и ядра».

В своем докладе 1925 года Арнольд Зоммерфельд не без горечи восклицал: «Вот если бы Кеплеру дожить до современной квантовой теории! Он бы увидел осуществленной свою самую смелую юношескую мечту, но не в макрокосмосе небесных тел, а в микрокосмосе атома».

И далее Клещев продолжает [115]:

«Однако такие интерпретации теории атома были подвергнуты жесткой критике. Больше всего за распространение «пифагорейства» во время формирования современной нормальной науки пострадал знаток теории относительности, выдающийся астрофизик Артур Эддингтон (с 1923 года иностранный член-корреспондент АН СССР, с 1938 года президент Международного астрономического союза). Его попытки связать постоянную тонкой структуры $\alpha=1/137{,}035...$ с теорией гармонии инициировали громкий процесс в АН СССР, в результате которого любое упоминание в квантовой физике слова «гармония» было запрещено и стало автоматически пониматься как «эддингтоновщина».

Вот, оказывается, где «зарыта собака»! Высокие академические круги еще в советские времена приложила руку к тому, чтобы заклеймить позором понятие «гармонии», а само слово «гармония» вычеркнуть из употребления в физической науке. Так что не только «кибернетика» и «генетика», но также и «учение о гармонии» подвергались гонениям со стороны официальной академической науки. Непонятно только, как это согласуется с упоминавшимся выше высказыванием Альберта Эйнштейна: «Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии».

Несмотря на то, что академическая наука высказалась против использования понятия «гармонии» в современной физике, развитие теоретического естествознания в последние десятилетия показало, что уважаемые академики в оценке роли «гармонии» допустили очередную ошибку. Поскольку академическая наука на начальном этапе, как правило, ошибается при оценке тех или иных направлений фундаментальной науки (вспомним генетику и кибернетику, а еще раньше гиперболическую геометрию Лобачевского), а затем стыдливо забывает покаяться о содеянном, то можно высказать твердое мнение о том, что пренебрежение «гармонией» и «золотым сечением» – еще одна «стратегическая ошибка» в развитии не только математики, но и теоретической физики. Эта ошибка породила ряд других «стратегических ошибок» в развитии математики и науки в целом.

Игнорирование «гипотезы Прокла». В главе 1 мы детально проанализировали новый взгляд на «Начала» Евклида, выдвинутый греческим философом Проклом Диадохом (412-485).

Анализ гипотезы Прокла содержится во многих западных книгах по истории математики. Рассмотрим некоторые из них [72-74]. В книге [72] утверждается: «Согласно Проклу, главная цель «Начал» состояла в том, чтобы изложить построение так называемых Платоновых тел».

В книге [73] эта идея получает дальнейшую конкретизацию: «Прокл, еще раз упоминая всех предшествующих математиков Платоновского кружка, говорит: "Евклид жил позже, чем математики Платоновского кружка, но раньше, чем Эратосфен и Архимед, ... Он принадлежал к школе Платона и был хорошо знаком с философией Платона и именно поэтому он поставил главной целью своих «Начал» построение так называемых Платоновых тел».

Этот комментарий важен для нас тем, что в нем обращается внимание на связь Евклида с Платоном. Евклид полностью разделял философию Платона и его космологию, основанную на Платоновых телах; именно поэтому он и поставил главной целью своих «Начал» создание геометрической теории Платоновых тел.

В главе 4 мы описали так называемый «Космический кубок» - оригинальную модель Солнечной системы, основанную на Платоновых телах. Эта модель была описана Кеплером в его первый книге Mysterium Cosmographicum. «Космический кубок» нас интересует, прежде всего, с точки зрения отношения Кеплера к «гипотезе Прокла». Craig Smorinsky в книге [74] обсуждает влияние идей Платона и Евклида на Иоганна Кеплера:

«Кеплеровский проект в Mysterium Cosmographicum состоял в том, чтобы дать "истинные и совершенные причины для чисел, величин и периодических движений небесных орбит". Совершенные причины должны основываться на простых принципах математического порядка, который Кеплер нашел в Солнечной системе, используя многочисленные геометрические демонстрации. Общая схема его модели была взята Кеплером из Платоновского Тимея, но математические соотношения для Платоновых тел (пирамида, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) были взяты Кеплером из трудов Евклида и Птолемея. При этом Кеплер следовал Проклу в том, что "главная цель Евклида состояла в том, чтобы построить геометрическую теорию так называемых Платоновых тел. Кеплер полностью был очарован Проклом, которого он часто цитирует и называет «пифагорейцем».

В этой связи уместно вспомнить также о книге выдающегося математика и геометра Феликса Клейна «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» [75], опубликованной в 1884 г. В этой книге икосаэдру, основанному на золотом сечении, – одному из главных Платоновых тел, отведено едва ли не центральное место в математике.

Некоторые советские математики в свое время также высказали идеи, близкие к «гипотезе Прокла». В статье [115] Денис Клещев приводит мнение проф. Д.Д. Мордухай-Болтовского (самого авторитетного советского историка математики и переводчика трактата Евклида на русский язык), которое полностью совпадает с «гипотезой Прокла»:

«Тщательный анализ "Начал" меня решительно убеждает, что построение правильных тел, и еще более – доказательство существования пяти и только пяти тел – представляло некогда, еще до Евклида, конечную цель того труда, из которого произошли "Начала"».

Возникает вопрос: почему же «гипотеза Прокла» и мнение выдающегося советского историка математика не отражены широко в исторической литературе и учебниках по математике?

Еще раз обратимся к статье Дениса Клещева [105]. Клещев пишет:

«...При внимательном изучении канонических «Элементов геометрии» Евклида можно обнаружить гармоническую составляющую данного трактата, который принципиально отличался от других сводных трактатов по геометрии (например, от «Элементов» Гиппократа Хиосского) и заслужил себе всеобщее признание в античности как раз тем, что все тринадцать книг, в которых Евклид дал систематическое изложение наиболее значимых открытий античных математиков, имели главной целью вывод и доказательство существования пяти правильных многогранников (Платоновых тел: тетраэдра, гексаэдра, октаэдра, икосаэдра, додекаэдра).

Несмотря на то, что геометрия Евклида стала основой стандартной математики и была возведена последующими поколениями математиков в ранг «абсолютно истинной науки», теория гармонии осталась метафизическим придатком, для которого в научной парадигме не нашлось достойного места, поэтому в наши дни понятие «гармония» было ассоциировано с музыкальным учением пифагорейцев, хотя на самом деле в античной науке гармония числовых соотношений распространялась на все области знаний. Главная причина того, что общая теория гармонии не стала развиваться в рамках античной парадигмы, заключается в том, что изучение гармонических соотношений неизбежно приводило математиков к несоизмеримым отрезкам, к иррациональным числам, то есть к дробям, к которым античные философы питали нескрываемое отвращение».

Создается впечатление, что современные историки математики придерживаются этой же точки зрения. Они отказываются замечать, что «золотому сечению» и «Платоновым телам» Евклид уделил очень большое внимание и не могут дать этому никакого «научного объяснения». Более того, они отказываются признавать, что, согласно «гипотезе Прокла», «Начала» Евклида написаны под прямым влиянием античной идеи гармонии. И главная цель Евклида при написании своего гениального математического произведения, к которому восходит вся современная математика, - это создание завершенной теории Платоновых тел, которые ассоциировались у древних греков с гармонией Мироздания».

Клещев пишет [105]:

«Хотя свидетельство Прокла Диадоха (V век н.э.), в котором раскрывается смысл Евклидовых «Элементов», составленных как строго аксиоматическое построение пяти правильных многогранников, имеет множество подтверждений в античной науке, современные математики продолжают от нас скрывать этот исторический факт».

В этой связи уместно привести еще одно высказывание Дениса Клещева [105]:

«Теория гармонизации, систематизации и обобщения информации кажется многим весьма несущественной. Большинство математиков считает для себя крайне скучным занятием изучение элементарной геометрии. Хотя ни один выдающийся математик XIX века (включая математиков-универсалов Гильберта и Пуанкаре), не испытывал такого равнодушия и презрения к элементарной математике, какое сегодня испытывает к ней среднестатистический доцент, аспирант или студент-математик. Так мы пожинаем плоды того стиля преподавания, который сложился после введения в математическое образование теоретико-множественного подхода».

Таким образом, мы можем констатировать, что оригинальный взгляд Прокла на «Начала» Евклида проигнорирован официальной академической математикой, более того, современные российские историки математики скрывают от научной общественности этот исторический факт, признанный Иоганном Кеплером, Феликсом Клейном, а в наше время - Мордухай-Болтовским. Все это следует рассматривать как еще одну «стратегическую ошибку» в развитии математики, которая привела к искаженному взгляду на всю историю математики.

Односторонний взгляд на происхождение математики. Как известно, традиционный взгляд на происхождение математики [52] состоит в том, что в основе создания математики лежало две «ключевые» проблемы, которые возникли в науке на ранних этапах ее развития: проблема счета и проблема измерения. Проблема счета привела к созданию первых способов представления чисел и выполнения над числами арифметических операций (Вавилонская 60-ричная система счисления, египетская десятичная арифметика и др.). Главным итогом этого процесса было формирование понятия натурального числа – фундаментального понятия математики, без которого немыслимо существование математики. Проблема измерения лежит у истоков создания геометрии как науки об «измерении земли». Именно в рамках изучения «проблемы измерения» в научной школе Пифагора были открыты несоизмеримые отрезки, что считается одним из важнейших математических открытий античной математики. Это открытие привело к введению понятия иррационального числа - второго фундаментального понятия математики, без которого невозможно представить существование современной математики.

Концепции натурального числа и иррационального числа лежат в основе «классической математики» и «классического теоретического естествознания». Заметим, что большинство важнейших «математические констант», в частности, «число π» и «Эйлерово число e» являются иррациональными (трансцендентными) числами. Эти числа лежат в основе важнейших типов «элементарных функций», в частности, в основе тригонометрических функций (число π) и «гиперболических функций» (число e).

К сожалению, историки математики, рассматривая главные проблемы математики, которые лежат в основе ее происхождения, иногда стыдливо забывают упомянуть, что существовала еще одна научная проблема - проблема гармонии, которая была выдвинута Пифагором, Платоном и, согласно «гипотезе Прокла», нашла свое отражение в «Началах» Евклида. Самое удивительное, что даже выдающийся математик Андрей Колмогоров в своей замечсательной книге [52] не упоминает о «гипотезе Прокла» и о влиянии проблемы гармонии на создание «Начал» Евклида. Трудно предположить, что академик Колмогоров не знал о «гипотезе Прокла». Скорее всего, он просто не решился о ней упоминать, потому что в этом случае историю математики, изложенную в его книге [52], пришлось бы пререписать по-новому. В результате в современной математике, восходящей к «Началам» Евклида, сформировался искаженный взгляд на «Начала» Евклида и на происхождение математики, что является еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики. Если бы проблема гармонии была включена в состав важнейших проблем, исторически повлиявших на создание математики на этапе ее зарождения, структура современной математики выглядела бы по-другому.

Величайшая математическая мистификация 19-го столетия. Крупные «стратегические ошибки» были сделаны и в последующие периоды развития математики. В 19-м веке одна из таких ошибок состояла в том, что без достаточного критического анализа теория бесконечных множеств Кантора была возведена на пьедестал «величайших математических открытий», лежащих в основаниях математики.

Канторовская теория бесконечных множеств вызвала бурю протестов уже в 19 в. Детальный анализ критики этой теории проведен в главе «Изгнание из рая: новый кризис в основаниях математики» книги Мориса Клайна [51]. Многие известные математики 19 в. высказались резко отрицательно по поводу этой теории. Леонид Кронекер (1823-1891), испытывавшей личную неприязнь к Кантору, назвал его шарлатаном. Анри Пуанкаре (1854-1912) называл теорию множеств «тяжелой болезнью» и считал ее своего рода «математической патологией». В 1908 г. он заявил:

«Грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились».

К сожалению, у теории Кантора были не только противники, но и сторонники. Рассел назвал Кантора одним из великих мыслителей 19 в. В 1910 г. Рассел написал: «Решение проблем, издавна окутывавших тайной математическую бесконечность, является, вероятно, величайшим достижением, которым должен гордиться наш век». Рассела поддержал Гильберт, заявив, что «никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором».

В своем выступлении на 1-м Международном Конгрессе Математиков в Цюрихе (1897) знаменитый математик Адамар подчеркнул, что главная привлекательная черта Канторовской теории множеств состоит в том, что впервые в математической истории дана классификация множеств на основе концепции «кардинального числа». Удивительные математические результаты, которые вытекают из теории множеств Кантора, вдохновляют математиков на новые открытия.

В последние годы в работах выдающегося российского математика и философа Александра Зенкина [116,117], а также в работах других авторов [118-120] были предприняты радикальные попытки «очищения» математики от канторовской теории бесконечных множеств. Анализ канторовской теории бесконечных множеств, изложенной в статьях [116,117], привел Александра Зенкина к заключению, что доказательства многих теорем Кантора о бесконечных множествах являются логически некорректными, а вся «теория Кантора» в некотором смысле является «величайшей математической мистификацией 19 в.».

Обнаружение парадоксов в канторовской теории бесконечных множеств значительно остудило восторги математиков этой теорией, но окончательную точку в критическом анализе теории Кантора поставил именно Александр Зенкин [116,117]. Он показал, что главной ошибкой Кантора было принятие абстракции актуальной бесконечности, что, начиная с Аристотеля, недопустимо в математике. Но без абстракции актуальной бесконечности теория бесконечных множеств Кантора является несостоятельной! На эту проблему обратил внимание еще Аристотель, который первым предупредил о невозможности использования понятия «актуальной бесконечности» в математике ("Infinitum Actu Non Datur").

Таким образом, «Канторовская теория бесконечных множеств» является не чем иным, как величайшей математической мистификацией 19-го века, своего рода «математическим шарлатанством», и ее принятие математиками 19-го века, без должного критического анализа, является еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики. Если бы Канторовская теория бесконечных множеств была подвергнута серьезному анализу еще в 19-м веке, если бы математики всерьез прислушались к мнению выдающихся математиков Кронекера и Пуанкаре, возможно, удалось бы избежать возникновения современного кризиса в основаниях математики. Infinitum Actu Non Datur.

Недооценка формул Бине. В 19 в. в развитии теории «золотого сечения» было сделано важное математическое открытие. Речь идет о так называемых формулах Бине, выведенных французским математиком Бине в 19-м веке, а еще раньше Бернулли. Удивительно, что в классической математике формулы Бине не получили должного признания, подобно другим известным математическим формулам («формулы Эйлера», «формулы Муавра» и т.д.). И не все математики их знают. Изучение формул Бине, а также золотого сечения, чисел Фибоначчи и Люка, как правило, не включается в современные математические программы школьного и университетского образования. По-видимому, такое отношение к «формулам Бине» связано с «золотым сечением», которое всегда вызывало «аллергию» у математиков.

Но главная «стратегическая ошибка» в оценке формул Бине состоит в том, что математики не усмотрели в этих формулах прообраз нового класса гиперболических функций – гиперболических функций Фибоначчи и Люка, которые были открыты украинскими учеными Боднаром, Стаховым, Ткаченко и Розиным спустя 100 лет после открытия формул Бине [24,57,58]. Если бы гиперболические функции Фибоначчи и Люка были открыты в 19-м столетии, то гиперболическая геометрия и ее приложения в физической науке выглядели бы иначе и может быть уже в 19 в. была построена новая геометрическая теория филлотаксиса, которая в современной науке получила название «геометрии Боднара» [24].

Недооценка «икосаэдрической» идеи Феликса Клейна. Как упоминалось в главе 4, в 19-м веке выдающийся математик Феликс Клейн попытался объединить все ветви математики на основе икосаэдра, Платонового тела, дуального додекаэдру [75]. По существу, исследования Клейна можно рассматривать как дальнейшее развитие так называемой «додекаэдро-икосаэдрической идеи», которая, начиная с Пифагора, Платона, Евклида и Кеплера, «красной нитью» проходит через всю историю науки. Клейн трактует икосаэдр, основанный на золотом сечении, как геометрический объект, из которого, по его мнению, вытекают ветви пяти математических теорий: геометрии, теории Галуа, теории групп, теории инвариантов и дифференциальные уравнения. Главная идея Клейна состоит в следующем: "Каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра». К сожалению, эта замечательная идея не получила должного развития в современной математике, что является еще одной «стратегической ошибкой» в ее развитии. Развитие этой идеи могло бы повлиять на структуру математической науки и привело бы к объединению многих важных разделов математики на основе икосаэдра, основанного на золотом сечении.

Недооценка математического открытия Джорджа Бергмана. В математике существует одна «странная» традиция. Математикам свойственно недооценивать математические достижения некоторых своих современников (как это случилось с геометрией Лобачевского, которая была подвергнута резкой критике со стороны официальной академической науки России) и переоценивать достижения других математиков (как это случилось с теорией множеств Кантора). К сожалению, традиционно действительно эпохальные математические открытия вначале подвергаются резкой критике и даже осмеянию со стороны известных математиков и только спустя примерно 50 лет, как правило, после смерти авторов математических открытий, новые математические теории признаются и занимают достойное место в математике. Примеры с недооценкой математических теорий Лобачевского, Абеля и Галуа в момент их провозглашения и их реабилитацией спустя несколько десятилетий, когда Лобачевский, Абель и Галуа были признаны математическими гениями, являются хрестоматийными. Таким же хрестоматийным примером является переоценка канторовской теории множеств на начальном этапе и признание этой теории своего рода «шарлатанством», вызвавшим кризис в современной математике.

К сожалению, 20 в. не стал исключением из этого правила. Нечто подобное произошло и с математическим открытием юного американского математика Джорджа Бергмана. В 1957 г. Джордж Бергман опубликовал статью «A number system with an irrational base» [80] в известном математическом журнале «Mathematics Magazine». В этой статье автор предложил весьма необычное расширение понятия позиционной системы счисления, которое переворачивает наши представления о системах счисления.

К сожалению, статья Бергмана [80] не была замечена в тот период ни математиками, ни инженерами, специалистами в области компьютерной техники. Журналисты были удивлены только тем фактом, что Джордж Бергман написал свою выдающуюся статью в возрасте 12 лет, в связи с чем в журнале «TIME» была даже опубликована статья о юном математическом даровании Америки. Но математики того времени, впрочем как и сам Бергман, не сумели оценить значение этого открытия для развития математики и информатики. И только спустя 23 года значение этого открытие было по достоинству оценено в работе [91].

Стратегический просчет математиков 20-го века состоял в том, что они проигнорировали математическое открытие Джорджа Бергмана, которое по праву может быть отнесено к разряду крупнейших математических открытий в области систем счисления (после открытия вавилонянами позиционного принципа представления чисел, десятичной и двоичной системы) и которое может дать начало новым компьютерам и новой теории чисел, основанным на «золотой пропорции» [12, 79, 81].

18.3. Красота и эстетика математики

Эстетические принципы Хатчесона. В чем заключается красота науки? В богатой истории мировой культуры находились исследователи, бравшие на себя смелость заняться анализом красоты науки. Пожалуй, первым из них является шотландский философ Френсис Хатчесон (1694-1747), автор сочинения «Исследования о происхождении наших идей красоты и добродетели в двух трактатах». В разделе «Красота теорем» Хатчесон выдвигает три основных принципа красоты науки: 1) красота есть единство в многообразии; 2) красота заключена во всеобщности научных истин; 3) научная красота – это обретение неочевидной истины.

Александр. Волошинов объясняет суть принципа единства в многообразии следующим образом [121]:

«...Любая математическая теорема содержит в себе бесчисленное множество истин, справедливых для каждого конкретного объекта, но в то же время все эти конкретные истины собраны в единой общей для всех истине – теореме. Например, теорема Пифагора справедлива для бесконечного множества конкретных прямоугольных треугольников, но все это многообразие треугольников обладает единым общим свойством, описываемом теоремой».

То же самое мы можем сказать и по поводу задачи о «делении отрезка в крайнем и среднем отношении», называемом «золотым сечением». Существует бесконечное количество отрезков, которые могут быть разделены на две неравные части в «золотом сечении». При этом все эти деления обладают общим свойством: отношение большего отрезка к меньшему равно отношению всего отрезка к большему. Это и есть пример единства в многообразии.

Рассмотрим теперь второй «принцип Хатчесона» - принцип всеобщности научных истин. Хатчесон пишет (цитата взята из [121]):

«У теорем есть еще одна красота, которую нельзя обойти и которая состоит в том, что одна теорема может содержать огромное множество следствий, которые легко из нее выводятся ... Когда исследуют природу, подобной красотой обладает познание определенных великих принципов или всеобщих сил, из которых вытекают бесчисленные следствия. Таково тяготение в схеме сэра Исаака Ньютона... И мы наслаждаемся этим удовольствием, даже если у нас нет никаких перспектив на получение какой-либо иной выгоды от такого способа дедукции, кроме непосредственного удовольствия от созерцания красоты».

В любой области науки мы можем найти подтверждение этому принципу Хатчесона: в математике – это теорема Виета, связывающая корни алгебраических уравнений с их коэффициентами, в физике – это законы Ньютона и уравнения электромагнетизма Максвелла, в химии – периодический закон Менделеева, в биологии – законы генетики.

Наконец, третий эстетический принцип Хатчесона – это обретение неочевидной истины. Теорема «2×2=4» представляет собой очевидную истину и не доставляет нам эстетического удовольствия. Волошинов подчеркивает [121]:

«Только открытие истин, спрятанных от нас наукой или природой, открытие, требующее усилий, доставляет нам в конце пути истинное наслаждение – познание неведомой истины». Уместно вспомнить при этом известное высказывание Гераклита: «Скрытая гармония сильнее явной».

Ясно, что все три выведенные Хатчесоном эстетических принципа справедливы для любой науки, но, прежде всего, они относятся к математике. Все дело в том, что математика во все времена считалась «царицей науки» и поэтому эстетические принципы науки наиболее ярко проявляются именно в математике.

«Принцип математической красоты» Дирака. В настоящее время ни у кого не вызывает сомнения, что «наука прекрасна, ибо она отражает в себе и преломляет в нашем сознании красоту, гармонию и единство мироздания» [121].

Но физики пошли еще дальше. Английский физик Нобелевский Лауреат Поль Дирак выдвинул тезис: «Красота является критерием истинности физической теории». Дирак не только осознавал красоту выражений математических формулировок теории, но и понимал эвристическую, регулятивную роль красоты как методологического принципа построения научного знания. Дирак пишет (цитата взята из [121]):

"Я чувствую, что теория, если она правильна, должна быть красивой (beautiful), так как мы руководствуемся принципом красоты, когда устанавливаем фундаментальные законы. Так, в исследованиях, опирающихся на математику, мы часто руководствуемся требованием математической красоты. Если уравнения физики некрасивы с математической точки зрения, то это означает, что они несовершенны и что теория ущербна и нуждается в улучшении. Бывают случаи, когда математической красоте должно отдаваться предпочтение (по крайней мере, временно) перед согласием с экспериментом. Дело обстоит так, будто Бог создал Вселенную на основе прекрасной математики и мы сочли разумным предположение, что основные идеи должны выражаться в терминах прекрасной математики".

18.4. Эстетика математики гармонии

Выдающемуся английскому математику, философу и общественному деятелю Лауреату Нобелевской Премии Бертрану Расселу (1872-1970) принадлежат следующие замечательные слова, подчеркивающие красоту математики:

«Математика владеет не только истиной, но и высокой красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства».

Это высказывание в наибольшей степени можно отнести к «математике гармонии», изложению основ которой и посвящена настоящая книга.

Интересно проследить, насколько применимы рассмотренные выше «эстетические принципы Хатчесона» и «принцип математической красоты» Дирака к «математике гармонии» [47].

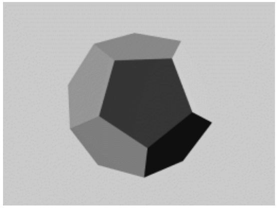
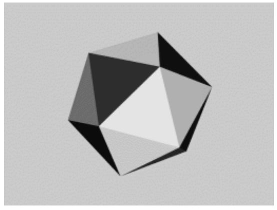
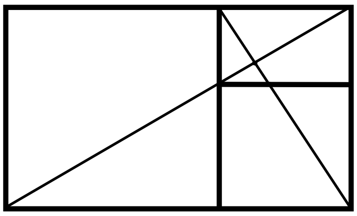
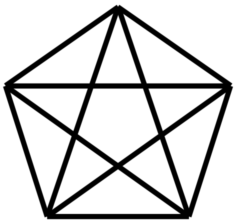
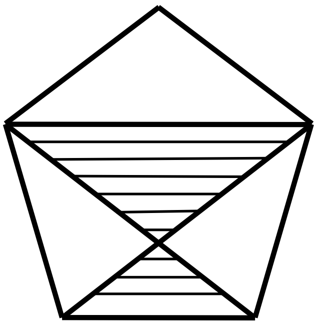
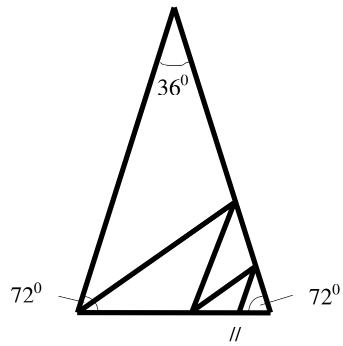
Практически все основные математические результаты и геометрические фигуры, полученные в рамках «математики гармонии» [47], включая «теорию чисел Фибоначчи» [1-4], обладают эстетическим совершенством и вызывают чувство красоты и эстетического наслаждения. Вспомним только некоторые из них.

Эстетика золотого сечения. В своих знаменитых «Началах» Евклид уже в Книге II ввел «задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении», которая в современной науке известна как «золотое сечение». В течение многих тысячелетий «золотое сечение» вызывало восхищение благодаря его удивительным математическим и геометрическим свойствам (Табл.18.1, 18.2).

Таблица 18.1. Эстетика «золотого сечения»

1	Уравнение ЗС	$x^2 - x - 1 = 0$
2	Золотая пропорция	$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
3	Основное тождество	$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}; \quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
4	Представление в виде цепной дроби	$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}}$
5	Представление в радикалах	$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$

Таблица 18.2. Геометрические фигуры, основанные на ЗС

1	Додекаэдр и икосаэдр		
2	Золотой прямоугольник		
3	Пентагон и пентаграмма		
4	Золотая чаша и золотой равнобедренный треугольник		

Эстетика чисел Фибоначчи и Люка. Числа Фибоначчи были введены в 13 в. знаменитым итальянским математиком Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи). Фибоначчи почти на два столетия опередил западноевропейских математиков своего времени. Подобно Пифагору, который получил свое «научное образование» у египетских и вавилонских жрецов и затем способствовал передаче полученных знаний в древнегреческую науку, Фибоначчи получил свое математическое образование в арабских учебных заведениях и многие из полученных там знаний, в частности, арабо-индусскую десятичную систему счисления, он попытался «внедрить» в западноевропейскую науку. И подобно Пифагору историческая роль Фибоначчи для западного мира состояла в том, что он своими математическими книгами способствовал передаче математических знаний арабов в западноевропейскую науку и тем самым заложил основы для дальнейшего развития западноевропейской математики.

В Табл.18.3 приведено ряд широко известных математических свойств чисел Фибоначчи и Люка, полученных известными математиками в последующие века. Эстетический характер этих результатов не требует особых доказательств.

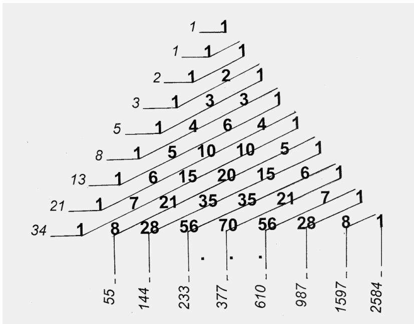
Таблица 18.3. Эстетика чисел Фибоначчи и Люка

<table>
<tr><td>1</td><td>Рекуррентные соотношения для чисел Фибоначчи и Люка</td><td>$F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\quad F_1 = F_2 = 1$
$L_n = L_{n-1} + L_{n-2};\quad L_1 = 1, L_2 = 3$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Расширенные числа Фибоначчи и Люка</td><td><table>
<tr><td>n</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>F_n</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td></tr>
<tr><td>F_{-n}</td><td>0</td><td>1</td><td>–1</td><td>2</td><td>–3</td><td>5</td><td>–8</td></tr>
<tr><td>L_n</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td><td>11</td><td>18</td></tr>
<tr><td>L_{-n}</td><td>2</td><td>–1</td><td>3</td><td>–4</td><td>7</td><td>–11</td><td>18</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Формула Кассини</td><td>$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1};\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Формула Кеплера</td><td>$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Формулы Бине</td><td>$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k \end{cases}$
$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k+1 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Гиперболические функции Фибоначчи и Люка</td><td>$sFs = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}};\quad cFs = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$
$sLs = \Phi^x - \Phi^{-x};\quad cLs = \Phi^x + \Phi^{-x}$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Матрицы Фибоначчи</td><td>$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\quad Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix};\quad \det\left(Q^n\right) = (-1)^n$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Золотые матрицы</td><td>$Q_0(x) = \begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix};\quad \det Q_0(x) = +1$
$Q_1(x) = \begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix};\quad \det Q_0(x) = -1$</td></tr>
</table>

Эстетика p-чисел Фибоначчи и Люка. Но ведь не меньшее эстетическое впечатление производят и новейшие результаты в области «математики гармонии», такие, как p-числа Фибоначчи и Люка (Таблица 18.4).

Таблица 18.4. Эстетика p-чисел Фибоначчи и золотых p-пропорций

$(p = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

1	Числа Фибоначчи и треугольник Паскаля (Пойа)	
2	Рекуррентное соотношение для p-чисел Фибоначчи	$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1)$; $F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p+1) = 1$
3	Представление p-чисел Фибоначчи с помощью биномиальных коэффициентов	$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + \ldots$
4	Уравнение золотой p-пропорции	$x^{p+1} - x^p - 1 = 0 \to \Phi_p -$ золотая p-пропорция, положительный корень уравнения
5	Формула Кеплера для p-чисел Фибоначчи	$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p$
6	Основное тождество для золотых p-пропорций	$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ $p = 0:\ 2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1}, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ $p = 1:\ \Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} = \Phi \times \Phi^{n-1}, n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Лямбда-числа Фибоначчи и «металлические пропорции». Не меньшее эстетическое впечатление вызывают математические тождества для $\lambda-$числа Фибоначчи и Люка и «металлических пропорций» (Таблица 18.5).

Таблица 18.5. Эстетика $\lambda -$ чисел Фибоначчи $(\lambda > 0)$ и «металлических пропорций»

1	Рекуррентные соотношения для λ - чисел Фибоначчи и Люка	$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n);\quad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1$ $L_\lambda(n+2) = \lambda L_\lambda(n+1) + L_\lambda(n);\quad L_\lambda(0) = 2, L_\lambda(1) = \lambda$
2	Формула Кассини	$F_\lambda^2(n) - F_\lambda(n-1)F_\lambda(n+1) = (-1)^{n+1};\quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
3	Металлические пропорции	$x^2 - \lambda x - 1 = 0 \to \Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
4	Основное тождество	$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda \times \Phi_\lambda^{n-1}$
5	Представление в виде цепной дроби	$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}}$
6	Представление в радикалах	$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\ldots}}}}$
7	Формулы Газале	$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}};\quad L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n\Phi_\lambda^{-n}$
8	Гиперблические λ - функции Фибоначи и Люка	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}};\quad cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$ $sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x};\quad cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}$

Таким образом, как вытекает из анализа математических формул и геометрических фигур, приведенных в Табл. 18.1 - 18.5, «математика гармонии» [47], которая создавалась многими поколениями выдающихся ученых и мыслителей, начиная с античного периода, несомненно, обладает высоким совершенством и исключительными эстетическими свойствами.

И «принцип математической красоты» Дирака применительно к «математике гармонии» уже воплощается в выдающихся современных научных открытиях, основанных на математических результатах, полученных еще в античной науке. Два из них (квазикристаллы и фуллерены) уже удостоены Нобелевской Премии.

18.5. Идея гармонии как ключевая идея современного теоретического естествознания

Самыми важными индикаторами достижений науки всегда были фундаментальные научные открытия, которые опровергали существующие представления и закладывали основу революционных преобразований в той или иной области науки. Часть из современных научных открытий неожиданно оказалась связанной с Платоновыми телами, золотым сечением и числами Фибоначи. Рассмотрим эти открытия.

Резонансная теория Солнечной системы. Солнечная система представляет собой нелинейную колебательную систему, состоящую из слабо связанных нелинейных осцилляторов-планет. Советский математик А.М. Молчанов около 40 лет назад высказал гипотезу: любая нелинейная система (независимо от природы – механическая, химическая, биологическая или любая другая) в результате эволюции должна выходить на особый синхронный колебательный режим, при котором частоты объектов становятся равными, кратными или находятся в рациональных отношениях. Молчановым также доказан замечательный факт: при сколь угодно слабых взаимодействиях между элементами динамической системы их взаимное влияние в ходе эволюции приведет эту систему в синхронный режим. Проведенные Молчановым вычисления частот планет, в соответствии с высказанной им гипотезой, показали, что расчетные частоты отличаются от реально наблюдаемых не более чем на 1,5%. Это значит, что Солнечная система находится вблизи максимального резонансного состояния, которое является «неизбежным следствием ее эволюции и признаком ее эволюционной зрелости».

Советский астроном Кирилл Бутусов в работе [122] сопоставил минимальные, средние и максимальные периоды обращений планет и периоды биений (разности частот обращений) для смежных планет со средним периодом обращения Земли, равным $T_з = 1.00004$, умноженным на число золотой пропорции в степени n, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. При этом он получил ряд довольно точных совпадений. Например, средний период обращения Меркурия составляет 0.24084 года. Сопоставление со средним периодом обращения Земли $T_з$, умноженным на (-3)-ю степень золотой пропорции Φ^{-3}, дает число 0.23608, что с достаточно высокой степенью точности совпадает с числом 0.24084. Аналогичное сопоставление максимального периода обращения Венеры, равного 0.61929 года, с числом $T_з = 1.00004$, умноженным на число Φ^{-1}, дает число 0.61806, что также дает хорошее совпадение. Подобные сопоставления с другими планетами Солнечной системы также привело к хорошим совпадениям, откуда Бутусов заключил, что «частоты обращения планет и разности частот обращений образуют спектр с интервалом, равным золотой пропорции»!

Эти необычное исследование привело также Бутусова к выводу о том, что «спектр гравитационных и акустических возмущений, создаваемых планетами, представляют собой консонантный аккорд, наиболее совершенный с эстетической точки зрения». Таким образом, в работе Бутусова идеи пифагорейцев и Кеплера о «музыке сфер» приобрели новое звучание и весьма реальное содержание. В заключение своей уникальной работы Бутусов делает замечание, что, видимо, «только случайность не позволила Кеплеру, хорошо знакомому с золотым сечением и знавшему наизусть все параметры планетных орбит, открыть эту закономерность».

Квазикристаллы. История открытия «квазикристаллов», в основе которых лежит «икосаэдрическая» симметрия, подробно освещена в главе 4. Как подчеркивается в статье [123], понятие квазикристалла представляет фундаментальный интерес, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Теория, основанная на этом понятии, заменяет извечную идею о «структурной единице, повторяемой в пространстве строго периодическим образом», ключевым понятием дальнего порядка. При этом согласно мнению Гратиа [123], «это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике». Важно подчеркнуть, что в основе «квазикристаллов» лежит «золотое сечение», которое является главной пропорцией икосаэдра (этот факт доказан в «Началах» Евклида). В 2011 г. автор этого открытия израильский физик Дан Шехтман был удостоен Нобелевской Премии по химии.

Фуллерены. Открытие фуллеренов - новой формы существования одного из самых распространенных элементов на Земле – углерода, признано одним из удивительных и важнейших открытий в науке XX столетия. За свое открытие - обнаружение углеродных кластеров состава C_{60} и C_{70} – американские ученые Р. Керл, Р. Смолли и Г. Крото в 1996 г. были удостоены Нобелевской Премии по химии. Ими же и была предложена удивительная по своей геометрической красоте структура фуллерена C_{60}, похожая на оболочку футбольного мяча. Как известно, оболочка футбольного мяча скроена из 12 пентагонов и 20 гексагонов. Наиболее стабильный изомер C_{60} имеет структуру усеченного икосаэдра, который был известен еще Архимеду. Изомер C_{60} получил название «Бакминстерфуллерен» в честь известного архитектора по имени R. Buckminster Fuller, создавшего сооружения, куполообразный каркас которых сконструирован из пентагонов и гексагонов. Российские ученые А.В. Елецкий и Б.М. Смирнов в своей статье [124] отмечают, что «фуллерены, существование которых было установлено в середине 80-х, а эффективная технология выделения которых была разработана в 1990 г., в настоящее время стали предметом интенсивных исследований десятков научных групп. За результатами этих исследований пристально наблюдают прикладные фирмы. Поскольку эта модификация углерода преподнесла ученым целый ряд сюрпризов, было бы неразумным обсуждать прогнозы и возможные последствия изучения фуллеренов в ближайшее десятилетие, но следует быть готовым к новым неожиданностям».

Весьма неожиданным является, например, использование фуллеренов в медицине. Как показано в [125], фуллерены составляют основу диетической добавки «C_{60} Water of Life», которая может быть использована для лечения многих болезней.

Новая геометрическая теория филлотаксиса («геометрия Боднара»). Одной из важнейших проблем ботаники является «проблема филлотаксиса», которую мы рассмотрели в главе 2. Ботаники установили, что на поверхности плотно упакованных «филлотаксисных» объектов (сосновых шишек, кактусов, ананасов, головок подсолнечников и т.д.) всегда наблюдаются две группы спиралей, на пересечении которых находятся семена сосновых шишек, семечки подсолнухов, колючки кактусов и т.д. Изучая это уникальное ботаническое явление, ботаники установили, что отношение количества левых и правых «филлотаксисных» спиралей всегда соответствуют отношениям соседних чисел Фибоначчи: 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, ... Эти отношения и составляют суть закона филлотаксиса. Однако при этом всегда остается неясным вопрос, как «спирали Фибоначчи» формируются на поверхности «филлотаксисных объектов» в процессе их роста. Экспериментальные наблюдения за ростом «филлотаксисных объектов» показало, что в процессе роста «филлотаксисного объекта» на его поверхности происходит изменение картины филлотаксиса согласно следующему математическому закону:

$$\frac{2}{1} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{3} \to \frac{8}{5} \to \frac{13}{8} \to \frac{21}{13} \to \dots . \tag{18.1}$$

Возникает вопрос, как объяснить модификацию (18.1) картины филлотаксиса на поверхности филлотаксисного объекта в процессе его роста? Вот на этот далеко не простой научный вопрос и попытался ответить украинский архитектор Олег Боднар.

Олег Боднар. Доктор искусствоведения (1992), професор дизайна. Закончил архитектурный факультет Львовского политехнического института (1972). Заведующий кафедрой, председатель докторского специализированного ученого совета Львовской Национальной Академии Искусств. Основные направления научных исследований — теория формообразования, проблемы структурной гармонии систем

И надо отдать должное Олегу Боднару: сделал он это блестяще [24]. Он предположил, что «геометрия филлотаксиса» является неевклидовой, то есть, в ее основе лежат соотношения, основанные на гиперболических функциях. Надо отметить, что при этом он следовал идеям В.И. Вернадского, который одним из первых понял роль гиперболических представлений в биологии. Но применение классических гиперболических функций не дает ответа на вопрос, почему на поверхности «филлотаксисного объекта» появляются фибоначчиевые спирали. И здесь Боднар выдвинул неожиданную гипотезу: проблема решается очень просто, если ввести в рассмотрение так называемые «золотые» гиперболические функции, основанные на «золотой пропорции». Такое решение сразу же привело к созданию новой геометрии филлотаксиса, называемой «геометрией Боднара» [24]. «Геометрия Боднара» является фундаментальным открытием современной науки, так как она раскрывает механизм роста «филлотаксисных объектов», то есть, сосновых шишек, кактусов, ананасов, головок подсолнечников и т.д.

Теория «E-infinity». В последние годы внимание физической науки было привлечено к научным результатам английского физика египетского происхождения Мохаммеда Ель Нашие. В журнале «Chaos, Solitons and Fractals" он опубликовал много статей, посвященных этому открытию [126-128]. Суть открытия основана на обнаружении "золотого сечения» в знаменитом двухщелевом эксперименте, который лежит в основе квантовой физике. На основе этого открытия Ель Нашие сделал ряд интересных предсказаний в развитии теоретической физики.

Золотая гармония и сердце. Так называется книга известного российского исследователя Виктора Цветкова [129], опубликованная в 2008 г. Мы не имеем возможности углубляться в медицинские детали исследований Цветкова. Отметим наиболее важные результаты этих исследований:

1. Золотое сечение – это «технологический рецепт», используемый Природой для экономии энергии и живого строительного материала, что подчеркивает естественнонаучную сущность феномена золотой пропорции.

2. Структуры и процессы, организованные в пространстве и времени по золотому сечению, эстетически благоприятно, гармонично, воспринимаются благодаря их резонансу с сердечной ритмикой человека. Таким образом, в сердце возникает

своеобразный резонанс между структурами и процессами сердечной деятельности, если они организованы по принципу золотого сечения.

3. Согласно принципу оптимального вхождения, сформулированному Цветковым [129], любая из сердечных систем, совместно образующих сложную кардиосистему, включается в последнюю оптимальным образом, вследствие чего сложная система исполняет свою функцию с минимальными затратами энергии и строительного материала. Энергооптимальность сопряжения сердечных систем обеспечивается уникальными свойствами золотого сечения и чисел Фибоначчи. Золотая гармония выступает как своего рода «знак качества» сердечных систем и сердца в целом. При этом «золотая гармония» и есть результат резонанса между структурами и процессами сердечной деятельности!

Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления (исследования Петруненко). В 2005 г. белорусский физик Василий Петруненко опубликовал книгу «Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления» [130]. В книге дается эмпирическое обоснование и теоретическое объяснение явления декалогарфмичской периодичности, обнаруженной автором в динамически равновесных системах разного уровня организации. Поражает диапазон проблем, рассмотренных в книге, - от объектов мегамира (Солнечная система, галактики и метагалактики) до объектов микромира (атомы, их ядра и электроны).

В работах Петруненко доказано, что в основе организации материи, как на уровне микромира, так и на уровне мегамира, лежит один и тот же принцип - принцип волновых кратностей золотого сечения.

Экспериментальное доказательство проявления «золотого сечения» в квантовом мире. В Международном журнале "Science" от 9-го января 2010 опубликована сенсационная информация об экспериментальном обнаружении золотого сечения в квантовом мире [131]. Это - результат многолетних исследований, выполненных в Helmholtz-Zentrum Berlin für Materialien und Energie

(HZB) (Германия), Oxford and Bristol Universities и Rutherford Appleton Laboratory (Великобритания). Суть эксперимента состояла в следующем. Ученые сосредоточились на исследовании на наноуровне магнитных свойствах кобальта ниобата. Если воздействовать на этот материал магнитным полем, то удается перевести магнитную цепь в новое квантовое состояние, называемое критическим.

Настраивая систему и искусственно вводя большую квантовую неопределенность, исследователи заметили, что цепочки атомов действуют подобно нано-гитаре, генерирующей колебания различных тонов. При этом первые два тона находятся в совершенном отношении друг к другу. Их частоты находятся в отношении 1.618, известном в искусстве и архитектуре под названием "золотое сечение"! Это открытие дало основание ведущим физикам высказать предположение, что на самом деле в основе квантового мира лежит совершенный порядок, гармония, основанная на "золотом сечении".

Платоновы тела и элементарные частицы. В последние годы удивительные симметрии Платоновых тел привлекли пристальное внимание физиков-теоретиков, специалистов в теории элементарных частиц [132]. Главное методологическое значение статьи [132] состоит в том, что она нацеливает физиков-теоретиков на использование Платоновых тел при создании современной теории элементарных частиц, а это и есть отражение «золотой» парадигмы древних греков в теоретической физике. Эта идея подтверждается и статьей [133], написанной известным российским физиком проф. Ю.С. Владимировым.

Исследования российского физика Анатолия Шелаева. В последнее время на сайте «Академия Тринитаризма» были опубликованы работы российского физика, доктора физико-математических наук Анатолия Шелаева [134-136].

Отличительной особенностью работ Шелаева введение обобщённой геометрической модели золотого сечения. Суть подхода Шелаева состоит в том, что золотое сечение обобщается от традиционного случая деления отрезка прямой линии в «золотом сечении» до отношения переменных отрезков ломаной линии, одни концы которых закреплены, а другие движутся по окружности. Кроме того, показывается, что характерным отрезкам и фигурам, определяемым этой ломаной линией, соответствуют экстремумы длин, площадей или их производных.

Работы Анатолия Шелаева как физика-теоретика отличаются стремлением к физической трактовке новой геометрической модели золотого сечения для широкого круга физических явлений.

По-видимому, этих примеров достаточно для следующего вывода: теоретическое естествознание перешло в новую стадию развития, которую можно назвать «Гармонизация теоретического естествознания». И это подтверждается еще двумя открытиями современной науки – «золотыми» геноматрицами Сергея Петухова [137] и фибоначииевой закономерностью в Периодической таблице Д.И. Менделеева (открытие Сергея Якушко) [138].

18.6. «Золотые» геноматрицы Сергея Петухова

Генетическое кодирование. Как известно, основы языка наследственной информации поразительно просты. Для записи генетической информации в рибонуклеиновых кислотах (РНК) любых организмов используется «алфавит», состоящий из четырех «букв» или азотистых оснований: аденин (A), цитозин (C), гуанин (G), урацил (U) (в ДНК вместо урацила используется родственный ему тимин (T)).

Генетическая информация, передаваемая молекулами наследственности (ДНК и РНК), определяет первичное строение белков живого организма. Каждый кодируемый белок представляет собой цепи из 20 видов аминокислот. Триплетом называется блок из трех соседних азотистых оснований. Из четырехбуквенного алфавита можно составить всего 4^3=64 триплетов. Генетический код называется вырожденным, поскольку 64 триплета кодируют всего 20 аминокислот. Если произвольная белковая цепь содержит n аминокислот, то соответствующая ему последовательность триплетов в молекуле ДНК содержит $3n$ азотистых оснований или, другими словами, задается $3n$-плетом. Белковые цепи обычно содержат сотни аминокислот и соответственно задаются весьма длинными полиплетами.

Матричное представление генетических полиплетов. Основная идея С.В. Петухова [137] состоит в том, чтобы представлять генетические полиплеты в матричном виде. Простейшей является квадратная матрица второго порядка P, которая используется для представления системы из четырех азотистых оснований («букв») генетического алфавита:

$$P = \begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix} \tag{18.2}$$

Сергей Петухов.

Доктор физико-математических наук, кандидат биологических наук, лауреат Государственной премии СССР, академик ряда Национальных и Международных академий. Является специалистом в области теоретической и математической биологии, биомеханики, кристаллографии, физиологии, теории симметрий и самоорганизации.

Далее Петухов предлагает рассматривать семейство всех одинаковых по длине генетических полиплетов в виде соответствующего семейства матриц $P^{(n)}$, представляющих собой тензорные (кронекеровы) степени исходной матрицы (18.2). Смысл понятия «кронекерового произведения» матриц становится ясным из примера построения матрицы $P^{(2)}$:

$$\begin{gathered} P^{(2)} = P \otimes P = \begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix} \otimes P = \begin{pmatrix} C \times P & A \times P \\ U \times P & G \times P \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C\begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix} \\ U\begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix} & G\begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CC & CA & AC & AA \\ CU & CG & AU & AG \\ UC & UA & GC & GA \\ UU & UG & GU & GG \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{18.3}$$

Используя этот же принцип, легко получить матрицу $P^{(3)}$, которая является кронекеровым произведением матрицы $P^{(2)}$ (18.3) на матрицу P (18.2), то есть,

$$P^{(3)} = P^{(2)} \otimes P = \begin{pmatrix} CCC & CCA & CAC & CAA & ACC & ACA & AAC & AAA \\ CCU & CCG & CAU & CAG & ACU & ACG & AAU & AAG \\ CUC & CUA & CGC & CGA & AUC & AUA & AGC & AGA \\ CUU & CUG & CGU & CGG & AUU & AUG & AGU & AGG \\ UCC & UCA & UAC & UAA & GCC & GCA & GAC & GAA \\ UCU & UCG & UAU & UAG & GCU & GCG & GAU & GAG \\ UUC & UUA & UGC & UGA & GUC & GUA & GGC & GGA \\ UUU & UUG & UGU & UGG & GUU & GUG & GGU & GGG \end{pmatrix} \quad (18.4)$$

Матрицы типа $P^{(n)}$ названы геноматрицами. Данное семейство геноматриц $P^{(n)}$ при достаточно большом n представляют всю систему генетических кодовых полиплетов, включая моноплеты генетического алфавита (18.2) и триплеты, кодирующие аминокислоты (18.4).

В каждом из четырех квадрантов геноматрицы $P^{(n)}$ собраны все n-плеты, начинающиеся с одной буквы C, A, U, G. Если не обращать внимания на первую букву в n-плетах, то легко видеть, что квадрант матрицы $P^{(n)}$ полностью воспроизводит матрицу $P^{(n-1)}$ предыдущего поколения. С другой стороны, каждая матрица $P^{(n)}$ образует квадрант матрицы $P^{(n+1)}$ старшего поколения. Таким образом, геноматрица каждого нового поколения содержит в себе в скрытом виде информацию о всех предыдущих поколениях.

Числовые геноматрицы. При замене в символьных матрицах каждого символа азотистых оснований на те или иные их количественные параметры получаются соответствующие числовые геноматрицы. Для образования таких количественных параметров С.В. Петухов воспользовался числовыми значениями комплементарных водородных связей в азотистых основаниях генетического кода, «которые давно подозреваются на особую информационную значимость» [137]. Речь идет о двух и трех водородных связях, соединяющих комплементарные пары азотистых оснований в молекулах наследственности, причем для оснований C и G число таких водородных связей равно 3, а для A и U равно 2. Ключевая идея Петухова [137] состояла в том, чтобы заменить каждый полиплет во всех матрицах $P^{(n)}$ произведением чисел водородных связей его азотистых оснований. При этом, например, триплет CGA в октетной матрице (18.4) заменяется на произведение $3\times3\times2=18$.

В результате такой замены символьные геноматрицы (18.2), (18.3), (18.4) превращаются соответственно в следующие числовые геноматрицы $P_{мульт}$:

$$P^{(1)}_{мульт} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{18.5}$$

$$P^{(2)}_{мульт} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 9 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \tag{18.6}$$

$$P^{(3)}_{мульт} = \begin{array}{c|cccccccc|c} & & & & & & & & & \sum \\ & 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 & 125 \\ & 18 & 27 & 12 & 18 & 12 & 18 & 8 & 12 & 125 \\ & 18 & 12 & 27 & 18 & 12 & 8 & 18 & 12 & 125 \\ & 12 & 18 & 18 & 27 & 8 & 12 & 12 & 18 & 125 \\ & 18 & 12 & 12 & 8 & 27 & 18 & 18 & 12 & 125 \\ & 12 & 18 & 8 & 12 & 18 & 27 & 12 & 18 & 125 \\ & 12 & 8 & 18 & 12 & 18 & 12 & 27 & 18 & 125 \\ & 8 & 12 & 12 & 18 & 12 & 18 & 18 & 27 & 125 \\ \sum & 125 & 125 & 125 & 125 & 125 & 125 & 125 & 125 & 1000 \end{array} \tag{18.7}$$

Легко обнаружить ряд интересных свойств числовых геноматриц (18.5)-(18.7). Во-первых, все матрицы (18.5)-(18.7) являются симметричными относительно обеих диагоналей и поэтому названы бисимметричными [137]. Во-вторых, сумма чисел в каждой строке и каждом столбце матриц (18.5)-(18.7) соответственно равны 5, 5^2=25 и 5^3 = 125, а суммы чисел в матрицах (18.5)-(18.7) соответственно равны 10, $10^2 = 100$ и $10^3 = 1000$. Доказано [137], что подобным свойством обладает любая числовая геноматрица матрица $P^{(n)}_{мульт}$, то есть, каждая такая матрица является бисимметричной и при этом сумма чисел в каждой ее строке и каждом ее столбце равна 5^n, а общая сумма чисел в матрице равна 10^n. Уже эти удивительные свойства числовых геноматриц Петухова вызывают прямотаки «магическое» впечатление. Но связь этих числовых геноматриц с «золотым сечением», обнаруженная Петуховым, производит еще более удивительное впечатление!

«Золотые» геноматрицы. Рассмотрим числовую геноматрицу (18.5), соответствующую простейшей символьной геноматрице (18.2). А теперь рассмотрим квадратную матрицу $\Phi^{(1)}$, элементами которой являются число $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотая пропорция») и обратное ему число $\Phi^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$:

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} \Phi^1 & \Phi^{-1} \\ \Phi^{-1} & \Phi^1 \end{pmatrix} \qquad (18.8)$$

«Золотая» матрица (18.8) обладает замечательными свойствами. Для их установления воспользуемся формулами Бине для чисел Люка $L_n \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$:

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k+1 \end{cases}. \qquad (18.9)$$

Каждая строка и каждый столбец матрицы (18.8) состоит только из двух элементов Φ^1 и Φ^{-1}. В соответствии с формулой Бине для случая $n = 1$ разность между этими элементами $\Phi^1 - \Phi^{-1} = L_1 = 1$.

Вычислим теперь детерминант матрицы (18.8):

$$\det M^{(1)} = \Phi^2 - \Phi^{-2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

Если теперь возвести матрицу (18.8) в квадрат, то в результате получается матрица следующего вида:

$$(M^{(1)})^2 = \begin{pmatrix} \Phi & \Phi^{-1} \\ \Phi^{-1} & \Phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Phi & \Phi^{-1} \\ \Phi^{-1} & \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^2 + \Phi^{-2} & 2 \\ 2 & \Phi^{-2} + \Phi^2 \end{pmatrix} \qquad (18.10)$$

Для упрощения матрицы (18.10) обратимся к формуле Бине (18.9); для случая $n = 2$ имеем:

$$\Phi^2 + \Phi^{-2} = L_2 = 3. \qquad (18.11)$$

С учетом (18.11) матрица (18.10) может быть представлена в виде:

$$(M^{(1)})^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (18.12)$$

Сравнивая матрицы (18.12) и (18.5), мы приходим к неожиданному заключению, что числовой геноматрице (18.5) соответствует «золотая» геноматрица (18.8), которая после ее возведения в квадрат превращается в числовую геноматрицу (18.5)!

Но может быть, это случайное совпадение? Для ответа на этот вопрос рассмотрим числовую геноматрицу (18.6). Поставим ей в соответствие «золотую» геноматрицу, сформированную из соответствующей символьной геноматрицы (18.3) по следующему правилу.

Правило Петухова. Для получения «золотой» геноматрицы из соответствующей символьной матрицы необходимо каждый полиплет исходной символьной матрицы заменить произведением следующих числовых значений для его букв: $C = G = \Phi,\ A = U = \Phi^{-1}$.

В результате применения «правила Петухова» к символьной геноматрице (18.3) получаем следующую «золотую» геноматрицу:

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} \Phi^2 & \Phi^0 & \Phi^0 & \Phi^{-2} \\ \Phi^0 & \Phi^2 & \Phi^{-2} & \Phi^0 \\ \Phi^0 & \Phi^{-2} & \Phi^2 & \Phi^0 \\ \Phi^{-2} & \Phi^0 & \Phi^0 & \Phi^2 \end{pmatrix} \qquad (18.13)$$

Заметим, что матрица (18.13) обладает замечательными свойствами. Каждая строка и каждый столбец состоит из одних и тех же элементов, элемента Φ^2 и соответствующего ему элемента Φ^{-2} и двух элементов Φ^0. Если теперь просуммировать элементы матрицы по строкам и столбцам, то получим следующее:

$$\left(\Phi^2 + \Phi^{-2}\right) + \left(\Phi^0 + \Phi^0\right) \qquad (18.14)$$

Если теперь мы воспользуемся формулой Бине (18.9) (для случая $n = 2$ $\Phi^2 + \Phi^{-2} = L_2 = 3$) и учтем, что $\Phi^0 = 1$, то сумма (18.14) принимает следующее числовое выражение:

$$\left(\Phi^{2}+\Phi^{-2}\right)+\left(\Phi^{0}+\Phi^{0}\right)=5,$$

то есть, сумма элементов в каждой строке и каждом столбце матрицы (18.13) всегда равна 5!

А теперь возведем матрицу (18.13) в квадрат. В результате получим:

$$\left(M^{(2)}\right)^{2}=\begin{pmatrix}\Phi^{2} & \Phi^{0} & \Phi^{0} & \Phi^{-2}\\ \Phi^{0} & \Phi^{2} & \Phi^{-2} & \Phi^{0}\\ \Phi^{0} & \Phi^{-2} & \Phi^{2} & \Phi^{0}\\ \Phi^{-2} & \Phi^{0} & \Phi^{0} & \Phi^{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\Phi^{2} & \Phi^{0} & \Phi^{0} & \Phi^{-2}\\ \Phi^{0} & \Phi^{2} & \Phi^{-2} & \Phi^{0}\\ \Phi^{0} & \Phi^{-2} & \Phi^{2} & \Phi^{0}\\ \Phi^{-2} & \Phi^{0} & \Phi^{0} & \Phi^{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\Phi^{4}+\Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{-4} & \Phi^{2}+\Phi^{2}+\Phi^{-2}+\Phi^{-2} & \Phi^{2}+\Phi^{-2}+\Phi^{2}+\Phi^{-2} & \Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0}\\ \Phi^{2}+\Phi^{2}+\Phi^{-2}+\Phi^{-2} & \Phi^{0}+\Phi^{4}+\Phi^{-4}+\Phi^{0} & \Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0} & \Phi^{-2}+\Phi^{2}+\Phi^{-2}+\Phi^{2}\\ \Phi^{2}+\Phi^{-2}+\Phi^{2}+\Phi^{-2} & \Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0} & \Phi^{0}+\Phi^{-4}+\Phi^{4}+\Phi^{0} & \Phi^{-2}+\Phi^{-2}+\Phi^{2}+\Phi^{2}\\ \Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{0} & \Phi^{-2}+\Phi^{-2}+\Phi^{2}+\Phi^{2} & \Phi^{-2}+\Phi^{-2}+\Phi^{2}+\Phi^{2} & \Phi^{-4}+\Phi^{0}+\Phi^{0}+\Phi^{-4}\end{pmatrix} \quad (18.15)$$

Если теперь обратиться к формуле Бине (18.9), то можно записать следующие тождества:

$$\Phi^{2}+\Phi^{-2}=3 \quad \text{и} \quad \Phi^{4}+\Phi^{-4}=7. \qquad (18.16)$$

С учетом тождеств (18.16) матрица (18.15) может быть представлена в следующем числовом виде:

$$\left(M^{(2)}\right)^{2}=\begin{pmatrix}9 & 6 & 6 & 4\\ 6 & 9 & 4 & 6\\ 6 & 4 & 9 & 6\\ 4 & 6 & 6 & 9\end{pmatrix} \qquad (18.17)$$

Сравнивая (18.17) и (18.6), мы можем записать:

$$\left(M^{(2)}\right)^{2}=P^{(2)}_{мульт}, \qquad (18.18)$$

то есть, числовой геноматрице (18.6) соответствует «золотая» геноматрица (18.13), которая после ее возведения в квадрат превращается в числовую геноматрицу (18.6)!

Рассмотрим теперь «золотую» геноматрицу $M^{(3)}$, соответствующую символьной октетной геноматрице (18.4), которая задает триплеты, кодирующие аминокислоты:

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} \Phi^3 & \Phi^1 & \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^{-1} & \Phi^{-3} \\ \Phi^1 & \Phi^3 & \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^{-3} & \Phi^{-1} \\ \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^3 & \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^{-3} & \Phi^1 & \Phi^{-1} \\ \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^1 & \Phi^3 & \Phi^{-3} & \Phi^{-1} & \Phi^{-1} & \Phi^1 \\ \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^{-1} & \Phi^{-3} & \Phi^3 & \Phi^1 & \Phi^1 & \Phi^{-1} \\ \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^{-3} & \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^3 & \Phi^{-1} & \Phi^1 \\ \Phi^{-1} & \Phi^{-3} & \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^3 & \Phi^1 \\ \Phi^{-3} & \Phi^{-1} & \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^{-1} & \Phi^1 & \Phi^1 & \Phi^3 \end{pmatrix}. \qquad (18.19)$$

«Золотая» матрица (18.19) также обладает рядом удивительных, действительно, «золотых» свойств. Нетрудно усмотреть, что каждая строка и каждый столбец матрицы (18.19) состоит из одних и тех же элементов – элемента Φ^3 и соответствующего ему элемента Φ^{-3}, трех элементов Φ^1 и трех элементов Φ^{-1}. Если теперь сгруппировать эти элементы следующим образом:

$$\left(\Phi^3 - \Phi^{-3}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) \qquad (18.20)$$

и затем воспользоваться формулами Бине (18.9), которые для случаев $n = 1$ и $n = 3$ принимают следующий вид:

$$\Phi^1 - \Phi^{-1} = L_1 = 1 \quad \text{и} \quad \Phi^3 - \Phi^{-3} = L_3 = 4,$$

то сумма (18.20) принимает следующее числовое значение:

$$\left(\Phi^3 - \Phi^{-3}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) + \left(\Phi^1 - \Phi^{-1}\right) = 8.$$

Если теперь возвести матрицу (18.19) в квадрат, то после проведения соответствующих преобразований получим следующий результат:

$$\left(M^{(3)}\right)^2 = P^{(3)}_{мульт}. \qquad (18.21)$$

Оказывается, что подобное соотношение справедливо для любой мультипликативной геноматрицы $P^{(n)}_{мульт}$, то есть, Петуховым доказано следующее утверждение, которые мы будем называть «Открытием Петухова».

Открытие Петухова. Пусть A (аденин), C (цитозин), G (гуанин) и U (урацил) – азотистые основания («буквы») генетического алфавита, образующие исходную символьную матрицу $P = \begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix}$. Тогда каждой символьной геноматрице типа $P^{(n)}$, которая образуется из исходной символьной матрицы путем тензорного (кронекерового) произведения исходной символьной матрицы $P = \begin{pmatrix} C & A \\ U & G \end{pmatrix}$ и членами которой являются полиплеты, составленные из «букв» генетического алфавита A, C, G и U, соответствует некоторая числовая геноматрица типа $P^{(n)}_{мульт}$, каждый член которой представляет собой произведение чисел водородных связей соответствующих азотистых оснований данного полиплета, а каждой числовой геноматрице $P^{(n)}_{мульт}$, в свою очередь, соответствует некоторая «золотая» геноматрица $M^{(n)}$, которая образуется из символьной геноматрицы $P^{(n)}$ путем замены каждого полиплета произведением следующих числовых значений для его «букв»: $C = G = \Phi, A = U = \Phi^{-1}$. При этом «золотая» геноматрица $M^{(n)}$ связана с числовой геноматрицей $P^{(n)}_{мульт}$ следующим фундаментальным соотношением:

$$\left(M^{(n)}\right)^2 = P^{(n)}_{мульт}.$$

Обнаружение связи «золотого сечения» с параметрами генетического кода позволило Петухову предложить новое – «матрично-генетическое» – определение золотого сечения, основанное на простейшей «золотой» геноматрице (18.8).

Определение Петухова. Золотое сечение и его обратная величина (Φ и Φ^{-1}) представляют собой единственные матричные элементы бисимметричной матрицы $M^{(1)}$, являющейся корнем квадратным из такой бисимметричной числовой матрицы $P_{мульт}$ второго порядка, элементами которой являются генетические числа водородных связей ($C = G = 3, A = U = 2$.

В заключение дадим оценку научному открытию Сергея Петухова [137]. Это открытие показывает фундаментальную роль, которую играет «золотое сечение» в генетическом кодировании. Открытие Петухова свидетельствует о том, что

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ ЖИВОЙ ПРИРОДЫ! Сейчас еще трудно оценить в полной мере революционный характер этого открытия для развития современной науки. Ясно одно, что для теории генетического кодирования – это результат такой же значимости, как и открытие самого генетического кода!

Эту часть нашей книги уместно закончить следующим высказыванием Сергея Петухова [137], которое подчеркивает важность матричного подхода в «теории золотого сечения»:

«Выдвинутое положение о матричном определении и матричной сущности золотого сечения дает эвристическую возможность рассмотреть весь этот материал на предмет его содержательной интерпретации с принципиально новой – матричной – точки зрения. Автор полагает, что многие реализации золотого сечения в живой и неживой природе связаны именно с матричной сущностью и матричным представлением золотого сечения. Математика золотых матриц – новая математическая веточка, изучающая, в частности, рекуррентные соотношения между рядами золотых матриц, а также моделирование с их помощью природных систем и процессов».

18.7. Фибоначчиева закономерность в Периодической таблице Менделеева (открытие украинского исследователя Сергея Якушко)

В науке часто бывает так, что действительно эпохальные открытия часто совершаются не там, где их ожидают. Хрестоматийным является пример Альберта Эйнштейна, который пришел к своему наиболее известному открытию – специальной теории относительности, работая в должности эксперта в Федеральном Бюро патентования изобретений (Берн, Швейцария), которое, строго говоря, никакого отношения к теоретической физике не имело. Но тем не менее, характер работы позволял Эйнштейну посвящать свободное время исследованиям в области теоретической физики.

Повидимому, открытие «фибоначчиевой» закономерности в Периодической системе элементов Д.И. Менделеева, сделанное украинским исследователем Сергеем Якушко, доцентом Сумского государственного университета, также относится к разряду таких уникальных примеров.

Сергей Якушко.

Кандидат технических наук, доцент Сумского государственного университета.

Комиссия Международного объединения «Русское физическое общество» на своем заседании 30 декабря 2011 года присуждила Якушко Сергею Ивановичу почетное звание «Лауреат Премии Русского Физического Общества» за открытие Закона фибоначчиевого распределения химических элементов в периодах таблицы Д.И.Менделеева, а также Якушко С.И. стал Почетным членом Русского физического общества

Поиски единого закона природы. Не вдаваясь в детали этого научного открытия и отсылая к статье Сергея Якушко [138], рассмотрим методологические рассуждения, которые привели его к этому открытию.

Во все века люди искали единый закон – закон развития, согласно которому идет зарождение, проявление и развитие материи. По словам Марка Аврелия, «весь мир подчинен единому закону». Этот закон был известен нашим предкам, что доказывается письменными документами различных народов независимо друг от друга по времени и территориальности.

Считается, что этот закон должен быть отражен в простой зависимости или формуле. Эйнштейн, который отдал последние годы жизни поиску этого закона, считал, что “природа представляет собой реализацию простейших математических элементов”.

Данный закон должен быть четким и логическим объединением известных законов природы. Эта идея высказывалась многими учеными. Например, М.Борн высказал эту мысль таким образом: “Было бы идеалом кратко обобщить все законы в едином Законе, универсальной формуле”. Ещё один лауреат Нобелевской премии И.Р.Пригожин в послесловии к русскому изданию “Порядок из хаоса” писал: “Было бы поистине чудом открыть единые основания всех наук” [139].

Периодичский закон Д.И. Менделеева. Достоверность гипотез закона развития должны проверяться на известных и прошедших проверку временем физических законах. Одним из них, по всеобщему мнению, является периодический закон Д.И.Менделеева. В 1869 году Дмитрий Иванович Менделеев первым в истории науки сгруппировал известные и предполагаемые химические элементы в такую таблицу, в которой элементы, проявляющие сходные свойства, выстроились в гомологичные ряды (химические группы). Так в науке появилась неплохая исходная база для начала познания основного принципа, реализующегося в строении всей Вселенной [140].

Менделеев положил начало современной химии, сделал ее единой, целостной наукой. Элементы стали рассматриваться во взаимосвязи, в зависимости от того, какое место они занимают в периодической системе. Как указывал Н.Д. Зелинский, периодический закон явился «открытием взаимной связи всех атомов в мироздании». В нем объяснено периодическое изменение свойств элементов. Возрастание положительных зарядов атомных ядер от 1 до 110 и далее обусловливает периодическое повторение строения внешнего энергетического уровня. А поскольку свойства элементов в основном зависят от числа электронов на внешнем уровне, то и они периодически повторяются. В этом — физический смысл периодического закона.

Химический этап в развитии Периодической системы. Порядок заполнения электронами энергетических уровней (электронных слоев) и подуровней (подслоев) теоретически обосновывает периодическую систему элементов Д. И. Менделеева. То есть, Периодическая система Д.И. Менделеева является естественной классификацией химических элементов по электронной структуре их атомов. Об электронной структуре атома, а значит, и о свойствах элемента судят по положению элемента в соответствующем периоде и подгруппе периодической системы. Закономерностями заполнения электронных уровней объясняется различное число элементов в периодах.

Указанный периодический закон изменения свойств элементов представлен в виде таблицы, получившей название Таблицы Д.И.Менделеева. Но не всегда таблица имела такой вид. Да и сейчас появляются сообщения о новых способах сведения элементов в определенную систему. Почему это происходит?

Это говорит не о недостатках или ущербности разработанной таблицы, а как раз наоборот – о большом общенаучном и философском значении периодического закона, поскольку он подтвердил наиболее общие законы развития природы, ибо ее построение основано на всеобщем законе образования веществ. Менделеев гениальным предвидением «выхватил» всеобщий закон развития, но применил его в приложении к химическим элементам. Сразу после создания периодической системы элементов (в 1870 году), формулировка закона была такой: "Свойства элементов, а потому и свойства образуемых ими простых и сложных тел, находятся в периодической зависимости от их атомного веса". Этой формулировкой было выявлено первое свойство закона образования элементов – в зависимости от их атомного веса. Это так называемый «химический» этап развития Периодической системы элементов.

Физический этап в развитии Периодической системы. Химия в принципе не могла объяснить причину периодичности свойств элементов и их соединений. Дальнейшее развитие периодического закона в XX веке связано с блестящими успехами физики, приведшими к революционным изменениям в естествознании.

В двадцатых годах прошлого столетия, после революционных открытий в физике, применения рентгеновских лучей и обнаружения благородных газов, стало возможным дать современное определение закона о периодической зависимости свойств элементов от порядкового номера элемента, а не от атомного веса, как было вначале сформулировано. Так было выявлено второе свойство периодического закона образования элементов: в трактовке закона понятие "атомный вес" элемента было заменено словами "порядковый (или атомный) номер", что отвечает числу протонов в ядре атома и, соответственно, числу электронов у нейтрального атома.

Это так называемый «физический» этап развития Периодической системы элементов, связанный с разработкой модели строения атома.

В результате была разработана теория периодической системы на основании представлений о строении электронных оболочек атомов, которая звучит так: «максимально возможное число электронов на каждом уровне равно количеству элементов в периодах периодической таблицы».

Таким образом, была выявлена несомненная связь периодичности свойств элементов со строением электронных оболочек атомов. Создание учения о строении электронных оболочек атомов позволило сформулировать физическую теорию периодической системы, объяснившую причины периодичности свойств элементов и их соединений.

Это не значит, что раньше таблица была несовершенной, просто закон образования элементов должен был последовательно пройти этапы своего развития, как и все живое на Земле. При этом общий вид Таблицы не изменился – изменился взгляд на таблицу, выявив новое ее свойство.

Это говорит о том, что закон образования элементов еще до конца не раскрыт. Подтверждением тому являются пророческие слова Менделеева: «Периодическому закону не грозит разрушение, а обещаются только надстройка и развитие».

Фибоначчиевый этап в развитии Периодической системы. А теперь вновь обратимся к «золотому сечению» и числам Фибоначчи. Как известно, они присутствуют практически везде в окружающем нас мире. Гармония мира основана на золотой пропорции и числах Фибоначчи. Она присутствует в физических и химических закономерностях, в строении Вселенной и всего живого на Земле. Логически можно предположить, что золотое сечение и числа Фибоначчи должны присутствовать и в Периодической системе элементов, которая является отражением наиболее общих законов природы. Это и есть центральная методологическая идея исследования Периодического закона, выполненного

Сергеем Якушко. Суть своего открытия он сформулировал следующим образом [138]:

«Закон образования элементов в Периодической системе Д.И. Менделеева, согласно которому вначале образуется семь основных образующих периоды элементов - благородные газы, которые в системе координат атомный номер - относительная атомная масса находятся на прямой, тангенс угла наклона которой составляет 5^0, а остальные элементы в периодах являются производными основных элементов и располагаются на прямых, тангенсы углов наклона которых в системе координат атомный номер - относительная атомная масса, начиная с первого периода, представляют собой обратный ряд Фибоначчи: $\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{13}$ вплоть до седьмого периода».

Таким образом, если каждый период элементов в Периодической системе представить в виде зависимости доли атомной массы последнего элемента данного периода, т.е. благородного газа, от атомных номеров соответствующих элементов, то каждый период представляется в виде прямых, тангенс угла наклона которых от первого периода к последнему меняется по следующему закону:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{13}.$$

Как нетрудно усмотреть, этот ряд связан с числами Фибоначчи 1,1,2,3,5,8,13 и назван в [138] обратным рядом чисел Фибоначчи.

Предложенный Якушко подход позволил: во-первых, дать теоретическое обоснование периодов «фибоначчиевой» таблицы химических элементов; во-вторых, «исправить» атомные массы элементов и получить атомные массы «чистых», не загрязненных изотопами химических элементов; в-третьих, данный подход позволил обосновать значение благородных газов «фибоначчиевой» таблицы Менделеева как элементообразующих для каждого периода.

Это можно пояснить на следующем примере. На рисунке 18.1 представлена относительная атомная масса элементов второго периода и хорошо виден «разброс» элементов относительно усредняющей линии, которая характеризует характер распределения элементов в этом периоде. Это вызвано тем, что в природе все элементы, за редким исключением, существуют в виде смесей из нескольких изотопов. Это ведет к тому, что атомная масса природного элемента несколько отличается от атомной массы любого из его чистых изотопов. Поэтому чаще всего атомная масса элемента равняется среднему значению из атомных масс всех его природных изотопов с учетом их распространенности в природе.

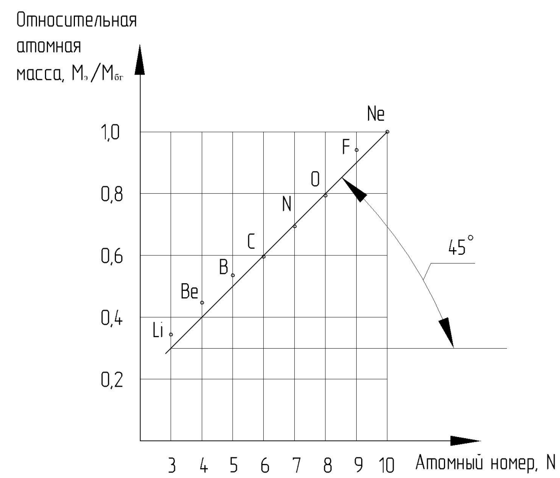


Рис.18.1 - Относительная атомная масса элементов второго периода

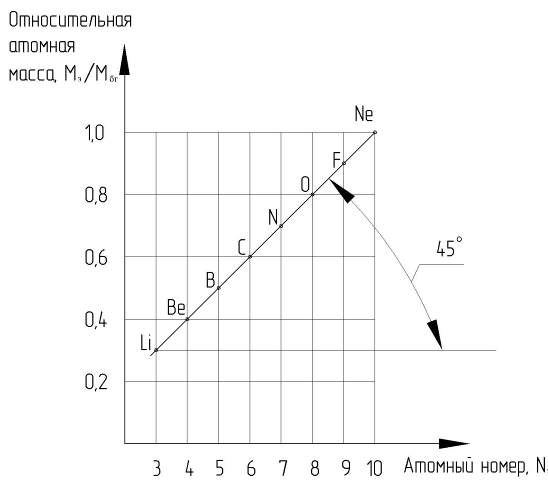


Рис.18.2 - Относительная атомная масса элементов «фибоначчиевого» второго периода

Масса любого ядра определяется числом входящих в него протонов, чем и выражается атомная масса элемента. Однако почему же атомные массы дробные? Ведь нельзя же допустить, что в ядре помимо целых протонов заключены и какие-то его части. Это происходит потому, что изотопы одного и того же элемента неравномерно распределены в природе, и потому атомная масса элемента является фактически средним (не арифметическим, а сообразно с учетом процента распространения каждого изотопа). Этим объясняются «неправильности» в клетках периодической системы. Заметим, что усредняющая линия на Рис.18.1 проведена под углом 45°, то есть, тангенс угла наклона прямой составляет 1.

Как известно, Периодический закон послужил основой для исправления атомных масс элементов. Так еще во времена составления Периодической системы, самим Менделеевым были исправлены атомные массы более 20-ти элементов, после чего эти элементы заняли свои места в периодической системе.

Подход, предложенный Сергеем Якушко, также позволяет «исправить» атомные массы элементов. Для этого, зная атомную массу наиболее «чистого», т.е. не загрязненного изотопами элемента и, зная угол наклона прямой, которая соответствует закону распределения элементов в данном периоде, можно определить «чистые» атомные массы остальных элементов периода. На рисунке 17.2 представлены значения «чистых» не загрязненных изотопами химических элементов второго периода. Таким же образом «исправляются» атомные массы всех химических элементов периодической системы элементов.

Таким образом, появляется возможность получить новую - «фибоначчиевую» таблицу «чистых» не загрязненных изотопами химических элементов.

Подобным образом можно представить элементы всех остальных периодов. На Рис.18.3 представлена относительная атомная масса элементов третьего периода в зависимости от атомных номеров этих элементов.

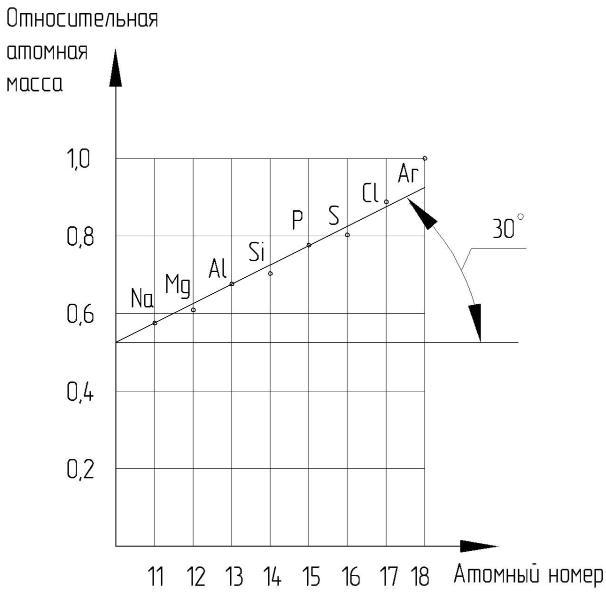


Рис.18.3. Относительная атомная масса элементов третьего периода

Как видно из графика, все полученные точки «ложатся» на прямую с углом наклона 30^0, т.е. тангенс угла наклона прямой составляет 1/2.

В статье Якушко [138] показано, что этой же закономерности удовлетворяют элементы всех остальных периодов – от 4-го до 8-го. При этом тангенсы углов наклона прямой, на которой расположены элементы каждого из последующих периодов, уменьшаются и становятся равными следующим обратным числам Фибоначчи: $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}$.

«Фибоначчиевый» закон распределения элементов в периодах можно считать третьим фактором, дополняющим теорию Периодической системы элементов.

Это так называемый «фибоначчиевый» этап развития Периодической системы, открытый Сергеем Якушко.

Этапы развития Периодического закона. Таким образом, этапы развития Периодического закона, согласно Якушко [138], можно представить себе, как показано в Табл.18.6.

Таблица 18.6. Этапы развития Периодического закона

Номер этапа	Наименование этапа	Свойства элементов находятся в периодической зависимости
1	химический	от их атомного веса
2	физический	от их зарядов ядер
3	"фибоначчиевый"	от закона их распределения по периодам согласно обратным числам Фибоначчи: $\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}$

Такой подход дает возможность теоретически рассчитывать значения атомных масс элементов для корректировки свойств существующих и прогнозирования свойств будущих, пока еще не открытых химических элементов.

Комментарий. Таким образом, достаточно внушительный перечень упомянутых выше научных открытий, сделанных в естествознании и признанных даже Нобелевским комитетом, позволяет сделать вывод о том, что современное теоретическое естествознание находится в стадии активной «гармонизации». Этот процесс затронул все основные области теоретического естествознания: химию, квантовую физику, кристаллографию, астрономию, генетику, ботанику, биологию, медицину и другие области. Более того, можно даже говорить о том, что теоретическое естествознание находится в преддверии «золотой» научной революции! В части 2 настоящей книги описан процесс «гармонизации современной информатики», основанный на использовании систем счисления с иррациональными основаниями (кодов золотой пропорции). Именно поэтому такое большое значение для дальнейшего развития всей науки в целом, включая и информатику, приобретает процесс «гармонизации математики», который начался с работ современных математиков-фибоначчистов [1-4] и уже повлиял на развитие всех отраслей науки и культуры [5-50].

18.8. Три важнейших периода в развитии «математики гармонии»

Эдуард Сороко начинает свою замечательную книгу «Структурная гармония систем» [13] следующими словами:

«Если и существуют «вечные» проблемы, которые постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль, то среди них в первую очередь можно назвать проблему гармонии. Наука, физика в частности, по словам Б.Г. Кузнецова, всегда имела своей извечной целью «найти в лабиринте наблюдаемых фактов объективную гармонию»... То же можно сказать в адрес философии, искусства (живописи, музыки, архитектуры) и других областей самореализации «человеческого духа» ... .

Как упоминалось в Предисловии, для обозначения наиболее характерной особенности пифагорейской математики был введен очень удачный термин «математика гармонии» [53,54]. При этом наибольший интерес к «математике гармонии», то есть, к идеям Пифагора, Платона и Евклида, всегда проявлялся в периоды наивысшего расцвета «человеческого духа». С учетом этого в развитии «математики гармонии» можно выделить три важнейшие периоды.

Древнегреческий период. Условно можно считать, что этот период начинается с исследований Пифагора и Платона. Завершающим событием этого периода являются «Начала» Евклида. Как упоминалось в главе 1, по мнению Прокла, одного из первых греческих комментаторов Евклида, Евклид создавал «Начала» с целью дать полную геометрическую теорию пяти «Платоновых тел», которые ассоциировались в древнегреческой науке с «гармонией Мироздания». При этом он попутно осветил некоторые новейшие достижения математики и ввел в рассмотрение «золотое сечение», которое было использовано Евклидом при создании геометрической теории «Платоновых тел».

Эпоха Возрождения. Этот период связан с именами таких выдающихся личностей этой эпохи, как Пьеро дела Франческа (1412–1492), Леон Баттиста Альберти (1404–1472), Леонардо да Винчи (1452–1519), Лука Пачоли (1445–1517), Иоганн Кеплер (1571–1630). Именно в этот период появляются две книги, которые в наибольшей степени отражали идею «гармонии Мироздания». Первая из них – это книга “Divina Proprtione” («Божественная Пропорция») (1509), написанная выдающимся итальянским математиком и ученым монахом Лукой Пачоли под непосредственным влиянием Леонардо да Винчи. Вторая книга – это книга Иоганна Кеплера “Harmonices Mundi” («Гармония мира») (1619). Возникает вопрос: кто стимулировал возврат к «золотой» парадигме в эпоху Возрождения? Ответ – однозначный: христианская религия.

Морис Клайн в своей книге «Математика. Утрата определенности» (1984) [51] подчеркивает причину, по которой религия поддерживала идею математического исследование гармонии как воплощение в Природе Божественного промысла:

«Бог вложил в мир строгую математическую необходимость, которую люди постигают лишь с большим трудом, хотя их разум устроен по образу и подобию божественного разума. Следовательно, математическое знание не только представляет собой абсолютную истину, но и священно, как любая строка Священного Писания. Исследование природы – занятие столь же благородное, как и изучение Библии».

Современный период. Условно этот период начинается в 19 в. с работ французских математиков Жака Филлипа Мари Бине (1786–1856), Франсуа Эдуарда Анатоля Люка (1842–1891), немецкого поэта и философа Адольфа Цейзинга (род. в 1810 г.) и немецкого математика Феликса Клейна (1849–1925).

В первой половине 20 в. развитие «золотой» парадигмы связано с именами российского профессора архитектуры Г.Д. Гримма (1865–1942) [141], французского исследователя Матилы Гика [119] и классика русской религиозной философии Павла Флоренского (1882–1937).

Во второй половине 20 в. и начале 21 в. интерес к этому направлению возрастает во всех сферах науки, в частности, в математике. В области математики наиболее яркими представителями этого направления стали канадский геометр Гарольд Коксетер [1], советский математик Николай Воробьев (1925–1995) [2], американский математик Вернер Хоггатт (1921–1981) [3], английский математик Стефан Вайда [4] и др. Возрождение идеи гармонии в современной науке определялось новыми научными реалиями. Проникновение Платоновых тел, «золотого сечения» и чисел Фибоначчи во все сферы теоретического естествознания (кристаллография, химия, астрономия, наука о Земле, квантовая физика, ботаника, биология, геология, медицина и др.), а также в информатику и экономические науки и стало главной причиной возрождения интереса к проблеме гармонии в современной науке и стимулом для развития «математики гармонии» [47].

Характерные особенности каждого из периодов. Отметим, что каждый из рассмотренных выше периодов характеризуется двумя характерными особенностями:

1. Первая особенность состоит в существовании достаточно развитой научной среды, а также в наличии в ней определённой группы мыслителей, разделяющей «золотую» парадигму. Напомним ещё раз, что в древнегреческой науке к числу таких мыслителей относятся, прежде всего, Пифагор, Платон и Евклид, а в эпоху Возрождения – Леонардо да Винчи, Лука Пачоли и Иоганн Кеплер.
2. Выход в свет фундаментальных научных сочинений, в которых изложены основы «математики гармонии». В древнегреческую эпоху таким сочинением являются «Начала» Евклида, которые, согласно Проклу, посвящены разработке геометрической теории Платоновых тел, отражающих гармонию Мироздания в античной космологии. В эпоху Возрождения такими сочинениями являются книга Луки Пачоли «Divina Proportione» («Божественная Пропорция») (1509 г.) и книга Иоганна Кеплера “Harmonices Mundi” («Гармония мира») (1619 г.).

Эти особенности характерны и для новейшего периода развития этого направления. Как упоминалось, возрождение интереса современного научного сообщества к «золотому сечению», числам Фибоначчи и Платоновым телам, начиная со второй половины 20 в., подтверждается довольно внушительным перечнем книг по этой тематике, опубликованных в последние шесть десятилетий [1-50], а также созданием ряда научно-исследовательских групп и ассоциаций, начавших профессионально изучать эту проблему.

Наиболее известными из них являются американская Фибоначчи-ассоциация и Славянская «золотая» группа.

18.9. Фибоначчи-ассоциация

Огромное влияние на развитие современной «теории чисел Фибоначчи» оказало учреждение в 1963 г. математической Фибоначчи-ассоциации, которая с 1963 г. начала издавать ежеквартальный математический журнал The Fibonacci Quarterly. Одним из основателей Фибоначчи Ассоциации и The Fibonacci Quarterly был американский математик Вернер Хоггатт (Verner Emil Hoggatt) (1921-1981), профессор San Jose State University (США).

В 1969 году издательство "Houghton Mifflin" опубликовало книгу Вернера Хоггатта "Fibonacci and Lucas Numbers" [3], которая до сих пор считается одной из лучших книг в этой области. Вернер Хоггатт внес большой вклад в популяризацию исследований в области чисел Фибоначчи. Его последователи отмечают его продолжительную и несомненно выдающуюся работу профессором San Jose State University. Он руководил огромным количеством магистерских диссертаций и написал большое число статей по проблеме чисел Фибоначчи.

Вернер Хоггатт (Verner Emil Hoggatt) (1921-1981)

Другой выдающейся личностью, причастной к созданию Фибоначчи Ассоциации и учреждению The Fibonacci Quarterly, был ученый монах Брат Альфред Бруссау (Alfred Brousseau).

Альфред Бруссау (Alfred Brousseau) (1907-1988)

Духовный орден, к которому принадлежал Брат Альфред Бруссау, назывался "Братья христианских школ" или просто "Христианские братья". Альфред Бруссау был принят в Орден "Христианские братья" в 1923 г. В 1930 г. он был зачислен в колледж Святой Марии в Калифорнии. Одновременно с обучением в колледже Святой Марии, Альфред Бруссау продолжал самостоятельно изучать физику и в 1937 г. он получил докторскую степень в Калифорнийском университете. Альфред Бруссау был страстным фотографом. Он сделал коллекцию, состоящую из 20000 дикорастущих растений Калифорнии.

При изучении истории создания Фибоначчи-ассоциации, которая поставила довольно странную цель – изучать числовую последовательность, открытую в 13 в. итальянским математиком Фибоначчи, возникают следующие естественные вопросы:

1. В чем причина повышенного интереса членов Фибоначчи-ассоциации именно к числам Фибоначчи?

2. Что объединяло двух очень разных людей – математика Вернера Хоггатта и представителя духовного братства Альфред Бруссау, когда они задумали создать Фибоначчи-ассоциацию и учредить математический журнал с необычным названием «The Fibonacci Quarterly»?

К сожалению, в кратких биографиях и работах Вернера Хоггатта и Альфреда Бруссау, выставленных на Интернете, прямого ответа на этот вопрос нет. Но мы можем попытаться дать ответ на эти вопросы косвенно, анализируя некоторые документы, в частности, фотографии, а также их книги и статьи, опубликованные на страницах The Fibonacci Quarterly.

В 1969 г. журнал TIME опубликовал статью "The Fibonacci Numbers", посвященную Фибоначчи-ассоциации. В этой статье было представлено фото Альфреда Бруссау, держащего в руках кактус, который является одним из наиболее характерных "фибоначчиевых" ботанических объектов. В статье рассказывается и о других природных проявлениях этих чисел: о фибоначчиевой закономерности в размножении трутней, а также о том, что числа Фибоначчи встречаются в спиральных образованиях цветов, видимых на многих подсолнечниках, чешуйках сосновых шишек, ветвящихся узорах деревьев, и в расположении листьев на ветках деревьев.

Тем, кто изучает числа Фибоначчи, Альфред Бруссау рекомендовал "обращать внимание на поиск эстетического удовлетворения в них. Существует некоторый вид мистической связи между этими числами и Вселенной".

Но ведь на приведенной выше фотографии Вернер Хоггатт также изображен держащим в руках сосновую шишку, которая является одним из филлотаксисных ботанических объектов. Отсюда мы можем сделать предположение, что Вернер Хоггатт, как и Альфред Бруссау, верил в мистическую связь между числами Фибоначчи и Вселенной. Эта вера и объединила математика Вернера Хоггатта и ученого монаха Альфреда Бруссау и стала главным движущим мотивом для разворачивания работ по числам Фибоначчи и их приложениям в современной науке. Видимо, именно глубокая вера в законы гармонии Мироздания и объединяла Вернера Хоггатта и Альфреда Бруссау.

Но, как было установлено в главе 2, числа Фибоначчи связаны с «золотой пропорцией» с помощью так называемой формулы Кеплера, согласно которой отношение соседних чисел Фибоначчи в пределе стремиться к «золотой пропорции». Это означает, что числа Фибоначчи, как и «золотая пропорция», являются количественными выразителями гармонии Мироздания, то есть, действительно «существует некоторый вид мистической связи между этими числами и Вселенной" (Альфред Брюссау).

Это означает, что теория чисел Фибоначчи, которая начала особенно активно развиваться с момента создания Фибоначчи-ассоциации (1963), была направлена, прежде всего, на решение задач гармонизации теоретического естествознания (ботаника, биология, физические науки), а также экономики, образования и искусства, связанных с золотым сечением и числами Фибоначчи.

Это также означает, что в современной математике, начиная с 1963 г., начала активно развиваться новая математическая теория – «теория чисел

Фибоначчи», которая основывалась на неразрывной связи математики с теоретическим естествознанием и другими сферами человеческой деятельности. Но ведь именно к этому призывает Морис Клайн в последней главе «Авторитет природы» книги [51]. Путь к преодолению современного кризиса в математике состоит в ее объединении с природой и теоретическим естествознанием!

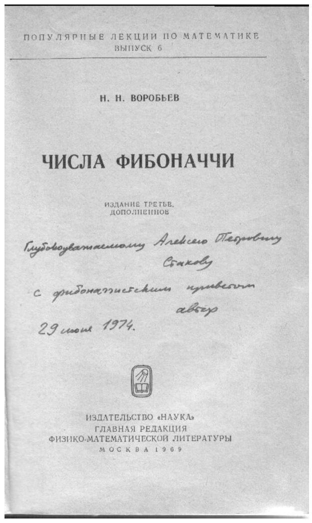
Но, как упоминалось, в основе теории чисел Фибоначчи [1-4] лежит «проблема гармонии», которая и объединяет в единое целое указанные выше разнородные области науки, экономики, искусства и образования, к которым приложимы числа Фибоначчи. Таким образом, анализируя причины возникновения теории чисел Фибоначчи в современной математике, мы приходим к тому, с чего начинали - к древнегреческому учению о числовой гармонии Мироздания, которое в современной математике оказалось воплощенным в «теории чисел Фибоначчи»! И возможно было бы правильно и справедливо назвать эту новую математическую теорию «математической теорией гармонии природы», а не скрывать главную цель этой теории под названием «теория чисел Фибоначчи».

18.10. Славянская «золотая» группа и Международный Клуб Золотого Сечения

Роль Николая Воробьева в развитии «теории чисел Фибоначчи». Хотя создание американской Фибоначчи-Ассоциации в 1963 г. следует признать несомненной заслугой профессора Вернера Хоггатта и его соратников, но, справедливости ради, необходимо отметить, что первым из выдающихся современных математиков обратил внимание на «теорию чисел Фибоначчи» выдающийся советский математик Николай Николаевич Воробьев (1925-1995). В 1961 г. он опубликовал брошюру «Числа Фибоначчи» [2], которая сыграла в развитии «теории чисел Фибоначчи» несомненно выдающуюся роль. Эта небольшая по своему объему брошюра стала своеобразным бестселлером 20-го века. Она выдержала большое количество изданий, переведена на многие языки мира и стала настольной книгой многих советских и зарубежных ученых..

Николай Воробьёв (1925 - 1995) - выдающийся математик, специалист в области алгебры, математической логики и теории вероятностей, основатель советской школы в области теории игр. В этом смысле его роль уникальна: под его руководством советские математики сумели за короткое время развить математические основы теории игр буквально с самого начала ее зарождения в областях, до сих пор остающихся наиболее актуальными направлениями ее развития

Эта брошюра сыграла определяющую роль в приобщении автора к тематике чисел Фибоначчи и выбора направлений исследований автора в кандидатской (1966) и докторской (1972) диссертациях. В 1974 г. автор встретился в Ленинграде с Н.Н. Воробьевым, рассказал ему о своих научных результатах в этой области и он подарил ему брошюру «Числа Фибоначчи» (3-е издание, 1969 г.) с дарственной надписью «Глубокоуважаемому Алексею Петровичу Стахову с фибоначчистским приветом».



Брошюра Н.Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (3-е издание, 1969)

В предисловии к 1-му изданию своей брошюры (1961) Н.Н. Воробьев написал:

«В элементарной математике существует много задач, часто трудных и интересных, которые не связаны с чьим-либо именем, а скорее носят характер своего рода «математического фольклора». Такие задачи рассыпаны по обширной популярной или просто развлекательной математичской литературе, и часто бывает очень трудно установить, в каком именно сборнике появилась впервые та или иная задача

Эти задачи нередко имеют хождение в нескольких вариантах; иногда несколько таких задач объединяются в одну, более сложную; иногда, наоброт, одна задача распадается на несколько более простых; словом, часто трудно указать, где кончается одна задача и где начинается другая. Правильнее всего было бы считать, что в каждой из таких задач мы имеем дело с маленькими математическими теориями, имеющими свою историю, свою проблематику и свои методы, — все это, разумеется, тесно связанное с историей, проблематикой и методами «большой математики».

Такой теорией является и теория чисел Фибоначчи. Выросшие из знаменитой «задачи о кроликах», имеющей семисотпятидесятилетнюю давность, числа Фибоначчи до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики. Задачи, связанные с числами Фибоначчи, приводятся во многих популярных изданиях по математике, рассматриваются на занятиях школьных математических кружков, предлагаются на математических олимпиадах».

Любопытно сравнить это предисловие к первому изданию брошюры (1961) с предисловием к 4-му изданию (1978):

«Первый вариант текста этой книжки писался почти тридцать лет назад. С тех пор изменилось очень многое.

Прежде всего, и это главное, изменился математический уровень основного круга читателей популярных математичских книг: интресующихся математикой школьников старших классов и их преподавателей. Созданная сеть специализированных математических и физико-математических и классов предопределила существенное расширение математического кругозора соответствующего контингента учащихся, которых теперь можно заинтересовать скорее не забавными элементарными фактами, а уже достаточно глубокими и сложными результатами.

Кроме того, и это является фундаментальным фактом истории математики нашего времени, существенно сместился центр тяжести математических исследований в целом. В частности, утратила свои доминирующие позиции теория чисел, и резко повысился удельный вес экстремальных задач. В самостоятельную отрасль математики сложилась теория игр. По существу возникла вычислительная математика. Все это не могло не сказаться и на содержании научно-популярной литературы по математике.

Далее, числа Фибоначчи проявили себя еще в нескольких математических вопросах, среди которых в первую очередь следует назвать решение Ю.В. Матиясевичем десятой проблемы Гильберта и далеко не столь глубокую, но приобретшую широкую известность теорию поиска экстремума унимодальной функции, построенную впервые, по-видимому, Р. Беллманом.

Наконец, было установлено большое количество ранее неизвестных свойств чисел Фибоначчи, а к самим числам Фибоначчи существенно возрос интерес. Значительное число связанных с математикой людей в различных странах приобщились к благородному хобби «фибоначчизма». Наиболее убедительным свидетельством этому может служить журнал “The Fibonacci Quarterly”, издаваемый в США с 1963 г.»

Какие выводы можно сделать из сравнения этих двух предисловий, которые разделяют 17 лет? Первый вывод состоит в том, что интерес к «фибоначчизму» значительно возрос. При этом произошло «существенное расширение математического кругозора соответствующего контингента учащихся, которых теперь можно заинтересовать скорее не забавными элементарными фактами, а уже достаточно глубокими и сложными результатами». В этой связи Воробьев упоминает, прежде всего, о решении Юрием Матиясевичем 10-й проблемы Гильберта и о теории «фибоначчиевого» поиска экстремума унимодальной функции (Р. Беллман). В четвертое издание включен параграф 5 «Числа Фибоначчи и теория поиска», в котором изложена «теория поиска экстремума унимодальной функции».

В четвертое издание Воробьев включил много новых результатов, которых не было в предыдущих изданиях. В частности, большое внимание уделено связи треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов с треугольником Паскаля. Для установления этой связи Воробьев пользуется следующим представлением треугольника Паскаля:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Треугольник Паскаля

Если мы проведем через числа треугольника Паскаля линии, идущие под углом 45 градусов к его строкам, и назовем их «восходящими диагоналями», то легко убедиться, сумма биномиальных коэффициентов, образующих «восходящую диагональ», равна соответсвующему числу Фибоначчи, то есть,

$$1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 1+3+1=5, 1+4+3=8, 1+5+6+1=13, \dots .$$

В 4-м издании Воробьев впервые обращается к «фибоначчиевым системам счисления». Он доказывает, что для каждого натурального числа существует такое «фибоначчиево представление», в котором двух единиц рядом не встречается. В части 2 мы назвали такое представление «минимальной формой». Мне кажется, что на включение этого материала его подтолкнули публикации автора, в частности, книга автора «Введение в алогритмическую теорию измерения» (1977) [9] и более ранние публикации, частности, статьи 1974-1975 гг., в которых описаны коды Фибоначчи. Одна из этих статей «Избыточные двоичные позиционные системы счисления» (см. сборник «Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры», Таганрогский радиотехнический институт, 1974, вып.2, с.5-41) была подарена проф. Воробьеву при личной встрече в Ленингараде в 1974 г.

Сейчас, когда пишется эта книга, Николая Николаевича Воробьева уже нет в живых. Но информация об этом выдающемся математике осталась в памяти многих исследователей-фибоначчистов в виде его замечательной брошюры [2]. Автор гордится тем, что он лично знал этого выдающегося математика современности. И можно только удивляться гениальной научной интуиции проф. Воробьева, который первым среди современных математиков (задолго до книг американского математика проф. Хоггата, создателя Фибоначчи-ассоциации и английского математика проф. Вайды) опубликовал брошюру, которая стала научным бестселлером 20-го столетия и настольным пособием для огромного количества энтузиастов, которые именно с помощью брошюры Н.Н. Воробьева приобщились к «фибоначчиевому миру».

Славянская «Золотая» Группа. К началу 90-х годов стало ясно, что в славянской науке (Украина, Россия, Белоруссия, Польша) сформировалась группа активно работающих ученых - представителей различных наук и искусств, авторов весьма оригинальных публикаций в области золотого сечения. Возникла идея собрать воедино всех этих ученых и создать некоторое научное сообщество "золотоискателей". В 1992 г. в Киеве состоялся 1-й Международный семинар "Золотая пропорция и проблемы гармонии систем". Активными участниками семинара и членами организационного комитета стали: белорусский философ доктор философских наук Э.М. Сороко (Минск), украинский архитектор, доктор искусствоведения О.Я. Боднар (Львов), украинский экономист, доктор экономических наук И.С. Ткаченко, российский механик, доктор технических наук В.И. Коробко (Ставрополь), представитель украинской медицинской науки, доктор медицинских наук П.Ф. Шапаренко (Винница), украинский химик, кандидат химических наук Н.А. Васютинский (Запорожье), польский ученый и журналист Ян Гржеджельский. Эта группа ученых и составила костяк неформального объединения славянских ученых, вошедшего в историю науки под названием "Славянская "золотая" группа".

В 2003 г. эта группа была преобразована в Международный Клуб Золотого Сечения. По инициативе этого Клуба в 2005 г. в рамках Академии Тринитаризма (Россия) был организован Институт Золотого Сечения. По инициативе этого же Клуба в 2010 г. в Одессе был проведен Международный Конгресс по Математике Гармонии.

Международный Конгресс по Математике Гармонии. С 8 по 10 октября 2010 г. в Одесском Национальном Университете им. И.И. Мечникова был проведен 1-й Международный Конгресс на тему "СОВРЕМЕННЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ ГАРМОНИИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ, ЕСТЕСТВОЗНАНИИ, ТЕХНОЛОГИИ, СОЦИУМЕ И ОБРАЗОВАНИИ".

Публикация книги “Alexey Stakhov. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” [47] стала непосредственной причиной проведения этого Международного Конгресса. Конгресс был проведен по инициативе кафедры менеджмента и математического моделирования рыночных процессов Одесского Национального Университета им. И.И. Мечникова.

Проведению Конгресса предшествовало несколько важных событий, касающихся «математики гармонии». Прежде всего, в рамках подготовки к Конгрессу в университете был создан настенный музей «Математика гармонии в лицах», в котором с помощью живописных планшетов представлена история «математики гармонии», начиная с Пифагора, Платона, Евклида и до настоящего времни, и приведены примеры проявления "математики гармонии" в природе, науке и искусстве.

На пленарных заседаниях (8, 9 и 10 октября) было сделано 30 докладов, касающихся различных теоретических аспектов «математики гармонии» и ее приложений в различных сферах современной науки. Прежде всего, необходимо отметить широкую географию участников Конгресса – от США, Канады, Чили, ФРГ до Украины (Одесса, Львов, Запорожье, Сумы), России (Москва, Санкт-Петербург, Саратов, Красноярск, Тюмень), Беларуси (Минск, Гомель). Участие в работе Конгресса ученых, прибывших из Тюмени и Красноярска (Коновалов и Южанников) можно считать героическим поступком, если учесть стоимость авиабилетов до Одессы. Таким же героическим поступком является участие в Конгрессе Почетного профессора Белорусского государственного университета транспорта Семенюты Н.Ф. (Гомель), если учесть, что ему свыше 80 лет и перед Конгрессом он тяжело переболел.

Характерной особенностью Конгресса явилось участие в нем специалистов широко профиля, работающих на стыке наук. Доктор философских наук Эдуард Сороко (Минск) является математиком по базовому образованию, доктор физико-математических наук Сергей Петухов (Москва) является одновременно кандидатом биологических наук, доктор философских наук Александр Волошинов (Саратов) одновременно является кандидатом физико-математических наук, доктор технических наук Александр Коновалов (Тюмень) имеет также ученую степень кандидата географических наук.

Все участники Конгресса сделали интересные доклады. Особый интерес вызвал доклад проф. Скотта Олсена (США), сделанный им на основе его книги “The Golden Section. Nature’s Greatest Secret” (2006) [43], получившей широкое признание в среде «золотосеченцев». Глубокие доклады были сделаны нашими известными учеными в этой области – доктором философских наук Сороко (Минск), доктором искусствоведения Боднаром (Львов), доктором физико-математических наук Петуховым (Москва), доктором философских наук Волошиновым (Саратов) и другими.

Конгресс открыл научному сообществу новые имена. Прежде всего, это - доцент Сумского университета Сергей Якушко, рассказавший в своем докладе о сенсационном открытии в области химии – обнаруженной им фибоначчиевой закономерности в Периодической таблице Менделеева. Необходимо отметить доклад проф. Олега Когновицкого (Санкт-Петербург), в котором проведен глубокий анализ рекуррентных последовательностей Фибоначчи с использованием так называемого двойственного базиса, что имеет большое значение для развития теории помехоустойчивого кодирования. Прекрасные доклады были сделаны доктором технических наук Александром Коноваловым (Тюмень), кандидатом технических наук Александром Южанниковым (Красноярск), Денисом Клещевым (Россия), Александром Чечиком (Киев) и др.

С большим интересом были заслушаны доклады проф. Сергея Абачиева (Москва), доктора технических наук Валериана Владимирова (ФРГ), доктора биологических наук Елены Терешиной и др.

Особый шарм Конгрессу придало участие в нем представителей искусства, прежде всего, «звездного маэстро», композитора, исполнителя и кандидата наук в области астрофизики Леонида Тимошенко, композитора, музыканта и поэта Юрия Цымбалиста и исполнителя народных и классических песен доктора филологических наук проф. Григория Мартыненко. Концерт, данный Тимошенко, Цымбалистом и Мартыненко после одного из пленарных заседаний Конгресса, несомненно, стал одним из наиболее ярких событий. «Звездный маэстро» Леонид Тимошенко исполнил несколько своих произведений на фортепиано экспромтом на заданные темы (например, на тему «Пифагор»), Юрий Цымбалист, в юности закончивший с отличием Черниговскую музыкальную школу, исполнил несколько своих песен (одна из них была посвящена Конгрессу). Но наибольшее впечатление произвел Григорий Мартыненко, который в сопровождении Цымбалиста (без всякой репетиции) исполнил украинскую, русскую и итальянскую народные песни. Когда в зале Ученого Совета университета зазвучал голос Мартыненко, то у многих сложилось впечатление, что в зале неожиданно появился народный артист Украины Анатолий Соловьяненко.

Своими решениями Конгресс четко определил задачи по развитию этого направления и его практического воплощения в современную жизнь. Создана Международная комиссия по «Математике гармонии», во главе с проф. Стаховым (Канада) и проф. Олсеном (США для координации работ по этому направлению.

18.11. Оценка деятельности Славянской «золотой» группы в статье Президента ISIS-Symmetry Денеша Надя (Denes Nagy)

В 2007 г. издательство Львовской Национальной Академии Наук опубликовало книгу «The Way to Harmony: ART+MATHEMATICS" («Путь к гармонии: ИСКУССТВО+МАТЕМАТИКА»), посвященную 60-летию доктора искусствоведения Олега Ярославовича Боднара, профессора этой Академии. В книге опубликовано ряд статей, посвященных золотому сечению, в том числе статья Олега Боднара «Динамическая симметрия в природе и архитектуре» [143], а также статья Алексея Стахова «Роль «золотого сечения» и «математики гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики» [71].

Но ключевой статьей книги стала великолепная статья (55 страниц) выдающегося ученого современности, основателя и президента Международного общества междисциплинарного изучения симметрии ISIS-symmetry (International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry) профессора Денеша Надя (Denes Nagy) [144]. Статья написана на английском языке и называется «Three "Golden Waves": a Social-political and Cultural History of the Golden Section (Glitters in Russian and Ukrainian)» («Три «золотые волны»: социально-политическая и культурная история золотого сечения (блестящие речи, написанные на русском и украинском языках)».

Статья представляет огромную ценность для ученых в области золотого сечения, пишущих на русском и украинском языках. Историческое значение статьи состоит в том, что в ней впервые изложена обстоятельная история развития «золотосеченского направления» в России, Советском Союзе и на постсоветском пространстве, начиная с 19 в. и до настоящего времени.

Оценка деятельности Славянской «золотой» группы дана в части 3 статьи «Третья волна золотого сечения в искусстве и науке: больше «золота» в российских и украинских исследователей в последней декаде XX века (от момента золотого сечения в 1962 г. до 2000 г.)»

Эта часть статьи носит весьма интригующее название: «Золотая игра»: пожалуйста, назовите какую-либо область культуры, и я скажу, в какой книге, написанной на русском и украинском языках, обсуждается золотое сечение в этой области.

Денеш Надь пишет:

«Если вы скажете «компьютерная наука», мой ответ таков: Стахов А.П. «Коды золотой пропорции» (1984). Украинский ученый опубликовал свою первую книгу «Введение в алгоритмическую теорию измерения» значительно раньше (1977). В этой книге он ввел «арифметику Фибоначчи». Он продолжил свои исследования во многих статьях и книгах. Стахов – очень колоритная фигура в «золотом движении» и он всячески поощрял междисциплинарные исследования. Мы еще возвратимся к его исследованиям ниже.

Если вы скажите «живопись», мой ответ таков: Ковалев Ф.В. «Золотое сечение в живописи» (1989). К сожалению, эта книга Ковалева, художника и историка искусства, издана посмертно, год спустя после его смерти. Книга написана с учебной целью для школ искусств. Действительно, книга содержит много иллюстраций, которые полезны для педагогов в области искусства. Книга содержит также некоторые новые приложения золотого сечения, включая его использование при создании цветовых гамм.

Если вы скажите «музыка» или «архитектура», мой ответ таков: Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. «Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии» (1990). Здесь мы имеем «золотой треугольник», состоящий из архитектора Шевелева из Костромы, композитора Марутаева из Москвы, и архитектора Шмелева из Санкт-Петербурга. Мы уже упоминали о Шевелеве много раз. Раньше Марутаев также опубликовал ряд статей по золотому сечению с точки зрения его теории гармонии. Он связал его с Периодической таблицей Менделеева. Подход Марутаева был изучен биологом-философом Урманцевым, чья книга по симметрии была раньше упомянута в конце последней главы Имя Шмелева, как мы видели, также ассоциируется с ранними публикациями по золотому сечению в архитектуре, включая статью о его “modulor duplex” с соответствующими, но различными пропорциональными фигурами для мужского и женского тела; другая статья по сравнению канонов и пропорциональных систем различных регионов с выводами, основанными на “modulor duplex”; и наконец еще одна статья по «золотой симфонии» Египетского искусства и архитектуры, которая опубликована в сборнике статей «Проблемы русской и зарубежной архитектуры» (Ленинград, 1988)».

И далее.

«Если вы скажете «медицина», мой ответ таков: Суббота А.Г. «Золотое сечение (“sectio aurea”) в медицине» (1994). Это обстоятельная книга, которая связана с другой книгой, которую мы обсудим позже. Мы также должны обратиться к некоторым более специальным книгам: Цветков В.Д. «Ряды Фибоначчи и оптимальная организация сердечной деятельности млекопитающих» (1989); Цветков В.Д. «Сердце, золотое сечение, симметрия» (1997). Основная идея Цветкова – установление возможной роли золотого сечения и чисел Фибоначчи в организации кардиальных циклов и минимизации расхода энергии при функционировании сердца.

Если мы скажем «теория литературы» или «теория культуры», я отсылаю к разнообразным работам, написанным членами Школы семиотики (Москва-Тарту), которые стали всемирно известными в этой области».

Далее.

«Если мы скажем “engineering”, мой ответ таков: Коробко В.И. «Закономерности золотой пропорции в строительной механике» (1984). Мы можем также обратиться к книге Сергея Петухова по приложениям золотого сечения в биомеханике (1981) и работам Сергея Ясинского по использованию этой пропорции в системах связи (1999, 2003).

Если мы скажем «искусство и наука», мой ответ таков: Николай Васютинский «Золотая пропорция» (1990); Коробко и Примак «Человек и золотая пропорция» (1991); Коробко и Примак “The Golden Proportion and a Man: Anthropometry, Physiology, Ergonomic (Human Engineering), Art” Здесь также мы должны обратиться к книге Коробко (1998), а также к монографии Н. Семенюты и В. Михайленко (2002), посвященной золотой пропорции в природе и искусстве.

Ускорим наши игры. Если мы скажем «геология», мой ответ таков: Степанов «Формы в мире почв» (1986), где мы можем даже увидеть «музыкальную октаву», связанную с отношениями, установленными в науке о почвах. Мы также должны упомянуть статью Семенова «Золотое сечение в геологии» (1986).

Если мы говорим о “fashion design”, мой ответ таков: Градова и Гутина «Театральный костюм» (1976), где золотое сечение введено как гармоническая пропорция

Если мы скажем «гимнастика и здоровье», мой ответ таков: Суббота «Гармония движения, золотое сечение и здоровье» (2003).

Между прочим, Сороко в книге «Структурная гармония систем» (1984) дает обширный обзор книг и статей по золотому сечению, в котором дает некоторые «экзотические приложения; на веб-сайте Стахова http://www.goldenmuseum.com/ представлены последние публикации в этой области.

Украина становится центром «золотосеченской» деятельности. В своей статье [144] Денеш Надь пишет:

«В 1990-е годы, благодаря деятельности А.П. Стахова и других ученых Украины, эта страна становится центром «золотосеченской» деятельности. Украина имеет старые корни, но с 1991 г. она стала независимым государством. В этой ситуации важно представить свои превосходные достижения всему миру. Золотое сечение – древняя концепция, но художники и ученые Украины, следуя ранней традиции, получили новые результаты в этом направлении. Я чувствую здесь «гармонию» между общим желанием представить превосходные научные результаты и результаты, которые «золотое сечение» могло бы предложить. Я думаю, что эта «гармония» помогла некоторым людям привлечь внимание к их деятельности, которая привела к различным публикациям и встречам. Размышляя над экономической ситуацией в стране, мы не должны думать о большом количестве денег. Действительно, активно работающие и увлеченные люди нуждаются только в небольшой поддержке, чтобы осуществлять интересную деятельность.

Алексей Петрович Стахов, которого мы уже встречали в начале этой главы, инициировал организацию международных семинаров с названием «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем», которые прошли в Киеве, столице Украины, в 1992 и 1993 гг., и были продолжены Виктором Ивановичем Коробко в Ставрополе, русском города на Юго-востоке от Москвы, в 1994, 1995 и 1996 гг. Стахов любит говорить о «Славянской «Золотой» Группе» применительно к этой группе ученых. Действительно, мы не можем сказать, что все они русские (это название обычно использовались на Западе для всех людей, живущих в СССР), поскольку в составе этой неформальной группы имеется много людей из Украины, а Эдуард Сороко, важная фигура этой группы, с Беларуси. В то же время я имею некоторую неудовлетворенность по поводу выражения «Славянская «Золотая»

Группа». Действительно, такие славянские страны, которые не были частью СССР (за исключением польского ученого) не были представлены или редко представлены в этой группе. Я признаю, что я видел очень мало болгарских, хорватских, чешских, сербских и словацких работ в области золотого сечения и «золотая деятельность» в этих странах была значительно меньше, чем в Украине. Другая проблема состоит в том, что некоторые важные работы были написаны учеными Средней Азии и кавказских республик. Они не являются славянами, хотя они писали свои работы на русском языке, который был языком коммуникации большого региона. Я думаю, что «золотая связь» группы обусловлена не славянской основой, а некоторыми социальными и культурными аспектами жизни и работы в Царской России, Советском Союзе и сейчас в странах СНГ, со специальными предпочтениями следующих факторов:

(1) Объединение принципов, которые важны для большой страны с многими нациями (как мы обсуждали раньше),

(2) мультидисциплинарное мышление, которое основывается на хорошей образовательной системе, которая производит очень много блестящих художников и ученых,

(3) точные методы, которые ассоциируются с замечательными традициями в математике.

Естественно, общим знаменателем является факт, что они публиковали свои работы и излагали свои идеи в основном на русском языке. Согласно последней переписи (1989), в Советском Союзе жило 163,5 миллионов людей, говорящих на русском языке, и около 69 миллионов людей, для которых русский язык был вторым языком. Естественно, было очень важно, что большинство славян имели трудности в понимании русского языка на некотором уровне, но очевидно, что это было мотивацией для исследований золотого сечения. После дезинтеграции Советского Союза в 1991 г. большую роль начали играть национальные языки, включая, естественно, и украинский язык. Публикация научных книг на английском также стала более популярной. Олег Боднар опубликовал свою первую книгу по золотому сечению на русском языке, но вторую книгу – на украинском, включая аннотацию на английском. Это является причиной, почему я говорю о «блестящих речах на русском и украинском языках» в названии этой статьи. Таким образом, я включил здесь ссылки на книги и статьи, написанные Сороко из Беларуси, Булатовым, Матьякубовым и Ратья из Узбекистана, Кубасовым из Казахстана, Церетели их Грузии и некоторыми другими авторами, поскольку все их работы написаны на русском языке. С другой стороны, вне всяких сомнений, что большинство работ, в которых золотое сечение находится в центре внимания, написаны русскими и украинскими учеными.

Любопытно заметить, что в истории различные события часто повторяются. Несколько ведущих российских ученых-золотосеченцев эмигрировали из России еще в 1920-е годы и в настоящее время подобная ситуация повторилось в Украине. Однако, существует огромная разница между этими событиями. Сабанеев после эмиграции не публиковал статей по золотому сечению, в то время как Шиллингер и Яссер лишь коснулись этого предмета после переезда в Нью-Йорк. С другой стороны, деятельность Стахова в этой области, с использованием возможностей Канады, стала еще более активной. Он работает с «Музеем Гармонии и Золотого Сечения», который является двуязычным сайтом (русский и английский языки) http://www.goldenmuseum.com/ Другой ученый, математик Борис Розин, который эмигрировал с Украины в США, работает с другим сайтом http//www.goldensection.net/

Материалы по золотому сечению на русском языке настолько богаты, что наш обор является, безусловно, неполным. Интересным аспектом этих работ является комплексный подход, когда различные дисциплины сближаются друг с другом.

Естественно, существуют публикации по золотому сечению и в других странах. Например, я смотрел интересные публикации, написанные учеными Китая, Индии и Австралии. Этот глобальный интерес к золотому сечению возрастает количественно, но не качественно. Существует два основных типа работ, которые могут быть охарактеризованы следующим образом:

- «золотая одержимость» как продолжение «строгого золотого сеченииеонизма»: эти авторы пытаются расширить применимость золотого сечения на новые области путем различных переоценок и рассмотрения только положительных данных (и игнорирование отрицательных); для них золотое сечение имеет универсальное значение;

- «золотые новшества» как продолжение «мягкого золотого сеченииеонизма»: эти авторы предлагают новые открытия в конкретных областях; для них золотое сечение имеет частное значение для решения некоторых проблем, но не универсальное.

На самом деле, моя рекомендация состоит в том, чтобы иметь строгие критические мнения в области, которая начата в работах Roger Herz-Fishler (Канада), Albert van der Schoot (Нидерланды) и рядом других ученых. Работы, опубликованные на русском и украинском языках, также нуждаются в некотором критическом анализе.

Перспективные направления развития теории золотого сечения. Денеш Надь пишет [144]:

«А теперь обратимся к будущему: к перечню различных результатов и проблем, изложенных на веб-сайте Алекея Стахова http://www.goldenmuseum.com/ в связи с золотым сечением. Я перечисляю здесь некоторые мои собственные идеи, которые могут иметь некоторую ассоциацию с интересами «Золотой группы» ученых, которые публикуют свои работы на русском и украинском языках».

В этой связи Денеш Надь предлагает некоторые перспективные направления развития теории золотого сечения:

Алгоритмы золотого сечения. По мнению Денеша Надя, существуют важные результаты, полученные Кифером (Kiefer) в математике (алгоритмы одномерного поиска, основанные на золотом сечении) и Стаховым в информатике (фибоначчиевые алгоритмы измерения, приводящие к кодам Фибоначчи). В этой связи Денеш Надь предлагает следующие направления использования «алгоритмов золотого сечения»:

«Возможно, некоторые психологические проблемы могут быть решены с использованием алгоритмического подхода (Я думаю, прежде всего, о работах Цветкова). Я думаю, что алгоритмический подход будет полезным в рамках экспериментальной эстетики. Процесс восприятия в пространстве и времени, например, движение глаз, может быть связан с динамическим процессом «алгоритмической эстетики», основанном на оптимальном поиске. Психологи развили различные теории, чтобы объяснить некоторые преимущества золотого сечения, но они упустили математическую теорию оптимального поиска, которая имеет точную математическую основу. Играют ли подобные оптимальные принципы какую-либо роль в человеческом восприятии и другой ментальной деятельности?»

Организация времени на основе золотого сечения. В этом разделе Денеш Надь обращает внимание на работы Флоренского. Еще в 1922 г. Флоренский выдвинул идею о том, что золотое сечение может быть использовано как «средство для организации времени». Эйзенштейн реализовал эту идею на практике в своей кинокартине «Броненосец Потемкин» (1925) и опубликовал статью на эту тему в 1939 г. (Между прочим, было бы интересно знать о связи работ Флоренского и Эйзенштейна с работами Розенова и других исследователей). В последнее время Денеш Надь провел экспериментально-психологические тесты в связи с использованием золотого сечения для организации времени. Он попросил студентов-кинематографистов указать на кульминационные точки их кинокартин определенной длительности. Удивительно, что в среднем это было очень близко к точке золотого сечения. Денеш Надь рекомендует продолжить это исследование не только для музыки и киноискусства, но и для случая повседневной практики. Эти исследования, возможно, имеют связь с «алгоритмами золотого сечения» (Кифер и Стахов).

Математическое обобщение золотого сечения. В этой части Денеш Надь предлагает свой вариант обобщения золотого сечения. Важно подчеркнуть, что его предложения согласуются с теми работами, которые были выполнены Алексеем Стаховым и Эдуардом Сороко по ведению обобщенных золотых сечений, названных золотыми *p*-сечениями, а также с работами Веры Шпинадель, Татаренко, Газале, Каппраффа, Шенягина, Аракеляна по введению так называемых «металлических пропорций».

Физические и технические процессы, относящиеся к золотому сечению («тайна Зубарева»). В этой части Денеш Надь ставит интересную проблему:

«Большинство работ, относящихся к золотому сечению, носит описательный характер (что мы имеем?), в то время как мы знаем очень мало о причинах появления золотого сечения (почему мы это имеем?). Очень важная задача найти такие физические и технические процессы, которые объясняют важность золотого сечения».

В этой связи Денеш Надь обращает внимание на работы российского исследователя Зубарева, которые изложены в его, к сожалению, неопубликованной книге «Технические основы архитектурных форм Древней Греции». Параграф из этой книги помещен в сборнике «Проблемы архитектуры», том.1, книга 2, Москва, 1936, с. 335-339.

Денеш Надь пишет [144]:

«Исходной точкой исследований Зубарева была «Пифагорова тройка» (3,4,5). Он связал ее с физическими коэффициентами и использовал для объяснения музыкальных гармоний и для аппроксимации золотого сечения: 3/5 или 5/(3+5)=5/8. Зубарев изучил золотое сечение с точки зрения эластических трансформаций (elastic modulus или Young-modulus). Согласно Зубареву, золотое сечение имеет особое значение ля человеческого восприятия, поскольку объективы глаз являются эластическими объектами с кривизной радиусов 3 и 5, соответственно... Естественно, мы должны фокусировать наше внимание не только на идеях Зубарева, но также и на других возможностях, которые могут дать ответ на вопросы «почему» в связи с золотым сечением».

Итак, в этом разделе Денеш Надь поставил одну из важнейших проблем теории золотого сечения: почему золотое сечение упорно проявляется и обнаруживается во многих физических и биологических процессах и явлениях? Ответ на это вопрос дан в статье Валериана Владимирова и Алексея Стахова «Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения)», опубликованной на сайте АТ [145]. В этой статье золотое сечение связывается с информационной энтропией. При этом показано, что именно в точке «золотого сечения» система обладает максимальной энтропией, что обеспечивает системе максимальные информационные возможности. Статья Владимирова и Стахова объясняет, почему золотое сечение так широко проявляет себя во временных процессах и объектах (музыка, кино, экономика и др.).

Структуры, основанные на золотом сечении, в архитектуре и инженерии. В этой части Денеш Надь пишет [144]:

«Плитки Пенроуза с пентагональной симметрией и их трехмерное обобщение, сделанное Огавой (Ogawa), инициировали много интересных работ в области математики, кристаллографии и физике твердых тел. В то же время спиральные модели, изученные в ботанике (филлотаксис), привлекли внимание биологов, математиков и специалистов в области информатики, включая российских и украинских ученых. Эти модели и некоторые другие структуры могут быть использованы в архитектуре, дизайне, и инженерии. В качестве примеров можно привести работы Гизуме (Hizume) из Японии, Лебедева из России, Боднара из Украины. Ясно, что необходимо продолжить изучение этих структур».

Эпилог: Трисмегист Боднар (Боднар, трижды великий). Заключительная часть статьи Денеша Надя посвящена Олегу Боднару. В этой части он сравнивает

Олега Боднара с «трижды великим» Гермесом Трисмагистом, который жил 6 тысяч лет тому назад. Он обращает внимание на тот факт, что Олег Боднар своей новой геометрической теорией филлотаксиса связал воедино три научные дисциплины: архитектуру, ботанику и неевклидову геометрию. Безусловно, научные достижения Олега Боднара всемирно известны и мы должны гордиться, что этот выдающийся ученый является членом Международного Клуба Золотого Сечения. В настоящее время Олег Боднар является активно работающим ученым, который продолжает развивать созданное им научное направление. Это подтверждается его новейшими публикациями – статьями «Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций» [103] и «Теория относительности и филлотаксис: сходство и различие геометрических интерпретаций», опубликованными на сайте АТ.

Комментарий к статье Денеша Наги:

1. Статья Денеша Наги уникальна. Прежде всего, она свидетельствует о высокой эрудиции проф. Денеша Наги по исследуемому вопросу и его глубочайших познаниях в области новейшей истории золотого сечения. В его статье впервые проведен глубокий анализ развития «золотосеченского движения» в России, начиная с 19 в. При этом сделан вывод о том, что в 20 в. Россия, а затем и Украина, становятся научными центрами исследований в области золотого сечения в мире.
2. В статье дана высокая оценка деятельности «Славянской «золотой» группы», организованной в Киеве в период проведения 1-го Международного семинара «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем» (1992 г.), Следует отметить, что все основные события в современной истории золотого сечения произошли в России и на Украине: 6 Международных семинаров на тему «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем» (Киев и Ставрополь, 1992-1996), Международная Конференция "Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве" (Винница, 2003), Международный Конгресс

по Математике Гармонии (Одесса, 2010), Международный online seminar по Математике Гармонии (Институт Золотого Сечения Академии Тринитаризма, 2011-2012). Следует подчеркнуть, что именно членами Международного Клуба Золотого Сечения опубликованы в последние годы фундаментальные книги по «математике гармонии», к которым, прежде всего, необходимо отнести англоязычную книгу Алексея Стахова “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (World Scientific, 2009) [47], а также книгу Ю. Григорьева и Г. Мартыненко «Типология последовательностей Фибоначчи: теория и приложения» (LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 2012) [50].

3. В своей статье Денеш Надь поставил ряд задач по дальнейшему развитию «теории золотого сечения». Главнейшими из них являются: поиск новых приложений «алгоритмов золотого сечения» (Кифер, Стахов), развитие идей Флоренского о «золотом сечении» как «средства для организации времени» применительно к повседневной практике, обобщение золотого сечения, что уже сделано в работах современных золотосеченцев, выяснение причин широкого распространения золотого сечения (первый шаг в этом направлении сделан в статье Владимирова и Стахова, раскрывающей новую тайну золотого сечения [145]), применение этой знаменитой математической константы в архитектуре и инженерии, что уже делается в работах Коробко, Боднара, Семенюты и других исследователей.

18.12. Математика гармонии как «золотая» парадигма современной науки

Что такое «парадигма» и «научная революция»? Как известно, термин «парадигма» происходит от греческого «paradeigma» – пример, образец и означает совокупность явных и неявных (и часто не осознаваемых) предпосылок, определяющих научные исследования и признанных на данном этапе развития науки. Это понятие, в современном смысле слова, введено американским физиком и историком науки Томасом Куном [1922–1996] в книге «Структура научных революций» (1962) [146]. Согласно Т. Куну, парадигма – это то, что объединяет членов научного сообщества и, наоборот, научное сообщество состоит из людей, признающих определённую парадигму. Как правило, парадигма фиксируется в учебниках, трудах учёных и на многие годы определяет круг проблем и методов их решения в той или иной области науки, в научной школе. К парадигме Т. Кун относит, например, взгляды Аристотеля, ньютоновскую механику и т. п.

Смена парадигм (англ. paradigm shift) – термин, также впервые введённый Томасом Куном [146] для описания изменения базовых посылок в рамках ведущей теории в науке (парадигмы).

Обычно изменение научной парадигмы относится к наиболее драматическим событиям в истории науки. Когда научная дисциплина меняет одну парадигму на другую, по терминологии Куна, это называется «научной революцией» или «сдвигом парадигмы». Решение отказаться от парадигмы всегда одновременно есть решение принять другую парадигму, а приговор, приводящий к такому решению, включает как сопоставление обеих парадигм с природой, так и сравнение парадигм друг с другом.

Что такое «золотая» парадигма? Для ответа на этот вопрос еще раз обратимся к широко известному высказыванию гения российской философии, исследователя эстетики Античной Греции и эпохи Возрождения Алексея Лосева (1893–1988), которое приведено в Предисловии к настоящей книге. В этом высказывании А.Ф. Лосев в очень отчётливой форме сформулировал суть «золотой» парадигмы античной космологии. В её основе лежат важнейшие идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «курьезный результат безудержной и дикой фантазии». Прежде всего, это – «Пифагорейская доктрина о числовой гармонии мироздания» и «Космология Платона», основанная на Платоновых телах. При этом Лосев утверждает:

«С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии, мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления – золотого сечения (то есть, целое относится в нем к большей части, как большая часть к меньшей)».

То есть, в центр «золотой» парадигмы Лосев поставил «золотое сечение». Таким образом, обратившись к геометрической структуре мироздания и геометрическим отношениям, выражающим гармонию, в частности, к «золотому сечению», пифагорейцы предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания оказалась бессмертной.

Взаимосвязь смены научных парадигм в математике и естествознании. Одна из оригинальных идей, высказанных в статье Дениса Клещева [115], состоит в том, что процессы смены парадигм в математике и естественных науках тесно взаимосвязаны. Клещев замечает:

«Изучение истории только ради изучения истории вряд ли может привлечь к ней внимание других исследователей. Поэтому концепцию Куна необходимо дополнить рассмотрением как внутренней, так и внешней структуры смены научных парадигм. Справиться с этой задачей невозможно, если интересоваться естественными науками в отрыве от изучения истории математики, как это практиковал Томас Кун. Но стоит только включить в рассмотрение историю математики, богатую на драматические события и кризисы, как сразу становится видна закономерность, что каждому парадигмальному скачку в физике предшествовали кардинальные преобразования в математике, подготавливающие почву для смены естественнонаучной парадигмы».

Приведенные выше примеры удачного использования Платоновых тел, золотого сечения и чисел Фибоначчи в современном теоретическом естествознании позволяют высказать мысль о том, что в современной науке активно реализуется процесс «гармонизации теоретического естествознания». И этот процесс требует ответной реакции от математики. Этой реакцией на первом этапе стало возникновение «теории чисел Фибоначчи» [1-4], а позже привело к созданию «математики гармонии» [47].

Математизация гармонии и гармонизации математики. Рассматривая историю развития математики от древних греков до настоящего времени, можно выделить два процесса, тесно связанных друг с другом, несмотря на более чем двухтысячелетнее временное расстояние между ними. Эта связь осуществляется через «золотую» парадигму древних греков как фундаментальную концепцию, пронизывающую всю историю науки.

Первый из них – это процесс «Математизации Гармонии», который начался в Древней Греции в 6-5 в. до н.э (математика Пифагора и Платона) и завершился в 3 в. до н.э. написанием самого знаменитого математического сочинения античной эпохи – «Начал» Евклида. Все усилия древних греков были направлены на создание математического учения о природе, в центре которого стояла «идея Гармонии», выразителями которой в античной науке и были Платоновы тела и золотое сечение. Процесс «Математизации Гармонии» завершился созданием «Начал» Евклида, главной целью которых было создание завершенной геометрической теория Платоновых тел (Книга XIII «Начал»). Для ее создания Евклид уже в Книге II ввел в рассмотрение задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, то есть, задачу о золотом сечении, которое он использовал при создании геометрической теории додекаэдра.

Второй из них – это процесс «Гармонизации Математики». Этот процесс начался во второй половине 20 в. с работ канадского геометра Гарольда Коксетера, [1], советского математика Николая Воробьева [2], американского математика Вернера Хогатта [3], английского математика Стефана Вайды [4] и других математиков-фибоначчистов. Создатели современной «теории чисел Фибоначчи» [1-4] поступили очень мудро. Они «усыпили» бдительность современных ортодоксальных математиков, начав исследовать числовую последовательность Фибоначчи, не акцентируя особого внимания на том факте, что речь идет, по существу, об исследовании одной из важнейших числовых закономерностей, которая вместе с «золотым сечением» выражает «Гармонию Природы». Это позволило им создать Фибоначчи-ассоциацию, учредить математический журнал “The Fibonacci Quarterly” и, начиная с 1984 г., начать регулярно (один раз в 2 года) проводить Международную конференцию «Числа Фибоначчи и их приложения». Благодаря активной деятельности Фибоначчи-ассоциации удалось объединить усилия огромного количества исследователей, которые обнаружили числа Фибоначчи и золотое сечение в своих предметных областях.

Начиная с последней декады 20 в., активную роль в развитии этого направления начала играть так называемая «Славянская «Золотая» Группа», которая была создана в Киеве в 1992 г. во время проведения 1-го Международного семинара «Золотая пропорция и проблемы Гармонии Систем». В эту группу вошли ведущие ученые Украины, России и Беларуси и других стран СНГ в этой области. В 2003 г. по инициативе «Славянской «Золотой» Группы» на базе Винницкого аграрного университета была проведена Международная конференция "Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве". Согласно решению Конференции «Славянская «Золотая» Группа» была преобразована в Международный Клуб Золотого Сечения. В 2005 г. при Академии Тринитаризма (Россия) был организован Институт Золотого Сечения. В 2010 г., по инициативе Международного Клуба Золотого Сечения, на базе Одесского национального университета был проведен 1-й Международный Конгресс по Математике Гармонии.

Что такое «Гармонизация Математики»? Под этим, прежде всего, понимается широкое использование таких фундаментальных понятий «математики гармонии» как Платоновы тела, золотая пропорция, числа Фибоначчи и их обобщений (p-числа Фибоначчи, золотые p-пропорции, «металлические пропорции» и др.), а также вытекающих из них новых математических понятий (матрицы Фибоначчи, «золотые» матрицы, гиперболические функции Фибоначчи и Люка [57-60] и др.) для решения тех или иных математических задач и создания новых математических теорий и моделей. Блестящими примерами этому является решение 10-й проблемы Гильберта (Юрий Матиясевич, 1970), основанное на использовании новых математических свойств чисел Фибоначчи, и решение 4-й проблемы Гильберта (Алексей Стахов и Самуил Арансон), основанное на использовании «металлических пропорций». Теория систем счисления с иррациональными основаниями (система Бергмана и коды золотой пропорции) и вытекающая из них концепция «золотой» теории чисел являются примерами оригинальных и далеко не тривиальных математических результатов, полученных в рамках «математики гармонии».

Заслуга математиков-фибоначчистов состояла в том, что своими исследованиями они «породили искру, из которой возгорелось пламя». Процесс «Гармонизации Математики» подтверждается довольно внушительным перечнем книг, опубликованных во второй половине 20 в. и начале 21 в. [1-50]. Среди них особого внимания заслуживают книги Эдуарда Сороко [13], Олега Боднара [24], а также книги Скотта Олсена [43], Алексея Стахова [47], Гранта Аракеляна [49], Юрия Григорьева и Григория Мартыненко [50], опубликованные в 21 в. При этом наиболее сенсационной является информация о публикации книги «Harmony: A New Way of Looking at Our World», написанной Принцем Чарльзом, наследником английского престола [48].

Какое место занимает «математика гармонии» в системе современных математических наук? Для ответа на этот вопрос уместно привести мнение выдающегося украинского математика академика двух академий наук (Украинской и Российской) Юрия Алексеевича Митропольского [82]:

«Возникает вопрос, какое место в общей теории математики занимает созданная Стаховым Математика Гармонии? Мне представляется, что в последние столетия, как выразился когда-то Н.И. Лобачевский, «математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою». В результате между «элементарной математикой», лежащей в основе современного математического образования, и «высшей математикой» образовался разрыв. И этот разрыв, как мне кажется, и заполняет Математика Гармонии, разработанная А.П. Стаховым. То есть «Математика Гармонии» — это большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «Математики Гармонии» для математического образования».

Таким образом, академик Митропольский акцентирует внимание на историческом аспекте. Его точка зрения состоит в том, что «математика гармонии» - это, прежде всего, новая элементарная математика, основанная на необычном прочтении «Начал» Евклида, как исторически первого варианта «математики гармонии», связанного с Платоновыми телами и золотым сечением.

Но кроме этого существуют и другие аспекты «математики гармонии» - прикладной и эстетический.

Прежде всего, следует отметить прикладную направленность «математики гармонии», которая является истинной «математикой природы». Как было показано в настоящей книге, «математика гармонии» обнаруживается во многих явлениях природы, таких, как движение Венеры по небосводу («пентакл Венеры), пентагональная симметрия в природе, ботанические явление филлотаксиса, фуллерены, квазикристаллы, «золотые» геноматрицы, Таблица Менделеева и др.

С другой стороны, «математика гармонии» и ее математические результаты полностью удовлетворяет всем критериям красоты математики, а также «принципу математической красоты Дирака». И поскольку, согласно Дираку, «основные идеи должны выражаться в терминах прекрасной математики», то «математика гармонии» и есть та «прекрасная математика», которая, по Дираку, и должна быть воплощена в структурах природы. И этот вывод подтверждается современными научными открытиями, о которых было рассказано выше.

Гармоническое сочетание прикладного аспекта «математики гармонии», как истинной «математики природы», с ее эстетическим совершенством, которое отражено в ее математических формулах (Табл.18.1 - 18.5), дают нам основание высказать предположение о том, что именно «математика гармонии» в процессе ее дальнейшего развития может стать «золотой» парадигмой современной науки и тем математическим направлением, которое будет способствовать преодолению кризиса в современной математике [51].

18.13. Математика гармонии и образование

Академик Митропольский в своем отзыве [82], оценивая место, занимаемое «математикой гармонии» в системе математических наук, подчеркнул, что «математика гармонии» — это большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «математики гармонии» для математического образования».

Иоганн Кеплер поставил «золотое сечение» на один уровень с «теоремой Пифагора», одной из самых известных геометрических теорем. Но если теорему Пифагора знает каждый школьник, то, по мнению Кеплера, он должен так же хорошо знать и "золотое сечение". И наш первый шаг состоит в том, чтобы ввести в школьную "геометрию" раздел "золотое сечение". В этом разделе школьникам будет интересно узнать о "золотом" прямоугольнике, пентаграмме, "Платоновых Телах", в частности, об икосаэдре и додекаэдре.

В той части школьного курса математики, которые посвящены "элементарной теории чисел" и «элементам комбинаторики», было бы разумным ввести специальный раздел "Числа Фибоначчи" и показать удивительную по своей красоте связь чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами, а также ввести понятия « p -чисел Фибоначчи» и «золотых p -сечений».

Переходим к "алгебре". Здесь школьники изучают алгебраические уравнения и методы их решения. Но для школьников интересно было бы узнать о специальнах видах алгебраических уравнений, в частности, "уравнении золотого сечения», которое порождает «золотую пропорцию». Но школьникам было бы интресно узнать о семействе алгебраических уравненеий, которые порождают более сложные «гармонии» - «золотые p -пропорции" и «металлические пропорции». И мы имеем полное право ввести в "алгебру" небольшой раздел "Уравнения золотой пропорции".

Переходим к наукам о Природе - физике, химии, астрономии, ботанике, биологии. В курсе "Физики" при изучении кристаллов желательно ввести раздел "Квази-кристаллы", основанные на "икосаэдрической" симметрии. Но наши школьники уже знают об икосаэдре из курса "Геометрии". В курсе "Химии" целесообразно обратить внимание школьников на химические соединения, построенные "по Фибоначчи", а также рассказать о фибоначчиевой закономерности Периодической системы элементов, обнаруженной украинским исследователем Сергеем Якушко. В курсе "Астрономия" необходимо рассказать школьникам о "резонансной теории Солнечной системы", основанной на «золотом сечении». Только таким путем школьники смогут понять причины устойчивости Солнечной системы.

Переходим к наукам о живой природе. Украшением курса "Ботаника" может стать раздел "Закон филлотаксиса". Природа дает огромное количество подтверждений этого закона - и это обстоятельство является главным аргументом в пользу этого раздела. О подобных закономерностях уместно упомянуть в курсах "Биология" и "Анатомия".

Рассмотрим теперь школьные курсы по искусству. Принципы использования "золотого сечения" в произведениях искусства ("золотой" прямоугольник, "золотая" спираль, "двухсмежный квадрат" и т.д.) достаточно просты и примеры их использования в архитектуре, живописи и скульптуре интересны для школьников.

Эти примеры можно было бы продолжить. Но радикальным решением в области школьного образования является введение специальной дисциплины "Гармония систем", которую можно было бы рассматривать как завершающую дисциплину физико-математического и эстетического образования учащихся.

Очевидно, что углубленный вариант подобной дисциплины может быть введен в колледжах и университетах. Главной задачей такой дисциплины является формирование у школьников и студентов нового научного мировоззрения, основанного на принципах Гармонии и Золотого Сечения. Программа этой дисциплины зависит от специализации обучения.

Глава 19

ЛИКИ БОЖЕСТВЕННОЙ ГАРМОНИИ

19.1. Понятие «гармонии» в своем историческом развитии

Настоящая глава написана Алексеем Стаховым совместно с Иваном Райляном на основе материалов задуманной авторами книги «Лики божестевнной гармонии», частично выставленной на Интернете
http://www.harmonybook.ru/pages/contents.html

Иван Райлян родился в 1966 году, в Украине.

Член Российской Академии Естественных Наук. Постоянно проживает в Сантьяго де Чили, куда приехал ради возможности учиться в Институте Герметической Философии, основанном Дарио Саласом Соммэром.

В поисках истоков гармонии. Гармония, как фундаментальное условие жизни Вселенной, существовала задолго до появления человека. Чтобы понять это, достаточно лишь внимательно присмотреться к окружающему нас миру и его устройству: синхронным движениям планет, филлотаксису, пентагональной симметрии, форме кристаллов, молекул и ДНК. Человек всегда обладал той или иной способностью улавливать «музыку сфер», он ею вдохновлялся и переносил в земные творения - прежде всего в музыку и архитектуру. Поэты и композиторы, художники и скульпторы, настроившись на гармонические вибрации, сумели передать в своих работах те самые законы и пропорции, которые лежат в основе Вселенной. Леонардо да Винчи оставил миру «детей», которые живы до сих пор и в течение столетий вдохновляли человечество на научный поиск. К сожалению, можно сказать, что эпоха таких гениев давно прошла.

Современный человек в попытках понять порядок и устройство мироздания накопил огромное количество информации, основал бесчисленные научные направления и традиции, неустанно изобретает сложные теории и формулы, ежегодно публикует десятки тысяч научных идей, но все меньше способен видеть целое. Ведь чем больше фрагментировано и разрознено знание, тем сложнее видеть взаимосвязи и единство, отказаться от привычных схем и увидеть мир целиком, как это делали мудрецы древности.

Мы уверены, что если современный учёный сумеет подняться над собственным эгоизмом и клановым соперничеством, если будет действовать, понимая суть гармонии и помнить об её истоках, то мир станет немного лучше. Именно поэтому очень важно выяснить, где и когда появился первый источник знания, который со временем превратился в научное наследие цивилизации. Начнем с того, что приведем цитаты из трудов некоторых известных в научном мире людей. Что же подразумевалось под понятием гармонии в различные исторические эпохи?

Пифагор, посвящённый в египетские мистерии, впервые применил этот термин для обозначения Мира. Пифагорейцы следовали идее о гармонической конструкции Вселенной, а сама гармония для них имела численное выражение, то есть, была интегрально связана с концепцией числа.

Гераклит Диалектическое понимание гармонии было сформулировано знаменитым греческим философом Гераклитом. У древнего мыслителя мир, то есть Космос, совершенен, гармоничен и потому «божественен». В гераклитовском понимании гармония — это внутреннее единство, согласованность, уравновешенность противоположностей, составляющих целое. «Расходящееся сходится, а из различного образуется прекраснейшая гармония, и все возникает через противопоставление». В эстетике Гераклита на первом месте стоит онтологическое понимание гармонии, гармония присуща, прежде всего, объективному миру вещей, самому космосу. Она присуща и природе искусства. Характерно, что, когда Гераклит хочет наиболее наглядно раскрыть природу гармонии, он обращается к искусству. Лучше всего гармонию космоса иллюстрирует у Гераклита образ лиры, в которой различно натянутые струны создают великолепное звучание. Категория гармонии обладает у Гераклита не только онтологическим, но и ценностным значением, в ней присутствует момент оценки. Особенно ярко это выражается в учении о двух видах гармонии: «скрытой» и «явной». Наиболее содержательной является скрытая, или непроявленная гармония. Гераклит утверждает: «Скрытая гармония сильнее явной».

Иоганн Кеплер. Неоценимый вклад в развитие идеи гармонии внес Иоганн Кеплер. Его книга «Harmonies Mundi» («Гармония мира») занимает особое место в истории науки не только потому, что содержит третий закон Кеплера, в котором были воплощены размышления о числе, расстояниях, временах обращения и скоростях планет, но также и потому, что это одна из первых книг, посвященная гармонии Космоса. Из своего открытия (третий закон Кеплера) он делает следующий вывод, имееющий прямое отношение к гармонии Солнечной системы (музыка сфер): «Таким образом, небесные движения суть не что иное, как ни на миг не прекращающаяся многоголосая музыка (воспринимаемая не слухом, но разумом)».

Русский биограф Кеплера Е.А. Предтеченский (1860-1904) пишет:

«Царящая в мире чудная гармония понималась Кеплером не в отвлеченном только смысле благоустройства, а звучала в его поэтической душе настоящей музыкой, которую мы могли бы понять не иначе, как совершенно войдя в круг его идей и проникшись его могучим энтузиазмом к дивному устройству мира и пифагорейским благоговением перед числовыми отношениями. В самом деле, разве не удивительно, что «прекрасное» для слуха зависит от строгого численного соотношения, например, между длинами струн, производящих звуки, — соотношения, открытого Пифагором? Но в Кеплере, несомненно, обитала часть души Пифагора, и мудрено ли, что он усматривал числовые соотношения в открытом и объясненном им планетном космосе?»

Эдуард Сороко Современный белорусский философ Эдуард Сороко начинает свою замечательную книгу «Структурная гармония систем» [13] следующими словами:

«Если и существуют «вечные» проблемы, которые постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль, то среди них в первую очередь можно назвать проблему гармонии. Наука, физика в частности, по словам Б.Г.Кузнецова, всегда имела своей извечной фундаментальной целью «найти в лабиринте наблюдаемых фактов объективную гармонию»... То же можно сказать в адрес философии, искусства (живописи, музыки, архитектуры) и других областей самореализации «человеческого духа».

Леон-Баттиста Альберти Известный итальянский теоретик архитектуры Леон-Баттиста Альберти**,** написавший много книг о зодчестве, говорил о гармонии следующее (цит. по [121]):

«Есть нечто большее, слагающееся из сочетания и связи трех вещей (числа, ограничения и размещения), нечто, чем чудесно озаряется весь лик красоты. Это мы называем гармонией, которая, без сомнения, источник всякой прелести и красоты. Ведь назначение и цель гармонии – упорядочить части, вообще говоря, различные по природе, неким совершенным соотношением так, чтобы они одна другой соответствовали, создавая красоту… Она охватывает всю жизнь человеческую, пронизывает всю природу вещей. Ибо все, что производит природа, все это соизмеряется законом гармонии. И нет у природы большей заботы, чем та, чтобы произведенное ею было совершенным. Этого никак не достичь без гармонии, ибо без нее распадается высшее согласие частей».

В.П. Шестаков. Известный советский философ В.П. Шестаков в книге [147] выделяет, по крайней мере, три типа понимания гармонии: математическое, эстетическое и художественное. В математическом смысле гармония понимается как равенство или соразмерность частей друг с другом и части с целым. При этом, как подчеркивает Шестаков, «математическое понимание гармонии фиксирует, прежде всего, количественную определенность гармонии, но оно не заключает в себе представления об эстетическом качестве гармонии, ее выразительности, связи с красотой». Он обращает внимание на одну важную особенность определения гармонии, данного Альберти: «Гармония является законом не только искусства, но и природы, она охватывает всю жизнь человека и всю природу вещей. Гармония в искусстве является отражением гармонии в природе».

Иосиф Шевелев. Существуют различные понимания гармонии, выражающие ее через другие фундаментальные понятия, в частности, через понятие целостности. Эта идея развивается в книге «Метаязык живой природы» [32], написанной Иосифом Шевелевым, известным российским архитектором и исследователем гармонии. Шевелев утверждает:

«Понятие целостность, хорошо известное... как категория, размытая во многих других философских понятиях, таких, как единое и единство, форма и содержание, материя и сознание, вещество, пространство и время, гармония и Бог. Современное естествознание применяет его нередко, но не как понятие науки, ясно определенное, а, скорее, как символ и образ. Закона целостности наука не устанавливает... Если закон целостности действительно существует, то в силу того, что охватывается этим законом, он оказывается вне сферы науки. Он не может быть производным от физической реальности. Он может существовать только как априорная данность, не имеющая истока в феноменальном мире; как идея связи всего со всем, реализуемая всеми материальными структурами живой природы на всех иерархических уровнях их внутренней организации».

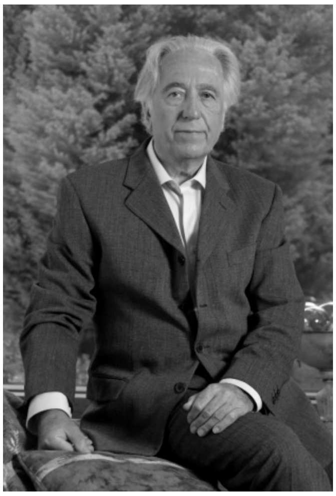
Тейяр де Шарден. Французский философ Тейяр де Шарден в своей книге «Феномен человека» [148] утверждает:

«Согласованность частей Универсума всегда была предметом восхищения людей. И эта согласованность, по мере того, как наука все более точно и глубоко изучает факты, оказывается все более удивительной. Каждый элемент космоса буквально соткан из всех других элементов. Снизу он создан таинственным явлением композиции, сверху – воздействием единства высшего порядка. ...Универсум держится своей совокупностью. Существует лишь один возможный способ рассматривать его – это брать его как блок, весь целиком».

Михаил Марутаев. Российский композитор и исследователь гармонии Михаил Марутаев утверждает [149], что «мир – это гармония; гармония первична, и она порождает материю».

Дарио Салас Соммэр о Герметической Философии и Математике Гармонии. Ну а самым первым источником знаний о Гармонии является Герметическая Философия, самая древняя из всех известных систем знания. Считается, что впервые представление о мире как о гармоническом целом, берущим начало от Единого Бога, было развито в науке Древнего Египта Гермесом Трисмегистом, и уже затем это понятие закрепилось в древнегреческой традиции, где Гармония представлена как организация Вселенной, как Космос, противоположный Хаосу.

Многочисленные публикации и интернет статьи на тему герметизма в основном связаны с вульгарным оккультизмом, спиритизмом и эзотерикой. Стоило большого труда отыскать нечто стоящее в этом океане вымысла и фантазий. Работы Дарио Саласа Соммэра, философа из Чили [150-155], затрагивают своей простотой и ясностью, они наполнены идеалом служения человечеству, искренним желанием помочь обрести правильный путь через реальные практические знания. Именно наличие практической составляющей отличает философию герметизма от других теоретических дисциплин. Все это послужило критерием доверия к тому, о чём пишет этот интересный учёный. Не будем пересказывать содержание его книг и статей [150-155], чтобы не искажать смысл, тем более что каждый, заинтересовавшийся его работами, может самостоятельно их прочитать. Но некоторые идеи, имеющие непосредственное отношение к излагаемой теме, мы приведем полностью.



Дарио Салас Соммэр - философ, писатель, сценарист кино, основатель и директор латиноамериканского фонда Симона Боливара, автор ряда книг по Практической Философии, которые изданы на разных языках

Постоянным местом его жительства является город Сантьяго де Чили. В настоящее время он посвящает себя чтению лекций, которые передаются в разные страны, а также руководит педагогической деятельностью Института Герметической Философии и Института Герметической Философии в Нью-Йорке; кроме этого, ведет независимые научные исследования в области сознания и здоровья.

В одной из своих статей [153] Дарио Салас обращает внимание на связь философии с «Математикой Гармонии» [47]:

«Золотая Математика и Герметическая Философия могут стать незыблемым фундаментом, поясняющим жизненную необходимость гармоничного существования людей, и разработать критерии «золотого поведения человека». Мы могли бы обосновать необходимость для государств инвестировать в развитие Морали и Сознания, чтобы все понимали Мораль как совокупность законов Природы, при выполнении которых жизнь будет наполненной и успешной в духовном и материальном плане. И тогда, со временем, появятся мудрые лидеры, которые будут обладать высшим сознанием, а не просто энциклопедическими знаниями; лидеры, имеющие духовные ценности и высшую Мораль, внутреннюю целостность и широкое видение реальности.

Когда-то, еще во времена Пифагора, философия и математика были едины. Благодаря работам школы пифагорейцев знания о количественных закономерностях развития мира содействовали развитию многих наук. Пифагору приписывают изречение: «Познать мир — значит познать управляющие им числа». Изучая числа и пропорции, ученики его школы пытались познать и описать душу человека, а затем управлять процессом ее индивидуальной эволюции. Думаю, что и сегодня эта задача так же актуальна, как и тогда, во времена Пифагора.

По мнению Дарио Саласа Соммэра, "...Гармония - это музыка, ритм и пульс космического оркестра, которым дирижирует сам Создатель..."

Гармония подобна совершенному бриллианту, каждая грань которого символизирует одну из ее ипостасей. Чаще всего человеку становится доступна лишь какая-то грань, а видение целого остается сокрытым, что негативно сказывается на всей его жизни, приводит к непониманию, войнам и раздорам. Именно поэтому для описания Гармонии мы сделали акцент на математике, ведь математический язык является универсальным языком науки и не дает возможности проявиться никаким личностным спекуляциям. Это показано в предыдущих главах настояшей книги, посвященной изложению основ и приложений «Математики Гармонии» [47], как новому междисциплинарному направлению, появление которого отражает важную тенденцию современной науки – возрождение интереса к проблемам Гармонии и «золотого сечения».

19.2. Чего не знает современная наука?

Лучше всего на этот вопрос отвечает Алексей Чуличков в статье «Чего не знает современная наука» [156]. Мы всего лишь продолжим и дополним его интересные рассуждения.

Как известно, каждая из областей науки дает только частное знание (фрагмент) о той грани окружающего мира, которой она занимается. Доступная нам для изучения часть составляет лишь несколько процентов от целого, а полная реальность - это огромные пространства миров, океаны энергий и вибраций. По мере проникновения науки в глубины нашей реальности все чаще возникает вопрос о границах применения научных законов. Так, например, на расстояниях меньших планковской длины (порядка 10^{-33} см) и на промежутках, меньших планковского времени (порядка 10^{-44} с), неприменимы законы квантовой физики из-за слишком больших случайных изменений пространства (так называемых квантовых флуктуаций). Эти масштабы чрезвычайно малы, но все-таки конечны. Точно так же есть пределы применимости и других наук. Что же находится за этими пределами, то есть за границами уже познанного? Стоит вспомнить, что помимо физических явлений существуют эмоции, чувства и мысли, есть составляющая, связанная с глубоким внутренним индивидуальным опытом. Получается, что целостная картина мира возникает не только на основе традиционной науки — есть знания, накопленные в опыте поколений, закрепленные в культуре, в моральных положениях религий, в сказках и мифах. Существует настоящий архив цивилизации, записанный в магнитном поле планеты, но у кого есть к нему прямой доступ? Кто сможет разрешить все загадки, о которых мы сейчас будем говорить?

Тайна возникновения мира. Это одна из загадок, всегда волновавшая пытливые умы. Вплоть до начала XX века считалось, что данный вопрос не относится к естествознанию. Среди ученых бытовало мнение о неизменности Вселенной, которое опиралось на представления античных натурфилософов о вечном существовании мира или на библейские легенды о сотворении мира таким, каким мы видим его сейчас. Это мнение было столь устойчиво и распространено, что первые результаты Пулковского астронома А. Фридмана, решившего уравнения Эйнштейна и обнаружившего теоретическую возможность сжатия или расширения Вселенной, какое-то время рассматривались просто как интересный математический курьез, не имеющий особого физического смысла. Однако экспериментально обнаруженное Э. Хабблом в 20-х годах XX века разбегание галактик окончательно убедило ученых в том, что мы живем именно в расширяющейся Вселенной. А значит, когда-то давно Вселенная была не так велика и даже имела столь малый размер, что для ее описания требовалось применение законов микромира, то есть, квантовой физики. Один из таких законов гласит, что система не обладает определенными физическими характеристиками до тех пор, пока не подвергнется процессу измерения, иными словами, взаимодействия с чем-то внешним по отношению к квантовому объекту. Возникает вопрос: «С чем взаимодействовала наша Вселенная «до начала времен»? Простая экстраполяция законов микромира позволяет говорить о «внешних» по отношению к ней силах, имя которым во всех религиозных системах одно — Бог.

Тайна рождения и смерти. Как первый раз родилось живое существо — это тайна, отстоящая от нас на миллиарды лет. Но таинство рождения происходит постоянно — загадка возникновения живого организма из единой клетки-семени не разрешена до сих пор, несмотря на открытие структуры ДНК, расшифровку генетического кода и успехи в изучении механизмов наследственности. Один из вопросов касается развития эмбриона. По современным представлениям, клетка-зародыш делится на две одинаковые клетки, ничем не отличающиеся одна от другой, каждая из них вновь делится на две идентичные (кстати, представление о симметричном делении клетки опровергается современными исследованиями в биологии), но в какой-то момент деления начинается дифференциация функций: одни клетки превращаются в нервную ткань, другие — в соединительную, третьи — в мышечную и т. п. Кто управляет выбором дальнейшего пути, если начальные клетки одинаковы? Этот процесс настолько непонятен, что для объяснения используют множество непривычных для нас гипотез, в частности — о существовании специальных «морфогенетических полей», внешних по отношению к клетке, дающих «невидимый каркас» будущего организма.

Возникновение Разума. Если мы сможем определить, что такое Разум, то станет очевиден и его источник. К сожалению, современная наука не дает четких объяснений по этому поводу.

Как же возник разум, является ли он свойством материи, как это принято считать? Что вообще есть мысль? Естествознание связывает разум с развитием мозга, но попытки картировать участи мозга, «отвечающие за разум», ни к чему не привели. Об уровне сложности мозга сказала научный руководитель Института мозга человека Н.П. Бехтерева (1924 - 2008): «Всю свою жизнь я посвятила изучению самого совершенного органа — человеческого мозга - и пришла к выводу, что возникновение такого чуда невозможно без Творца».

Мы считаем, что существование разума не обусловлено только наличием мозга, нужен еще один полюс, чтобы образовалась магнитная сфера, или Ноос (разум), как её называли в философии Древнего Египта. В XX веке в научном обороте появилось выражение «Ноосфера», или разумная оболочка Земли, созданная не человеческим разумом, как это принято считать, а планетарным, то есть, магнитным полем планеты. Возможно, именно здесь кроется ключ к пониманию Разума. По аналогии мы приходим к выводу, что каждая планета, солнечная система, галактика и вселенная обладают своим разумом, подобно русской матрёшке, а вместе создают единое поле Разума, как и говорил Гермес Трисмегист: «Всё есть Ум, Вселенная ментальна»**.** Значит, материя является продуктом Разума, а не наоборот.

Тайна генетического кода. Поразительный в своей простоте и ныне широко известный факт кодирования наследственной информации в живых организмах можно отнести к числу важнейших открытий человечества. Простота заключается в том, что наследственная информация кодируется текстами из трехбуквенных слов - триплетов или кодонов, составленных на базе алфавита из четырех букв - азотистых оснований А (аденин), С (цитозин), G (гуанин), Т (тимин). Данная система записи по существу едина для всего многообразия живых организмов и называется генетическим кодом. Но кто же создал генетический код, определяющий программу развития живого организма? На этот вопрос современная наука ответить не в состоянии, и мы снова приходим к идее Бога или Всемирного Разума. Прекрасную книгу «Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость» [44] недавно опубликовал известный российский исследователь Сергей Петухов. Наверное, в мире нет более глубокого специалиста в области генетического кодирования. И поэтому к вопросам, поставленным Сергеем Петуховым, необходимо относиться с особым вниманием. Петухов обращает внимание на тот факт, что «октетная геноматрица совпадает со знаменитой матрицей 64 гексаграмм из древнекитайской «Книги перемен», написанной несколько тысяч лет назад. Эта матрица в свое время поразила изобретателя компьютера Г. Лейбница, считавшего себя создателем двоичной системы счисления и вдруг обнаружившего древних предшественников». В этой связи Петухов приводит цитату из книги С.К. Щуцкого [157]:

«Лейбниц усмотрел в этом подобии ... свидетельство предустановаленной гармонии и единого божьего промысла для всех времен и народов».

Анализируя октетную матрицу генетического кода, Петухов отмечает, что «имеется астрономическое число $64! \approx 10^{89}$ вариантов расположения 64 триплетов в октетной матрице... Однако природа по какой-то причине выбрала такой вариант вырожденности генетического кода, который соотвечает симметрическому, а значит закономерному заполнению данной октетной матрицы... Действительно, ... природа по характеристикам этой вырожденности разделила множество 64 триплетов на два пожиножества из 32 триплетов в каждом.... Эти 32 триплета, показанные ... в черных ячейках геоматрицы, природа противопоставила 32 триплетам из белых ячееек. Совокупное расположение этих черных и белых ячеек обладает выраженными симметрическими характеристиками...».

Обсуждая проблему симметрии вырождености генетического кода в его матричном представлении, Петухов делает следующее важное замечание:

«Помимо указанного необразимого числа вариантов расположения 64 триплетов в октетной марице существует еще огромное множество вариантов соответствия между 64 триплетами и теми 29 аминокислотами и стоп-сигналами, которые они кодируют. Из этого множества природа почему-то выбрала для рассматритваемого ниже кода один-единственный вариант».

А вот еще одна загадка от Сергея Петухова [44]:

«Современной науке не известны причины того, почему алфавит генетического языка именно четырехбуквенный (а не из тридцати букв, например); почему из миллиардов возможных химических соединений именно эти четыре азотистые основания C, A, G, U(T) выбраны в качестве элеменетов алфавита; почему генетически кодируются именно 20 аминокислот и т.д.»

В этих цитатах, взятых из книги [44], Сергей Петухов широко использует понятие «природа» для объяснения феномена генетического кода. Именно «природа», по мнению Петухова, почему-то из $64!\approx 10^{89}$ вариантов октетной матрицы генетического кода выбрала октетную матрицу, обладающую уникальными симметрическими качествами. Петухов не раскрывает понятие «природа», которая создала уникальную биологическую структуру – генетический код, который лежит в основе всего живого на земле. Но из рассуждений Петухова вытекает вывод о неслучайности генетического кода, что снова приводит нас к естественной идее «Творца» или «Всемирного Разума» (хотя об этом Сергей Петухов предпочитает не говорить).

Загадка филлотаксиса. Мы уже так привыкли к ботаническому явлению филлотаксиса, с которым мы сталкиваемся на каждом шагу, что мы никак не можем поверить в то, что это природное явление представляет собой одну из величайших загадок, которую современная наука пока еще не раскрыла. Конечно, «теория Боднара» [24], раскрывающая механизм роста филлотаксисных объектов по «гиперболическому сценарию» с использованием «золотых» гиперболических функций, является очень важным шагом в раскрытиии этой «тайны природы», но эта теория ставит новые вопросы перед наукой. Если «природа» на самом деле действует по тому плану, который предложил Олег Боднар, то тогда мы должны допусить, что «природа» знает и использует «гиперболические функции Фибоначчи и Люка» [57,58] уже в течение миллионов или даже миллиардов лет. И мы опять приходим к идее «Творца» или «Всемирного Разума» для объяснения явления филлотаксиса.

«Теория физического вакуума» Геннадия Шипова. Исследования российского физика-теоретика доктора физико-математических наук Г.И. Шипова посвящены одному из самых сложных вопросов современной физики – теории физического вакуума. Уравнения теории физического вакуума позволяют выделить три мира, составляющих нашу реальность: грубоматериальный, тонкоматериальный и мир высшей реальности. В свою очередь мир высшей реальности разделяется на три уровня: Абсолютное «Ничто», Первичный Вакуум и

Вакуум. Абсолютное «Ничто» играет центральную роль, хотя нам кажется, что семантически правильнее называть его «Абсолютное Всё»**.**

Шипов пишет [158]:

«Единственным возможным объяснением обратного преобразования могут служить такие качества Абсолютного «Ничто», как Сверхсознание, обладающее Бесконечными Творческими Способностями. Абсолютное «Ничто» создает план первичного вакуума и план вакуума».

О лженауке. Таким образом, впервые в современной физической науке в теорию введена идея «Творца», роль которого играет Абсолютное «Ничто». Возможно, именно этот факт вызвал резко негативное отношение к «теории физического вакуума» Геннадия Шипова со стороны так называемой «Комиссии по лженаукам» Российской академии наук, которая вряд ли в состоянии воспринять «космическое релгиозное чувство» Альберта Энштейна, и веру Макса Планка и Владимира Вернадского в «Космический Разум». В этой связи возникает вопрос: может быть, наступила пора причислить к категории «лжеученых» Альберта Эйнштейна, Макса Планка и Владимира Вернадского вместе с Геннадием Шиповым и Натальей Бехтеревой?

К сожалению, российская, а затем и советская академическая наука прославилась своей активностью в разоблачении «лжеученых».

Первая позорная страница — это непризнание неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевского со стороны Российской официальной академической науки 19-го столетия. Как известно, открытие Лобачевского встретило полное непонимание и даже негодование со стороны почти всех его ученых соотечественников. Тон задал глава математической школы России академик М.В. Остроградский, который написал резко отрицательный отзыв на исследования Лобачевского в области гиперболической геометрии. С его негласного одобрения в журнале «Сын отечества» в 1834 г. была опубликована весьма критическая статья по поводу Лобачевского и его теории, в которой писалось буквально следующее:

«Как можно подумать, чтобы г. Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какой-либо серьезной целью книгу, которая не много бы принесла чести и последнему приходскому учителю. Если не ученость, то, по крайней мере, здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего».

И это писалось о крупнейшем математическом открытии 19-го века, которое, как потом оказалось, по своему значению в развитии науки и математики можна сравнить с открытием несоизмеримых отрезков в греческой математике и теории относительности Эйнштейна в начале 20-го века.

Следующая позорная страница в истории Российской академической науки — это неизбрание Д.И. Менделеева в члены Российской академии. Кто сейчас помнит тех «академиков», которые не избрали в российские академики создателя Периодической Системы Элементов?

Третья позорная страница — это отношение к гениальному российскому философу Алексею Лосеву со стороны советской академической науки. Можна ли назвать в росийской философской науке имя хоть бы одного российского «академика» в области философии и эстетики, которого можно было бы поставить на один уровень с Лосевым? Так почему же Алексей Лосев не был избран в действительные члены РАН хотя бы посмертно?

К сожалению, эти примеры можно было бы продолжить. Уже набила всем оскомину история с кибернетикой и генетикой — буржуазными «лженауками». А ведь травля Н.И. Вавилова со стороны «академика» Лысенко получила негласную поддержку со стороны многих советских академиков! И эти примеры, очевидно, очень уж «вдохновляют» некоторых современных российских «академиков», которые в свое время требовали от Президента Путина публичной расправы с Геннадием Шиповым.

Обсуждая термин «Абсолютное «Ничто»», использованный Геннадием Шиповым в своих работах [158], хотелось бы напомнить, что подобная идея несколько тысячелетий тому назад изложена в «Герметической Философии» древних египтян, которые получили эту мудрость из рук Трижды Великого Гермеса.

19.3. Изумрудная Скрижаль Гермеса

Египет - земля пирамид и сфинксов, место зарождения тайной мудрости и мистических учений. Именно из Древнего Египта к нам пришло знание о мире, до сих пор оказывающее влияние на философию всех рас, наций и народов. Отсюда заимствовали мудрость правители и жрецы Индии, Персии, Халдеи, Мидии, Китая, Японии, Ассирии, Древней Греции и Рима. Уже тогда, на самом раннем этапе развития нашей цивилизации, появилась первая система знаний, положения которой особенно актуальны для современной науки. Речь идет о малоизвестной герметической философии, матери всех наук, семь принципов которой отражают законы универсальной Гармонии и взаимосвязи всего сущего.

В этой связи уместно привести выдержку из книги Дарио Саласа Соммэра «Мораль XXI века» [151]:

«Герметическая философия покоится на признании того факта, что Человек и Космос неразделимы и что каждый из них приобретает свое значение благодаря чему-то, что соединяет их вместе. Это «что-то» есть Великий эволюционный план творения, выражением которого является Вселенная и все, что ее составляет».

Первым Учителем герметической философии считается легендарный Гермес Трисмегист, что означает «трижды великий». Имеется много письменных свидетельств, подтверждающих, что Гермес Трисмегист был реальной исторической личностью. Одно из первых упоминаний о нем содержится в трактате Цицерона «О природе богов», где сообщается, что древние египтяне называли Гермеса Тотом, как и первый месяц в Египетском календаре. Адепты христианства Лактанций и Августин указывают, что Гермес Трисмегист был известен как древний автор ряда «герметических» произведений, в подлинности которых отцы церкви не сомневались. Лактанций в трактате «О гневе божьем» указывает, что Трисмегист гораздо древнее Пифагора и Платона. Он считает Трисмегиста одним из важнейших провидцев, предсказавших приход христианства. Лактанций доказывает, что языческая мудрость согласуется с христианским учением, в подтверждение этой мысли он часто цитирует по-гречески трактат Гермеса «Совершенное слово», известный сейчас в латинском переводе как «Асклепий».

Гермес Трисмегист

Вот что пишет о Гермесе Эдуард Шюре [159]:

«Гермес - такое же родовое имя, как Ману и Будда. Оно обозначает одновременно и человека, и касту, и божество. Человек-Гермес есть первый посвятитель Египта; каста — жречество, хранящее оккультные традиции; божество — планета Меркурий, уподобляемая определенной категории духов, божественных посвятителей; одним словом, Гермес — представитель сверхземной области небесного посвящения... Имя Гермеса представляет собой талисман, который всех их в себе содержит, магический звук, который их вызывает. Отсюда его обаяние. Греки, ученики Египтян, называли его Гермесом Трисмегистом, или трижды великим, ибо они видели в нем царя, законодателя и жреца. Он олицетворял собой эпоху, когда жречество, судебная власть и царская власть находились в одном и том же правящем учреждении. Египетская хронология Манефона называет эту эпоху царствованием Богов».

Считается, что Гермесом, или его последователями, были написаны 42 рукописи, наиболее известные из которых «Пастух людей» и «Изумрудная скрижаль». От имени Гермеса происходит слово «герметический» («заполненный»), так как его сочинения были полны мудрости. Рукописи Гермеса тысячелетиями хранились в Александрийской библиотеке и исчезли во время пожара. Частичные отрывки из этих книг сохранились лишь в греческих переводах, и казалось, что древняя мудрость исчезла навсегда. Но традиции школ герметизма не пропали, и цепь посвящённых никогда не прерывалась. Согласно Дарио Саласу, герметизм, родившийся в глубокой древности, не исчез и не ослаб, он сохранился во всей чистоте, несмотря на то, что появилось множество псевдофилософских, ложных герметических течений, не содержащих подлинного знания.

Одним из наиболее известных произведений, приписываемых Гермесу Трисмегисту, является «Изумрудная Скрижаль» — короткая работа, которая является источником известной аксиомы: «То, что находится внизу, аналогично тому, что находится наверху». В Изумрудной скрижали также говорится о тройственном законе и тройственной достоверности. История сообщает, что Изумрудная скрижаль была найдена Александром Великим в Хевроне, по общему мнению, в гробнице Гермеса.

Гермес дал египтянам знания по медицине, химии, астрологии, геометрии и ораторскому искусству. Кроме того, ему приписывают создание Египетского солнечного календаря, который является прообразом современного Григорианского. Несмотря на критическое отношение материалистической науки к герметической философии, её идеи пережили столетия и вдохновляли лучшие умы человечества. На протяжении многих веков ее последователями были: в период Древней Греции – Пифагор и Платон, в эпоху Возрождения - Пико делла Мирандола, Джордано Бруно, Томмазо Кампанелла, Парацельс, Лука Пачиоли, Леонардо да Винчи. Определённую дань герметизму отдали многие мыслители

XVI-XVII веков: Коперник, Кеплер, Френсис Бэкон и Исаак Ньютон. Все они говорили о божественных законах мироздания и о наличии единого источника жизни.

Дарио Салас Соммэр пишет [151]:

«Я знаю, что говоря о «божественном» законе, я рискую быть отвергнутым материалистами, не верящими в высшее существо. Я прошу их не представлять высшее существо так, как его обычно изображают. Жизнь Вселенной поддерживается высшей разумной упорядочивающей силой, и не важно, как мы ее назовем, главное то, что она существует. Одни ее представляют в образе человека, другие — в виде чистой энергии, материалисты считают ее разновидностью материи, но, несомненно, существует порядок, поддерживающий структуру Космоса и управляющий циркуляцией энергии в Природе. Пифагор говорил о «музыке сфер», стоики о «Логосе», который понимали как силу, действующую сквозь время и пространство. Задолго до них Гермес говорил о «вселенском разуме» или «едином начале Вселенной.

Мы привыкли считать себя существами, отделенными от Вселенной, этакими обитателями космического острова. Но как гласит голографическая концепция доктора Карла Прибрама, «часть существует в целом, а целое — в каждой из частей». Исследования Прибрама в области работы мозга и памяти привели его к заключению, что мозг во многом похож на голограмму. Голограмма — это особый вид оптического хранения информации, который можно объяснить на следующем примере: если взять голограмму человека и отрезать от нее, например, голову, а затем увеличить ее до первоначального размера голограммы, то получится изображение не одной большой головы, а всего человека. Каждая отдельная часть голограммы содержит в сжатой форме изображение всего объекта. Таким образом, часть связана с целым. Это совпадает с утверждениями древних философов о том, что микрокосм подобен макрокосму (человек подобен Вселенной и потенциально содержит в себе Все)».

19.4. Принципы герметической философии

Кабалион. В 1908 году в Чикаго был издан Кибалион, небольшой трактат по герметизму, который снова возродил интерес общества к принципам герметической философии. Мы приходим к мнению, что эти принципы представляют собой семеричный универсальный код Гармонии:

1. Принцип Разума
2. Принцип Соответствия (Аналогии)
3. Принцип Вибрации
4. Принцип Полярности
5. Принцип Ритма.
6. Принцип Причины и Следствия
7. Принцип Зарождения.

Опираясь на работы Дарио Саласа, рассмотрим каждый принцип в отдельности, а также его связь с современной наукой.

Принцип Разума. Герметический Принцип Разума гласит:

«Все есть Ум; Вселенная Ментальна».

Герметизм утверждает, что всё есть Ум (Дух), Вселенная ментальна, а значит, все состоит из ментальной энергии: атом, человек и Бог. Ментальная энергия проявляется через бесконечное сочетание вибраций, от самых тонких до самых плотных. Подобно тому, как музыкальное произведение складывается из звуков, комбинация этих вибраций производит разные элементы и материалы Вселенной, обладающие различными свойствами, но общей сущностью разума. Древние алхимики верили, что смогут превратить свинец или любой другой металл в золото, поскольку сущностный состав всех металлов один – ментальный.

Принцип Разума получил яркое воплощение в идеализме, философской теории, согласно которой Вселенная представляет собой выражение или воплощение Духа (Разума). Основы идеализма мы находим в трудах Платона**.** Наиболее полно метафизический идеализм изложен Гегелем. Среди других мыслителей Нового времени, придерживавшихся сходных взглядов, Фихте, Шеллинг, Т.Грин, Ф.Брэдли и Б.Бозанкет, а также Дж. Ройс**.**

Принцип Разума по сравнению с другими принципами герметизма вызывает наибольшее неприятие со стороны современной «материалистической» науки, но как мы уже говорили, сама наука оказалась в тупиковой ситуации, когда не смогла объяснить некоторые «загадки» или «тайны», о которых мы говорили выше. Наверное, поэтому многие серьезные исследователи вынуждены были обратиться к идее «Творца» (Бехтерева, Шипов) или к «космическому религиозному чувству» (Эйнштейн, Планк, Вернадский, Шарден, Владимиров). И эту тенденцию уже не удается сдерживать. Например, известный российский физик-теоретик проф. Ю.С. Владимиров**,** руководитель семинара «Физика и духовная культура» на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, является приверженцем сближения научного и религиозного мировоззрений. По его представлениям, наука является созидательницей познанного, но есть еще и непознанное, поэтому роль религии состоит в дополнении познанного до целостного. Только понимая целостную картину мира, человек может полноценно жить в нашем сложном мире и решать многочисленные проблемы, для чего научного знания подчас недостаточно.

Принцип Соответствия (Аналогии). Этот важнейший принцип герметизма гласит. **«**Как вверху, так и внизу, как внутри, так и снаружи».

Согласно этому принципу существует соответствие между законами и явлениями в различных плоскостях физического, ментального и духовного планов бытия и жизни. Этот принцип соответствует принципу резонанса в области физики, или согласованию подобных частот: настроенный определенным образом осциллятор будет воспринимать энергию только ограниченного диапазона частот. А так как все есть только форма энергии, то эта энергия характеризуется частотой, которая приспосабливается к телам с эквивалентными осцилляционными моделями.

Принцип Аналогии в математике. Знаменитый польский математик Стефан Банах (1892-1945) утверждал:

«Математик— это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями, лучший математик —тот, кто устанавливает аналогии доказательств, более сильный математик — тот, кто замечает аналогии теорий, но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии».

Выдающийся венгерский, швейцарский и американский математик Дьердь Пойя (1887-1985) писал:

«Не существует открытий ни в элементарной, ни в высшей математике, ни даже, пожалуй, в любой другой области, которые могли бы быть сделаны без аналогии».

Очевидно, что эти ученые были убеждены, что принцип соответствия (аналогии) является едва ли не самым главным принципом математики и их вряд ли можно упрекнуть в привязанности к герметизму и эзотерическим наукам.

В любой отрасли науки широко используется умозаключение по аналогии, когда знание, полученное из рассмотрения какого-либо объекта, переносится на менее изученный, но сходный по существенным свойствам. Это один из основных источников научных гипотез.

Принцип Аналогии, рекурсия и фракталы. Заметим, что Принцип Соответствия (Аналогии) нашел свое отражение и в рекурсивном методе, широко используемом в математике и других науках. Как известно, рекурсия — это метод определения класса объектов или методов предварительным заданием одного или нескольких (обычно простых) его базовых случаев или методов, а затем заданием на их основе правила построения определяемого класса, ссылающегося прямо или косвенно на эти базовые случаи.

Рассмотрим некоторые примеры. В математике широко используется такое понятие как факториал. Факториал целого неотрицательного числа n обозначается $n!$ и определяется рекурсивно как $n! = n \times (n-1)!$ при $n > 0$; при этом $n! = 1$ при $n = 0$.

Классическим примером рекурсии являются фракталы. Фрактал означает геометрическую фигуру, обладающую свойством самоподобия, то есть, составленную из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. Примером геометрического фрактала, заданного в форме бесконечной рекурсии, является треугольник Серпинского (Рис.19.1).

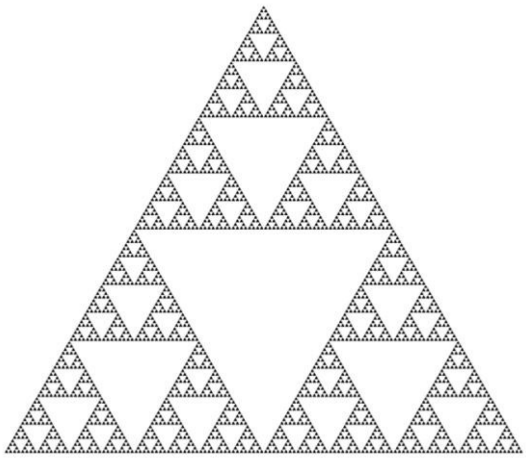


Рисунок 19.1. Треугольник Серпинского

Другим примером бесконечной рекурсии в физике являются два зеркала, поставленные друг напротив друга, в них образуются два коридора из затухающих отражений зеркал. Также примером бесконечной рекурсии является эффект самовозбуждения (положительной обратной связи) у электронных схем усиления, когда сигнал с выхода попадает на вход, усиливается, снова попадает на вход схемы и снова усиливается. Усилители, для которых такой режим работы является штатным, называются автогенераторами.

Принцип Аналогии и принцип подобия. Интересно отметить, что люди, как правило, тоже группируются на основе принципа подобия, что является основной причиной проблем общения людей с разными идеологиями. На законе подобия основана и гомеопатия, идея изобретения которой приписывается Гиппократу, который говорил, что болезнь производится определенной субстанцией, и, применяя подобную же субстанцию, мы заставим пациента идти от состояния болезни к состоянию выздоровления. Позднее, в 1792 году, Самуэль Ганеман (1755-1843) уже создал гомеопатию, основанную на этом принципе, он излечивал болезнь, используя бесконечно малые концентрации субстанций, аналогичных болезни.

Принцип Аналогии и голография. Голография – блестящее подтверждение действия герметического Принципа Соответствия (Аналогии). В этой связи уместно привести высказывание Дарио Саласа Соммэра [151]:

«Мы живем в сознательной и разумной Вселенной, имеющей голографическую структуру. Существует только одна энергия, пронизывающая Космос во всех измерениях и создающая полное единство жизни. То, что происходит с мельчайшей частицей, одновременно затрагивает структуру в целом, поскольку между всеми частями Вселенной существует неразрывная связь. Согласно принципу голографии, «каждая часть содержит целое». Это подтверждается открытиями в области клеточной биологии: каждая клетка содержит копию ДНК оригинала, достаточную для клонирования всего тела. Поэтому целое — это «Создатель», всемогущая и всезнающая первичная энергия, из которой происходят все формы бытия. Это духовная сущность или жизненная субстанция, лежащая в основе всех форм энергии и материи».

Принцип Вибрации. Этот герметический принцип гласит:

«Ничто не находится в состоянии покоя, все движется, все вибрирует».

Вселенная представляет собой «мыслящую материю», вибрирующую на различных частотах. Этот вывод сделан и в квантовой физике. Энергия - это вибрация, которая обладает разными частотами, а «материя» - та же энергия, просто другой частоты. Наше существование на земле полностью зависит от излучений, «магнитной пищи», которую мы получаем от Солнца и Земли, без них жизнь была бы невозможна.

Принцип Вибрации показывает, что материя, энергия, разум и даже дух отличаются друг от друга только скоростью вибраций.

Для иллюстрации этого можно привести пример, когда некий объект (колесо, волчок или цилиндр) вращается с определенной скоростью. Вначале скорость невелика, и вращение бесшумно. По мере увеличения скорости слышатся низкие звуки. Затем поочередно возникают звуки музыкального диапазона, все выше и выше. Наконец, по достижении определенной скорости движения, звучит последняя нота, воспринимаемая человеком, и наступает тишина. В этот момент скорость вращения становится настолько большой, что человеческое ухо не может различить колебания. Далее неожиданно возникает ощущение тепла. Спустя некоторое время глаз определяет, что объект приобретает тускло-красноватый цвет. С возрастанием скорости красный цвет становится ярче. С дальнейшим ускорением красный переходит в оранжевый, а оранжевый в желтый. Далее следуют один за другим переходы зеленого, голубого, синего и, наконец, фиолетового цвета, скорость все увеличивается. Затем фиолетовый оттенок исчезает, исчезают все цвета, поскольку человеческий глаз уже не в состоянии их воспринимать. Но от вращающегося объекта исходят невидимые лучи, какие-то из них нам знакомы, они используются в фотографии. Потом появляются так называемые «Х-лучи». При достижении достаточно высокой скорости вращения объект начинает испускать электромагнитные волны и наступает момент, когда его молекулы распадаются на исходные элементы или атомы. Далее атомы, на основании принципа вибрации, разделяются на бесчисленные составляющие атом частицы. И,наконец, даже они исчезают. Теперь объект можно назвать состоящим из эфирного вещества. Наука не решается продолжать иллюстрацию дальше, но в герметизме говорится, что если вибрацию увеличивать, то объект постепенно поднимется до высших разумных состояний,приближаясь к Духу до тех пор, пока не возвратится во Все, которое и есть Абсолютный Дух.

Принцип Вибрации и фундаментальные физические теории. Герметический принцип вибрации лежит в основе огромного количества фундаментальных физических теорий, например, электромагнитная теория Максвелла, волновая теория света, квантовая механика. Он широко используется в технике. В науке принцип вибрации связан с колебаниями, процессом, при котором движения или состояния системы регулярно повторяются во времени. Наиболее наглядно колебательный процесс демонстрирует качающийся маятник. При колебаниях почти всегда происходит попеременное превращение одной формы энергии в другую. Колебания различной физической природы имеют много общих закономерностей и тесно связаны с волнами. Для исследования этих закономерностей создана специальная математическая теория - теория колебаний.

Психическое и физическое здоровье человека основано на энергетических вибрациях, которые дают нашим клеткам жизнь. Нарушение гармонических волновых моделей приводит к болезням, а прекращение волнового процесса к смерти организма.

Принцип Вибрации и физический вакуум. Выше мы упоминали о «Теории физического вакуума» Геннадия Шипова [158]. В ее основе лежит понятие торсионного поля, которое представляет собой не что иное, как особый вид «вибрации», возникающей на тонкоматериальном уровне.

Таким образом, герметический Принцип Вибрации отображает одно из важнейших свойств материи, доказанных современной наукой.

Принцип Полярности. Герметический принцип полярности гласит:

«Все - двойственно; все имеет полюса; все имеет свою пару противоположностей; похожее и непохожее - одно и то же; противоположности идентичны по своей природе, но отличаются по степени; крайности сходятся; все истины не что иное, как полу-истины; все парадоксы можно примирить».

Все проявляющиеся явления обладают «двумя сторонами», «двумя аспектами», «двумя полюсами», «парой противоположностей», с многочисленными уровнями между крайностями. Где кончается темнота и начинается свет? Какая разница между малым и большим? Между жарой и холодом? Между плюсом и минусом? Принцип полярности объясняет все эти парадоксы.

В организме человека, правая часть имеет положительную полярность, а левая - отрицательную, у женщины мозг имеет положительную полярность, а сексуальный центр - отрицательную. Мужчина, наоборот, имеет положительный заряд своего сексуального центра и отрицательный - мозга. Не в этом ли тайна притяжения между мужчиной и женщиной и способности женщины «оплодотворять» мозг мужчины?

Каждый аспект жизни имеет две стороны: добро и зло, свет и тьма, истина и ложь, добродетель и порок, гордость и смирение, из этого соткан мир следствий. И только мудрец, постигший тайны принципа полярности, способен подняться до уровня причин.

Принцип Полярности и закон единства и борьбы противополжностей. Принцип полярности воплощен в важнейшем философском законе единства и борьбы противоположностей, который является основой «гегелевской диалектики» и восходит к греческим философам Фалесу Милетскому и Гераклиту**.**

Противоположности сталкиваются потому, что находятся в тесной связи, они образуют единое целое, в котором один полюс так же необходим, как и другой. Разделение на противоположности, «борьба» между ними и разрешение противоречий - это и есть процесс развития, при котором единство противоположностей, отражающее устойчивость объекта, оказывается относительным, преходящим. В итоге появляются новые качества, ведущие путем развития к более высокой форме бытия, или происходит распад и разрушение.

Принцип Ритма. Этот герметический принцип гласит:

«Все течет, то есть вытекает и втекает; все имеет свои приливы и отливы; все вещи поднимаются и падают; колебания маятника проявляются во всем; мера размаха вправо является мерой размаха влево; ритм есть компенсация».

Все в жизни подвластно циклическим ритмам: тело человека, растения, погода, приливы и отливы, Земля и Солнце. Ритм - это дозированный порядок возникновения или последовательности событий. Издревле считалось, что Вселенная была создана в соответствии с музыкальными пропорциями. Небесные тела генерируют звуки, которые в совокупности образуют музыку сфер. Эта теория поддерживалась многими учеными от Пифагора до Кеплера и идеально совпадает с современной концепцией физики.

Понятие ритма широко используется в теории музыки, где ритм понимается как соотношение длительностей звуков (нот) в их последовательности. Объединяясь в различных вариациях, длительности звуков образуют разнообразные ритмические фигуры, из которых складывается общий ритмический рисунок музыкального произведения.

Принцип Ритма и циркадные ритмы. Однако понятие ритма используется не только в музыке. Недавно были определены циркадные ритмы – циклические колебания интенсивности различных биологических процессов, связанных со сменой дня и ночи. Циркадные ритмы представляют собой «внутренние часы» организма и присутствуют у водорослей, грибов, растений и животных. Период циркадных ритмов обычно близок к 24 часам.

Наиболее сильным из ритмических воздействий, поступающих на Землю из Космоса, является излучение Солнца. Многочисленные наблюдения показали, что изменения солнечной активности имеет 11-летний период. Еще в 1801г. английский астроном Гершель (1738-1822)заметил зависимость урожайности пшеницы от циклов солнечной активности. В 30-е годы 20-го столетия выдающийся российский ученый А.Л. Чижевский (1897-1964) установил, что максимумы солнечной активности оказывают влияние на самые различные явления органического мира.

Принцип Ритма и циклы Кондратьева. Ритм присущ не только биологической природе, но и экономике. В этой связи представляют интерес большие циклы Кондратьева, теория развития капиталистической экономики, впервые сформулированная в 30-х гг. XX века выдающимся русским экономистом Н. Д. Кондратьевым (1892-1938). Кондратьев установил наличие не только обычных циклов в развитии экономики (10-11 лет), связанных с солнечной активностью, но и «больших циклов» (50-60 лет), характеризующихся сменой повышения и понижения экономической активности. Этот вывод был сделан на основе проделанной им гигантской работы по анализу движения индексов товарных цен, курсов ценных бумаг, депозитов, динамики заработной платы, внешней торговли, объемов производства в отдельных отраслях промышленности. Были использованы статистические показатели по Англии, Франции, Германии и США.

Магнитное поле Земли имеет определенную частоту, то же самое можно сказать и о Солнце, Луне и других планетах. Каждое тело создает гармонический или диссонансный ритм в соответствии с его колебательным уровнем.

Принцип Причины и Следствия. Этот герметический принцип гласит:

«Каждая причина имеет свое следствие; каждое следствие имеет свою причину; все происходит в соответствии с законом; случай есть название неустановленного закона; существует много аспектов причинности, но ничто не ускользает от закона».

Ничто во Вселенной не происходит случайно, у всего есть причина, у каждой причины есть следствие, В классической физике подтверждением этому служит сила тяжести, энтропия, инерция и многое другое. В природе и обществе существует бесчисленное множество форм взаимодействия, взаимосвязи и взаимообусловленности явлений и соответственно — многообразие причинно-следственных зависимостей.

Принцип Причины и Следствия и причинно-следственные связи. В современной науке классификация причинно-следственных связей проводится по различным признакам. По признаку природы отношений причинно-следственные связи подразделяются на материальные и идеальные, информационные и энергетические, физические, химические, биологические, социальные; по характеру связей — на динамические и статистические; по числу и связности воздействий - на простые, составные, однофакторные, многофакторные, системные, внесистемные. Также они бывают внешними и внутренними, главными и неглавными, объективными и субъективными, всеобщими, особенными и единичными. В гносеологии понятие причинно-следственной связи выполняет важную методологическую функцию, направляя исследователя на прогрессивное познание по причинно-следственной цепи — от случайности к необходимости, от единичного к особенному и общему, от формы к содержанию, от явления к сущности.

Принцип Зарождения. Этот герметический принцип гласит:

«Зарождение существует во всем, все имеет свое Мужское и Женское начало; Зарождение проявляет себя во всех аспектах».

Седьмой герметический принцип объясняет, что жизненная сила проявляется во всем, а мужское и женское начала присутствуют везде. Не следует ошибочно смешивать зарождение с полом, так как последний касается лишь структуры детородных органов и различий в проявлении пола у мужчин и женщин. Пол - одно из многочисленных проявлений принципа зарождения, и соответствует он физическому уровню. Как мы уже знаем, существует немало уровней проявления Принципа Разума, то же самое и с Принципом Зарождения. Герметизм утверждает, что жизненная сила исполняет роль двигателя, и это справедливо даже для атома, в котором имеются положительный и отрицательный заряды, взаимодействие которых порождает энергию. Говоря о положительных и отрицательных полюсах, будет точнее называть их мужским и женским, оплодотворяющим и оплодотворенным. Положительный заряд в электричестве - мужской, а отрицательный - женский.

Женское, или отрицательное, начало служит «утробой» всем электрическим и магнитным явлениям. Женская энергия стремится к объединению с мужской, поглощая активные свойства последней и создавая новую жизненную силу. В соответствии с герметическим учением гравитация тоже есть результат притягивания и отталкивания мужских и женских частиц.

Принцип Зарождения и новый взгляд на роль несчастий и трудностей в жизни. Если мы осознаем, как действует закон зарождения, то поймем насколько ошибочно отмахиваться от проблем и трудностей, считая их просто препятствиями на пути, которые вызывают страдания и отнимают время. Проблемы – это отрицательный полюс жизни, и если мы хотим достичь какой-то цели, то должны противопоставить ему зарождающуюся положительную энергию. Это новый, совершенно отличающийся от общепринятого взгляд на роль несчастий и трудностей в жизни. Основная цель жизни человека – индивидуальная эволюция, что происходит только в результате столкновения инерции и силы воли, направляемой пробужденным разумом, поэтому, если бы не было борьбы противоположных сил, ни о каком прогрессе, ни о какой эволюции вообще не могло бы идти речи.

Принцип зарождения гласит, что нет творения, которое могло бы возникнуть без двух элементов, мужского и женского, и это справедливо для всей Вселенной.

Таким образом, анализ Герметических Принципов показывает, что их действие во многом согласуется с современными научными данными. Принцип Вибрации, Принцип Ритма, Принцип Полярности, Принцип Причины и Следствия по существу лежат в основе современной науки и дали начало многим философским направлениям и концепциям.

19.5. Некоторые доказательства высокого уровня развития древнеегипетской цивилизации

«Древней матерью всей нашей культуры» назвал Египет Жан Франсуа Шампольон. Но еще никому не удалось так красиво и восторженно писать о Египте, как другому французу Эдуарду Шюрэ [159]:

"...В противоположность Вавилону, мрачной родине деспотизма, Египет был для древнего мира истинной крепостью священной науки, школой для его наиболее славных пророков, убежищем и вместе лабораторией наиболее благородных преданий человечества. Благодаря бесчисленным раскопкам и превосходным научным работам, египетский народ известен нам так, как ни одна цивилизация, предшествовавшая Греции, ибо он развертывает перед нами всю свою историю, написанную на страницах из камня. Многие из его памятников восстановлены, многие из его иероглифов разобраны и прочитаны; тем не менее, нам все еще остается проникнуть в глубину святилища его мысли.

Это святилище – оккультное учение его жрецов. Научно обработанное в храмах, осторожно скрытое под мистериями, оно показывает нам в одно и то же время и душу Египта, и тайну его политики, и его главную роль в истории мира.

Наши историки говорят одним и тем же тоном и о фараонах, и о деспотах Ниневии и Вавилона. Для них Египет такая же абсолютная и завоевательная монархия, как и Ассирия, и отличается она от последней лишь тем, что существование ее было на несколько тысяч лет продолжительнее. А между тем, в Ассирии царская власть раздавила жреческую и сделала из нее свое орудие, тогда как в Египте жречество дисциплинировало царскую власть, не уступало никогда своих прав и даже в самые трудные эпохи имело влияние на царей, изгоняло деспотов и всегда управляло народом; и влияние это исходило из умственного превосходства, из глубокой мудрости, какой не достигло ни одно правящее сословие нигде и ни в какой стране.

Думается, что наши историки и не подозревают об истинном значении этого факта. Ибо вместо того, чтобы сделать из него все необходимые выводы, они едва касаются его и по-видимому, не придают ему никакого значения. А между тем, не будучи археологом или лингвистом, нетрудно понять, что непреодолимая ненависть между Ассирией и Египтом происходила от того, что эти два народа представляли собой два противоположные мировые принципы, и что египетская народность обязана своим долгим существованием религиозно-научным основам, на которые опирались все ее общественные учреждения, оказавшиеся сильнее всяких революций.

Начиная с арийской эпохи, через весь смутный период, следовавший за ведическими временами до персидского завоевания и до александрийской эпохи, следовательно, в течение более пяти тысячи лет, Египет являлся убежищем чистых и высоких учений, которые, в общем, составляли религиозную науку или эзотерическую доктрину древнего мира. Пятьдесят династий сменяли одна другую, Нил покрывал целые города наносной землей, и финикийцы успели затопить страну и быть снова изгнанными: среди всех этих исторических приливов и отливов, под видимым идолопоклонством внешнего многобожия, Египет сохранял непоколебимую основу своей оккультной теогонии и жреческой организации. Он не поддавался действию времени, так же, как пирамиды Гизы, наполовину погребенные в песках и все же сохранившиеся».

Подобный своими чертами сфинксу, безмолвно хранящему тайну и благодаря своей гранитной непоколебимости, Египет сделался той осью, вокруг которой вращалась религиозная идея человечества. Иудея, Греция, Этрурия – все это были различные жизненные центры, из которых произошли последующие цивилизации. Но где черпали они свои основные идеи, как не в богатом запасе Древнего Египта?

Существует привычное мнение, что наука впервые возникла в середине первого тысячелетия до н.э. в Древней Греции, когда были созданы уникальные условия для её развития, появились первые философские школы и были созданы математика и естествознание. Но наш анализ прошлого, а также мнения таких учёных как Шампольон и Шюре говорят о том, что задолго до этого наука как система знаний о человеке и окружающем его мире уже существовала.

Комментируя эту же тему, Эдуард Сороко [13] подчеркивает: «...Веские аргументы имеет и другая точка зрения, отодвигающая время зарождения науки, по меньшей мере, еще на тысячу лет в прошлое». В качестве убедительного аргумента для обоснования такой точки зрения Сороко указывает на выдающиеся достижения технологии, полученные в древнем мире: Древний Китай (изготовление бумаги, фарфора и шелка, изобретение компаса и пороха, сооружение судов с высокими мореходными качествами и арочных мостов), Древний Египет (развитая техника перегородчатой эмали, изготовление искусственных камней, в частности, лазурита, уникальная строительная технология, использованная при строительстве пирамид, создание египетского календаря, который является прообразом современного календаря и др.), Ближний Восток (искусственное опыление финиковых пальм, золочение изделий методом электролитического осаждения, развитые астрономические наблюдения и др.), Вавилон (изобретение позиционного принципа представления чисел, техника математических вычислений, справочник на 44 глиняных табличках, содержащий таблицы объемов геометрических тел, площадей, кубов, обратных дробей, трактат по агрономии, предсказание солнечных и лунных затмений, достижения в области медицины). Все эти факты дают нам право, говоря о возникновении науки, утверждать, что задолго до греческой цивилизации основы науки и философии уже существовали в Древнем Египте.

Наука египтян была конкретна и наглядна, и служила практическим целям. Египтяне имели довольно точный календарь (12 месяцев по 30 дней, к последнему месяцу сезона «шему» добавлялись еще 5 дней) и деление суток на 24 часа. Были составлены довольно точные каталоги звезд, карты звездного неба (одна из лучших помещена на потолке гробницы Сенмута). С эпохи Нового царства известны солнечные и водяные часы. Считается, что египтяне первыми изобрели стекло, а в искусстве бальзамирования, или мумификации, им не было равных.

До сих пор мало известно о смысле создания мумий, как человеческих, так и животных, и на эту тему существует множество спекуляций. Очевидно, из-за непонимания назначения многих ритуалов той далёкой эпохи у наших современников сложилось стойкое восприятие египтян как язычников и идолопоклонников, чем часто пользовалась любая церковь как самым веским анти-аргументом в спорах на тему достоинства цивилизации древних египтян.

Нам трудно согласиться с общепринятым мнением, что правители Египта эпохи Гермеса, возводившие такие сложные конструкции как пирамиды, создавшие основы современных наук, космологию, а также первыми провозгласившие единобожие, стали вдруг поклоняться изваяниям животных. Должен быть другой смысл в этих действиях, и, скорее всего, наше научное тщеславие не позволяет увидеть в этих странных ритуалах нечто большее, нечто, сокрытое от толпы.

Существуют истории, поясняющие, что мумии животных (Рис 19.2) служили своеобразными стражами человеческой расы, стражами, созданными методами теургии, которыми в совершенстве владели жрецы той поры.

Рисунок 19.2. Фотографии мумий животных

И снова на помощь приходит Дарио Салас, который, объясняя принцип соответствия, пишет:

«Невежественные археологи считают обожествление древними египтянами животных признаком отсталости, нравственного упадка. С нашей точки зрения это проявление древней мудрости герметизма. Ее суть заключается в следующем: божествам-животным поклонялись не люди, а остальные животные. Обожествление животных имело целью сохранение чистоты человеческой расы, ее совершенствование, предотвращение проникновения животных на человеческий уровень с помощью магических средств, посредством воплощения в гомо сапиенс. Животные, воспринимая излучения человеческого разума, частично ассимилируют энергию божественной искры, и это дает им возможность после смерти попасть на шкалу человеческих ценностей. Чаще всего такое случается с домашними животными или с животными, которые по какой-то причине находятся в постоянном контакте с людьми.

При первом перерождении в человека животное находится на очень низком уровне, обладает сильными животными инстинктами, которыми человек-животное неспособен управлять, а значит, он наносит вред обществу, легко становясь преступником или извращенцем. Такой человек вынужден повышать свой уровень постепенно на протяжении ряда перерождений. Понятно, что когда многие животные перевоплощаются в гомо сапиенс, человечество испытывает серьезный кризис, и мы наблюдаем это в настоящий момент.

Египетские жрецы, соблюдая правила ритуальной магии, приносили в жертву животное, скажем, собаку и хоронили его в тайном месте. Собаке давалось имя, жрецы в момент жертвоприношения ее провозглашали "богом собак". Так в результате специальной подготовки животное превращалось в невидимого стража, который был призван следить за тем, чтобы собаки не попадали на человеческий уровень».

После такого пояснения совершенно по иному воспринимается роман М. Булгакова "Собачье сердце", эта прекрасная иллюстрация того, как животные, попав на человеческий уровень, имея очень сильные животные инстинкты, "творили" кровавую пролетарскую революцию в России.

Математика. От теургии мы переходим к математике, которой египтяне, без преувеличения, владели великолепно. Уже в начале I династии счетчики оперировали громадными числами, язык и письменность имели особые слова и знаки для обозначения 1000, 10000, 1000000. Система счета была десятичной, но непозиционной. Египтяне знали дробные числа, число «пи»; были известны арифметические и геометрические прогрессии; в эпоху Среднего царства возникли алгебраические представления. Решались и такие сложные задачи, как определение объема усеченной пирамиды, расчет поверхности полушария и др.

В главе 7 «Эволюция систем счисления» была описана древнеегипетская десятичная (непозиционная) система счисления, и методы умножения и деления, основанные на «методе удвоения». Анализ этих методов привел нас к весьма неожиданному заключению. Эти методы являются прообразом методов умножения и деления, используемых в современных компьютерах!

Таким образом, нельзя не восхищаться гениальностью египетских математиков, которые много тысячелетий тому назад изобрели способы умножения и деления чисел, без которых нельзя построить современный компьютер!

Медицина Древнего Египта поражает своим уровнем, свидетельством тому является медицинский папирус Эберса, свиток длиной 20,5 м. Врачи были знакомы с методами лечения более 100 болезней. Характерной чертой медицины была узкая специализация врачей со времен Древнего царства. В Египте возникло учение о кровообращении. Специалистов удивляет разнообразие и совершенство найденных хирургических инструментов. Следует также помнить что Египет - это родина косметики.

Искусство Египта: - архитектура, скульптура, живопись, цветные рельефы или росписи, стало одним из важнейших особенностей древних монументальных памятников. Ярчайшее подтверждение - храмы в честь Амона-Ра в Луксоре и Карнаке, а также - поминальный храм царицы Хатшепсут близ Фив. Самыми известными являются два скульптурных портрета царицы Нефертити, жены Аменхотепа IV (Эхнатона). Оба найдены при раскопках мастерской скульптора Тутмеса в Эль-Амарне.

19.6 Феномены Древнего Египта

Пирамида Хеопса. За несколько веков до Рождества Христова существовало семь чудес света, и увидеть эти чудеса своими глазами стремились многие. Шесть из этих чудес – Колосс Родосский и Александрийский маяк на острове Фарос, сады Семирамиды в Вавилоне, статуя Зевса в Олимпии, храм Артемиды в Эфесе, Мавзолей – гробница царя Карий Мавсола – были разрушены временем. Сохранилось только одно из «чудес света» - египетские пирамиды – фантастические фигуры из камня, устремленные к Солнцу. Своими громадными размерами, совершенством геометрической формы они поражают воображение. Согласно многим описаниям, эти гигантские монолиты имели раньше совершенно иной вид, чем в наше время. Они сияли на солнце белой глазурью отполированных известняковых плит на фоне многоколонных прилегающих храмов.

В главе 1 был проведен детальный анализ геометрических соотношений Пирамиды Хеопса. Как показал этот анализ, главная геометрическая идея пирамиды состола в том, что поперечное сечение пирамиды представляло собой равнобедренный треугольник, состоящий из двух «золотых» прямоугольных треугольников. Эта архитектурная идея привела к раскрытию главной геометрической тайны Пирамиды Хеопса: отношение внешней площади приамиды к ее основанию равно знаменитой «золотой пропорции»!

Древнеегипетский календарь. Еще одно великое достижение египтян – это создание древнеегипетского календаря, который пережил многие тысячелетия и является прообразом современного календаря. Как показано в главе 4, в основу древнеегипетского календаря был положен додекаэдр, который символизировал в античной науке Гармонию Мироздания. Как известно, додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 60 плоских углов на своей поверхности. Каково же было удивление древних египтян, когда они обнаружили, что этими же числами выражаются циклы Солнечной системы, а именно, 12-летний цикл Юпитера, 30-летний цикл Сатурна и, наконец, 60-летний цикл Солнечной системы. Таким образом, между такой совершенной пространственной фигурой, как додекаэдр и Солнечной системой, существует глубокая математическая связь! Такой вывод сделали античные ученые. Это и привело к тому, что додекаэдр был принят в качестве «главной фигуры», которая символизировала гармонию Мироздания. И тогда египтяне решили, что все их главные системы (календарная система, система измерения времени, система измерения углов) должны соответствовать числовым параметрам додекаэдра! Поскольку по представлению древних движение Солнца по эклиптике имело строго круговой характер, то, выбрав 12 знаков Зодиака, дуговое расстояние между которыми равнялось ровно 30°, египтяне удивительно красиво согласовали годичное движение Солнца по эклиптике со структурой своего календарного года: один месяц соответствовал перемещению Солнца по эклиптике между двумя соседними знаками Зодиака! Более того, перемещение Солнца на один градус соответствовало одному дню в египетском календарном году! При этом эклиптика автоматически получалась разделенной на 360°. Разделив каждые сутки на две части, следуя додекаэдру, египтяне затем каждую половину суток разделили на 12 частей (12 граней додекаэдра) и тем самым ввели час – важнейшую единицу времени. Разделив один час на 60 минут (60 плоских углов на поверхности додекаэдра), египтяне таким путем ввели минуту – следующую важную единицу времени. Точно также они ввели секунду – наиболее мелкую на тот период единицу времени.

Таким образом, выбрав додекаэдр в качестве главной «гармонической» фигуры мироздания, и строго следуя его числовым характеристикам $12, 30, 60$, египтянам удалось построить чрезвычайно стройный календарь, а также системы измерения времени и угловых величин. Эти системы полностью согласовывалась с их «Теорией Гармонии», основанной на золотой пропорции, поскольку именно эта пропорция лежит в основе додекаэдра.

Панели Хеси-Ра. В начале 20-го века в Саккаре (Египет) археологи вскрыли склеп, в котором были погребены останки древнеегипетского зодчего по имени Хеси-Ра. В литературе это имя часто встречается как Хесира**.** Предполагается, что

Хеси-Ра был современником Имхотепа, жившего в период правления фараона Джосера (27-й век до н.э.), так как в склепе обнаружены печати фараона.

Из склепа наряду с различными материальными ценностями были извлечены деревянные доски-панели, покрытые великолепной резьбой, которую исполнила рука безупречного мастера. Всего в склепе помещалось 11 досок; из них сохранилось только пять, а остальные панели полностью разрушены от проникшей в склеп влаги.

На всех сохранившихся панелях изображен сам зодчий в окружении различных фигур, имеющих символическое значение (Рис. 19.3).

Долгое время назначение панелей из захоронения Хеси-Ра было неясным. Вначале египтологи приняли эти панели за ложные двери. Однако, начиная с 60-х годов 20-го века, ситуация с панелями начала проясняться. В начале 60-х годов советский архитектор И. Шевелев обратил внимание на то, что на одной из панелей жезлы, которые зодчий держит в руках, соотносятся между собой как $1:\sqrt{5}$, то есть, как малая сторона к диагонали квадрата с отношением сторон1:2 («двойной» квадрат). Именно это наблюдение стало исходной точкой для исследований другого советского архитектора И. Шмелева, который провел тщательный геометрический анализ «панелей Хеси-Ра» и в результате пришел к сенсационному открытию, описанному в брошюре «Феномен Древнего Египта» [162].

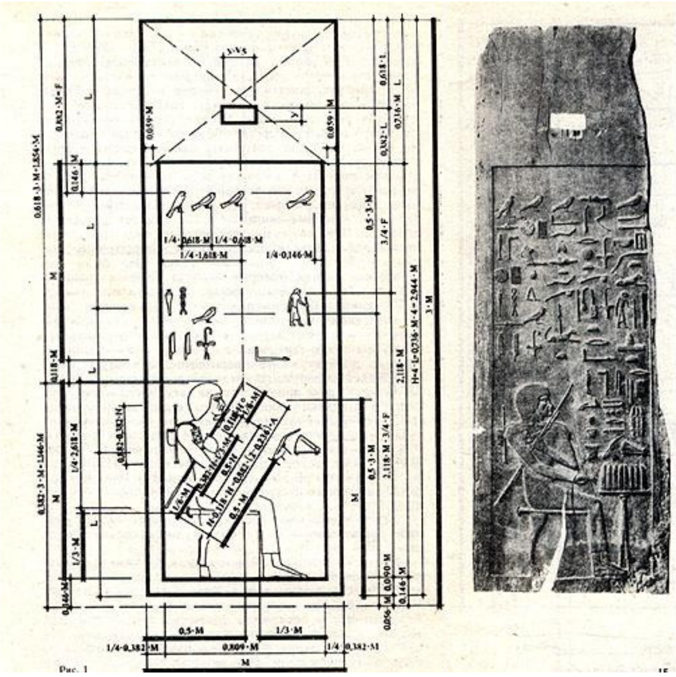


Рисунок 19.3. Панели Хеси-Ра

Предоставим теперь слово самому автору открытия:

«...Но теперь, после всестороннего и аргументированного анализа методом пропорций мы получаем достаточные основания утверждать, что панели Хеси-Ра - это система правил гармонии, кодированная языком геометрии...

Итак, в наших руках конкретные вещественные доказательства, «открытым текстом» повествующие о высочайшем уровне абстрактного мышления интеллектуалов из Древнего Египта. Автор, резавший доски, с изумительной точностью, ювелирным изяществом и виртуозной изобретательностью продемонстрировал правило ЗС (Золотого Сечения) в его широчайшем диапазоне вариаций. В результате была рождена ЗОЛОТАЯ СИМФОНИЯ, представленная ансамблем высокохудожественных произведений, не только свидетельствующих о гениальной одаренности их создателя, но и убедительно подтверждающих, что автор был посвящен в магические таинства гармонии. Этим гением был Золотых Дел Мастер по имени Хеси-Ра».

Кто же такой Хеси-Ра? Древние тесты сообщают, что Хеси-Ра был «начальник Дестиуса и начальник Бута, начальник врачей, писец фараона, жрец Гора, главный архитектор фараона, Верховный начальник десятки Юга и резчик» [162].

Анализируя перечисленные выше регалии Хеси-Ра, И. Шмелев особое внимание обращает на тот факт, что Хеси-Ра был жрецом Гора. Ведь Гор в Древнем Египте считался Богом Гармонии и, следовательно, быть жрецом Гора – значит исполнять функции хранителя гармонии.

Как вытекает из его имени, Хеси-Ра был посвящённым и "сыном" Ра (Бога Солнца). Шмелев предполагает, что этот высокий титул был дан Хеси-Ра за «разработку эстетических … принципов в системе канона, отражающего гармонические основы мироздания … Ставка на гармонический принцип открывала древнеегипетской цивилизации путь к небывалому расцвету культуры, подъем которой приходится как раз на время правления Джосера – период, когда полностью сложилась система письменных знаков. Поэтому не исключено, что пирамида Джосера стала первым экспериментальным сооружением, за которым - согласно программе, разработанной под руководством и при участии Хеси-Ра - следовало возведение цепи единого комплекса Великих пирамид в Гизе».

Свое отношение к древнегреческой цыилизации И Шемелев выражает в следующих словах [162]:

«Остается только признать, что цивилизация Древнего Египта – это суперцивилизация, которая изучена нами крайне поверхностно и требует качественно нового подхода к освоению всего ее богатейшего наследия …

Результаты исследований панелей из захоронения Хеси-Ра доказывают, что истоки современной науки и культуры находятся в необозримых пластах истории, питающих творчество мастеров наших дней великими идеями, которые издавна одухотворяли устремления выдающихся представителей человечества. И наша задача – не утратить единства связующей нити».

Гипотеза Шмелева. Как подчеркивает Шмелев [162], «предание гласит, что древние египтяне получили знание в виде системы представлений о мироустройстве от легендарного мудреца Гермеса Трисмегиста, что переводится как Гермес Триждывеличайший. Но величайшим может быть только то, что целостно, т.е. ЕДИНО. Получается, что Гермес был трижды единым? Малоубедительно. Но если вспомнить, что «закупоренность», «закрытость», т.е. «тайна» восходит к понятию «гермес», то легендарное имя обретает смысл в выражении «тайна триединства», чему в современной трактовке может соответствовать ТЕОРИЯ ГАРМОНИИ, ибо принцип триплетности, триадности составляет ядро резонансного феномена (сигнал – эхо - резонанс), который образует феноменологический базис теории гармонии. А тогда получается, что теория гармонии была разработана задолго до того, как древнеегипетская цивилизация вступила в фазу наивысшего расцвета культуры. Не исключено,что совершенное применение методологии теории гармонии было тем прочным фундаментом, на котором покоилась цивилизация золотого века, когда в основе учения древних мудрецов лежала духовная материя (безинерциальная материя Информации). Правильное владение ею давало возможность человеку гармонично развиваться в едином потоке законов Природы...

Вероятно, сознавая важность теории гармонии, иерофанты Древнего Египта приняли решение зашифровать ее математические аспекты средствами геометрии для сохранения и передачи знания грядущим поколениям, что было блестяще исполнено гением Хеси-Ра»

Таким образом, согласно Шмелеву герметическая философия тесно связана с «теорией гармонии». Согласно Шмелеву, «египетская теория гармонии», представляла собой «систему правил гармонии», созданных великим египетским зодчим Хеси-Ра и воплощенных им в «панелях Хеси-Ра» [162].

19.7. «Космическое религиозное чувство» Альберта Эйнштейна, Макса Планка и Владимира Вернадского

. Говоря о сближении религиозного и научного мировоззрений, необходимо отметить отношение к религии многих известных ученых, включая Альберта Эйнштейна, Макса Планка и Владимира Вернадского**.** Их объединяет осознание единства человека с природой, ощущение наличия вселенского разума и восприятие гармонии мира. Альберт Эйнштейн назвал это «космическим религиозным чувством». Он утверждал:

«В наш материалистический век серьезными учеными могут быть только глубоко религиозные люди. Я не могу найти слова лучше, чем религия, для обозначения веры в рациональную природу реальности».

Однако, на вопрос: «Верите ли вы в Бога?» Эйнштейн отвечал:

«Я верю в Бога Спинозы, который проявляет себя в упорядоченной гармонии сущего, но не в Бога, который интересуется судьбами и поступками человеческих существ». Можно сказать, что он верил в Гармонию Мира и Космический Разум».

Малоизвестным остается следующее высказывание Альберта Эйнштейна:

“Весь мир преклоняется передо мной, а я преклоняюсь перед Учителем Петром Дыновым из Болгарии”.

Заметим, что Петр Дынов считается одним из великих учителей XX века, последователем герметической традиции.

Идеи Макса Планка. В этой связи уместно также упомянуть о лекции «Религия и естествознание» [160], прочитанной Максом Планком в мае 1937 года в Дерптском (Тартуском) университете. Анализируя взаимосвязь религии и естествознания, Планк заключает:

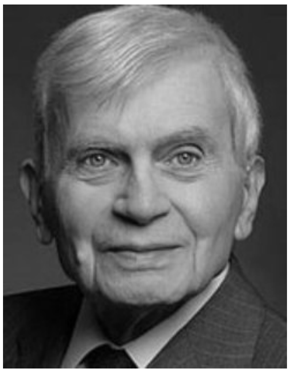
«Куда ни кинь взгляд, мы никогда не встретим противоречия между религией и естествознанием, а, напротив, обнаруживаем полное согласие как раз в решающих моментах. Религия и естествознание не исключают друг друга, как кое-кто ныне думает или опасается, а дополняют и обуславливают друг друга. Самым непосредственным доказательством совместимости религии и естествознания, даже при самом критическом взгляде на вещи, вероятно, является тот исторический факт, что глубокой религиозностью были проникнуты как раз самые великие естествоиспытатели всех времен — Кеплер, Ньютон, Лейбниц. В начале нашей культурной эпохи занятия естественными науками и религией находились в одних и тех же руках. Старейшей прикладной естественной наукой — медициной — занимались жрецы, а местом проведения научных исследований в средние века главным образом являлись монашеские кельи. Позже, по мере детализации и разветвления культуры, пути науки и религии стали постепенно расходиться в соответствии с различием задач, которым они служили. Ибо насколько знания и умения нельзя заменить мировоззренческими убеждениями, настолько нельзя выработать правильное отношение к нравственным проблемам на основе чисто рационального познания. Однако, оба эти пути не расходятся, а идут параллельно, встречаясь в бесконечности у одной и той же цели».

Мнение Джеральда Шройдера. Известный физик-ядерщик и биолог, один из современных учёных сторонников идеи творения Джеральд Шройдер, пишет в своей книге «Скрытое Лицо Бога» [161]:

«Единое сознание, универсальная мудрость пронизывает всю Вселенную. Открытия науки, изучающие квантовый характер податомной материи, приблизили нас к краю потрясающей реализации: все сущее – выражение этой мудрости. В лабораториях мы испытываем это как информацию, которая сначала физически сформировалась как энергия, а затем уплотнилась в форму материи. Каждая частица, каждое существо, от атома до человека, представляется уровнем информации, или мудрости. Научное исследование функционирования клетки и податомной частицы материи бесспорно доказывает тот факт, что жизнь и вселенная были созданы из ничего в соответствии с желанием реальности, обладающей непревзойдённым разумом и мудростью».

В этой связи уместно еще раз упомянуть об эсприментальном доказательстве проявления «золотого сечения» в квантовом мире [131]. Это - результат многолетних исследований, выполненных немецуими и британскими физиками в 2010 г. Исследователи заметили, что цепочки атомов вещества, которое подвергалось эксперименту, действуют подобно нано-гитаре, генерирующей колебания различных тонов. При этом первые два тона находились в отношении «золотой пропорции»! Это открытие дало основание ведущим физикам высказать предположение, что на самом деле в основе квантового мира лежит совершенный порядок, гармония, основанная на "золотом сечении".

Научное открытие Бога. В завершение этой главы расскажем о научных исследованиях в области квантовой физики, выполненные французским физиком–теоретиком Бернаром д'Эспаньят. В результате этих исследований ученый пришел к выводу, что Вечный и Безначальный Бог существует. Автор счел необходимым дать краткое описание этого открытия, основываясь на информации, выставленной на Интернете http://kavkaz.forum2x2.ru/t1494-topic



Бернар д'Эспаньят

За свое открытие Бернар д'Эспаньят удостоен самой крупной ежегодной научной премии - Премии Фонда Темплетона. В своих трудах 87-летний ученый подробно изучает точки соприкосновения классической и квантовой моделей мира и объясняет несоответствия дуальной системы мироустройства.

Бернар д'Эспаньят стоял у самых истоков квантовой физики, когда это направление только начинало формироваться. В 1951-52 гг. он работал в научной лаборатории Энрико Ферми в Чикаго, а в 1953-54 гг. – участвовал в исследовательском проекте Копенгагенского института под руководством Нильса Бора. Кроме того, ученый почти 30 лет возглавлял Научный факультет Сорбонского университета.

К заслугам д'Эспаньята можно отнести экспериментальные доказательства квантовых Теорем Белла, сформулированных великим ирландским физиком в середине 1960-х гг., а также активное участие в создании международных организаций, занимающихся моральным и этическим аудитом научной деятельности.

Награждая д'Эспаньят главным призом, Фонд имени Джона Темплетона отметил заслуги ученого в популяризации науки и в разрешении сложных вопросов взаимосвязи классической модели мира и квантовой физики.

Официальный пресс-релиз фонда, посвященный объявлению лауреата, без прикрас называет д'Эспаньят тем человеком, чья способность описать квантовый мир позволила современной науке добиться сегодняшних свершений. Именно его открытие в начале 1980-ых «нелокального квантового спутывания», легло в основу всей квантовой системы вычислений и послужило первоосновой теории о «квантовых компьютерах».

Главная философская доктрина, которая и удостоилась внимания фонда Темплетона, заключается в концепции «гиперкосмического Бога» — незримого царства вне пространства и времени, которая, несмотря на свою нематериальность, может быть постигнуто человеческим разумом. При этом познание не может быть абсолютным, и за пределами научных горизонтов всегда будет оставаться «завуалированный мир».

Фактически д'Эспаньят пришёл к выводу, что Вселенная не может существовать без некоторого разумного Начала. Другими словами, чтобы Вселенная возникла и продолжала существовать, необходимо, чтобы некий Разум, существующий вне времени и пространства, постоянно давал форму энергии и материи, то есть, творил «чертежи» Вселенной.

Д'Эспаньят объясняет, что некоторые процессы квантовой физики, которые не могут быть описаны категориями науки, прекрасно вписываются в концепцию «гиперкосмического Бога». По теории французского физика присутствие этого Начала (или, как его еще называют, Независимой Реальности) будет вечным, как бы близко человек не подбирался к разгадкам мироздания. Фактически, д'Эспаньят с одной стороны провозглашает бесконечность научного процесса, а с другой – указывает на его тщетность.

«Плюрализм (многообразие) мнений никогда не может дать представление об окончательной истине, — писал д'Эспаньят в 1979 году в своей книге «Квантовая теория и реальность». — Это всего лишь форма нашего самовыражения для постижения деталей”.

Справка: Премия фонда Джона Темплетона была основана в 1972 году по инициативе миллионера и филантропа сэра Темплетона. Семейство Темплетонов является одним из влиятельнейших и богатейших пресвитериан в мире. До 2001 года приз назывался “За достижения в религии”, но с 2002 был переименован и теперь носит название “За достижения в исследованиях и открытиях духовной реальности”. Размер премии на сегодняшний день составляет 1,6 млн. долларов, что делает этот приз самым крупным ежегодным денежным вознаграждением. Основными лауреатами приза Темплетона являются представители интеллигенции, которые сделали неоценимый вклад в понимание духовной реальности посредством своих открытий и исследований. По сложившейся традиции вручение этой премии происходит в Букингемском дворце лично принцем Филиппом. Первой в 1973 году приз Темплетона получила Мать Тереза. Также лауреатами премии становились евангелист Билли Грэм (1982г.), писатель Александр Солженицын (1983г.) физик-теоретик Фримен Дайсон (2000г.).

Комментарии к главе 19:

1. Современная наука не в состоянии дать ответы на многие загадки мира (тайна возникновении Вселенной, тайна рождения и смерти, тайна возникновения разума, тайна генетического кода, тайна филлотаксиса, тайна физического вакуума и др.). И вряд ли удастся получить ответ на эти вопросы в рамках «материалистического научного мировоззрения». Для ответа на эти вопросы необходимо объединение научного и религиозного мировоззрений и возвращение к истокам науки, в частности, к «Герметической Философии» Древнего Египта и возрождение «Доктрины о числовой гармонии Мироздания» древних греков.
2. «Герметическая Философия», возникшая в Древнем Египте, оказала огромное влияние на развитие всех наук и религий. Ее 7 Великих Принципов - Принцип Разума, Принцип Соответствия (Аналогии), Принцип Вибрации, Принцип Полярности, Принцип Ритма, Принцип Причины и Следствия, Принцип Зарождения – стали основой науки.
3. Современный научный мир демонстрирует сильное отставание от понимания целостности и гармонии, как это было присуще науке в начале её зарождения. Дарио Салас Соммэр метко заметил что «Наука без Морали – проклятие нашей цивилизации» [155]. Без осмысления понятия Гармонии, без осознания последствий научной открытий у нашей цивилизации очень тревожное будущее. И атомная катастрофа в Японии, вызванная землетрясением 11 марта 2011 года, лишь грустное тому подтверждение.
4. Египетские пирамиды, календарь, герметическая философия, достижения в области математики и медицины, портрет Нефертити, панели Хеси-Ра – все это неоспоримые исторические свидетельства, которые дают основание утверждать, что «цивилизация Древнего Египта – это суперцивилизация,

которая изучена нами крайне поверхностно и требует качественно нового подхода к освоению всего ее богатейшего наследия… Результаты исследований панелей из захоронения Хеси-Ра доказывают, что истоки современной науки и культуры находятся в необозримых пластах истории, питающих творчество мастеров наших дней великими идеями, которые издавна одухотворяли устремления выдающихся представителей человечества. И наша задача – не утратить единства связующей нити» (Игорь Шмелев).

Эпилог

Дифференциация современной науки и ее разделение на отдельные сферы не позволяют зачастую увидеть общую картину науки и основные тенденции ее развития. Однако, в науке существуют исследовательские объекты, которые объединяют разрозненные научные факты в единое целое. К разряду таких объектов можно отнести Платоновы тела и золотое сечение. Древние греки возвысили их до уровня «главных выразителей гармонии Мироздания». На протяжении веков или даже тысячелетий, начиная с Пифагора, Платона, Евклида, эти геометрические объекты были предметом восхищения и поклонения выдающихся умов человечества - в эпоху Возрождения - Леонардо да Винчи, Луки Пачоли, Иоганна Кеплера, в 19 веке - Цейзинга, Люка, Бине, Клейна. В 20-м веке интерес к этим математическим объектам значительно возрос в математике, благодаря исследованиям советского математика Николая Воробьева и американского математика Вернера Хоггатта, с работ которых начинается процесс «гармонизации математики». Развитие этого направления привело к созданию «математики гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки [47].

Новейшие открытия в различных областях современной науки, основанные на Платоновых телах, золотом сечении, числах Фибоначчи, и новые научные результататы, полученные в рамках «математики гармонии» (квази-кристаллы, фуллерены, новая геометрическая теория филлотаксиса, "золотые" геноматрицы, общая теория гиперболических функций и решение 10-й и 4-й проблем Гильберта, алгоритмическая теория измерения, коды Фибоначчи и золотой пропорции, "золотая" теория чисел, микропроцессоры Фибоначчи, преобразования Фибоначчи-Лоренца, "золотая" интерпретация специальной теории относительности и эволюции Вселенной, и так далее) создают общую картину движения современной науки к "золотой" научной революции, что является одной из характерных тенденций в развитии современной науки.

Отметим наиболее важные выводы, вытекающие из настоящего исследования:

1. **Первый вывод** касается самого понятия «гармония». Широкое проявление «золотого сечения» и чисел Фибоначчи в природных объектах (явление филлотаксиса, «золотые» спирали, пентагональная симметрия и др.), а также современные научные открытия в различных областях естествознания, в частности, в химии (фуллерены, фибоначчиева закономерность в Периодической таблице Д.И. Менделеева), кристаллографии (квазикристаллы), ботаники («геометрия Боднара»), генетики (симметрические свойства генетического кода и «золотые» геноматрицы), квантовой физики (симметрия квантового мира, основанная на «золотом сечении») и других областях дают основание сделать вывод о том, что гармония объективна, она существует независимо от нашего сознания и выражается в гармоничном устройстве всего сущего, начиная с космоса и заканчивая микромиром. Но если «гармония» объективна, она должна стать предметом математического исследования, что и является главной задачей настоящей книги.

2. **Второй вывод** касается вопроса о фундаментальной роли «идеи гармонии» в процессе создания и развития математики. Согласно «гипотезе Прокла», величайшее математическое сочинение античной эпохи – «Начала» Евклида – создавалось под непосредственным влиянием «гармонических» идей Пифагора и Платона. Главная цель, которую ставил Евклид в своих «Началах» - создание завершенной геометрической теории Платоновых тел (Книга XIII), которые ассоциировались в античной науке с числовой гармонией Мироздания. Мы утверждаем, что, начиная с древнегреческого периода, два математических направления – «Классическая Математика» и «Математика Гармонии» - начали развиваться параллельно и независимо друг от друга. Оба эти направления возникли из одного и того же источника

– «Начал» Евклида. При этом «Классическая Математика» позаимствовала в «Началах» геометрические аксиомы, начала алгебры, элементарную теорию чисел, теорию иррациональностей, и другие математические достижения древнегреческой математики, а «Математика Гармонии» позаимствовала в «Началах», прежде всего, «задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (Предложение II.11), названную позже «золотым сечением», и геометрическую теорию «правильных многограников» (Книга XIII), называемых «Платоновыми телами». В настоящее время протекает процесс «гармонизации математики», то есть, возврат к тем идеям («математизация гармонии»), которые были использованы древнегреческими математики при создании первого в истории науки «математического учения о природе» [51]; важной вехой в этом процессе стало написание «Начал» Евклида.

3. **Третий вывод** касается места, которое занимает «математика гармонии» в системе математических дисциплин. Ответ на этот вопрос дан академиком Юрием Митропольским в своем отзыве [82]: «Мне представляется, что в последние столетия, как выразился когда-то Н.И. Лобачевский, «математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою». В результате между «элементарной математикой», лежащей в основе современного математического образования, и «высшей математикой» образовался разрыв. И этот разрыв, как мне кажется, и заполняет «Математика Гармонии» .... То есть, «Математика Гармонии» — это большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «Математики Гармонии» для математического образования». Из высказывания Митропольского вытекает, что «математика гармонии» имеет непосредственное отношение к таким древнейшим математическим теориям как «теория измерения» и «элементарная теория чисел».

4. **Четвертый вывод** касается связи «математики гармонии» с «теорией измерения». Как известно, «теория измерения» начала развиваться в математике после открытия «несоизмеримых отрезков» на основе так называемого «метода исчерпывания» Евдокса, с помошью которого удалось преодолеть первый кризис в основаниях математики, связанный с открытием «несоизмеримости». Этот метод был положен в основу «аксиомы Евдокса-Архимеда», называемой также «аксиомой измерения», одной из важнейших в системе «аксиом непрерывности». Во второй половине 19 в. в состав «аксиом непрерывности» была включена «аксиома Кантора». С помощью «аксиомы Евдокса-Архимеда» и «аксиомы Кантора» удалось, как казалось, завершить создание «теории измерения». Однако, радость оказалась преждевременной. Камнем преткновения оказалась «аксима Кантора». После обнаружения парадоксов в канторовской теории множеств возникли большие сомнения в правомерности использования этой аксиомы в математике, поскольку в ее основе лежит абстракция «актуальной бесконечности», что, согласно Аристотелю, недопустимо в математике. В основу новой математической теории измерения, названной «алгоритмической теорией измерения» [9], был положен подход, принятый в конструктивной математике, которая исключает использование абстракции «актуальной бесконечности» как внутренне противоречивого понятия и принимает за основу абстракцию «потенциальной бесконечности». В рамках «алгоритмической теории измерения» [9] начала решаться задача, которая до этого никогда не решалась в математике – задача синтеза «оптимальных алгоритмов измерения». С использованием конструктивной идеи «потенциальной осуществимости» и «принципа асимметрии измерения» в рамках «алгоритмической теории измерения» удалось получить ряд неожиданных математических результатов, в частности, синтезировать новый класс оптимальных алгоритмов измерения, основанных на p-числах Фибоначчи и названных «фибоначчиевыми алгоритмами измерения». Установлен изоморфизм между алгоритмами

измерения и системами счисления, что привело к открытию новых позиционных систем счисления, названных p-кодами Фибоначчи, которые непосредственно вытекают из «фибоначчиевых алгоритмов измерения.

5. **Пятый вывод** касается еще одной древней математической теории – «элементарной теории чисел». В этой части новыми математическими результатами являются: p-числа Фибоначчи как новый класс рекуррентных числовых последовательностей, вытекающих из треугольника Паскаля («диагональные суммы» треугольника Паскаля) [9,102], а также «система счисления с иррациональным основанием («золотая пропорция»), предложенная в 1957 г. юным американским математиком Джорджем Бергманом [80], и «коды золотой p-пропорции, предложенные автором настоящей книги в 1980 г. [79]. Эти две новые двоичные позиционные системы счисления переворачивают наши представления о системах счисления. Специальный класс иррациональных чисел, включающий в себя классическую «золотую пропорцию» и ее обобщение - «золотые p-пропорции» - используются в качестве оснований новых систем счисления. Эти системы счисления лежат в основе «золотой» теории чисел [81]. В рамках «золотой» теории чисел обнаружены новые свойства натуральных чисел (Z-свойство , F-код, L-код и др.). Все указанные выше математические результаты должны быть включены в «элементарную теорию чисел».

6. **Шестой вывод** касается связи «математики гармонии» с гиперболической геометрией и ботаническим явлением филлотаксиса. Одним из неожиданных математических результатов, полученных в рамках «математики гармонии», являются гиперболические функции Фибоначчи и Люка (Стахов, Ткаченко, Розин [57,58]), основанные на так называемых «формулах Бине» для чисел Фибоначчи и Люка. Эти функции являются обобщением «формул Бине» на непрерывную область, а их теория является расширением «теории чисел Фибоначчи и Люка» [1 - 4] на непрерывную область. С введением гиперболических функций Фибоначчи и Люка

классическая «теория чисел Фибоначчи и Люка» как бы «вырождаеся», так как все тождества для чисел Фибоначчи и Люка могут быть легко получены из соответствующих тождеств для гиперболических функций Фибоначчи и Люка с помощью элементарных формул, связывающих эти функции с числами Фибоначчи и Люка. В работах Олега Боднара [24] показано, что именно гиперболические функции Фибоначчи и Люка лежат в основе ботанического явления филлотаксиса, известного со времен Иоганна Кеплера. Используя эти функции, Боднар создал новую геометрическую теорию филлотаксиса, имеющую отношение к огромному количеству ботанических и биологических объектов (сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и цветной капусты, корзинки цветов и т.д.). «Геометрия Боднара» является новым типом геометрии Лобачевского. С ее помощью удалось раскрыть «тайну филлотаксиса», то есть, установить, как в процессе роста филлотаксисного объекта происходит изменение его «динамической симметрии», которая выражается в изменении структуры «фибоначчиевых спиралей» на поверхности филлотаксисного объекта. «Геометрия Боднара» свидетельствует о том, что «мир филлотаксиса» является гиперболическим миром, основанным на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка. Эти функции не являются «выдумкой» математиков, они являются «естественными функциями», которые используются в природных объектах в течение миллионов, а может и миллиардов лет задолго до возникновения человека. Именно поэтому, согласно Фурье [51], гиперболические функции Фибоначчи и Люка [57,58] вместе с «геометрией Боднара» [24] могут быть отнесены к разряду фундаментальных научных открытий и в таком качестве им суждено сохраниться в науке.

7. **Седьмой вывод** касается обобщений теории золотого сечения, предложенных и развиваемых в рамках «математики гармонии». В этом направлении основополагающую роль играют идеи армянского философа и физика Гранта Аракеляна, изложенные в выдающейся статье «О мировой

гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях» [108]. Главная идея Аракеляна состоит в том, что всякая теория, претендующая на обобщение «классической теории золотого сечения» или «классической теории чисел Фибоначчи» [1 - 4], должна удовлетворять некоторым «родовым признакам», объединяющим классическую теорию с ее обобщением. С этой точки зрения, наиболее интересными обобщенными теориями золотого сечения и чисел Фибоначчи, развиваемыми в рамках «математики гармонии» [49], являются две математические теории. Первая из них, развитая в работах [9,10,12,78,79,81] – это «теория p-чисел Фибоначчи и золотых p-сечений» ($p = 0,1,2,3,...$ - заданное целое неотрицательное число); вторая – это «теория λ-чисел Фибоначчи и «металлических пропорций» ($\lambda > 0$ - заданное действительное число), развиваемая в работах [29,30,33,34,62-67]. Эти обобщенные теории золотого сечения обладают ярко выраженными «родовыми признаками», характерными как для классических чисел Фибоначчи, так и для классической золотой пропорции. Для p-чисел Фибоначчи таким «родовым признаком» является треугольник Паскаля, «диагональные суммы» которого совпадают с p-числами Фибоначчи; «родовым признаком» для «золотых p-пропорций» является формула Кеплера (предел отношения соседних чисел Фибоначчи стремится к классической «золотой пропорции», в то время как предел отношения соседних p-чисел Фибоначчи стремится к «золотой p-пропорции). Для λ-чисел Фибоначчи таким «родовым признаком» является «формула Кассини», которая справедлива как для классических чисел Фибоначи, так и для λ-чисел Фибоначчи; наконец, «родовым признаком» для «металлических пропорций» является установленное Грантом Аракеляном «правило сохранения мантисс».

8. **Восьмой вывод** касается связи «математики гармонии» с «проблемами Гильберта», в частности, с 10-й и 4-й проблемами Гильберта. Как известно, 10-я проблема Гильберта решена в 1970 г. молодым советским математиком

Юрием Матиясевичем. В работах Матиясевича неоднократно подчеркивается, что решение этой проблемы было получено с использованием новейших результатов в области «теории чисел Фибоначчи», опубликованных выдающимся советским математиком Николаем Воробьевым в 3-м издании его замечательной книги «Числа Фибоначчи» (1969). 10-я проблема Гильберта решена Алексеем Стаховым и Самуилом Арансоном в первой декаде 21-го столетия. Косвенным подтверждением признания этого математичесого результата мировой математической общественностью является его публикация в трех первых номерах международного журнала «Applied Mathematics” [68 - 70]. Это решение основано на использовании так называемых «гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка», введенных Алексеем Стаховым в 2006 г. [66].

9. **Девятый вывод** касаеся новой научной задачи, которую «математика гармонии» ставит перед теоретическим естествознанием. Эта задача непосредственно вытекает из «геометрии Боднара» [24], теории «гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка» [66] и решения 4-й проблемы Гильберта [68 - 70]. «Геометрия Боднара» показала, что «мир филлотаксиса», одного из самых удивительных явлений ботаники, является «гиперболическим миром», основанным на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка, основанием которых является классическая «золотая пропорция» [57,58]. Таким образом, в ботаническом явлении филлотаксиса «гиперболичность» проявляет себя в «золоте». Эта гипотеза, выдвинутая Боднаром, оказалась весьма плодотворной и привела к созданию новой геометрической теории филлотаксиса, имеющей междисциплинарное значение [24]. Однако, гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются частным случаем гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка [66]. Последние основываются на «металлических пропорциях», в частности, на «серебряной», «бронзовой», «медной» и другим видам «металлических пропорций». В этой связи из упомянутых выше математических результатов вытекает следующая фундаментальная задача,

которая может быть поставлена перед теоретическим естествознанием. Можно высказать предположение, что и другие типы гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, основанных на «металлических пропорциях» [66] и лежащих в основе решения 4-й проблемы Гильберта [68 - 70], могут стать основой для моделирования новых «гиперболических миров», которые могут реально существовать в природе, но которые наука до сих пор не обнаружила, потому что современной науке были неизвестны гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка, и перед ней никто не ставил такой задачи. Основываясь на блестящем успехе «геометрии Боднара» [24] и решении 4-й проблемы Гильберта, мы можем поставить перед теоретической физикой, химией, кристаллографией, ботаникой, биологией и другими разделами теоретического естествознания задачу поиска новых «гиперболических миров» природы, основанных на гиперболических λ-функциях Фибоначчи и Люка. Вполне возможно, что на роль первой из таких функций, которые могут привести к открытию нового «гиперболического мира природы», могут претендовать «серебряные» гиперболические функции [103], основанием которых является новая математическая константа – «серебряная» пропорция $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$, порождаемая «реликтовым числом» $\sqrt{2}$, широко используемым в моделях теоретического естествознания. По мнению Александра Татаренко [62] введение «серебряной» пропорции» $\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$ в современную науку является «важнейшим научным прорывом на пути к Истине о Гармонии Мира, сравнимым со сменой птолемеевского геоцентризма на гелиосистему Коперника».

10. **Десятый вывод** касается красоты и эстетики «математики гармонии». Все математические объекты «математики гармонии», начиная с классического «золотого сечения», чисел Фибоначчи и основанных на них геометрических фигур (пентаграмма, «золотой» прямоугольник, «золотая» спираль, «золотые» треугольники и т.д.) и заканчивая новейшими математическими

результатами в этой области (p -числа Фибоначчи, золотые p -сечения, λ-числа Фибоначчи, «металлические пропорции», гиперболические функции Фибоначчи и Люка и их обобщения - гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка) обладают красотой и эстетическим совершенством. И к ним применимы «эстетческие принципы Хатчесона» и «принцип математической красоты Дирака» и это является основанием утверждать, что математические объекты «математики гармонии» могут быть широко использованы в теоретическом естествознании для создания моделей природных объектов и структур.

11. **Одинадцатый вывод** касается роли «математики гармонии» в развитии информатики и вычислительной техники, основанной на классической двоичной системе счисления. Как подчеркивает выдающийся российский эксперт в области компьютерной техники академик Ярослав Хетагуров, использование современных микропроцессоров, обладающих низкой информационной надежностью, является своеобразным «троянским конем», который может привести к непредсказуемым последствиям в ряде приложений современных микропроцессоров. Одной из таких областей является ракетная и космическая техника, в которой уже произошло ряд катастроф, вызванных сбоями в цифровой системе управления ракетами [83,84]. Таким образом, из вышеизложенных фактов вытекает далеко не оптимистичный вывод. Человечество становится заложником классической двоичной системы счисления, которая лежит в основе современных микропроцессоров и информационных технологий. Поэтому дальнейшее развитие микропроцессорной техники и основанной на ней информационной технологии, использующей двоичную систему счисления, следует признать неприемлемым направлением для определенных сфер приложений. Двоичная система не может служить информационной и арифметической основой специализированных компьютерных и измерительных систем (космос, управление транспортом и сложными технологическими объектами), а также наноэлектроннных систем, где

проблемы надежности, помехоустойчивости, контролеспособности, стабильности, живучести систем выходят на передний план. «Математика гармонии» предлагает очень изящное решение проблемы, которая неожиданно остро проявила себя в нкоторых важных приложениях современных компьютеров и уже стала национальной проблемой ряда стран (Россия и США). Суть этого решения состоит в использовании кодов Фибоначчи и золотой пропорции как новых избыточных систем счисления, являющихся альтернативой классической двоичной системе счисления. Эти новые системы счисления являются «двоичными», то есть, используют для представления числовой информации двоичный алфавит $\{0,1\}$. Они сохраняют все известные преимущества классической двоичной системы счисления, но при этом обладают относительной кодовой избыточностью, равной $0.44(44\%)$, что позволяет создавать микропроцессоры Фибоначчи для помехоустойчивых вычислений [85]. Коэффициент обнаружения ошибок в таких микропроцессорах превышает 99% и по мере увеличения разрядности может достичь 99.9% и выше. После публикации книги [47] интерес к этим идеям в мировом компьютерном сообществе значительно возрос. В этой связи представляет огромный технический интерес счетное устройство на основе кода Фибоначчи, разработанное в 2012 г. Алексеем Борисенко и Алексеем Стаховым [86]. Это счетное устройство в настоящее время находится в стадии патентования под названием «Помехоустойчивый счетчик импульсов Борисенко-Стахова». По существу, это техническое устройство может стать началом новой элементной базы помехоустойчивых микропроцессоров и микроконтроллеров и открывает новые пути в развитии компьютерной техники. Существуют удивительные аналогии между кодом Фибоначчи и генетическим кодом, что выделяет коды Фибоначчи и золотой пропорции как особый тип позиционных систем счисления, в которых реализуются природные принципы введения избыточности в информационные системы. Эти новые системы счисления являются предпосылкой для «золотой» компьютерной революции.

12. **Двенадцатый вывод** касается связи «математики гармонии» с современным образованием. «Математика гармонии» является междисциплинарной дисциплиной и содержит в себе все необходимые компоненты, чтобы стать связующим звеном всех дисциплин, составляющих основу современного образования: математики, физики, химии, ботаники, биологии, медицины, геологии, информатики, искусства. При этом изучение математики, которая, как правило, не вызывает особого интереса у большинства учащихся и кажется им «сухой» и скучной дисциплиной, превращается в увлекательный поиск математических закономерностей природы. Введение идей гармонии и золотого сечения в современное образование является актуальной проблемой, так как может привести к формированию у учащихся нового научного мировоззрения, основанного на идеях гармонии и «золотого сечения».

13. **Тринадцатый вывод** касается роли, которую «математика гармонии» может сыграть в преодолении «стратегических ошибок» и современного кризиса в развитии математики [71]. В процессе развития математики было допущено ряд «стратегических ошибок». Как считает Морис Клайн [51], главной из них является отход математики от теоретического естествознания. Но были и другие «стратегические ошибки», которые обсуждаются в статье [71]. К ним относятся: пренебрежение «началами», пренебрежительное отношение к «идее гармонии» и «золотого сечения», игнорирование «гиптезы Прокла», касающейся влияния «гармонических идей Пифагора и Платона» на создание «Начал» Евклида и происхождение математики, недооценка «формул Бине», что не позволило математикам своевременно прийти к открытию нового класса гиперболических функций, основанных на «золотой пропорции» [57,58], пренебрежение икосаэдрической идеей Феликса Клейна [75], наконец, недооценка «системы счисления Бергмана» [80], которая переворачивает наши взгляды на системы счисления. Кроме того, крупной «стратегической ошибкой» математиков 19 в. можно считать переоценку канторовской теории

множеств, несмотря на негативные оценки этой теории со стороны некоторых современников Кантора (Кронекера, Пуанкаре и др.). К сожалению, сбылся прогоноз Анри Пуанкаре о том что «грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились». Заключительная глава книги Мориса Клайна [51] называется «Авторитет природы». В этой главе Клайн ссылается на мнения выдаюшихся математиков, которые подчеркивают роль Природы и теоретического естествознания в развитии математики. В частности, один из выдающихся специалистов по основаниям математики поляк Анджей Мостовский утверждает, что «математика – естественная наука. Ее понятия и методы восходят к опыту, и любые попытки обосновать математику безотносительно к ее естественнонаучному происхождению, приложениям и даже истории обречены на провал». Такой же точки зрения придерживается Герман Вейль, который «открыто выступает за то, чтобы рассматривать математику как одну из естественных наук». Но ведь «математика гармонии» является математической дисциплиной, которая, по сути, является своеобразной «математикой природы». Главная цель «математики гармонии» - поиски новых математических констант, рекуррентных соотношений и алгебраических уравнений, которые могут быть использованы для моделирования «гармоничесих» структур и явлений природы. Именно поэтому сближение «математики гармонии» с «классической математикой» будет способствовать как преодолению «стратегических ошибок» в развитии математики, так и ее сближению с теоретическим естествознанием.

14. **Четырнадцатый вывод** касается ответа на вопрос: является ли «математика гармонии» «золотой» парадигмой современной науки? Наиболее четко суть «золотой» парадигмы древних греков сформулирована в известном высказвании Алексея Лосева: «С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического

деления - золотого сечения». Интерес к «золотой» парадигме древних греков возрастал в периоды наивысшего расцвета человеческой культуры, в частности, в древнегреческую эпоху и эпоху Возрождения. Но наивысший всплеск интереса к этой парадигме наблюдается во второй половине 20 в. и начале 21 в., когда создаются профессиональные группы, направленные на изучение этой проблемы. Наиболее известными из них являются Американская Фибоначчи-Ассоциация (1963), Славянская «Золотая Группа (1992), Международный Клуб Золотого Сечения (2003). В этот период начинают проводиться международные форумы по этой проблеме. Наиболее известные из них – Международные конференции по числам Фибоначчи и их приложениям, которые регулярно (один раз в 2 года) проводятся Фибоначчи-Ассоциацией в различных странах, начиная с 1984 г. С 1992 г. по 1996 г. в Киеве (1992, 1993), а затем в Ставрополе (1994-1996) были проведены Международные Семинары на тему «Золотая Пропорция и Проблемы Гармонии Систем», в 2003 г. в украинском городе Винница был проведена Международная конференция «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве", а в 2010 г. в украинском городе Одесса был проведен Международный Конгресс по Математике Гармонии. Все это свидетельствует об огромном интересе современного научного сообщества к этой проблематике. Наблюдается процесс «гармонизации современного теоретического естествознания», который сопровождается процессом «гармонизации современной математики». Поэтому создание нового междисциплинарного направления – «математики гармонии» [47] - стало естественным и логическим отражением одной из важнейших тенденций современной науки – возрождение в современной науке «золотой» парадигмы древних греков, которая воплощена Евклидом в своих «Началах» - величайшем математическом сочинении античной эпохи.

15. **Пятнадцатый вывод** касается «тайны Гармонии Мироздания» как одной из величайших загадок природы. Современная наука не в состоянии дать ответ не только на вопросы о тайне возникновения мира, тайне рождения и

смерти, тайне возникновения Разума, но также на вопросы о тайне генетического кода и загадке ботанического явления филлотаксиса, которым присущи высокие гармонические и симметрические свойства и которые являются объектами активного изучения в современной «материалистической науке». Выдающиеся научные достижения в этих областях науки (Сергей Петухов [44] и Олег Боднар [24]) ставят очень много новых вопросов, касающихся «тайны Гармонии Мироздания». Выдающийся российский ученый доктор физико-математических наук и кандидат биологических наук Сергей Петухов, посвятивший много лет исследованиям в области генетического кодирования и опубликовавший много работ в этой облпсти, пришел к следующему заключению [44]: «Современной науке не известны причины того, почему алфавит генетического языка именно четырехбуквенный (а не из тридцати букв, например); почему из миллиардов возможных химических соединений именно эти четыре азотистые основания C, A, G, U(T) выбраны в качестве элементов алфавита; почему генетически кодируются именно 20 аминокислот и т.д.». Для ответа на этот вопрос и другие вопросы, поставленные Петуховым, в частности, на вопрос об удивительно симметрическом характере уникальной октетной матрицы генетического кода, мы неизбежно вынуждены обращаться к идее «Творца» или «Всемирного Разума». К этому же выводу мы приходим при анализе новой геометрической теории филлотаксиса, созданной талантливым украинским исследователем доктором искусствоведения Олегом Боднаром [24]. «Геометрия Боднара» поставила перед наукой много новых вопросов, в частности такой. Если «природа» на самом деле действует по тому сценарию, который предложил Олег Боднар, то тогда мы должны признать, что «природа» является прекрасным математиком; она знает и использует в своих объектах «гиперболические функции Фибоначчи и Люка» [57,58] уже в течение миллионов или даже миллиардов лет. И для объяснения этого феномена мы опять приходим к идее «Творца» или «Всемирного Разума». В этой связи уместно напомнить о «космическом религиозном чувстве»

Альберта Эйнштейна, которое разделяли Макс Планк, Владимир Вернадский и другие выдающиеся мыслители 20 в. В наиболее яркой форме свою веру в «космическое религиозное чувство» Альберт Эйнштейна выразил в следующем высказывании, которое мы неоднократно приводили выше [32]: «Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии».

Список литературы

1. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.
2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978 (первое издание - 1961). – 144 с.
3. Hoggat V. E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. - Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
4. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Harwood Limited, 1989.
5. Gardner Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York: Publishing House “Dover”, 1952.
6. Brousseau Alfred. An Introduction to Fibonacci Discovery. San Jose, California: Fibonacci Association, 1965.
7. Huntley H. E. The Divine Proportion: a Study in Mathematical Beauty. Dover Publications, 1970.
8. Ghyka Matila. The Geometry of Art and Life. Dover Publications, 1977.
9. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское Радио, 1977. – 288 с.
10. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. М.: Знание, 1979. – 64 с. (Новое в жизни, науке и технике. Серия «Математика и кибернетика», вып 6).
11. Реньи Альфред. Трилогия математики (пер. с венг.). Москва: Мир, 1980.
12. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. –
13. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
14. Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa: Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen).
15. Шевелев И.Ш. Принцип пропорции. М.: Стройиздат, 1986.- 200 с.

16. Garland T.H. Fascinating Fibonacci: Mystery and Magic in Numbers. Dale Seymour, 1987.
17. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Высшая школа, 1989. -143 с.
18. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г. – 64 с.
19. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. Москва: Молодая Гвардия», 1990. – 238 с.
20. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы. Москва: Стройиздат, 1990. – 343 с.
21. Runion G.E. The Golden Section. Dale Seymour, 1990.
22. Fisher Robert, Fibonacci Applications and Strategies for Traders. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
23. Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. Минск: РИТС, 1993. – 43 с.
24. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994. – 204 с.
25. Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific, 1997.
26. Цветков В.Д. Сердце, золотая пропорция и симметрия. Пущино: ОНТИ РНЦ РАУ, 1997. – 155 с.
27. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998. -373 с.
28. Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, Inc., 1998. – 195 с.
29. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
30. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Русский перевод: Мидхат Газале. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.)
31. Prechter, Robert R. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics. Gainseville, Georgia: New Classics Library, 1999.

32. Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. М.: Воскресенье, 2000. – 352 с.
33. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001. – 490 p.
34. Kappraff Jay. “Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth and Number”. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2002. – 584 p.
35. Koshy, T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley, 2001.
36. Livio, M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.
37. Стахов А.П. Новая математика для живой природы. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Винница: ITI, 2003. – 264 с.
38. Стахов А.П. Под знаком «Золотого Сечения». Исповедь сына студбатовца. Винница: ITI, 2003. – 284 с.
39. Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві. Львів: Украïнскі Технологіï, 2005. – 197 с.
40. Петруненко В.В. Золотое сечение квантовых состояний и его астрономические и физические проявления. Минск: Право и экономика, 2005. – 390 с.
41. Сороко Э.М. Золотое сечение, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: URSS, 2006. – 264 с.
42. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006.- 320 с.
43. Olsen Scott. The Golden Section: Nature’s Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006. – 58 p.
44. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.-316 с.

45. Шевелев И.Ш. Основы гармонии. Визуальные и числовые образы реального мира. М.: Луч, 2009. – 360 с.
46. Южанников А.Ю. Золотое сечение и техноценозов в системах электроснабжения. Красноярск: Поликор, 2009. – 288 с.
47. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2009. – 748 p.
48. HRH Charles The Prince of Wales. Harmony: A New Way of Looking at Our World. Harper Publisher, 2010 – 330 p.
49. Аракелян Грант. Теория ЛМФ и принцип золотого сечения. В 6 частях. Академия Тринитаризма, 2011 (электронная публикация).
50. Григорьев Ю., Мартыненко Г.. Типология последовательностей Фибоначчи: Теория и приложения. Введение в математику гармонии. LAMBERT Academic Publishing Gmbh & Co.KG. Saarbruecken, Germany, 2012. – 298 с.
51. Клайн М. Математика. Утрата определенности (пер. с англ.). Москва: Мир, 1984. 434 с.
52. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991. – 224 с.
53. Harmony of spheres. The Oxford dictionary of philosophy, Oxford University Press, 1994, 1996, 2005
54. Dimitrov Vladimir. A new kind of social science. Study of self-organization of human dynamics. Morrisville Lulu Press, 2005.
55. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998: 393-399.
56. Абачиев С.К. Математика гармонии глазами историка и методолога науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15991, 11.07.2010
57. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993. –с.9-14.
58. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23(2): 379-389.

59. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar . Chaos, Solitons & Fractals 2005, 26(3); 677-684.
60. Stakhov A. The “golden” matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.
61. Stakhov A., Aranson S.. “Golden” Fibonacci Goniometry. Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert’s Fourth Problem. Congressus Numerantium, 193 (2008), 119-156.
62. Татаренко А.А. Золотые T_m – гармонии и D_m – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
63. Аракелян Грант. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989
64. Шенягин В.П. «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm
65. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm
66. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm
67. Falcon Sergio, Plaza Angel. On the Fibonacci k-numbers Chaos, Solitons & Fractals, Volume 32, Issue 5, June 2007 : 1615-1624.
68. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, “Golden” Fibonacci Goniometry, Bodnar’s Geometry, and Hilbert’s Fourth Problem. Part I. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions and “Golden” Fibonacci Goniometry. Applied Mathematics, 2011, 2 (January), 74-84.

69. Stakhov A., Aranson S.. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part II. A New Geometric Theory of Phyllotaxis (Bodnar's Geometry). Applied Mathematics, 2011, 2 (February), 181-188.
70. Stakhov A., Aranson S. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, "Golden" Fibonacci Goniometry, Bodnar's Geometry, and Hilbert's Fourth Problem. Part III. An Original Solution of Hilbert's Fourth Problem. Applied Mathematics, 2011, 2 (March).
71. Стахов А.П. «Роль «золотого сечения» и «математики гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики». Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS"). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, - 444 с.
72. Kann Charles H. Pythagoras and Pythagoreans. A Brief History. Hackett Publishing Co, Inc., 2001.
73. Zhmud Leonid. The origin of the History of Science in Classical Antiquity. Published by Walter de Grunter, 2006.
74. Smorinsky Craig. History of Mathematics. A Supplement. Springer, 2008.
75. Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М.: Наука, 1989. – 336 с.
76. А.П. Стахов, Математизация гармонии и гармонизация математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16897, 16.10.2011
77. Кольман Э. История математики в древности. М.: Физматгиз, 1961.
78. Стахов А.П. Принцип асимметрии логики измерения. Проблемы передачи информации, №3, 1976 г.
79. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г. – с.27-33.
80. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.

81. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Український математичний журнал, том. 56, 2004 г. – с.1143 – 1150.
82. Митропольский Ю.А. Отзыв о научном направлении украинского ученого, доктора технических наук, профессора Алексея Петровича Стахова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12452, 23.09.2005
83. Стахов А.П. О возможной причине участившихся аварий при выводе российских спутников_// «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17146, 26.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0023/001a/00231046.htm
84. Стахов А.П. О возможных причинах участившихся катастроф при запуске российских ракет // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17296, 09.02.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0023/001a/00231047.htm
85. Стахов А.П. Микропроцессоры Фибоначчи как одна из базисных инноваций будущего технологического уклада, изменяющих уровень информационной безопасности систем. Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах, 2011, №3, - с.105 – 119.
86. Борисенко А.А., Стахов А.П. Об одном методе счета в коде Фибоначчи. Вестник Сумского государственного университета, 2011, №3, - с.141-149.
87. Абачиев С.К. Многоцветная гармония треугольника Паскаля. Наука и жизнь, 1981, №4
88. Абачиев С.К. О треугольнике Паскаля, простых делителях и фрактальных структурах. В мире науки, 1989, №9.
89. Абачиев С.К. Современное естествознание в роковом методологическом кризисе. Чем может помочь математика гармонии? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15259, 28.04.2009
90. Абачиев С.К. Обильная жатва // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15570, 30.09.2009
91. Абачиев С.К. Математика гармонии глазами историка и методолога науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15991, 11.07.2010

92. Абачиев С.К. Математика гармонии: от разработки «по горизонтали» к разработке «по вертикали» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16008, 22.07.2010
93. Шерватов В.Г. Гиперболические функции. М.: Физматгиз, 1958. – 56 с.
94. Борисов М. Немецкие математики установили, что Вселенная по форме напоминает дудку // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.11514, 16.09.2004 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0231/008a/02310035.htm
95. Australian scientists: the velocity of light falls. Lenta.ru http://www.lenta.ru/world/**2002**/08/08/light
96. Дубровский В.Н., Молчанов Ю.Б. Самоорганизация пространства-времени в процессе эволюции Вселенной // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 7-6567, публ.11203, 10.05.2004
97. Шульман М.К. Размышления о законах Природы и о самоорганизации материи http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/shulman_razmyshlenia.htm
98. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Москва: Наука, 1979, - 760 с.
99. Андреев Н. Мир, рожденный из ничего. http://galspace.spb.ru/index60-2.html
100. Нудельман Р. Космология: конец и продолжение. Знание –сила, 2003, №10.
101. Нудельман Р. Скорость света: исчерпаны ли парадоксы? Знание – сила», 2003, №11.
102. Пойа Джордж. Математическое открытие. М.: Наука, 1970. – 452 с.
103. Боднар О.Я. Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17259, 26.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322135.htm
104. Арансон С.Х. Ещё раз о 4-й проблеме Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15677, 01.12.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321180.htm

105. Проблемы Гильберта (под общей редакцией П.С. Александрова). М.: Наука, 1969.

106. Буземан Г. О четвертой проблеме Гильберта. Успехи математических наук. 1966, том.21, № 1(27). – с.155-164.

107. Погорелов А.В. Четвертая проблема Гильберта. М.: Наука, 1974.

108. Аракелян Грант. О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011

109. Стахов А.П. «Родовые признаки» для обобщенных золотых сечений // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17515, 10.06.2012.

110. Клещев Д. О движении и неподвижности в науке // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17520, 13.06.2012

111. Владимиров В.Л. О «родовых признаках» обобщенного и классического уравнений золотого сечения для рекурсий 2-го порядка и 2-й степени // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17537, 20.06.2012

112. Аракелян Грант Реплика на статью А.П.Стахова «"Родовые признаки" для обобщённых золотых сечений» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17521, 13.06.2012

113. Лебег А. Об измерении величин. Пер. с французского. Москва: Учпедгиз, 1960.

114. Метафизика. Век XXI (сост. и ред. Ю.С. Владимиров). Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2006. - 285 с.

115. Клещев Д. Лженаука: болезнь, которую некому лечить // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17012, 22.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322041.htm

116. Zenkin A.A. Super-Induction Method: Logical Akupuncture of Mathematical Infinity. - Twentieth World Congress of Philosophy. Boston, U.S.A., 1998. Proceedings, Section "Logic and Philosophy of Logic."

117. Зенкин А.А. Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000, №2.

118. Стахов А.П., Клещев Д.С., Проблема бесконечного в математике и философии от Аристотеля до А.Зенкина // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15680, 03.12.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161588.htm

119. А.П. Стахов, Не стоит ли современная математика на «лженаучном» фундаменте? (В порядке обсуждения статьи Дениса Клещева «Лженаука: болезнь, которую некому лечить») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17034, 28.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322052.htm

120. Клещев Д. О былых и грядущих богах, жрецах и пророках науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16762, 17.08.2011.

121. Волошинов А. В. Математика и искусство. М., Просвещение, 2000. – 399 с

122. Бутусов К.П. «Золотое сечение» в Солнечной системе. Сб. «Некоторые проблемы исследования Вселенной», вып.7. – Ленинград: Изд. ВАГО СССР, 1978.

123. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2.

124. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены, Успехи физических наук,1993, том 163, №2.

125. Андриевский Г.В., Стахов А.П., О Харькове, *p*-числах Фибоначчи, математике гармонии, фуллеренах и диетической добавке «C_{60} Water of Life» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17108, 15.12.2011

126. El Nashie M.S. Is Quantum Space a Random Cantor Set with a Golden Mean Dimension at the Core? Chaos, Solitons & Fractals, 1994; 4(2); 177-179.

127. El Naschie M.S. From symmetry to particles. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 427-430.

128. El Naschie M.S. Hilbert space, Poincaré dodecahedron and golden mean transfiniteness. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31 (4), 787-793.

129. Цветков В.Д. Золотая гармония и сердце. – Пущино: ООО «Фотон-век», 2008.

130. Цветков В.Д., «Золотая» гармония «противоположностей», энергооптимальность и сердце // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17017, 23.11.2011

131. Золотое сечение в квантовом мире http://www.strf.ru/science.aspx?CatalogId=222&d_no=27618

132. Верховский Л.И. Платоновы тела и элементарные частицы. Химия и жизнь, 2006, №6.

133. Владимиров Ю.С. Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга. Труды международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница – 2003.

134. Шелаев А.Н. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17431, 29.04.2012

135. Шелаев А.Н. Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17485, 28.05.2012

136. Шелаев А.Н. Электростатическая модель золотых сечений и функций средних значений // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17511, 08.06.2012

137. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Век XXI. Сборник трудов (сост. и редактор Ю.С. Владимиров). Москва: БИНОМ, 2006. с.216-250.

138. Якушко С.И. «Фибоначчиевая» закономерность в периодической системе элементов Д.И. Менделеева // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15965, 27.06.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161662.htm

139. Астафьев Б.А. Время познавать законы. URL=http:// http://raen-noos.narod.ru/ b_astafjev_1.htm

140. Макеев А.К. Химия: настояший периодический закон и его наглядное отображение. - http://www.inauka.ru/blogs/article90722/print.html

141. Гримм Г.Д. Пропорциональность в архитектуре. Ленинград-Москва: ОНТИ, 1935.

142. Гика Матила. Эстетика пропорций в природе и искусстве (пер. с фр.). Москва: Издательство Академии Архитектуры , 1936.

143. Боднар О.Ф. Динамічна симетрія у природі та архітектурі. Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS"). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, - с.234-256.

144. Nagy Denes. Three "Golden Waves": a Social-polytical and Cultural History of the Golden Section. Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS"). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, - с.20 - 74.

145. Владимиров В.Л., Стахов А.П., Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm

146. Kuhn T. S. The Structure of Scientific Revolutions. Chicago, University of Chicago Press, 1962 (русский перевод, 1975).

147. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. М.: Наука, 1973. – 256 с.

148. Пьер Тейяр де Шарден. Феномен человека. Перевод и примечания Н.А.Садовского - М.: "Прогресс", 1965.

149. Марутаев М.А. Аннотация книги «Гармония мироздания» http://www.marutaev.ru:80/book.htm

150. Dario Salas Sommer. Philosophy and Quality of Life. A dissertation submitted to the Faculty of Columbus University in candidacy for the degree of Doctor Philosophy, 2005.

151. Дарио Салас Соммэр. Мораль XXI века. М.: Издательский дом «София», 2004.

152. Дарио Салас Соммэр. Развитие внутреннего мира. Москва: Научная книга, 2008 г.

153. Дарио Салас Соммэр, От Золотой Математики к Золотому Поведению // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15105, 20.02.2009

154. Дарио Салас Соммэр, А.П. Стахов, «Золотая» Герметическая Философия // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15144, 09.03.2009

155. Дарио Салас Соммэр, Оборотная сторона науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15676, 29.11.2009

156. Алексей Чуличков. Чего не знает современная наука http://www.manwb.ru/articles/science/natural_science/nayka/

157. Щуцкий Ю.К. Китайская классическая «Книга перемен». М., Восточная литература, 1997.

158. Шипов Г.И. Теория физического вакуума в популярном изложении. М.: Кириллица, 2002. – 128 с.

159. Шюре Э. Великие посвященные. Очерк эзотеризма религий. М., 1914. – 101 с.

160. Max Planck. Religion und Naturwissenschaft. Vortrag gehalten im Baltikum (Mai 1937) von Dr. Max Planck. 2te unverand. Auflage. Joh. Ambrosius Barth Verl. Leipzig, 1938 http://vera.mipt.ru/nauka/religiest.html

161. Gerald Schroeder. The Hidden Face of God. New York: Touchstone, 2001.

162. Шмелев И.П. Феномен Древнего Египта. Минск: Лотаць, 1993.

Научная биография Алексея Стахова

1. **Алексей Стахов** является одним из лидеров мировой науки в области «золотого сечения» и «математики гармонии». С 2003 г. он является Президентом Международного Клуба Золотого Сечения, а с 2005 г. - Директором Института Золотого Сечения Академии Тринитаризма (Россия). Он был инициатором создания так называемой «Славянской Золотой Группы» (Киев, 1992) и научным руководителем Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, 2010). Имеет широкие международные связи с учеными США, России, Украины, Беларуси, Армении, Англии, Германии, Аргентины, Бразилии, Турции, Чили и других стран. Владеет русским, украинским и английским языками. С 2004 г. живет в Канаде.
2. **Образование.** В 1961 г. закончил радиотехнический факультет Харьковского авиационного института (сейчас – Национальний аэрокосмический университет),
3. **Ученые степени и звания**: кандидат технических наук в области технической кибернетики (1966), доцент (1968), доктор технических наук в области вычислительной техники (1972), профессор (1974), академик Академии инженерных наук Украины (1992)
4. **Основные этапы научно-преподавательской деятельности**:
   - Заведующий кафедрой информационно-измерительной техники Таганрогского радиотехнического института, 1971 – 1977.
   - Заведующий кафедрой вычислительной техники Винницкого политехнического института (сейчас – Винницкий национальный технический университет), 1977 – 1988.
   - Директор Специального конструкторско-технологического бюро "Модуль" при Виницком политехническом университете, 1986 – 1989.
   - Заведующий кафедрой прикладной математики и вычислительных систем Винницкого технического университета, 1989 – 1995.

- Заведующий кафедрой информатики Винницкого государственного аграрного университета, 1997-2003.

5. **Подготовка научных кадров**: подготовил 30 кандидатов наук, 4 ученика проф. Стахова защитили докторские диссертации.

6. **Краткая характеристика научной деятельности, основные теоретические достижения**:

6.1. Создал новое направление в теории измерения – алгоритмическую теорию измерения. В этой области имя проф. Стахова стоит рядом с именами признанных ученых в области теоретической метрологии.

6.2. Создал новое направление в развитии вычислительной техники, а именно новые системы счисления, основанные на числах Фибоначчи и золотой пропорции, и выдвинул проект «Компьютеры Фибоначчи». Мировой приоритет в этой области защищен 65 зарубежными патентами США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и других стран. В 1989 г. выступил с докладом «Компьютеры Фибоначчи» на специальном заседании Президиума Академии наук Украины.

6.3. Разработал «Математику гармонии», как новое междисциплинарное направление, касающееся оснований математики, теоретической физики, компьютерной науки и математического образования. Впервые концепция «математики гармонии» была изложена профессором Стаховым в докладе "The Golden Section and Modern Harmony Mathematics", сделанном на 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения» (Австрия, Грац, 1996). Его главным научным достижением в этой области является книга “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (World Scientific, 2009), вызвавашая большой интерес в современной науке.

6.4. В этой области опубликовал около 500 научных работ, среди них – 15 книг, 65 зарубежных патентов, 130 авторских свидетельств СССР. За период работы в Канаде (2004-2012) опубликовал около 30 статей в известных международных журналах (Chaos, Solitons and Fractals, Applied Mathematics, Congressus Numerantium, Arc Combinatoria, Visual Mathematics и др.).

7. Наиболее важные научные доклады:

- Доклад «Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики» на объединенном заседании компьютерного и кибернетического обществ Австрии (Вена, 1976);
- Доклад «Компьютеры Фибоначчи» на заседании Президиума Академии наук Украины (Киев, 1989);
- Доклад "The Golden Section and Modern Harmony Mathematics" на 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения» (Австрия, Грац, 1996);
- Доклад «Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении" на совместном заседании семинара "Геометрия и Физика" кафедры теоретической физики Московского университета и Междисциплинарного семинара "Симметрии в науке и искусстве" при Институте машиноведения РАН (Москва, МГУ, май 2003).

7. Научные награды, работа в зарубежных университетах:

- 7.1. Работа «Приглашенным профессором»:
  - Венский технический университет (1976),
  - Йенский университет (1986),
  - Дрезденский технический университет (1988),
  - Университет Аль Фатех (Триполи, Ливия, 1995-1997),
  - Университет Эдуардо Мондлане (Мапуту, Мозамбик, 1998-2000),

- 7.2. Премии, награды:
  - Премия Министерства образования Украины в области науки за лучшую научную публикацию (1980)
  - Памятная медаль имени Генриха Баркгаузена, выданная Дрезденским Техническим Университетом как «Приглашенному профессору» кафедры имени Генриха Баркгаузена (1988)
  - Почетное звание «Рыцарь науки и искусств» (Российская Академия Естественных Наук, 2009)
  - Почетное звание «Доктор Священной Геометрии в Математике» (Американское Общество Золотого Сечения, 2010)

8. Научные форумы, проведенные под руководством Алексея Стахова:

- Научный руководитель Международных семинаров «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем» (Киев, 1992, 1993).
- Научный руководитель Международной Конференции „Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве" (Винница, октябрь 2003)
- Научный руководитель Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, октябрь 2010)
- Научный руководитель Международного online семинара по Математике Гармонии (Институт Золотого Сечения Академии Тринитаризма, ноябрь, декабрь 2011, январь 2012)