В.Л. Владимиров

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ КАССИНИ НА ЛЮБУЮ РЕКУРСИЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА С УНИФИЦИРОВАННЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Содержание:

Наука всегда оказывается не права.
Она не в состоянии решить ни одного вопроса,
не поставив при этом десятка новых.
Д. Б. Шоу

Самое оригинальное и одно из самых
нравственных чувств нашего века, века науки,
это чувство искреннего сомнения.
Ж. Гюйо

Национальной науки нет, как нет
национальной таблицы умножения.
А. Чехов

Целью данной работы является доказательство и демонстрация того, что формулы Кассини можно обобщить на любую рекурсию 2-го порядка. При условии, что начальные условия («затравочные числа») унифицированы таким образом, как это сделано в работе [1].

Первый, решающий шаг в достижении этой цели был сделан всего пару недель назад А.П. Стаховым в работе «Теория λ-чисел Фибоначчи» [2].

1. Формула Кассини применима и для лямбда-чисел Фибоначчи (А.П. Стахов)

Итак, в статье [2] показана связь лямбда-чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля и методом индукции доказано, что для лямбда-чисел Фибоначчи существует формула Кассини, которая аналогична формуле для классических чисел Фибоначчи:

***Квадрат любого λ-числа Фибоначчи $F_\lambda(n)$ всегда отличается от произведения двух соседних λ-чисел Фибоначчи $F_\lambda(n-1)$ и $F_\lambda(n+1)$, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от четности числа n; если число n является четным, то 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом*.**

Результат меня заинтересовал и заинтриговал. Почему формула Кассини для классических чисел Фибоначчи также справедлива и для других чисел, но только именно для **лямбда-чисел Фибоначчи**? Что общего между классическими числами Фибоначчи и лямбда-числами Фибоначчи?

Очевидно, ответ на эти вопросы скрывался именно в этой таинственной общности.

Действительно, общность есть. Сравним рекурсию $\mathbf{f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$ для классических чисел Фибоначчи и рекурсию $\mathbf{f_{n+2}=\lambda\cdot f_{n+1}+f_n}$ для лямбда-чисел Фибоначчи. Если вспомнить, что согласно теореме Виета общий вид рекурсии 2-го порядка – это $f_{n+2}=(x_1+x_2)\cdot f_{n+1}-(x_1\cdot x_2)\cdot f_n$, то становится очевидным, что и для классических чисел Фибоначчи, и для лямбда-чисел Фибоначчи имеем

$$-x_1 \cdot x_2 = 1.$$

А что будет, если $-x_1 \cdot x_2 \neq 1$? Очевидно, в правой части формулы Кассини вместо единицы тогда должно фигурировать произведение аттракторов $x_1 \cdot x_2$. В следующем пункте мы найдем подтверждение этому предположению.

2. Обобщение формулы Кассини для «разностных рядов» с $f_0=0$, $f_1=1$

Детективная история с формулой Кассини для чисел Фибоначчи [3, стр. 53]

$$\mathbf{F_{n-1} \cdot F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^n}$$

была легко распутана с помощью метода математической индукции.

В результате доказана приведенная ниже Теорема А.

Теорема А.

Если $f_0=0$, $f_1=1$, то для любого целого $n \geq 1$ в числовой последовательности, соответствующей рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, справедливо равенство $(f_n)^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (x_1 \cdot x_2)^{n-1}$.

Вторая, словесная формулировка Теоремы А:

Разность квадрата любого n-го ($n \geq 1$) члена любой числовой последовательности с $f_0=0$, $f_1=1$, соответствующей рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, и произведения двух соседних членов этой последовательности всегда равна (n–1)-ой степени произведения аттракторов $x_1 \cdot x_2$.

Доказательство Теоремы А.

Докажем Теорему индукцией по n.

Проверим справедливость основного уравнения $(f_n)^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (x_1 \cdot x_2)^{n-1}$ Теоремы при **n=1**:

$(f_1)^2 - f_0 \cdot f_2 = (x_1 \cdot x_2)^0$, или $(1)^2 - 0 \cdot f_2 = (x_1 \cdot x_2)^0$,

то есть в результате получаем тождество 1=1. База индукции доказана.

Далее предположим, что основное уравнение $(f_n)^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (x_1 \cdot x_2)^{n-1}$ справедливо для любого заданного целого n и докажем, что в этом случае уравнение справедливо и для n+1.

Для **n+1** основное уравнение данной Теоремы выглядит так:

$(f_{n+1})^2 - f_n \cdot f_{n+2} = (x_1 \cdot x_2)^n$.

Рассмотрим левую часть последнего уравнения (для n+1) с учетом теоремы Виета и очевидных для рекурсии 2-го порядка равенств

$f_{n+2} = (x_1 + x_2) \cdot f_{n+1} - (x_1 \cdot x_2) \cdot f_n$; $\qquad f_{n+1} = (x_1 + x_2) \cdot f_n - (x_1 \cdot x_2) \cdot f_{n-1}$.

Итак,

$\mathbf{(f_{n+1})^2 - f_n \cdot f_{n+2}} = (f_{n+1})^2 - f_n \cdot [(x_1 + x_2) \cdot f_{n+1} - (x_1 \cdot x_2) \cdot f_n] = (f_{n+1})^2 - (x_1 + x_2) \cdot f_n \cdot f_{n+1} + (x_1 \cdot x_2) \cdot (f_n)^2 =$
$f_{n+1} \cdot [f_{n+1} - (x_1 + x_2) \cdot f_n] + (x_1 \cdot x_2) \cdot (f_n)^2 = -(x_1 \cdot x_2) \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1} + (x_1 \cdot x_2) \cdot (f_n)^2 =$
$x_1 \cdot x_2 \cdot [(f_n)^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1}] = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 \cdot x_2)^{n-1} = \mathbf{(x_1 \cdot x_2)^n}$.

Таким образом, мы доказали, что если справедливо уравнение $(f_n)^2 - f_{n-1} \cdot f_{n+1} = (x_1 \cdot x_2)^{n-1}$, то справедливо и уравнение $(f_{n+1})^2 - f_n \cdot f_{n+2} = (x_1 \cdot x_2)^n$.

Следовательно, по методу индукции Теорема А доказана.

Следствие Теоремы А.

Для «золотой» рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ имеем $x_1=Ф$ и $x_2= –Ф^{–1}$, а начальным условиям (0; 1) соответствует ряд Фибоначчи, состоящий из чисел $\mathbf{F_n}$.

И, поскольку $x_1 \cdot x_2= –1$, **Теорема А** для $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ вырождается в свой частный случай, а именно, в известную формулу Кассини для чисел Фибоначчи [3, стр. 53]:

$(f_n)^2–f_{n–1}\cdot f_{n+1}=(x_1\cdot x_2)^{n–1}$; $(F_n)^2–F_{n–1}\cdot F_{n+1} =(–1)^{n–1}$;
$–[(F_n)^2–F_{n–1}\cdot F_{n+1}] = – (–1)^{n–1}$; $\mathbf{F_{n–1}\cdot F_{n+1}–(F_n)^2 =(–1)^n}$.

Формула Кассини для чисел Фибоначчи – это частный случай доказанной в данной статье для любых рекурсий 2-го порядка Теоремы А.

Пример к Теореме А.

В рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+6\cdot f_n$ аттракторы равны $x_1=3$; $x_2= – 2$. Произведение аттракторов равно $x_1\cdot x_2= – 6$.

При НУ (0;1) числовой ряд такой рекурсии – это **0; 1; 1; 7; 13; 55; 133; …**

Согласно Теореме А должно быть справедливым равенство $(f_n)^2–f_{n–1}\cdot f_{n+1}=(x_1\cdot x_2)^{n–1}$.

Действительно, подставляя в это равенство конкретные данные,
при n=1 имеем $(1)^2–0\cdot 1=(– 6)^0$, или 1=1;
при n=2 имеем $(1)^2–1\cdot 7=(– 6)^1$, или – 6= – 6;
при n=3 имеем $(7)^2–1\cdot 13=(– 6)^2$, или 36=36;
при n=4 имеем $(13)^2–7\cdot 55=(– 6)^3$, или –216= –216;
при n=5 имеем $(55)^2–13\cdot 133=(– 6)^4$, или 1296=1296.

3. Обобщение формулы Кассини для «суммарных рядов» с $f_0=2$, $f_1=x_1+x_2$

Покажем, что формула Кассини для чисел Люка – это тоже частный случай более общей Теоремы В для любых рекурсий 2-го порядка.

Теорема В.

Если $f_0=2$, $f_1=x_1+x_2$, то для любого целого $n\geq 1$ в числовой последовательности, соответствующей рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, справедливо равенство
$$\mathbf{(f_n)^2–f_{n–1}\cdot f_{n+1} = – (x_1\cdot x_2)^{n–1}\cdot (x_1–x_2)^2.}$$

Вторая, словесная формулировка Теоремы В:

Разность квадрата любого n-го ($n\geq 1$) члена любой числовой последовательности с $f_0=2$, $f_1= x_1+x_2$, соответствующей рекурсии 2-го порядка с аттракторами x_1 и x_2, и произведения двух соседних членов этой последовательности всегда равна взятой со знаком минус (n–1)-ой степени произведения аттракторов $x_1\cdot x_2$, умноженной на квадрат разности этих аттракторов.

Доказательство Теоремы В.

Докажем Теорему индукцией по n.

Учтем, что согласно Теореме 2 из [1] для рекурсивной числовой последовательности с $f_0=2$, $f_1=x_1+x_2$ имеем $f_2=x_1^2+x_2^2$.

Проверим справедливость основного уравнения $(f_n)^2–f_{n–1}\cdot f_{n+1}= – (x_1\cdot x_2)^{n–1}\cdot (x_1–x_2)^2$ Теоремы для **n=1**:

$(f_1)^2–f_0·f_2= – (x_1·x_2)^0·(x_1–x_2)^2;$
$(x_1+x_2)^2–2·(x_1^2+x_2^2)= – (x_1–x_2)^2;$
$2x_1x_2–x_1^2–x_2^2=2x_1x_2–x_1^2–x_2^2.$

В результате получено тождество. База индукции доказана.

Далее предположим, что основное уравнение $(f_n)^2–f_{n–1}·f_{n+1}= – (x_1·x_2)^{n–1}·(x_1–x_2)^2$ справедливо для любого заданного целого n и докажем, что в этом случае уравнение справедливо и для n +1.

Для **n+1** основное уравнение данной Теоремы выглядит так:

$(f_{n+1})^2–f_n·f_{n+2}= – (x_1·x_2)^n·(x_1–x_2)^2.$

Рассмотрим левую часть последнего уравнения (для n+1) с учетом теоремы Виета и очевидных для рекурсии 2-го порядка равенств

$f_{n+2}=(x_1+x_2)·f_{n+1}–(x_1·x_2)·f_n;$ $\quad f_{n+1}=(x_1+x_2)·f_n–(x_1·x_2)·f_{n–1}.$

Итак,

$\mathbf{(f_{n+1})^2–f_n·f_{n+2}}=(f_{n+1})^2–f_n·[(x_1+x_2)·f_{n+1}–(x_1·x_2)·f_n]=(f_{n+1})^2–(x_1+x_2)·f_n·f_{n+1}+(x_1·x_2)·(f_n)^2 =$
$f_{n+1}·[f_{n+1}–(x_1+x_2)·f_n]+(x_1·x_2)·(f_n)^2 = – (x_1·x_2)·f_{n–1}·f_{n+1}+(x_1·x_2)·(f_n)^2 =$
$x_1·x_2·[(f_n)^2–f_{n–1}·f_{n+1}]= x_1·x_2·[– (x_1·x_2)^{n–1}·(x_1–x_2)^2]= \mathbf{– (x_1·x_2)^n·(x_1–x_2)^2}.$

Таким образом, мы доказали, что если справедливо уравнение

$(f_n)^2–f_{n–1}·f_{n+1}= – (x_1·x_2)^{n–1}·(x_1–x_2)^2,$

то справедливо и уравнение

$(f_{n+1})^2–f_n·f_{n+2}= – (x_1·x_2)^n·(x_1–x_2)^2.$

Следовательно, по методу индукции Теорема В доказана.

Следствие Теоремы В.

Для «золотой» рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ имеем $x_1=Φ$ и $x_2= –Φ^{–1}$, а начальным условиям (2; x_1+x_2) соответствует ряд Люка, состоящий из чисел $\mathbf{L_n}$.

И, поскольку $x_1·x_2= –1$; $x_1–x_2=\sqrt{5}$, **Теорема В** для рекурсии $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ вырождается в свой частный случай, а именно, в известную формулу Кассини $(L_n)^2–L_{n–1}·L_{n+1}=5·(–1)^n$ для чисел Люка [7, стр. 53]:

$(f_n)^2–f_{n–1}·f_{n+1}= – (x_1·x_2)^{n–1}·(x_1–x_2)^2;$ $\quad (L_n)^2–L_{n–1}·L_{n+1} = – (–1)^{n–1}·(Φ+Φ^{–1})^2;$

$(L_n)^2–L_{n–1}·L_{n+1} = – 5·(–1)^{n–1};$ $\quad \mathbf{(L_n)^2–L_{n–1}·L_{n+1} = 5·(–1)^n}.$

Формула Кассини для чисел Люка – это частный случай доказанной в данной статье для любых рекурсий 2-го порядка Теоремы В.

Пример к Теореме В.

В рекурсии 2-го порядка $f_{n+2}=f_{n+1}+6·f_n$ аттракторы (корни приведенного характеристического уравнения $x^2–x–6=0$) равны $x_1=3$; $x_2= – 2$. Произведение аттракторов равно $x_1·x_2= – 6$; сумма аттракторов $x_1+x_2=1$; $(x_1–x_2)^2=25$.

При НУ (2;1) числовой ряд такой рекурсии – это **2; 1; 13; 19; 97; 211; 793; …**

Согласно Теореме В должно быть справедливым равенство

$(f_n)^2–f_{n–1}·f_{n+1}= – (x_1·x_2)^{n–1}·(x_1–x_2)^2.$

Действительно,

при n=1 имеем $(1)^2–2·13= –25·(– 6)^0$, или –25= –25;
при n=2 имеем $(13)^2–1·19= –25·(– 6)^1$, или 150=150;
при n=3 имеем $(19)^2–13·97= –25·(– 6)^2$, или –900= –900;
при n=4 имеем $(97)^2–19·211= –25·(– 6)^3$, или 5400=5400;
при n=5 имеем $(211)^2–97·793= –25·(– 6)^4$, или –32400= –32400.

4.Заключение: пусть ЗС славится истинно «золотыми» свойствами

Таким образом, показано, что формула Кассини для чисел Фибоначчи – это частный случай доказанной в данной статье для любых рекурсий 2-го порядка Теоремы А, а формула Кассини для чисел Люка – это частный случай доказанной в данной статье для любых рекурсий 2-го порядка Теоремы В.

В настоящее время идет пересмотр свойств ЗС. Многие свойства ЗС оказываются вовсе не уникальными. **Многие формулы и теоремы для чисел Фибоначчи и Люка оказались частными случаями более общих формул и теорем**.

Нужно ли сокрушаться по этому поводу?

Ни в коем случае! Ведь в цепи последовательных (иногда еле заметных) приближений в описании природы постоянно намечаются новые тенденции, новые пути.

Вот и в математике гармонии идёт постоянное уточнение тех свойств, которые присущи ЗС и только ЗС. Прежде всего – это максимальная энтропия и **максимальная информация**. Вот о последней и готовится новая подробная публикация.

Литература:

1. В.Л. Владимиров, А.П. Стахов, Об унификации числовых рядов рекурсий второго порядка // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17350, 07.03.2012
2. А.П. Стахов, Теория λ -чисел Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17407, 05.04.2012
3. Scott Olsen. The golden section. Nature`s greatest secret. Walker&Company, New York, 2006.