

Н. Ф. Семенюта

МАТЕМАТИКА ГАРМОНИИ: КОДЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОПОРЦИЙ, ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПРОПОРЦИИ В НАУКЕ И ТЕХНИКЕ

Комментарий Алексея Стахова

Приходится только удивляться, как глубоко проф. Семенюта проник в проблемы «математики гармонии» (МГ) и как грамотно и гармонично он выстроил защиту МГ от «вырождения». И здесь очень уместна цитата Джона фон Неймана, касающаяся развития всей математики в целом (а МГ является частью современной математики). Проф. Семенюта обладает знаниями, недоступными для многих членов «оппозиционной группы», благодаря своему образованию, интеллекту и фундаментальным знаниям в области электросвязи, теории кодирования и техническим приложениям МГ. Лекция проф. Семенюты имеет большую историческую ценность, так как он сообщает студентам о пионерных работах как самого проф. Семенюты, так и выдающегося ученого проф. В.Н. Листова по теории электрических цепей с использованием чисел Фибоначчи. Причем работы В.Н. Листова в этой области были выполнены в тот период, когда современных «золотосенченцев», критикующих МГ, еще не существовало или в лучшем случае они сидели на горшках. Перед тем, как что-либо критиковать, необходимо тщательно изучить работы своих предшественников, в частности, работы В.Н. Листова и Н.Ф. Семенюты. От имени всех членов Международного Клуба Золотого Сечения хочу выразить благодарность Николаю Филипповичу Семенюте за его публикации в области МГ и пожелать ему доброго здоровья и больших творческих успехов в разработке нового лекционного курса по МГ и ее приложениям в науке и технике.

Введение. Настоящая лекция является продолжением первой и ее основная цель – показать на конкретных примерах проявления золотого сечения и гармонические пропорции в науке и технике [1] В связи с этим остановимся на важной характеристике математики, которую дал один из выдающихся математиков прошедшего столетия Джон фон Нейман (1903–1957): «Я считаю, что достаточно хорошее приближение к истине (которая слишком сложна, чтобы допускать что-нибудь, кроме аппроксимации) состоит в следующем. Математические идеи рождаются в сфере эмпирики, но генеалогия их иногда длинна и запутана. Однако сколь скоро эти идеи возникли, они оберегают независимое, самостоятельное существование и их лучше сравнивать с художественными произведениями, которые всецело подчиняются эстетическим оценкам, чем с чем-либо другим и, в частности, с эмпирическими науками. Тем не менее, здесь имеется одно обстоятельство, на которое, я полагаю, следует обратить особое внимание. По мере того как математическая дисциплина отрывается от своего эмпирического источника, а тем более, когда она принадлежит второму или третьему поколению и лишь косвенно вдохновляется идеями, восходящими к «реальности», над ней нависает очень серьезная опасность. Она превращается во все более и более чисто эстетическое упражнение, в *l'art pour l'art* (искусство ради искусства). Это не всегда плохо, если вокруг данной дисциплины находятся другие родственные разделы математики, обладающие более тесными связями с эмпирическими науками, или же данная дисциплина находится под влиянием

людей с исключительно хорошо развитым вкусом. Но существует серьезная опасность, состоящая в том, что математическая дисциплина начнет развиваться по линии наименьшего сопротивления, что поток вдали от источника разделится на множество мелких рукавов и что соответствующий раздел математики обратится в хаотическую массу деталей и разного рода сложностей. Иными словами, на большом расстоянии от эмпирического источника или в результате чересчур абстрактного инбридинга математической дисциплине угрожает вырождение. При рождении того или иного раздела математики стиль обычно бывает классическим; когда же он приобретает черты перерождения в барокко, это следует расценивать как сигнал опасности. Легко привести примеры соответствующих процессов перерождения математических теорий в барокко и даже высокое барокко, но это уже во многом сугубо технический вопрос.

Если этот этап развития математической дисциплины достигается, единственным исцеляющим лекарством является впрыскивание в нее более или менее собственно эмпирических идей. Я убежден, что это необходимое условие сохранения свежести и жизненной силы математической теории, и что это положение останется в силе и в будущем» [2].

Важность отмеченных Дж. Нейманом вопросов актуальна и сегодня, так как большинство сообщений по математике гармонии и статей в литературе, Интернет, а также докладов на Конгрессе посвящены, в основном, теоретическим проблемам золотого сечения и гармонических пропорций.

Как защитить математику гармонии еще на начальной стадии от «вырождения»? Согласно Дж. фон Нейману (и моего) это можно сделать только путем «впрыскивания в математику более или менее эмпирических идей». Практическая (эмпирическая, конкретная) математика гармонии заслуживает большего внимания и не позволит тратить время на математику ради математики.

Коды Морзе и Бодо. Передача информации на расстояние – одним из замечательных достижений человечества. Поэтому остановимся на одной из основных проблем теории дискретной связи – кодирования/декодирования сообщений [3, 4]. Долгие годы для передачи дискретных сообщений использовались неравномерные двоичные и реже троичные коды Морзе, а также равномерный пятиэлементный двоичный код Бодо. Неравномерный двоичный код, разработанный американским изобретателем Самюэлем Морзе (1791–1872) использовался в телеграфной связи по проводным и радиоканалам. Суть телеграфного кода Морзе (азбуки Морзе) состояла в том, что комбинации кодов, соответствующих определенным символам сообщения (алфавита), состоят из точек и тире (коротких и длинных посылок тока) и длина кодовых комбинаций зависела от числа точек и тире. С целью уменьшения длины кодовых комбинаций и увеличения скорости передачи сообщений (примерно в два раза) был предложен троичный код Морзе.

Первая телеграфная линия на аппаратах Морзе на железнодорожном транспорте для управления движением поездов с использованием воздушной линии связи и металлических проводов была введена в эксплуатацию в 1852 г.

между Москвой и С.-Петербургом. Профессор Ленинградского института железнодорожного транспорта Каргин Д. И. (1880–1949) отмечал: «Только электрический телеграф разрешил удовлетворительно вопрос о безопасных способах регулированием движения поездов». С тех пор и примерно до середины XX века телеграфная связь использовались для управления движением поездов [5].

Большим событием в электрической связи, можно сказать даже эпохальным, стало изобретение в 1872–1876 гг. французским механиком Ж. Бодо (1845–1903) многократного буквопечатающего телеграфного аппарата, передача сообщений в котором производилась на основе равномерного пятиэлементного двоичного кода (код Бодо) [5].

При передаче сообщений, как с помощью аппаратов Морзе, так и Бодо по проводам воздушных линий связи возникла проблема помехоустойчивости, т. е. способности системы связи противостоять вредному влиянию посторонних сигналов – помех. Проблема состояла в том, что вследствие помех – грозových разрядов и атмосферного электричества, происходил неверный прием передаваемых сообщений или, более того, работа приемных аппаратов происходила даже в то время, когда передачу сообщений никто не производил. Это явилось даже историческим казусом, когда знаменитый сербский инженер и изобретатель Никола Тесла (1856–1943) предположил, что передача сообщений ведется с внеземных цивилизаций.

Для борьбы с помехами в телеграфной связи, очевидно, впервые в практике передачи дискретных сообщений, начали использовать трехразовую и даже пятиразовую передачу сообщений. В приемнике решение о принятом сообщении производилось по большинству из принятых символов комбинаций кода или знаков алфавита. Многоразовая передача позволяла, как обнаруживать, так и исправлять принятые неверно сообщение [4].

Однако многоразовая передача, кроме усложнения кодирующих/декодирующих устройств, снижала такой важный показатель телеграфной связи как скорость передачи информации. Поэтому в конце 50-х годов прошлого столетия начались интенсивные работы по повышению верности передачи с помощью специальных кодов – корректирующих, способных обнаруживать и исправлять ошибки в принятых сообщениях. Одним из первых таких кодов был так называемый рекуррентный код [8, 9, 10]. Затем последовали нерекуррентные коды [12], (коды с постоянным весом, корреляционный, инверсный и многие другие) [3, 4].

Рекуррентные коды. Рекуррентные коды относятся к непрерывным кодам, построение которых базируется на обобщенном рекуррентном соотношении. Его особенностью является то, что в последовательности передаваемых символов кода они не разделяются на отдельные кодовые комбинации (блоки), а передаются непрерывно. Первым, появившемся в печати сообщением о непрерывных кодах был код Хагельбаргера [10]. Несколько ранее такой же код был предложен советским ученым Л. М. Финком (1910–1988) [11].

За основу формирования кода положено обобщенное рекуррентное соотношение Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-1-\lambda}, \text{ где } \lambda = 1, 2, 3, \dots - \text{ шаг сложения, } F_1 = F_2 = \dots = F_\lambda = 1.$$

В простейшем рекуррентном коде (рис. 1), получившем название цепного кода, за каждым информационным символом следует проверочный символ, который образуется сложением сдвинутых символов кода a_i относительно друг друга на расстояние шага сложения λ (в нашем случае $\lambda = 2$):

$$r_{a+\lambda}, r_{a+2\lambda} = a_{a+\lambda} + a_{a+2\lambda}, \quad a = 0, 1, 2, 3, \dots$$

где $a_{a+\lambda}$ и $a_{a+2\lambda}$ – информационные символы, по которым образуются проверочные символы; λ – шаг сложения кода. Значения проверочных символов определяется из следующих соотношений:

$$r_{1,3} = a_1 + a_3, \quad r_{2,4} = a_2 + a_4, \quad r_{3,5} = a_3 + a_5, \dots$$

Если последовательность информационных символов, подлежащих преобразованию в рекуррентный код, имеет значения, приведенные на рис.1, a , то проверочные символы и последовательность после кодирования, будет иметь значения символов, приведенных соответственно на рис. 1, \bar{b} и \bar{v} .

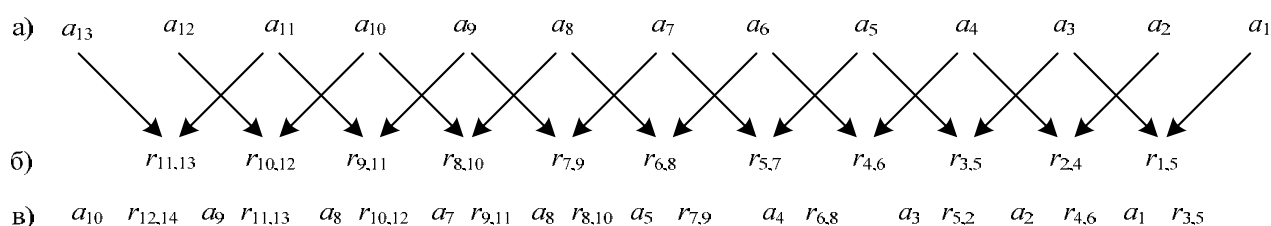


Рис. 1 – Принцип формирования последовательности рекуррентного кода

На практике непрерывные коды, несмотря на высокие корректирующие свойства, получили небольшое применение в основном в измерительной аппаратуре [22].

Еще большая проблема с верностью передачи возникла с началом передачи цифровых сообщений (данных) (1960) для обработки на электронных вычислительных машинах. В эти же годы прошлого века начался настоящий бум по разработке и исследованиям корректирующих кодов, позволяющих обнаруживать или обнаруживать и исправлять ошибки. В их разработке и исследовании участвовали ученые многих стран мира (Хэмминг, Файр, Боуз, Чоудхури, Хоквиигема, Рид, Соломон, Элайес и др.) и СССР (А. А. Харкевич, С. И. Самойлов, В. Д. Колесников, Л. Ф. Бородин, Е. Т. Мирончиков, П. А. Котов, К. А. Мешковский, Н. Е. Кириллов и др.). При этом использовались такие разделы математики как теория поля, теория и др. Появились обобщающие монографии по теории (математике) кодов

[8,42, 45, 47]. Обобщение работ по кодам выполнил У. У. Питерсон в своем фундаментальном труде [20].

На железнодорожном транспорте в одной из первых автоматизированных системы сбора и передачи данных для организационного управления железнодорожным транспортом была система «Светофор» (1960) в которой использовался код с постоянным весом 3 : 2 [3, 5].

Циклические коды относятся к так называемым линейным кодам и вследствие их высоких корректирующих свойств, а также относительно простых кодирующих/декодирующих устройств, они находят широкое применение на практике [42, 45, 47]. В общем случае кодовая комбинация циклического кода представляется многочленом переменной x со степенью $(n - 1)$

Основное свойство циклических кодов состоит в том, что если какая-либо комбинация

$$M(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$$

где $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ – символы кодовой комбинации, 0 или 1, принадлежит к множеству разрешенных, то комбинация, полученная из нее путем циклического (кругового) сдвига или, что то же самое, путем умножения многочлена $M(x)$ на x :

$$xM(x) = a_{n-2}x^{n-1} + a_{n-3}x^{n-2} + \dots + a_1x^2 + a_0x.$$

также принадлежит к этому множеству [20].

Один из принципов построения комбинаций циклических кодов заключается умножения на x^n каждого многочлена исходного множества простого кода $Q(x)$

$$M(x) = Q(x) P(x),$$

где $P(x)$ – образующий многочлен циклического кода.

Построение комбинаций циклических кодов возможно также по производящей матрице, строки которой линейно независимые базисные векторы. Все кодовые векторы (комбинации) получаются как линейные комбинации строк производящей матрицы:

$$G = \begin{pmatrix} g(x) \\ xg(x) \\ \dots \\ x^{n-1}g(x) \end{pmatrix}.$$

Циклических кодов существует большое количество. Одним из основных вопросов при построении циклического кода является выбор образующего многочлена

$$P(x) = \alpha_r x^r + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

так как корректирующая способность кода тем больше, чем больше количество отличных от нуля коэффициентов образующего многочлена.

Если $\alpha_0 = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю, то $P(x) = 1$. Такой образующий многочлен имеет нулевую степень и соответствует простому коду. Если $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, а остальные коэффициенты равны нулю, то $P(x) = x + 1$, т. е. образующий многочлен имеет первую степень. Циклический код, образованный с помощью такого многочлена, обеспечивает обнаружение всех ошибок нечетной кратности. Если $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, то $P(x) = x^2 + x + 1$. Этот код по корректирующей способности соответствует известному коду Хэмминга [46].

Корректирующая способность циклического кода возрастает с усложнением образующего многочлена. Мы же только отметим, что все они связаны с гармоническими пропорциями. Более подробные сведения о циклических кодах изложены во многих работах [20, 42].

Иррациональная система счисления. Число, одно из основных понятий математики, зародилось в глубокой древности и постепенно расширялось и обобщалось. Важность числа как такового предельно выражена Пифагором: «Все есть число», и если математику называют "царицей науки", то теорию чисел называют "царицей математики".

Первоначально, в связи со счетом отдельных предметов, возникли натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5, ... и т. д. Затем появилось понятие об отношениях натуральных чисел, например, $1/2$, $3/4$ и т. д. Значительно позже были открыты несоизмеримые, или иррациональные числа, которые не могут быть точно выражены дробью, а являются бесконечными непериодическими десятичными дробями, к которым относятся, например, $\sqrt{2} = 1,414$, $\Phi = 1,618$.

Истоки десятичной системы счисления, которой мы наиболее часто пользуемся, восходят к индусской десятичной системе, возникшей примерно в VIII столетии нашей эры. Фибоначчи в своем труде "*Liber abaci*" также писал: "Девять индусских знаков – суть следующие: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который называется по-арабски "zephirum", можно написать какое угодно число".

В наши годы, в связи с развитием цифровых систем связи и ЭВМ получили применение двоичные, восьмеричные и другие системы счисления. В них в качестве основания используются натуральные числа (2, 8, 10), из которых по определенным правилам производят построение различных натуральных, рациональных и иррациональных чисел.

Одной из первых систем счисления на основе иррациональных чисел была предложена американским ученым Джорджем Бергманом в 1957 г. [52]. В системе за основу принято иррациональное число золотого сечения Φ , а рациональные числа формируются следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &= 1/\Phi + 1/\Phi^2 = 0,618... + 0,381... ; \\ 2 &= \Phi + 1/\Phi^2 = 1,618... + 0,381...; \\ 3 &= \Phi^2 + 1/\Phi^2 = 2,618... + 0,381...; \\ 4 &= \Phi^0 + \Phi^2 + 1/\Phi^2 = 1 + 2,618... + 0,381... , \end{aligned}$$

$$5 = \Phi^2 + 1/\Phi + 1/\Phi^4 = 4,236... + 0,618... + 0,146 \text{ и т. д.}$$

Первоначально иррациональная система счисления оказалась незамеченной. Сам Дж. Бергман не видел ей применения: «Я не знаю ни одного практического применения подобных систем, кроме как умственного упражнения и приятного времяпрепровождения, хотя эта система может быть пригодна для алгебраической теории чисел». Однако Бергман ошибся. Профессор А. П. Стахов (1978) предложил использовать систему счисления с иррациональными основаниями в вычислительной технике. Он же использовал иррациональную систему счисления для построения аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей, которые нашли применение в измерительных системах, цифровых системах передачи информации и управления различными объектами [15, 18, 19].

Новые идеи в области цифрового счета изложены в монографии профессора А. А. Борисенко «Введение в теорию биномиального счета» [21]. В ней впервые в практике и теории систем счисления предложено представление чисел не только в линейном виде, как обычно, а и в виде матриц, что дает новые возможности по быстрому и надежному счету.

Кодирование по Фибоначчи. Очевидно, исторически первой по кодам Фибоначчи явилась работа [23], в которой была рассмотрена проблема самосинхронизации сигналов за счет структуры кодов Фибоначчи, затем появились работы А. П. Стахова и его учеников [16, 19]. В основу кодирования по Фибоначчи положена теорема бельгийского врача и большого любителя математики Эдуарда Цеккендорфа (1901–1983) согласно которой каждое положительное целое число может быть представлено суммой чисел Фибоначчи. Так, целое положительное число N имеет единственное представление вида

$$N = F_{\kappa_1} + F_{\kappa_2} + \dots + F_{\kappa_j}, \quad \kappa_1 \gg \kappa_2 \gg \dots \kappa_n \gg 0.$$

Теорема Цеккендорфа приводит к «фибоначчиевой» системе счисления в которой, например, числа от 1 до 10 имеют вид:

1 – 00000001,	6 – 00010001,
2 – 00000010,	7 – 00010010,
3 – 00000100,	8 – 01000000,
4 – 00000101,	9 – 01000001,
5 – 00010000,	10 – 01000010.

Десятичное число 1000000 числами Фибоначчи можно представит следующим образом:

$$1000000 = 832040 + 131393 + 46368 + 144 + 55 \rightarrow F_{30} + F_{26} + F_{24} + F_{12} + F_{10}.$$

Всякое целое положительное число в «фибоначчиевой» системе счисления также как и при десятичной можно представить в виде последовательности двоичных чисел 1 и 0

$$[1000000]_{10} = [10001010000000000010100000000]_F$$

В двоичной системе счисления это число имеет вид:

$$[1000000]_{10} = [11110100001001000000]_2.$$

«Фибоначчиево» представление чисел требует несколько больше двоичных единиц, т. е. содержит их избыточное число по сравнению с десятичным представлением. Кроме того, в «фибоначчиевых» кодах не допускаются два символа 1 подряд. Избыточность и структура «фибоначчиевых» кодов позволяет обнаруживать и исправлять ошибки в его комбинациях.

На основе «фибоначчиевой» системы счисления и фибоначчиевых кодов под руководством А. П. Стахова были разработаны аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи, которые нашли применение в измерительных системах, некоторых компьютерах [15, 17, 19]. Коды Фибоначчи, как и многие другие, были лишь этапом на длинной дороге поиска совершенных кодов для систем телекоммуникаций, в том числе передаче дискретной информации.

Оптимальное кодирование. Проблема построения оптимального кода сводится к такому размещению сигнальных точек – центров областей, при котором эти области имеют наибольшую возможную величину, наиболее близки одна к другой по размеру и наиболее приближаются по форме к шарам [10]. Эта проблема известна в дискретной математике как задача о плотном расположении равных шаров в n -мерном пространстве, причем центры шаров соответствует сигнальным точкам [7, 24].

На рис. 2 показаны размещения сигнальных точек в двухмерном пространстве (на плоскости). Упорядоченное (плотное) размещение (рис. 2, *a*) не является оптимальным, так как области правильного приема мало похожи на сферические области (вписанные в них круги). Плотнейшее размещение (рис. 2, *б*) в этом смысле является ближе к оптимальному.

Если рассмотреть отношение объема шара, вписанного в область правильного приема, к объему этой области, то это отношение может служить мерой приближения формы области к идеальной (сферической). Чем больше это отношение при одном и том же объеме шаров, вписанного в область правильного приема сигнала, тем более эффективно используется пространство сигналов, т. е. в заданном объеме пространства можно разместить больше сигналов при приблизительно той же помехоустойчивости, так как последнее определяется “сферической” частью области правильного приема [10].

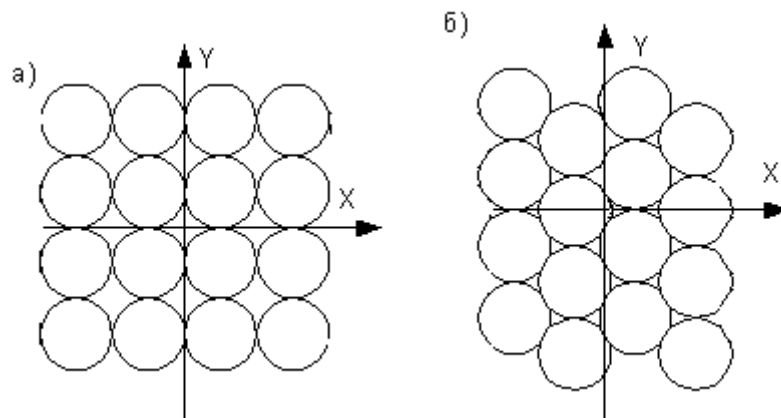


Рис. 2 – Расположение сигнальных точек на плоскости: *a* – плотное; *б* – плотнейшее

Указанное отношение равно отношению объема всех шаров к объему пространства, занимаемого ими, и носит название коэффициента заполнения пространства ρ . Под плотнейшей упаковкой шаров одинакового радиуса понимается такое расположение не пересекающихся шаров, при котором коэффициент заполнения пространства оказывается максимальным.

Как показали исследования по заполнению сферических емкостей разных размеров, были получены две эмпирические формулы:

– при упорядоченном расположении шаров

$$\rho = 0,60 - 0,37 \cdot \sqrt[3]{n},$$

– при плотном расположении шаров

$$\rho = 0,64 - 0,33 \cdot \sqrt[3]{n},$$

где n – полное число шаров.

Если число шаров $n \rightarrow \infty$, то в первом случае $\rho = 0,60$, а во втором – $\rho = 0,64$. Эти пределы $0,60 \dots 0,64$ близки к золотому сечению $1/\Phi = 0,618\dots$. Таким образом, сигнальные точки при оптимальном кодировании также должны заполнять объем сигнального пространства с учетом золотого сечения. К такому заполнению обычно приближаются при построении сигнально-кодовых конструкций.

В связи с этим отметим также, что в работе [25] для случая идеального приема сигналов была получена производящая функция оптимального кода в виде дроби:

$$F(x) = \frac{x^2 + x^3}{1 - 2x^2 - x^3} = F(x) = 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 8x^7 + 13x^8 + \dots$$

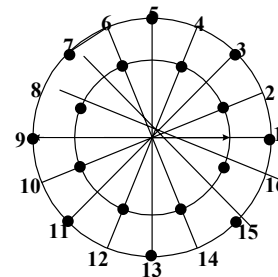
В полученной функции коэффициенты при переменной определяются числами последовательности Фибоначчи, однако авторы этого не заметили. В связи с этой производящей функцией отметим, что аналогичная производящая функция определяет и генетический код. Плотно упакованный

генетический код отличается высокой помехоустойчивостью передачи наследственной информации от поколения к поколению, несмотря на множество посторонних возмущений – помех (шумов), существующих в биологических системах. Проблемы генетического кода и его структурной особенности более подробно изложены в монографии С. В. Петухова [27].

Закончим проблемы корректирующих кодов словами выдающегося американского ученого Норберта Винера: «Вопрос не в том, какой код мы должны применять, а в том, какой код мы используем». В настоящее время на практике, в том числе и сети связи Интернет, современных высокоскоростных цифровых системах передачи по оптическому волокну и через спутники связи Земли, применяются корректирующие коды, получившие широкое применение в вычислительной технике и телекоммуникациях. Их применения в цифровых системах передачи и модемах передачи данных регламентированы рекомендациями Международного союза электросвязи по телекоммуникациям (МСЭ-Т).

Оптимизация уровней модулированных сигналов Для плотного заполнения сигнального поля и увеличения скорости передачи дискретных сигналов применяется четырехкратная амплитудно-фазовая модуляция (АФМ) (рис. 3).

Рис.3 – Сигнальное поле АФМ сигнала



С точки зрения плотной упаковки сигналов встает задача выбора большого и малого радиусов окружностей. Сигнальные точки АМФ на рисунке показаны жирными точками. Нечетные сигналы равномерно размещены на окружности большего радиуса R со сдвигом фазы $\pi/4$ радиан, а четные сигналы – на окружности меньшего радиуса r с той же разностью фаз $\pi/4$ и со сдвигом фаз относительно нечетных сигналов на $\pi/8$. Минимальное расстояние между сигнальными точками максимизируется при отношении радиусов большой и малой окружностей $R/r = 1,578$. При этом минимальное расстояние между сигнальными точками $d_{16} = \sqrt{E} \sin(\pi/8)/\cos(5\pi/24) = 0,482\sqrt{E} \approx \sqrt{E}/\sqrt{5}$. Полученное отношение незначительно отличается от $\Phi = 1,618$ (погрешность менее 2,5%) и, следовательно, можно утверждать, что оптимальным соотношением радиусов окружностей будет при $\Phi = 1,618$.

Строительная механика. Для людей Древнего мира одной из первых была проблема жилья и питания. Поэтому со строительства начинали свой путь наши далекие предки. Одна из задач строительной механики была связана с использованием балок при строительстве храмов и других

культовых сооружений. Задачи сводилась к определению размеров прямоугольной деревянной балки наибольшей прочности. Суть актуальной задачи для того времени состояла в том, каким образом нужно обтесать круглое бревно, чтобы получить из него балку прямоугольного сечения наибольшей прочности (рис. 4) [28].

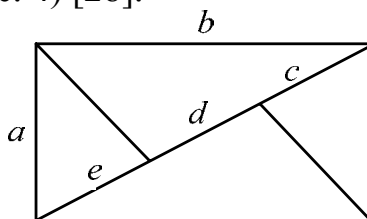


Рис 4 – Оптимальные размеры бруса

Древние греки оптимальную по прочности считали прямоугольную балку с размерами сторон, равными отношениям чисел последовательности Фибоначчи 5 : 8. Как они установили это отношение нам неизвестно, но оно действительно весьма близко к оптимальному. Задачу об оптимальных размерах балки прямоугольного сечения наибольшей прочности в XVIII веке точно решил французский математик Паран (1666–1716) [28]. Он показал, что при заданном диаметре бревна $e + d + c$ произведение сторон бруса a и b должно иметь наибольшее значение. Чтобы достигнуть этого необходимо диаметр бревна разделить на три равные части $e = d = c$ и построить прямоугольные треугольники. Прямоугольный брус со сторонами a и b будет обладать наибольшей прочностью.

Из прямоугольника следует, что его стороны $a = \sqrt{1/3}$ и $b = \sqrt{2/3}$, а их отношение $b/a = \sqrt{2} = 1,414$. Расхождение между отношениями сторон прямоугольной балки, рекомендованное древними греками ($8 : 5 = 1,600$) и полученное Параном ($\sqrt{2} = 1.414$), отличаются незначительно друг от друга и золотого сечения $\Phi = 1.618$. Здесь важно обратить внимание на то, что иррациональное число $\sqrt{2} = 1.414\dots$ грекам еще не было известно. Поэтому они рекомендовали целочисленное отношение целых чисел, которые они могли измерять и устанавливать на практике.

Отметим также, сооружение первых железных дорог дало сильный толчок развитию науки о сопротивлении материалов, в особенности в области строительства мостов и железнодорожного пути. Поэтому с тех далеких времен специалист по сопротивлению материалов И. Ходкинсон (1789–1861) испытания железнодорожных мостов производил на модели с соотношением сторон поперечного сечения моста равным числам Фибоначчи $5/3$ [28].

Теория измерений. Установление геометрических размеров объектов соответствующих золотой пропорции производилось с помощью специальных циркулей «Это были инструменты скульптора и, по-видимому, зодчего, работающего над чертежом: отношения, на которых циркули закреплены, присущи соразмерностям шедевров архитектуры». Таких пропорциональных циркулей нам известно несколько. Римский циркуль из Музея античного прикладного искусства в Мюнхене, установленный на

отношении 1 : 2 (67 : 134), помпейский циркуль из музея в Неаполе, установленный на отношении золотого сечения 56 : 90 мм (рис. 5).

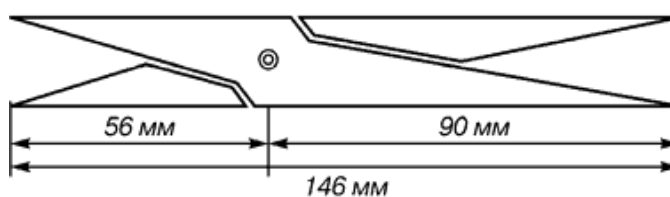


Рис. 5 – Циркуль золотой пропорции

Не менее важной в Древнем мире была и задача измерения массы, будь то строительных материалов или сельскохозяйственных продуктов. С применением для измерения рычажных весов потребовало решения задачи о выборе количества и номинальных значений гирь.

Значительным вкладом в развитие теории измерения явился труд Фибоначчи "*Liber abaci*", в котором была сформулирована так называемая «задача о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах» или, проще, «задача о гирях».

В математической науке «задача о гирях» известна также под названием «задачи Баше–Менделеева», названной так в честь французского математика Баше де Мизириака, поместившего ее в своем «Сборнике приятных и занимательных задач» (1612), и русского ученого Д. И. Менделеева (1834–1907), организатора и первого директора (1893) Главной палаты мер и весов России (ныне ВНИИ метрологии им. Д. И. Менделеева).

Обобщением «задачи о гирях», сформулированной Фибоначчи, явилась «алгоритмическая теория измерений», предложенная И. В. Витенко и А. П. Стаховым. Одним из наиболее важных результатов предложенной теории являются "фибоначчиевые" алгоритмы измерения, которые позволили оптимизировать процесс измерения [13, 14].

Колебания двухмассовой системы. Рассмотрим известную из теоретической механики задачу о вынужденных колебаниях двухмассовой системы (рис. 6), где m_1 и m_2 – массы грузов; C_1 и C_2 – коэффициенты жесткости пружин. Под действием силы P , изменяющейся по закону $P = P_0 \sin \omega t$, (ω – угловая частота вынужденных колебаний) система приходит в колебание [48].

Из решения этой задачи следует, что если частота возбуждения удовлетворяет равенству $\omega = \sqrt{C_2 / m_2}$, то амплитуда колебания грузов $A_1 = 0$ и $A_2 = P_0 / C_2$. На рис. 7 показано изменение относительной амплитуды CA_1 / P_0 в зависимости от частоты возбуждения ω / ω^* , для случаев $P_0 = 1$, $C_1 = C_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$. Здесь хорошо видны два резонанса – при $\omega = P_1$ и $\omega' = P_2$, а также антирезонанс при $\omega = \omega^*$.

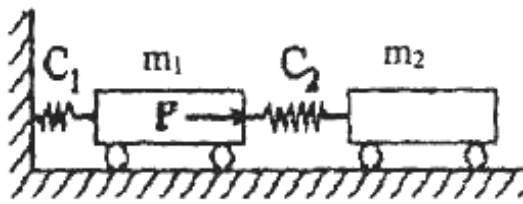


Рис. 6– Действие силы P на систему с двумя степенями свободы

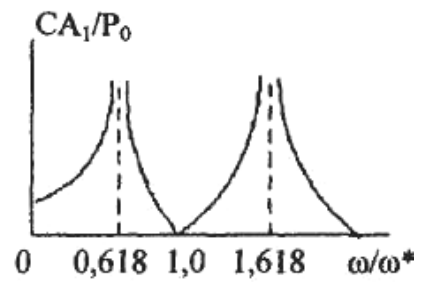


Рис. 7– Зависимость амплитуды колебаний от частоты

Значения резонансов и антирезонанса связаны золотой пропорцией. Первый резонанс происходит при относительной частоте $\omega/\omega^* = 1/\Phi = 0,618$, второй – $\omega/\omega^* = 1,618$, т. е. обе они связаны золотым сечением: $1/\Phi + 1 = \Phi$, а все частоты резонансов $1/\Phi + \Phi^0 + \Phi = 2\Phi$. Наличие антирезонанса практически используется в динамических гасителях колебаний, например, в железнодорожных вагонах. В одной из студенческих научных работ эта задача была усложнена – произведен расчет для трех- и четырехмассовой систем. Резонансы и антирезонансы также были связаны с золотым сечением

Некоторые примеры из механики деформируемого твердого тела, приведенные в книге В. И. Коробко [48]. Так, показано, что поперечный изгиб и свободные колебания балок и пластин, продольные и крутильные свободные колебания балок связаны также с золотой пропорцией.

В технологических процессах различных производств широко используются шланги, работающие под высоким давлением. Такие шланги упрочняют металлическими или полимерными нитями. Однако при их изготовлении возникает задача выбора оптимального угла навивки нитей, при котором шланг обладает максимальной прочностью при минимальном расходе материала нитей. Решение этой оптимизационной задачи методами теории упругости показало, что искомый угол составляет примерно 55° , что практически соответствует разделению квадрата с углом 90° золотым сечением, т. е. $90^\circ/1,618 = 55,62^\circ$.

В монографии белорусского ученого В. Я. Груданова [16] приведены результаты оптимизации многих деталей машин и механизмов с использованием пропорций золотого сечения.

Линия качения колеса по рельсу. Одной из проблем железнодорожного транспорта является проблема взаимодействия колеса и рельса. Как показали исследования автора пособия линия качения колеса по рельсу соответствует золотому сечению [39].

На рис. 8 показан профиль поверхности катания колеса грузовых и пассажирских вагонов. Толщина колеса – 130 мм, а гребня – 33 мм. Средняя линия катания обода приходится в соответствии с государственным стандартом по линии золотого сечения поверхности катания колеса, так как $60/37 = 1,621$.

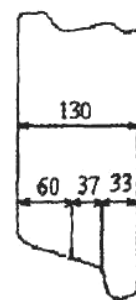


Рис. 8 – Линия качения бандажа колеса

При этом обратим внимание, что если в задаче о вынужденных колебаниях двухмассовой системы золотое сечение получено из теоретического анализа колебаний, то в случае колеса золотое сечение явилось следствием практической оптимизации линии качения бандажа колеса по рельсам.

Стрелочный перевод. На высокоскоростных магистралях железнодорожного транспорта (200 км/ч) применяются стрелочные переводы Р65 М1:11 (число 11 также число Фибоначчи) с крестовиной имеющей подвижный сердечник (рис. 9), представляющий собой участок пути длиной $14,06 + 23,59 = 37,65$ м (между стыками рамного рельса и хвоста крестовины).

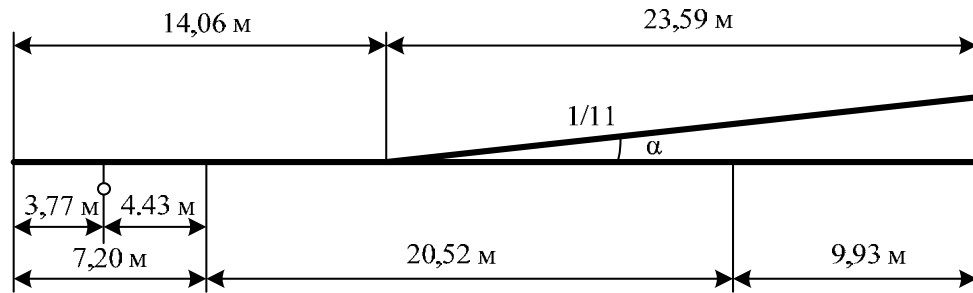


Рис. 9 – План стрелочного перевода Р 65 М 1 : 11

Из рисунка также следует, что $37,65/23,58 = 1,597 \approx \Phi$, $37,65/14,06 = 2,678 \approx \Phi^2$, $23,58/14,06 = 1,677 \approx \Phi$, т. е. размеры стрелочного перевода с небольшой погрешностью соответствуют золотой пропорции. Соотношение размеров зоны горизонтальных возмущений стрелочного перевода также соответствует золотой пропорции $4,43 : 2,77 = 1,599 \approx \Phi$. Проявляется золотая пропорция также в вагонах, предназначенных для высокоскоростных железных дорог. Так общая длина пассажирского вагона составляет 24,54 м, а расстояние между крайними осями тележки равно 19,70 м, т. е. отношение $24,54 : 19,70 = 1,246 \approx \sqrt{\Phi}$.

В учебнике [37] приведен пример использования последовательности Фибоначчи при оптимизации железнодорожных сетей.

Анализ лестничных электрических цепей. Основу моделей электрических цепей составляют канонические Т-, Г-, Г-, Т- и П-образные четырехполюсники. На рис. 10 приведена однородная лестничная цепь, состоящая из трех ($n = 3$) простейших Т-образных четырехполюсников с сопротивлениями $R_1 = R_2 = R$ и нагрузки R_H .

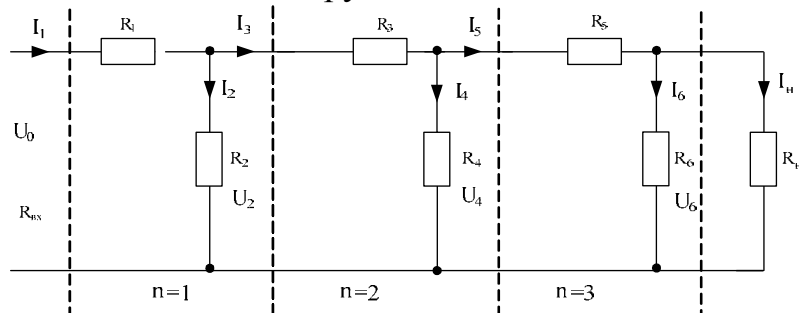


Рис.10 – Простая лестничная цепь

В такой цепи токи (напряжения) в ветвях при нагрузках $R_H = \infty$ (режим холостого хода) и $R_H = 0$ (режим короткого замыкания) определяются отношениям чисел Фибоначчи:

R_H	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
∞	F_6/F_7	F_5/F_7	F_4/F_7	F_3/F_7	F_2/F_7	F_1/F_7
0	F_5/F_6	F_4/F_6	F_3/F_6	F_2/F_6	F_1/F_6	-

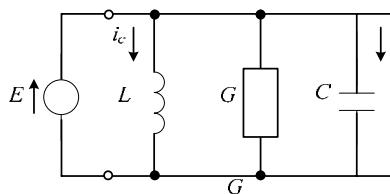
Обратим внимание, что по закону Кирхгофа токи $I_{n+1} = I_n + I_{n-1}$ в узлах цепи соответствуют рекуррентному соотношению чисел Фибоначчи $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Токи цепи $I_1 = I_2 + I_3$, $I_3 = I_4 + I_5$, $I_5 = I_6$. Откуда $I_1 = I_2 + I_4 + I_6 = F_5 + F_3 + F_1$. С учетом того, что сумма n чисел Фибоначчи с нечетными индексами равна F_{2n} , получаем $I_1 = F_6$. Аналогично для напряжения на входе цепи можно записать $U_0 = U_2 + U_4 + U_6 = F_5 + F_3 + F_1$. С учетом того, что сумма чисел Фибоначчи с четными индексами равна F_{2n+1} , получаем $U_0 = F_7$. Если $U_0 = F_7$ и $R_H = \infty$, то токи (напряжения) в продольных и поперечных ветвях будут соответствовать числам последовательности Фибоначчи: $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$; если $U_0 = F_6$ и $R_H = 0$, то числам F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 .

Входное сопротивление цепи $R_{вх} = U_0/I_1$ и в случае холостого хода $R_{вх} = F_7/F_6$ и коротком замыкании $R_{вх} = F_6/F_5$. При $n \rightarrow \infty$ характеристическое сопротивление $Z_x = \sqrt{Z_{xx} Z_{кз}} = F_7/F_5 \rightarrow \Phi$ и входные сопротивления цепей в обоих случаях $R_{вх} \rightarrow \Phi$ стремятся к золотому сечению, а коэффициент передачи $g = U_0/U_6 = F_6$

В случае более сложных Т- и П-образных четырехполюсниках в цепи токи (напряжения) будут связаны с числами Люка, производными и мультирекуррентными числами [51].

Колебательный контур, состоящий из конденсатора C и индуктивности L (рис. 11, а), является одним из распространенных элементов радиотехнических устройств (фильтров, усилителей) [31].

а)



б)

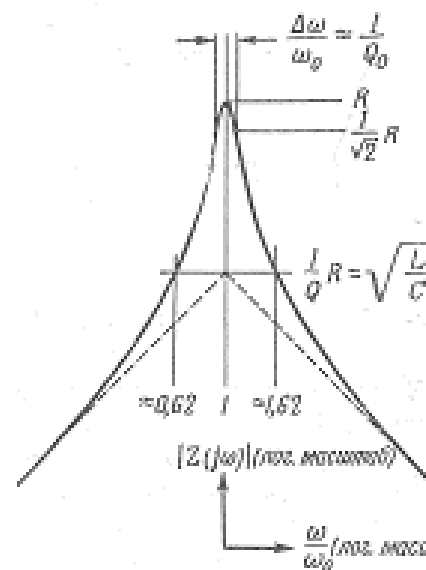


Рис 11 – Параллельно настроенный контур LC (а) и его резонансная характеристика (б)

Для параллельно настроенного резонансного контура LC функция сопротивления Z при большом $Q = 1/R$ приведена на рис. 11, б. Вблизи частоты резонанса нормированная ширина полосы $\Delta\omega/\omega$ примерно равна обратной величине Q (Q – добротность контура). На уровне R/Q нормированная ширина полосы частот $\Delta\omega/\omega$ находится примерно в пределах от 0,62 до 1,62, что соответствуют значениям золотого сечения $1/\Phi$ и Φ [31].

Электрический фильтр – устройство, с помощью которого электрические колебания ограничиваются по спектру определенную полосу частот (нижних частот – ФНЧ, верхних частот – ФВЧ) [34].

Для согласованной работы фильтра с нагрузкой требуется, чтобы его характеристическое сопротивление в полосе пропускания было активным и постоянным, т. е. не зависело от частоты сигнала. Наиболее удовлетворяют этим требования так называемые m -производные фильтры. Их особенностью является то, что характеристические параметры фильтров определяется коэффициентом m . Меняя величину последнего в пределах $0 \leq m \leq 1$ можно изменять как частотную зависимость характеристического сопротивления в полосе пропускания фильтра, так и затухание в полосе непропускания с характерным для них бесконечным затуханием.

На рис. 12 приведена структура и принципиальная схема простейшая Т-образная структура ФНЧ типа m . Если в ФНЧ индуктивность $L_2 = L/4$, то получим соотношение

$$L/4 = [(1-m^2)/4m]/L,$$

которое после преобразования переходит в квадратное уравнение $m^2 + m - 1 = 0$ с корнями $m_1 = 0,618 = 1/\Phi$ и $m_2 = -1,618 = -\Phi$.

Аналогично, если в ФВЧ емкость $C_2 = 4C$, то получим соотношение

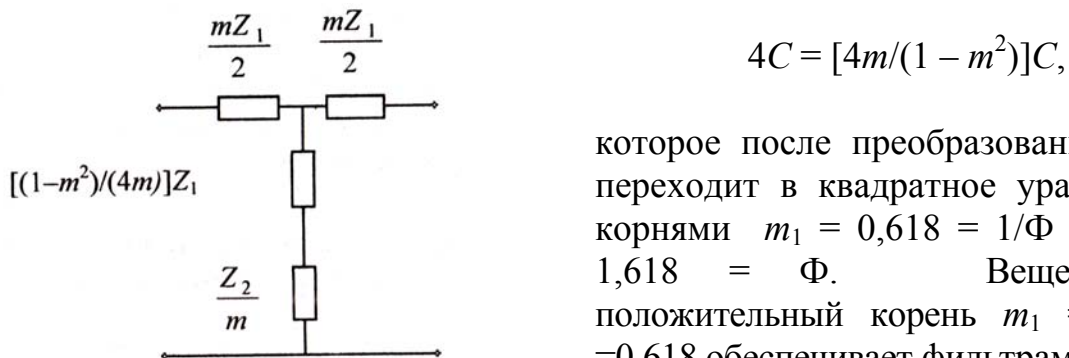


Рис. 12 – Структурная схема фильтра типа m

которое после преобразования также переходит в квадратное уравнение с корнями $m_1 = 0,618 = 1/\Phi$ и $m_2 = -1,618 = -\Phi$. Вещественный положительный корень $m_1 = 1/\Phi = 0,618$ обеспечивает фильтрам ряд особенностей. На рис.13 представлены характеристические сопротивления Т- и П-образных структур ФНЧ в полосе пропускания (m соответственно равно 0 и 1) из которых следует, что с точки зрения передачи сигналов через фильтр оптимальным будет значение $m_1 = 0,618 = 1/\Phi$. При этом кривая характеристического сопротивления наименее отклоняется от постоянного значения относительного сопротивления нагрузки $R_n = 1$.

Т- и П-образных структур ФНЧ в полосе пропускания (m соответственно равно 0 и 1) из которых следует, что с точки зрения передачи сигналов через фильтр оптимальным будет значение $m_1 = 0,618 = 1/\Phi$. При этом кривая характеристического сопротивления наименее отклоняется от постоянного значения относительного сопротивления нагрузки $R_n = 1$.

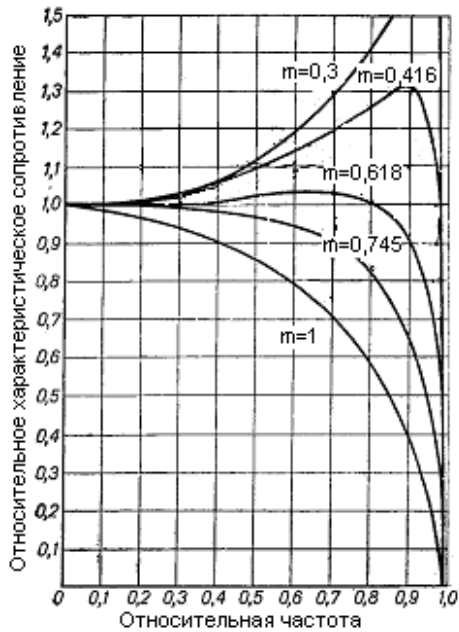


Рис. 13 – Изменение характеристического сопротивления ФНЧ

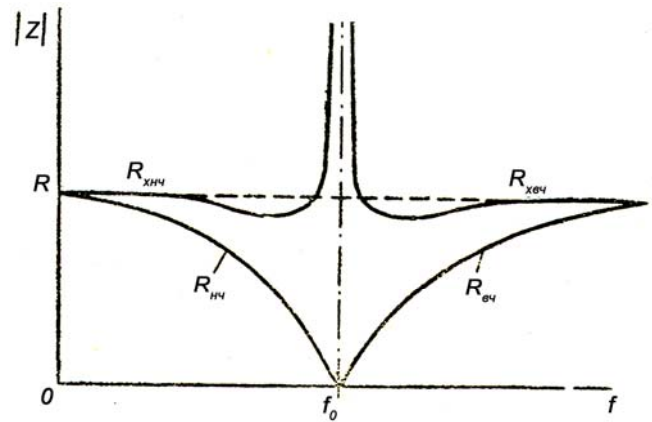


Рис. 14 – Изменение характеристического сопротивления ФНЧ и ФВЧ

На оптимальные зависимости характеристического сопротивления и затухания фильтров при $m = 0,618$ обращали внимание многие авторы, однако никто из них не увидел в этом проявление золотого сечения [21, 28].

Для согласования параллельной работы ФНЧ и ФВЧ необходимо в схемы фильтров включить дополнительные элементы X , чтобы характеристические сопротивления $R_{\text{ФНЧ}}$ и $R_{\text{ФВЧ}}$ незначительно влияли друг на друга, а общее характеристическое сопротивление $R_{\text{ФНЧ}}$ и $R_{\text{ФВЧ}}$ минимально отклонялись от постоянного значения R (рис. 14).

В одной из первых работ В. Н. Листова [32] было показано, что для оптимизации условий передачи сигналов при параллельной работе «конденсаторного» (ФНЧ) и «дрессельного» (ФВЧ) фильтров необходимо ввести в схему корректирующую цепь с сопротивлением

$$R_K = \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}\right) \sqrt{\frac{L_K}{C_K}} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \sqrt{\frac{L_K}{C_K}}.$$

Для случая положительного значения $R_K = 0,618$ установлено, что оптимальные значения корректирующей индуктивности L_K и емкости C_K также связаны с золотым сечением и соответственно равны:

$$L_K = \frac{R}{1,618\omega_s}, \quad C_K = \frac{1,618}{R\omega_s}.$$

Профессором В. Н. Листовым было выполнено также решение задачи согласования параллельной работы ФНЧ и ФВЧ Т-образных схем с помощью так называемого Х-образного окончания [32]. Из решения было

получено, что X -образное окончание должно быть равно $X = 0,809 = \Phi/2$, а коэффициент $M = (2X - 1) = 0,618$. При этом ФНЧ и ФВЧ наиболее согласованы на параллельную работу по отношению к общей нагрузке. Проявление золотого сечения (того, что “греки именовали золотым делением”) как в фильтрах m -структур, так и X -образных окончаниях профессор В. Н. Листов отметил в 1963 г. [31].

Гармонизация стандартов. В процессе производственной деятельности важная роль отводится модульности параметров и размеров отдельных элементов и изделий, которая способствует их унификации и выполнению антропометрических требований (соответствующих системам предпочтительных чисел и пропорций), принятых для всех областей промышленности, строительства, железнодорожного транспорта, телекоммуникаций и др. При этом возникает проблема выбора и обоснования их базовых размерностей. По этому поводу немецкие ученые Э. Мушек и П. Мюллер отмечали: «субъективные оценки в проектно-конструкторских работах и промышленности часто присутствуют в неконтролируемой форме. Они проявляются в произвольных, зачастую лишь словесно описанных предложениях, которые, с одной стороны, освобождают исследователя от анализа влияния различных факторов. Даже в стандартах встречаются такие субъективные установленные параметры, коэффициенты и допущения, не имеющие никакого серьезного обоснования. Иногда вопрос о правильности таких предложений всплывает через годы, и нет никакой возможности восстановить, на основе чего и как они были сформулированы...» [50]. Для стандартизации в различных областях науки и техники в качестве базовых используются системы предпочтительных чисел (СПЧ) [40]. На их основе возможно построение параметрических рядов изделий, увязывать и унифицировать их параметры между собой, оптимизировать основные технико-экономические характеристики и др. Наиболее часто в основе СПЧ лежат числа $3,15 \approx \pi$, $\sqrt{10} \approx 1,6$, $\sqrt{2} \approx 1,41$ и др.

Использование пропорции золотого сечения в шведском стандарте «Гастронорм» рассмотрено в работе [29]. Система «Гастронорм» одобрена Британским институтом стандартов и устанавливает размеры оборудования, функциональных емкостей, контейнеров и стеллажей. В работе [51] на основе золотого сечения предлагается установить гармоничную систему волновых сопротивлений цепей связи.

В монографии С. А. Ясинского «Золотое сечение в стандартизации и теории измерения» [50] приводится более подробный анализ создания СПЧ, а также исследования теоретических проблем построения стандартов на основе золотой пропорции.

Литература

1. Семенюта Н. Ф. Математика гармонии: Общие вопросы, рекуррентные и

мультирекуррентные последовательности, решения рекуррентных соотношений / «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ.6778.24.08.2011. <http://www.trinitas.ru./rus/doc/0232/004a/02321108.htm>

2. **Лакатос И.** Процедура доказательства в современном математическом анализе / Вопросы философии . 2009.– № 8. – С. 43–47.

3. **Балагин И. Я., Кудряшов В. А., Семенюта Н. Ф.** / Передача дискретной информации и телеграфия. – М.: Трансжелдориздат. 1971. – 352 с.

4. **Кудряшов В. А., Семенюта Н. Ф.** / Передача дискретной информации на железнодорожном транспорте.. – М.: Транспорт, 1986. – 293 с

5. **Семенюта Н. Ф., Здоровцов И. А.** / История электрической связи на железнодорожном транспорте (прошлое, настоящее, будущее). – М.: ГОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте». 2008. – 324 с.

6. **Харкевич А. А.** Борьба с помехами / – М.: Физматгиз, 1963. – 276 с.

7. **Харкевич А. А.** Теория информации. Оpoznание образов: В 3 т. / – М.: Наука, 1973. – 524 с.

8. **Котов П. А., Сергиевский Б. Р., Городничин. Н. Т.** / Основы теории и техники телеграфной связи.– Л.: ВКАС. 1964. – 573 с.

9. **Котов П. А.** Повышение достоверности передачи цифровой информации / – М.: Связь, 1966. – 184 с.

10. **Хагельбаргер Д. В.** Рекуррентные коды / BSTJ. – Июль, – 1959.

11. **Финк, Л. М.** Теория передачи дискретных сообщений / – М.: Советское радио, 1963.

12. **Марков А. А.** Нерекуррентное кодирование / Проблемы кибернетики. 1962. – Вып.8. – С.169–186.

13. **Стахов А. П.** Введение в алгоритмическую теорию изменений / – М.: Сов. радио, 1977. – 228 с.

14. **Стахов А. П.** Алгоритмическая теория измерений / – М.: Знание, 1979. – 64 с.

15. **Стахов А. П.** “Фибоначчиевы” двоичные позиционные системы счисления / Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи. – М.: Наука, 1986. – С. 155–179.

16. **Стахов, А. П.** Коды золотой пропорции / – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

17. **Стахов А. П.** Золотая пропорция в науке: от Пифагора к современным компьютерам. Помехоустойчивые коды / – М.: Знание, 1989. – 75 с.

18. **Stakhov A.** The Mathematics of Harmony – From Euclid to comtemporary Mathematics and Computer Science / World Scientific. 2009. – 676 с.

19. **Кодирование данных в информационно-регистрирующих системах / А. П.Стахов и др.** – Киев: Техника, 1985. – 126 с.

20. **Питерсон У. У.** Коды, исправляющие ошибки / – М. : Мир, 1964. – 645 с.

21. **Борисенко А. А.** Введение в теорию биномиального счета / – Сумы: ИТД «Университетская книга». 2004. – 88 с.

22. **Брусиловский М. А.** Измерения искажений импульсов в системах передачи дискретной информации / – М.: Наука, 1969. – 123 с.

23. **Kautz W.** Fibonacci Codes for Synchronization Control / IEEE Transactions on Information Theory. – April, 1965. – P. 284–292.

24. **Мешковский, К. А.** Помехоустойчивые коды / Электросвязь. – 1957. – № 8.

25. **Мешковский К. А., Кириллов Н. А.** Кодирование в технике связи / – М.: Связь, 1966. – 324 с.

26. **Семенюта Н. Ф.** Корректирующие коды систем передачи дискретной информации на железнодорожном транспорте / – Гомель: БелИИЖТ. 1975. – 69 с.

27. **Петухов С. В.** Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость / – М.-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 316 с.

28. **Тимошенко С. П.** История науки о сопротивлении материалов. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 536 с.

29. **Груданов В. Я., Глущенко Л. Ф., Климович В. В.** Совершенствование конструкций машин и аппаратов пищевых производств / – Минск: Минсельхозпродукт. 1996. – 248 с.

- 30. Груданов В. Я.** «Золотая» пропорция в инженерных задачах / – Могилев: МГУ им.А. А. Кулешова. 2006. – 288 с.
- 31. Мэзон С., Циммерман Г.** Электронные цепи, сигналы и системы / – М.: Изд-во иностран. лит, 1963. – 620 с.
- 32. Листов В. Н.** Элементарная теория синтеза фильтров. – М.: Трансжелдориздат, 1963. – 170 с.
- 33. Листов В. Н.** Обобщенная теория синтеза специальных электрических фильтров / – Л. : ЛИИЖТ, 1936. – 116 с.
- 34. Листов, В. Н.** Дальняя связь / – М.: Транспорт, 1964. – 472 с.
- 35. Ефимов, И. Е.** Радиочастотные кабели / Электросвязь, 1995. – № 12. – С. 45–47.
- 36. Елейникова Л. С.** Тепловые четырехполюсники / – Минск: Наука и техника, 1976. – 96 с.
- 37. Изыскание и проектирование железных дорог:** под ред. Я. В. Турбина / – М. : Транспорт, 1989. – 149 с.
- 38. Семенюта Н. Ф.** Золотое сечение в теории электрической связи . 25 лет инфокоммуникационной революции / Инфокоммуникации XXI века: под ред Л. Е. Варакина. – М.: Междунар. акад. связи, 2006. Т. V. – С.231–262.
- 39. Семенюта Н. Ф., Михаленко В. Л.** Золотая пропорция в природе и искусстве / – Гомель : БелГУТ, 2002. – 82 с.
- 40. Ткаченко В. В.** Основы стандартизации. / – М.: Изд-во стандартов, 1986. – 328 с
- 41. Собенин Я. А.** Расчет полиномиальных фильтров / – М.: Связьиздат, 1963. – 213 с.
- 42. Самойленко С. И.** Помехоустойчивое кодирование / – М.: Наука, 1966. – 240 с.
- 43. Справочник по инженерной психологии:** под ред. Б. Ф. Ломова / – М. : Машиностроение, 1982. – 368 с.
- 44. Титова Е. М., Буров И. И.** Применение помехоустойчивого кодирования в системах связи на железнодорожном транспорте / Информационные технологии на железнодорожном транспорте: доклады XIV Междун. науч.-практ. конф. / – СПб.: ПГУПС, 2010. – С. 173–179.
- 45. Удалов А. П. Супрун Б. А.** Избыточное кодирование при передаче двоичной информации / – М.: Связь, 1964.
- 46. Хэмминг Р. В.** Коды с исправлением и обнаружением ошибок:: сб. статей под ред. А. М. Петровского. – М.: Наука, 1956.
- 47. Шастова Г. А.** Кодирование и помехоустойчивость передачи телемеханической информации / – М.: Энергия, 1966.
- 48. Коробко В. И.** Золотая пропорция и проблемы гармонии систем / – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998. – 373 с.
- 49. Якушко С. И.** «Фибоначчиева» закономерность в периодической системе элементов Д. И. Менделеева
- 50. Ясинский С. А.** «Золотое» сечение в стандартизации и теории измерения / – СПб.: ВАС, 2008. – 160 с.
- 51. Семенюта, Н. Ф.** Анализ линейных электрических цепей методом лестничных чисел / – Гомель : БелГУТ, 2010. – 108 с.
- 52. Bergman G.** A number system with an irrational base / Mathematics Magazine, – 1957. – № 31. – P. 98–119.