А.П. Стахов

Оценка деятельности Славянской «золотой» группы в статье Президента ISIS-Symmetry Денеша Надя (Denes Nagy)

1. Введение

В 2007 г. издательство Львовской Национальной Академии Искусств опубликовало книгу «The Way to Harmony: ART+MATHEMATICS” («Путь к гармонии: ИСКУССТВО+МАТЕМАТИКА»), посвященную 60-летию известного украинского ученого, члена Международного Клуба Золотого Сечения, доктора искусствоведения Олега Ярославовича Боднара, профессора этой Академии. В прекрасно иллюстрированной книге объемом 444 с. опубликовано ряд статей, посвященных золотому сечению, в том числе статья Олега Боднара «Динамическая симметрия в природе и архитектуре» [1], статья известного российского исследователя в области «золотого сечения» Олега Черепанова [2], а также две моих статьи [3,4].

Но ключевой статьей книги стала великолепная статья (55 страниц) выдающегося ученого современности, основателя и президента Международного общества междисциплинарного изучения симметрии ISIS-symmetry (International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry) профессора Денеша Надя (Denes Nagy) [5]. Статья написана на английском языке и называется «Three “Golden Waves”: a Social-political and Cultural History of the Golden Section (Glitters in Russian and Ukrainian)» («Три «золотые волны»: социально-политическая и культурная история золотого сечения (блестящие речи, написанные на русском и украинском языках)».

Статья представляет огромную ценность для ученых в области золотого сечения, пишущих на русском и украинском языках. Историческое значение статьи состоит в том, что в ней впервые изложена обстоятельная история развития «золотосеченского направления» в России, Советском Союзе и на постсоветском пространстве, начиная с 19 в. и до настоящего времени. Однако, наибольший интерес для членов Международного Клуба Золотого Сечения представляет оценка деятельности так называемой Славянской «золотой» группы, представленная в части 3 «Третья волна золотого сечения в искусстве и науке: больше «золота» в российских и украинских исследователей в последней декаде XX века (от момента золотого сечения в 1962 г. до 2000 г.)»

Цель настоящей статьи – изложить краткую историю создания и деятельности «Славянской «золотой» группы», изложить оценку этой деятельности, приведенную в статье Денеша Надя, и подвести итоги развития «золотосеченского движения» на постосоветском пространстве в 21-м веке.

2. Краткая история «теории чисел Фибоначчи» в лицах

2.1. Фибоначчи

С понятием «средневековье» в нашем сознании ассоциируется разгул инквизиции, костры, на которых сжигали ведьм и еретиков, крестовые походы за «телом господним». Наука в те времена явно не находилась «в центре внимания общества». В этих условиях появление книги по математике “Liber abaci” («Книга об абаке»), написанной в 1202 году итальянским математиком Леонардо из Пизы (по прозвищу Фибоначчи), явилось важным событием в «научной жизни общества».

Леонардо из Пизы (Фибоначчи)

О жизни Фибоначчи известно немного. Неизвестна даже точная дата его рождения. Предполагается, что Фибоначчи родился в восьмой декаде 12-го столетия (предположительно в 1170 г.). Его отец был купцом и государственным чиновником, представителем нового класса бизнесменов, порожденных «Коммерческой Революцией». В то время Пиза была одним из крупнейших коммерческих центров, активно сотрудничавших с исламским Востоком, и отец Фибоначчи активно торговал в одной из факторий, основанных итальянцами на северном побережье Африки. Благодаря этому обстоятельству ему удалось «пристроить» своего сына, будущего математика Фибоначчи, в одно из арабских учебных заведений, где он смог получить неплохое для того времени математическое образование.

Один из известных историков математики Морис Кантор назвал Фибоначчи «блестящим метеором, промелькнувшим на темном фоне западно-европейского средневековья». Фибоначчи написал несколько математических сочинений: “Liber abaci”, “Liber quadratorum”, “Practica geometriae”. Наиболее известным из них является “Liber abaci”. Это сочинение вышло при жизни Фибоначчи в двух изданиях в 1202 г. и 1228 г. Книга состоит из 15 разделов. Заметим, что Фибоначчи задумывал свое сочинение как пособие для купцов, однако по своему значению оно вышло далеко за пределы торговой практики и по существу представляло своеобразную математическую энциклопедию эпохи средневековья. С этой точки зрения особенный интерес представляет 12-й раздел, в котором Фибоначчи сформулировал и решил ряд математических задач, представляющих интерес с точки зрения общих перспектив развития математики. Этот раздел занимает почти третью часть сочинения и, по-видимому, ему Фибоначчи придавал наибольшее значение и в нем проявил наибольшую оригинальность.

Хотя Фибоначчи был одним из наиболее ярких математических умов в истории западноевропейской математики и внес огромный вклад в ее развитие, однако его вклад в математику незаслуженно принижен. Наиболее убедительно значение математического творчества Фибоначчи для математики отмечено русским математиком проф. А.В. Васильевым в его книге «Целое число» (1919 г.):

«Сочинения ученого пизанского купца были настолько выше уровня математических знаний даже ученых того времени, что их влияние на математическую литературу становится заметным только через два столетия после его смерти в конце 15-го века, когда многие из его теорем и задач вводятся другом Леонардо да Винчи, профессором многих итальянских университетов Лукою Пачоли в его сочинениях и в начале 16-го века, когда группа талантливых итальянских математиков: Сципион дель Ферро, Иероним Кардано, Тарталия, Феррари решением кубического и биквадратного уравнения положили начало высшей алгебре».

Из этого высказывания вытекает, что Фибоначчи почти на два столетия опередил западноевропейских математиков своего времени. Подобно Пифагору, который получил свое «научное образование» у египетских и вавилонских жрецов и затем способствовал передаче полученных знаний в греческую науку, Фибоначчи получил свое математическое образование в арабских учебных заведениях и многие из полученных там знаний, в частности, арабо-индусскую десятичную систему счисления, он попытался «внедрить» в западноевропейскую науку. И подобно Пифагору, историческая роль Фибоначчи для западного мира состояла в том, что он своими математическими книгами способствовал передаче математических знаний арабов в западноевропейскую науку и тем самым заложил основы для дальнейшего развития западноевропейской математики.

Фибоначчи сделал важное математическое открытие, которое в дальнейшем сыграло большую роль в развитии математической теории гармонии. Решая «задачу о размножении кроликов», Фибоначчи пришел к рекуррентной числовой последовательности, получившей название числа Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Каждый член этой последовательности равен сумме двух предыдущих. Позже оказалось, что эта последовательность очень часто встречается в природе, в частности, в ботанике и лежит в основе ботанического явления филлотаксиса.

2.2. Люка и Бине

Фибоначчи не стал изучать математические свойства полученной им числовой последовательности – чисел Фибоначчи. Это за него сделали другие математики. Начиная с 19 в., математические работы, посвященные свойствам чисел Фибоначчи, по остроумному выражению одного математика «начали размножаться как фибоначчиевые кролики». Лидером этих исследований в 19-м веке стали французские математики Люка и Бине.

Люка Франсуа Эдуард Анатоль родился в 1842 г. и умер в 1891 г. в результате несчастного случая, возникшего на банкете, когда осколки разбитой тарелки поранили его щеку. Люка умер от заражения несколько дней спустя.

Люка Франсуа Эдуард Анатоль (1842 – 1891)

Важнейшие математические работы Люка относятся к теории чисел и неопределенному анализу. С точки зрения «гармоничной математики" его наиболее важными научными достижениями являются: введение самого понятия «числа Фибоначчи», а также введение понятия «обобщенные числа Фибоначчи», которые задаются тем же рекуррентным соотношением, что и классические числа Фибоначчи, но вычисляются при других начальных условиях. Он показал, что среди «обобщенных чисел Фибоначчи», кроме классических чисел Фибоначчи, особую роль играет еще одна числовая последовательность, названная **числами Люка**: 1,3,4,7,11,18,29,47, ...

Пожалуй, наиболее важной работой Люка в области «теории чисел Фибоначчи» является статья **«The Theory of Simply Periodic Numerical Functions»** [6]. Эта статья переопубликована Фибоначчи-Ассциацией в 1969 г. http://www.fq.math.ca/Books/Complete/simply-periodic.pdf

По существу статья Люка посвящена изложению теории простейших рекуррентных соотношений 2-го порядка типа:

$$U_{n+1} = PU_n - QU_{n-1}; \quad U_0 = 0, U_1 = 1, \tag{1}$$

где P и Q – некоторые целочисленные коэффициенты.

Редакторы этой статьи, известные математики-фибоначчисты, следующим образом объяснили причины опубликования этой статьи:

«Во-первых, это первая статья внушительного объема, содержащая фундаментальные результаты в области рекуррентных последовательностей. Во-вторых, соотношения и тождества этой статьи постоянно переоткрываются. Таким образом, чтобы избежать ненужного дублирования, было решено опубликовать первую часть статьи в полном объеме. Мы надеемся, что эта статья станет эталоном для таких отношений и тождеств».

Я думаю, что это замечание в полной мере относится и к русскоязычным математикам-фибоначчистам и особенно к любителям чисел Фибоначчи, которые многократно переоткрывают различные рекуррентные последовательности, описанные в статье Люка. Хочется надеяться, что эта статья Эдурда Люка станет для них эталоном и позволит им избежать ненужного дублирования фибоначчиевых соотношений и тождеств. В этой статье Люка впервые ввел широкий класс новых рекуррентных числовых последовательностей, которые в современной математике называются «последовательностями Люка» [7]. В статье [7] специально подчеркивается, что «последовательности Люка» не следует путать с «числами Люка» [8]. По существу, «последовательности Люка» лежат в основе современной «теории чисел Фибоначчи» [9 - 12], так как многие известные рекуррентные последовательности, изученные математиками-фибоначчистами, в частности, числа Люка [8], числа Фибоначчи [13], числа Пелля и Пелля-Люка [14], числа Мерсенна [15], числа Ферма [16] являются вырожденными случаями «последовательностей Люка» (1).

В последние годы в теории чисел Фибоначчи большое внимание уделялось исследованию рекуррентных числовых последовательностей следующего вида:

$$F_\lambda(n)=\lambda F_\lambda(n-1)+F_\lambda(n-2);\quad F_\lambda(0)=0,\, F_\lambda(1)=1 \\ \lambda\in\{1,2,3,...\} \tag{2}$$

Эти числовые последовательности были названы λ-числами Фибоначчи. Заметим, что при λ=1 это рекуррентная формула порождает числа Фибоначчи.

Изучение этого рекррентного соотношения привело к открытию нового класса математических констант, названных аргентинским математиком Верой де Шпинадель «металлическими пропорциями»:

$$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}. \tag{3}$$

К этим математическим результатам независимо друг от друга пришло много исследователей из разных стран: Вера де Шпинадель (Аргентина) Jay Kappraff (США), Midhat Gazale (Франция), Sergio Falcon, Angel Plaza (Испания), Виктор Шенягин (Россия), Александр Татаренко (Россия), Грант Аракелян (Армения), Николай Косинов (Украина) и др. [18 - 27]. При этом возник вопрос о приоретите этого математического открытия.

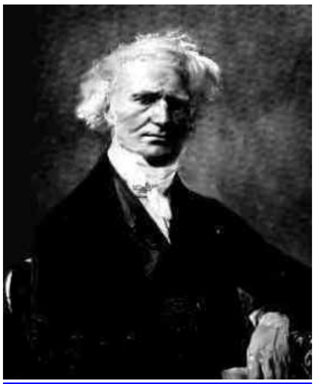
Внимательный анализ статьи Люка [6] привел меня к заключению, которое оказалось неожиданным для меня, но может оказаться неожиданным и для многих математиков-фибоначчистов. Из статьи [6] вытекает вывод, который вряд ли кто-либо будет оспаривать. Сравнение (1) и (2) показывет, что при $P=\lambda$ и Q=-1 соотношение (1) сводится к (2)! Отсюда вытекает, что **первым, кто начал исследовать λ-числа Фибоначчи и «металлические пропорции» был выдающийся французский математик 19 в. Эдуард Люка. Таким является ответ на вопрос «Кто первым сказал «мяу»?», поставленный в замечательной статье Гранта Аракеляна [24].**

К чести Люка, надо отметить еще одно его научное предсказание. Люка уже в 19-м столетии, то есть, задолго до возникновения современных компьютеров, обратил внимание на технические преимущества двоичной системы счисления при реализации вычислительных устройств и машин, то есть, он почти на столетие предвосхитил Джона фон Неймана, выдающегося американского физика и математика, который отдал решительное предпочтение двоичной системе счисления при технической реализации электронных компьютеров ("Принципы Джона фон Неймана").

В 19 в. было сделано еще одно математическое открытие – введены две замечательные формулы, задающие связь чисел Фибоначчи F_n и чисел Люка L_n с «золотой пропорцией» $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Для чисел Фибоначчи и Люка формулы Бине принимают вид:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}; \qquad L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \qquad (4)$$

Эти формулы вошли в математическую литературу под названием **формул Бине,** названные так в честь французского математика 19 в. **Жака Филлипа Мари Бине** (1786-1856), о котором известно, что он был достаточно известным математиком и астрономом, членом Парижской Академии наук.



Жак Филлип Мари Бине (1786 - 1856)

Справедливости ради необходимо заметить, что эти формулы были выведены **Абрахамом де Муавром** (1667-1754) и **Николаем Бернулли** (1687-1759) на столетие раньше Жака Бине. Однако в современной математической литературе эти формулы называются формулами Бине.

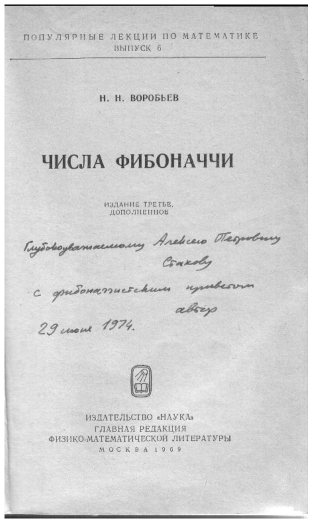
Считается, что именно работы Люка и Бине стали той стартовой площадкой, с которой, начиная с 60-х годов 20 в., начала развиваться современная «теория чисел Фибоначчи», благодаря исследованиям, прежде всего, советского математика **Николая Воробьева** и американского математика **Вернера Хоггатта**.

2.3. Николай Воробьев

В 1961 г. Николай Воробьев опубликовал брошюру «Числа Фибоначчи» [10], которая сыграла в развитии «теории чисел Фибоначчи» несомненно выдающуюся роль. Эта небольшая по своему объему брошюра стала своеобразным бестселлером 20-го века. Она выдержала большое количество изданий, переведена на многие языки мира и стала настольной книгой многих советских и зарубежных ученых..

Николай Воробьёв (1925 - 1995) - выдающийся математик, специалист в области алгебры, математической логики и теории вероятностей, основатель советской школы в области теории игр. В этом смысле его роль уникальна: под его руководством советские математики сумели за короткое время развить математические основы теории игр буквально с самого начала ее зарождения в областях, до сих пор остающихся наиболее актуальными направлениями ее развития. Воробьев первым среди современных математиков обратил внимание на числа Фибоначчи и получил ряд важных результатов в этой области, которые, в частности, вдохновили Юрия Матиясевича на решение 10-й проблемы Гильберта.

Брошюра [10] сыграла определяющую роль в приобщении автора настоящей статьи к тематике чисел Фибоначчи и выбора направлений исследований как в кандидатской (1966), так и докторской (1972) диссертациях. В 1974 г. я встретился в Ленинграде с Н.Н. Воробьевым, рассказал ему о своих научных результатах в этой области, подарил ему свою статью об избыточных системах счисления, опубликованную в 1974 г. в научном сборнике Таганрогского радиотехнического института, а в ответ Н.Н. Воробьев подарил мне брошюру «Числа Фибоначчи» (3-е издание, 1969 г.) с дарственной надписью «Глубокоуважаемому Алексею Петровичу Стахову с фибоначчистским приветом».



Брошюра Н.Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (3-е издание, 1969)

В предисловии к 1-му изданию своей брошюры (1961) Н.Н. Воробьев написал:

«В элементарной математике существует много задач, часто трудных и интересных, которые не связаны с чьим-либо именем, а скорее носят характер

своего рода «математического фольклора». Такие задачи рассыпаны по обширной популярной или просто развлекательной математичской литературе, и часто бывает очень трудно установить, в каком именно сборнике появилась впервые та или иная задача

Эти задачи нередко имеют хождение в нескольких вариантах; иногда несколько таких задач объединяются в одну, более сложную; иногда, наоброт, одна задача распадается на несколько более простых; словом, часто трудно указать, где кончается одна задача и где начинается другая. Правильнее всего было бы считать, что в каждой из таких задач мы имеем дело с маленькими математическими теориями, имеющими свою историю, свою проблематику и свои методы, — все это, разумеется, тесно связанное с историей, проблематикой и методами «большой математики».

Такой теорией является и теория чисел Фибоначчи. Выросшие из знаменитой «задачи о кроликах», имеющей семисотпятидесятилетнюю давность, числа Фибоначчи до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики. Задачи, связанные с числами Фибоначчи, приводятся во многих популярных изданиях по математике, рассматриваются на занятиях школьных математических кружков, предлагаются на математических олимпиадах».

Любопытно сравнить это предисловие к первому изданию брошюры (1961) с предисловием к 4-му изданию (1978):

«Первый вариант текста этой книжки писался почти тридцать лет назад. С тех пор изменилось очень многое.

Прежде всего, и это главное, изменился математический уровень основного круга читателей популярных математичских книг: интресующихся математикой школьников старших классов и их преподавателей. Созданная сеть специализированных математических и физико-математических классов предопределила существенное расширение математического кругозора соответствующего контингента учащихся, которых теперь можно заинтересовать скорее не забавными элементарными фактами, а уже достаточно глубокими и сложными результатами.

Кроме того, и это является фундаментальным фактом истории математики нашего времени, существенно сместился центр тяжести математических исследований в целом. В частности, утратила свои доминирующие позиции теория чисел, и резко повысился удельный вес экстремальных задач. В самостоятельную отрасль математики сложилась теория игр. По существу возникла вычислительная математика. Все это не могло не сказаться и на содержании научно-популярной литературы по математике.

Далее, числа Фибоначчи проявили себя еще в нескольких математических вопросах, среди которых в первую очередь следует назвать решение Ю.В. Матиясевичем десятой проблемы Гильберта и далеко не столь глубокую, но приобретшую широкую известность теорию поиска экстремума унимодальной функции, построенную впервые, по-видимому, Р. Беллманом.

Наконец, было установлено большое количество ранее неизвестных свойств чисел Фибоначчи, а к самим числам Фибоначчи существенно возрос интерес. Значительное число связанных с математикой людей в различных странах приобщились к благородному хобби «фибоначчизма». Наиболее убедительным свидетельством этому может служить журнал "The Fibonacci Quarterly", издаваемый в США с 1963 г.»

Какие выводы можно сделать из сравнения этих двух предисловий, которые разделяют 17 лет? Первый вывод состоит в том, что интерес к «фибоначчизму» значительно возрос. При этом произошло *«существенное расширение математического кругозора соответствующего контингента учащихся, которых теперь можно заинтересовать скорее не забавными элементарными фактами, а уже достаточно глубокими и сложными результатами»*. В этой связи Воробьев упоминает, прежде всего, о решении Юрием Матиясевичем 10-й проблемы Гильберта и о теории «фибоначчиевого» поиска экстремума унимодальной функции (Р. Беллман). В четвертое издание включен параграф 5 «Числа Фибоначчи и теория поиска», в котором изложена «теория поиска экстремума унимодальной функции».

В четвертое издание Воробьев включил много новых результатов, которых не было в предыдущих изданиях. В частности, большое внимание уделено связи треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов с треугольником Паскаля. Для установления этой связи Воробьев пользуется следующим представлением треугольника Паскаля:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Треугольник Паскаля

Если мы проведем через числа треугольника Паскаля линии, идущие под углом 45 градусов к его строкам, и назовем их «восходящими диагоналями», то легко убедиться, сумма биномиальных коэффициентов, образующих «восходящую диагональ», равна соответсвующему числу Фибоначчи, то есть,

$$1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 1+3+1=5, 1+4+3=8, 1+5+6+1=13, \ldots .$$

В 4-м издании Воробьев впервые обращается к «фибоначчиевым системам счисления». Он доказывает, что для каждого натурального числа существует такое «фибоначчиево представление», в котором двух единиц рядом не встречается. В книге автора [28] такое представление было названо «нормальной формой» (позже начало использоваться также название «минимальная форма»). Мне кажется, что на включение этого материала в брошюру [10] Воробьева подтолкнули мои публикации, в частности, книга автора «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1977) [28] и более ранние публикации автора, в частности, статьи 1974-1975 гг., в которых описаны коды Фибоначчи. Одна из этих статей «Избыточные двоичные позиционные системы счисления» (см. сборник «Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры», Таганрогский радиотехнический институт, 1974, вып.2, с.5-41) была подарена проф. Воробьеву при личной встрече в Ленинграде в 1974 г.

Сейчас, когда пишется эта статья, Николая Николаевича Воробьева уже нет в живых. Но информация об этом выдающемся математике осталась в памяти многих исследователей-фибоначчистов в виде его замечательной брошюры [10]. Автор гордится тем, что он лично знал этого выдающегося математика современности. И можно только удивляться гениальной научной интуиции проф. Воробьева, который первым среди современных математиков (задолго до книг американского математика проф. Хоггата [11], создателя Фибоначчи-ассоциации, и английского математика проф. Вайды [12]) опубликовал брошюру, которая стала научным бестселлером 20-го столетия и настольным пособием для огромного количества энтузиастов, которые именно с помощью брошюры Н.Н. Воробьева приобщились к «фибоначчиевому миру».

2.4. Вернер Хоггатт и Фибоначчи-Ассоциация

Огромное влияние на развитие современной «теории чисел Фибоначчи» оказало учреждение в 1963 г. математической Фибоначчи-ассоциации, которая с 1963 г. начала издавать ежеквартальный математический журнал The Fibonacci Quarterly. Одним из основателей Фибоначчи Ассоциации и The Fibonacci Quarterly был американский математик Вернер Хоггатт (Verner Emil Hoggatt) (1921-1981), профессор San Jose State University (США).

В 1969 году издательство "Houghton Mifflin" опубликовало книгу Вернера Хоггатта "Fibonacci and Lucas Numbers" [11], которая до сих пор считается одной из лучших книг в этой области. Вернер Хоггатт внес большой вклад в популяризацию исследований в области чисел Фибоначчи. Его последователи отмечают его продолжительную и несомненно выдающуюся работу профессором San Jose State University. Он руководил огромным количеством магистерских диссертаций и написал большое число статей по проблеме чисел Фибоначчи.

	
Вернер Хоггатт ((1921-1981)	**Альфред Бруссау (1907-1988)**

Другой выдающейся личностью, причастной к созданию Фибоначчи Ассоциации и учреждению The Fibonacci Quarterly, был ученый монах Брат Альфред Бруссау (Alfred Brousseau). Духовный орден, к которому принадлежал Брат Альфред Бруссау, назывался "Братья христианских школ" или просто "Христианские братья". Альфред Бруссау был принят в Орден "Христианские братья" в 1923 г. В 1930 г. он был зачислен в колледж Святой Марии в Калифорнии. Одновременно с обучением в колледже Святой Марии, Альфред Бруссау продолжал самостоятельно изучать физику и в 1937 г. он получил докторскую степень в Калифорнийском университете. Альфред Бруссау был страстным фотографом. Он сделал коллекцию, состоящую из 20000 дикорастущих растений Калифорнии.

При изучении истории создания Фибоначчи-ассоциации, которая поставила довольно странную цель – изучать числовую последовательность, открытую в 13 в. итальянским математиком Фибоначчи, возникают следующие естественные вопросы:

1. В чем причина повышенного интереса членов Фибоначчи-ассоциации именно к рекуррентным числовым последовательностям типа чисел Фибоначчи? Ведь различных числовых последовательностей в математике существует огромное количество. Существует даже **Энциклопедия целочисленных последовательностей,** содержащая более 200 тысяч (!) целочисленных последовательностей. Автор и хранитель сайта — Нейл Слоан.

2. Что объединяло двух очень разных людей – математика Вернера Хоггатта и представителя духовного братства Альфреда Бруссау, когда они задумали создать Фибоначчи-ассоциацию и учредить математический журнал с необычным названием «The Fibonacci Quarterly»?

К сожалению, в кратких биографиях и работах Вернера Хоггатта и Альфреда Бруссау, выставленных на Интернете, прямого ответа на эти вопросы нет. Но мы можем попытаться дать ответ на эти вопросы косвенно, анализируя некоторые документы, в частности, фотографии, а также их книги и статьи, опубликованные на страницах The Fibonacci Quarterly и других изданий.

В 1969 г. журнал TIME опубликовал статью "The Fibonacci Numbers", посвященную Фибоначчи-ассоциации. В этой статье было представлено фото Альфреда Бруссау, держащего в руках кактус, который является одним из наиболее характерных "фибоначчиевых" ботанических объектов. В статье рассказывается и о других природных проявлениях этих чисел: о фибоначчиевой закономерности в размножении трутней, а также о том, что числа Фибоначчи встречаются в спиральных образованиях цветов, видимых на многих подсолнечниках, чешуйках сосновых шишек, ветвящихся узорах деревьев, и в расположении листьев на ветках деревьев. Тем, кто изучает числа Фибоначчи, Альфред Бруссау рекомендовал *"обращать внимание на поиск эстетического удовлетворения в них.* ***Существует некоторый вид мистической связи между этими числами и Вселенной".***

Но ведь на приведенной выше фотографии Вернер Хоггатт также изображен держащим в руках сосновую шишку, которая является одним из характерных филлотаксисных ботанических объектов. Отсюда мы можем сделать предположение, что Вернер Хоггатт, как и Альфред Бруссау, верил в **мистическую связь между числами Фибоначчи и Вселенной.** Эта вера и объединила математика Вернера Хоггатта и ученого монаха Альфреда Бруссау и стала главным движущим мотивом для разворачивания работ по числам Фибоначчи и их приложениям в современной науке. То есть, именно глубокая вера в законы гармонии Мироздания, к которым имеют отношение числа Фибоначчи, и объединила Вернера Хоггатта и Альфреда Бруссау.

Но, как известно, числа Фибоначчи связаны с «золотой пропорцией» с помощью так называемой **формулы Кеплера**, согласно которой отношение соседних чисел Фибоначчи в пределе стремится к «золотой пропорции». Это означает, что числа Фибоначчи, как и «золотая пропорция», являются количественными выразителями гармонии Мироздания, то есть, действительно *«существует некоторый вид мистической связи между этими числами и Вселенной"* (Альфред Брюссау).

Это означает, что теория чисел Фибоначчи, которая начала особенно активно развиваться с момента создания Фибоначчи-ассоциации (1963), была направлена, прежде всего, на решение задач **гармонизации теоретического естествознания** (ботаника, биология, физические науки), а также экономики, образования и искусства, связанных с золотым сечением и числами Фибоначчи, то есть, в основе «теории чисел Фибоначчи» [9 - 12] лежала «проблема гармонии», которая и объединяет в единое целое указанные выше разнородные области науки, экономики, искусства и образования, к которым приложимы числа Фибоначчи. И возможно было бы правильно и справедливо назвать эту новую математическую теорию «математической теорией гармонии природы», а не скрывать главную цель этой теории под названием «теория чисел Фибоначчи».

Но, тем не менее, это было правильное решение, благодаря которому удалось усыпить бдительность математических ортодоксов, у которых существует аллергия на такие понятия как «золотое сечение» и «гармония» (попробуйте опубликовать статью по «золотому сечению и «математике гармонии» в какомнибудь математическом журнале!). Благодаря такому решению «математика гармонии» как истинная «математика природы» развивалась в современной математике под скромным названием «теория чисел Фибоначчи».

3. Славянская «золотая» группа

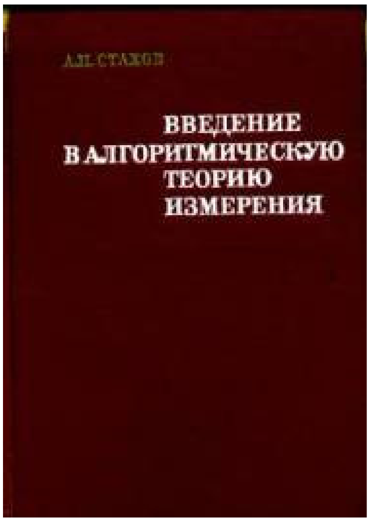
3.1. История создания группы

Начиная с работ Николая Воробьева, исследования в области чисел Фибоначчи и их приложений начали интенсивно развиваться в советской науке. Истории науки еще предстоит ответить на вопрос, почему именно 70-е и 90-е годы 20-го столетия стали тем историческим периодом, когда в особенно концентрированном виде проявился интерес к проблеме чисел Фибоначчи и золотого сечения во всем мировом научном сообществе. Именно в этот период ученые различных научных направлений выдвинули гипотезы, связанные с использованием золотой пропорции и чисел Фибоначчи, и сделали открытия, которые имеют фундаментальное значение для развития как науки в целом, так и отдельных ее отраслей.

Алгоритмическая теория измерения. Говоря об отличительных осообеностях исследований «славянских фибоначчистов», особо следует выделить одно оригинальное направление "фибоначчиевых" исследований, которое возникло в 70-е годы в советской науке и которому не уделялось должного внимания в Фибоначчи Ассоциации. Как известно, математики-фибоначчисты в своих истоках обращаются к "задаче о размножении кроликов", введенной Фибоначчи в 1202 г. в своей знаменитой книге "Liber abaci".

Но "задача о кроликах" не является единственной оригинальной задачей Фибоначчи. Не менее известной является *"задача о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах"*, называемая также *"задачей о взвешивании"* или *"задачей Баше-Менделеева"* (в русской историко-математической литературе). Обобщению «задачи о взвешивании» посвящены две мои публикации: книга "Введение в алгоритмическую теорию измерения" (1977) [28] и брошюра "Алгоритмическая теория измерения" (1979) [29].

Именно эти два печатных труда определили прикладной характер исследований в «теории чисел Фибоначчи» (коды Фибоначчи, арифметика Фибоначчи, компьютеры Фибоначчи), что отличало эти исследования от работ американских математиков-фибоначчистов.



Какое значение для развития науки и математики имело создание «алгоритмической теории измерения»? Здесь следует подчеркнуть, что в этой теории была поставлена задача синтеза новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения. Прежде всего, следует отметить, что эта задача имела сугубо прикладной характер и была связана с такой прикладной областью как анлого-цифровые преобразователи. Важно также подчеркнуть, что **такая задача никогда ранее не ставилась и не решалась в математике.** В этой теории было получено ряд новых математических результатов, в частности, найдены так называемые «фибоначчиевые» алгоритмы измерения, основанные на обобщенных числах Фибоначчи (p-числах Фибоначчи, p=0,1,2,3,...), и «биномиальные» алгоритмы измерения, основанные на биномиальных коэффициентах и «арифметическом квадрате». Было доказано, что каждому алгоритму измерения соответствует новый способ позиционного представления чисел. Например, «двоичный алгоритм измерения» порождает классическую «двоичную систему счисления» - основу современных информационных технологий. Эти рассуждения привели меня к идее о том, что новые двоичные способы представления чисел **– *p*-коды Фибоначчи** и в дальнейшем **– коды золотой *p*-пропорции**, теория которых изложена в книге [31], могут стать основой новых компьютеров – «компьютеров Фибоначчи», обладающих высокой помехоустойчивостью и информационной надежностью.

Зарубежное патентование изобретений в области «компьютеров Фибоначчи». Приоритет советской науки в области «компьютеров Фибоначчи» защищен 65 патентами США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и других стран. Патентование началось в 1976 г. Это означает, что в советской науке был получен мощный прикладной результат в области современных компьютерных технологий – разработаны новые информационные и арифметические основы компьютеров будущего – «компьютеров Фибоначчи».

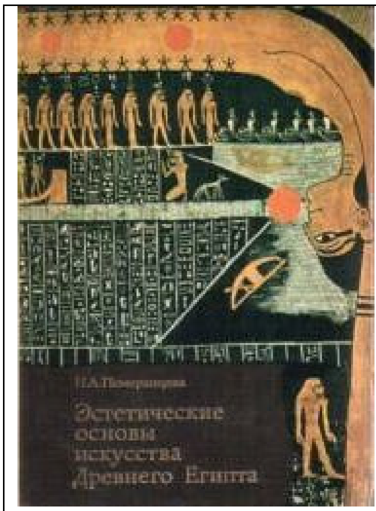
Квазикристаллы. Весьма результативным для золотого сечения оказался 1984-й год. 12-го ноября этого года в небольшой статье, опубликованной в авторитетном журнале *"Physical Review Letters"*, был дано экспериментальное доказательство существования металлического сплава с исключительными свойствами (автор открытия - израильский физик Дан Шехтман). Кристаллическая структура этого сплава имела "икосаэдрическую" симметрию, то есть, симметрию 5-го порядка, что строго запрещено классической кристаллографией. Сплавы с такими необычными свойствами были названы **квазикристаллами.** Благодаря этому открытию золотое сечение, которое лежит в основе икосаэдра и симметрии 5-го порядка (пентаграмма), вышло на первые роли в современной физике. В статье Д. Гратиа "Квазикристаллы" ("Успехи Физических Наук", 1988 г.), посвященной этому открытию, отмечается, что *"его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел в математике"*. Открытие квазикристаллов стало достойным подарком к 100-летию выхода в свет книги немецкого математика Феликса Клейна *"Икосаэдр и решение уравнений 5-й степени"* (1884 г.), который за 100 лет до открытия квазикристаллов гениально предсказал ту роль, которую икосаэдр может сыграть в науке, в частности, в математике. В 2011 г. автор этого открытия – израильский физик Дан Шехтман – был удостоен Нобелевской Премии.

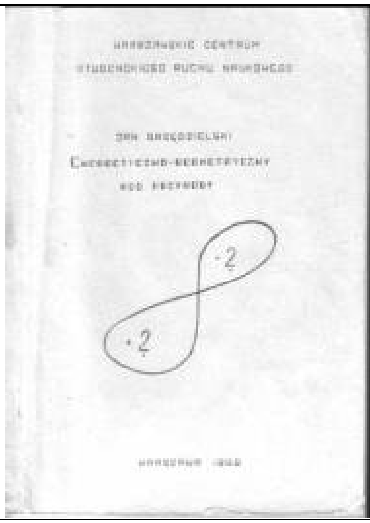
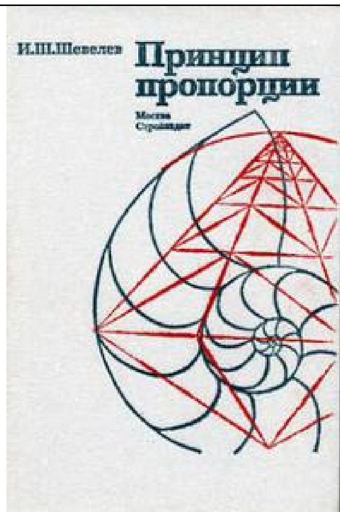
Книги Сороко и Стахова. Но возвратимся снова к советской науке. В 1984 г. были опубликованы две книги, посвященные гармонии и золотому сечению. Белорусский философ Эдуард Сороко в своей книге **"Структурная гармония систем"** [30] делает смелую попытку возродить в современной науке пифагорейскую идею о числовой гармонии мироздания и формулирует так называемый "закон структурной гармонии систем", математическая сущность которого выражается с помощью понятия **"золотого *p*-сечения",** которое является обобщением классического золотого сечения.

В этом же году была опубликована моя книга **"Коды золотой пропорции"** [31], в которой на основе понятия "золотого *p*-сечения" делается попытка развить новые информационные и арифметические основы компьютеров.

Международные конференции по числам Фибоначчи и их приложениям. Заметим, что с 1984 г. значительно активизирует свою деятельность Фибоначчи Ассоциация, которая в этом году провела свою 1-ю Международную конференцию по числам Фибоначчи и их приложениям. Начиная с этого года, проведение этих Международных математических конференций становится регулярным (один раз в 2 года). Последняя (15-я конференция) состоялась в Венгрии 25-30 июня 2012. В 1996 г. я принял участие в работе 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения», которая состоялась в Граце (Австрия, июль 1996) и выступил с докладом “The Golden Section and Modern Harmony Mathematics” [32]. Идеи, изложенные в этой статье, определили направление моих исследований на последующие годы.

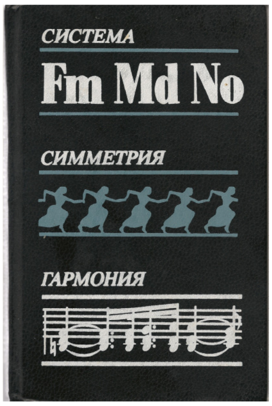
Книга Померанцевой. В 1985 г. опубликована книга советского искусствоведа Н.А. Померанцевой "Эстетические основы искусства Древнего Египта" [33], в которой достаточно убедительно показана роль золотого сечения в культуре Древнего Египта.

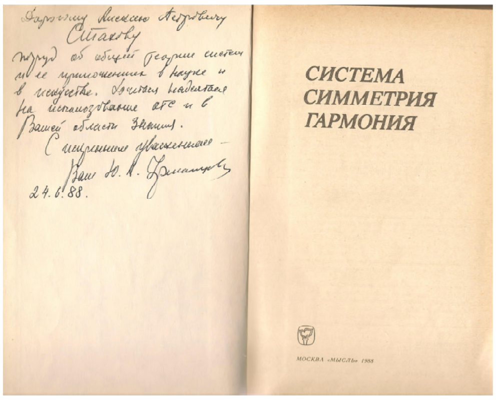


Книги Гржездельского и Шевелева. 1986 г. ознаменовался публикацией двух книг по золотому сечению. В Польше опубликована книга польского ученого и журналиста Яна Гржездельского "Энергетично-геометрический код природы" [34]. В этой книге, возможно, впервые сделана попытка раскрыть физический смысл золотой пропорции как главного кода природы, как пропорции термодинамического равновесия самоорганизующихся систем. В этом же году выдающийся российский архитектор Иосиф Шевелев опубликовал книгу «Принцип пропорции» [35]. В книге рассказывается о формообразовании в природе, мерной трости древнего зодчего, архитектурном образе, двойном квадрате и взаимопроникающих подобиях.

Книга «Система. Симметрия. Гармония». В 1988 г. издательство «Мысль» (Москва) опубликовало книгу «Система. Симметрия. Гармония» под редакцией В.С. Тюхтина и Ю.А. Урманцева [36]. Как подчеркивается в аннотации, *«в книге на базе ОТС Ю.А. Урманцева раскрывается практическое и теоретическое значение системного подхода для решения разнообразных философских и естественнонаучных проблем. Об этом рассказывают авторы – философы, биологи, геологи, химики, кристаллографы, физики, математики».*





24 июня 1988 г. у меня состоялась весьма плодотворная встреча с проф. Урманцевым в Москве в моем гостиничном номере. Я раскказал ему о своем научном направлении и в заключение он подарил мне эту замечательную книгу с дарственной надписью:

«Глубокоуважаемому Алексею Петровичу Стахову

Труд об общей теории систем и ее приложениях в науке и искусстве. Хочется надеяться на использование ОТС и в Вашей области знаия.

С искренним уважением – Ваш Ю.А. Урманцев. 24.06.1988»

Статья Петухова. Пожалуй, наиболее интересной среди статей, опубликованных в книге [36], с точки зрения «математики гармонии» является статья профессора С.В. Петухова «Высшие симметрии, преобразования и инварианты в биологических объектах» [37]. В этой статье рассматриваются вопросы конформной симметрии в возрастных трансформациях органов тела человека. При этом введено важное понятие «золотого вурфа», связанного с числами Фибоначчи, и доказано, что его численное значение равно 1,31 для трехчленных кинематических блоков тела, наиболее ярким примером которых являются средний палец руки, где пропорция 1,31 выдерживается с высокой точностью.

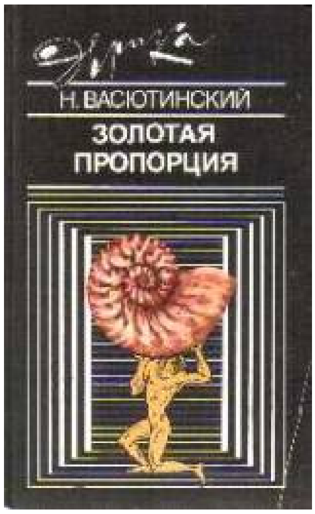
Книга Ковалева. В 1989 г. преподаватель Киевского государственного художественного института Ф.В. Ковалев опубликовал учебное пособие для художников "Золотое сечение в живописи" [38]. В этой книге изложены закономерности формоообразования в природе и искусстве. Даны рекомендации по практическому применению золотой пропорции при создании целостной гармонической формы.

Статья Стахова в Международном журнале «Computers & Mathematics with Applications». Во время нашей встречи в июне 1988 г. проф. Урманцев сделал мне интересное предложение. В это время редакционная коллегия международного журнала «Computers & Mathematics with Applications» формировала новый выпуск журнала. Проф. Урманцеву поступило предложение представить оригинальные статьи советских авторов, касающиеся тематики журнала, и он предложил мне написать статью для этого журнала. И в 1989 г. моя статья **«The Golden Section in the Measurement Theory»** [39] была опубликована в этом известном журнале. Это была моя первая англоязычная публикация. Благодаря этой статье моя «алгоритмическая теория измерения» [28] вышла на международный уровень и стала доступной англоязычному научному сообществу.

Заседание Президиума Академии наук Украины. В связи с успешным патентованием моих изобретений за рубежом и в связи с завершением моей 2-месячной работы в качестве визитинг-профессора Дрезденского технического университета (май-июнь 1988 г.) и награждением меня мемориальной памятной медалью Генриха Баркгаузена, 19 ноября 1988 г. в газете "Правда" появилось мое интервью корреспонденту газеты "Правда" под интригующим названием **"Вот вам и Фибоначчи! Стоит ли загонять в тупик новое научное направление?"**. В тот период газета "Правда" являлась основным печатным органом ЦК КПСС, и поэтому появление такой статьи в этой газете не могло пройти мимо партийных органов и научной общественности СССР. Реакция Академии наук Украины была очень оперативной. По инициативе академика Бориса Евгеньевича Патона мой доклад по «компьютерам Фибоначчи» в июне 1989 г. был заслушан на специальном заседании Академии наук Украины. В Постановлении Президиума мое научное направление было признано «приоритетным в республике». В дальнейшем я получал большую научную поддержку, как от академика Бориса Патона, так и от академика Юрия Митропольского, директора Института математики АНУ, а украинские академические журналы с удовольствием начали публиковать мои статьи по этому направлению, поскольку они представлялись в эти журналы по рекомендации самого академика Митропольского [40 - 45]. К слову сказать, статья [40], опубликованная в первых двух номерах журнала

«Вісник Академії наук України» за 1990 г., была признана лучшей публикацией журнала за 1990 г. Таким образом, благодаря выступлению на заседании Президиума АНУ мне удалось вывести «фибоначчиевое направление» на самый высокий научный уровень в Украине - Академию наук Украины. Никому из фибоначчистов в России или Беларуси это не удалось.

Книга Шевелева, Марутаева и Шмелева. В 1990 г. опубликована книга **"Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии"** [46], написанная тремя известными авторами, представителями искусства: архитектором И.Ш. Шевелевым, композитором М.А. Марутаевым и архитектором И.П. Шмелевым. Как утверждается в аннотации, *"книга посвящена теоретическому обоснованию феномена золотого сечения, в котором авторы видят одну из универсальных закономерностей гармонии"*.



Книга Васютинского. Значительным событием 1990-го года в области золотого сечения является публикация научно-популярной книги **"Золотая пропорция"** [47], написанной украинским ученым **Н.А. Васютинским**, который по образованию и опыту работы является химиком, геологом, металлургом и машиностроителем. В книге, написанной с большим мастерством, *"описано проявление закономерностей золотой пропорции в архитектуре, музыке, поэзии, а также в химии, биологии, ботанике, геологии, астрономии, технике"*.

Международные семинары «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем". К началу 90-х годов стало ясно, что в славянской науке (Украина, Россия, Белоруссия, Польша) сформировалась группа активно работающих ученых - представителей различных наук и искусств, авторов весьма оригинальных публикаций в области золотого сечения. Возникла идея собрать воедино всех этих ученых и создать некоторое научное сообщество "золотоискателей". С этой целью в Киеве в 1992 г. был проведен 1-й Международный семинар **"Золотая пропорция и проблемы гармонии систем".** Активными участниками семинара и членами организационного комитета стали: белорусский философ доктор философских наук

Э.М. Сороко (Минск), украинский архитектор, кандидат искусствоведения **О.Я. Боднар** (Львов), украинский экономист доктор экономических наук **И.С. Ткаченко**, российский механик доктор технических наук **В.И. Коробко** (Ставрополь), представитель украинской медицинской науки, доктор медицинских наук **П.Ф. Шапаренко** (Винница), украинский химик кандидат химических наук **Н.А. Васютинский** (Запорожье), польский ученый и журналист **Ян Гржездельский**. Эта группа ученых и составила костяк неформального объединения славянских ученых, вошедшего в мировую науку под названием **"Славянская "золотая" группа".**

В 1993 г. в Киеве состоялся 2-й Международный семинар по этой проблеме, а затем (по инициативе В.И Коробко) эти семинары продолжили свою работу в Ставрополе в 1994, 1995 и 1996 годах.

Книга Боднара. Семинары оказали большое влияние на активизацию исследований в области чисел Фибоначчи и золотого сечения, и членами группы в 90-е годы было опубликовано ряд новых книг. В 1994 г. опубликована книга О.Я. Боднара **"Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве"** [48].

Главным результатом книги явилось создание новой геометрической теория филлотаксиса (закон преобразования спиральных биосимметрий), основанной на «золотых» гиперболических функциях.

Книга Субботы. В 1996 г. вышла в свет книга проф. Субботы (С.-Петербург) **"Золотое сечение" ("Sectio Aurea") в медицине"** [49]. В книге *"показана универсальность проявления золотого сечения (ЗС) в строении органов и систем, а также в их функциональных параметрах. Установлены величины отклонений от ЗС при воздействии на организм неблагоприятных факторов среды и при некоторых заболеваниях"*. В предисловии к книге подчеркнута роль книги А.Г. Субботы для медицины:

"Критерий "золотой" пропорции, естественно, должен стать ориентиром также и для проблемы конституций человека и животных - ее типов и индивидуальной конституции. Диагностика последней будет способствовать научному обоснованию рекомендаций оптимальных образа жизни, развития, путей профилактики возможных заболеваний, угрожающих именно данному индивиду. Не менее значимы принципы ЗС в области патологии. Это прежде всего связано с тем, что знание величины "идеальной", т.е. "золотой" нормы, способствует оценке функциональных сдвигов, возникающих в реальной экологической обстановке и, что особенно важно, - диагностике и терапии заболеваний".

Книга Коробко. Весьма плодотворным для золотого сечения стал 1997 год. В этом году литература по золотому сечению пополнилась двумя книгами, написанными славянскими учеными. Книга проф. **В.И. Коробко**, активного члена "Славянской "золотой" группы, называется **"Золотая пропорция и проблемы гармонии систем"** (1997) [50]. Название подчеркивает непосредственную связь с Международными научными семинарами с аналогичным названием, проведенными в Киеве (1992 г., 1993 г.) и затем в Ставрополе (1994-1996 гг.).

Книга [50] содержит обширный материал, свидетельствующий о проявлении золотого сечения в разнообразных областях природы, науки и искусства. Особенность книги состоит в том, что она является учебным и научно-методическим пособием для преподавателей, аспирантов и студентов технических и гуманитарных вузов по курсам "Основы гармонии систем", "Философия", "Культурология", "Этика и эстетика", науках о человеке. Книга рекомендована Ассоциацией строительных вузов стран СНГ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений.

Книга Цветкова. В 1997 г. русский биолог В.Д. Цветков опубликовал книгу **"Сердце, золотое сечение и симметрия"** [51]. Книга является итогом многолетних исследований автора в области выяснения роли золотого сечения для сердечной деятельности млекопитающих. В книге *"установлено множество золотых сечений в различных структурах сердечного цикла. Показана роль золотого сечения и чисел Фибоначчи в оптимизации деятельности сердца (минимизация затрат энергии, крови, мышечного и сосудистого вещества)"*.

Статья Н.Ф. Семенюты. Очень интересной публикацией в русле настоящей статьи является статья патриарха золотосеченского движения Н.Ф. Семенюты **«О становлении белорусской школы золотого сечения»** [52]. Статья написана по материалам доклада, сделанного автором на конференции, посвященной 80-летию Института философии Национальной Академии Наук Беларуси (октябрь, 2010 г.). В докладе отмечается большой вклад белорусских ученых Э.М. Сороко, Н.Ф. Семенюты, В.Е. Груданова, Л.А. Сосновского, В.В. Петруненко, М.С. Радюка и др. в развитие теории и приложений «золотого сечения».

Таким образом, главный вывод, который вытекает из проведенного обзора, состоит в том, что в 60-е – 90-е годы 20 в. в Советском Союзе и постосоветском пространстве (после развала СССР) возникло достаточно квалифицированное «золотосеченское движение», которое привело в 1992 г. к созданию неформального научного объединения – **Славянской «золотой» группы**, которая способствовала координации усилий исследователей в области теории и приложений «золотого сечения» и чисел Фибоначчи.

3. «Золотая игра» в советской и постсоветской науке

Одна из частей статьи Денеша Надя [5] носит весьма интригующее название: **«Золотая игра»: пожалуйста, назовите какую-либо область культуры, и я скажу, в какой книге, написанной на русском и украинском языках, обсуждается золотое сечение в этой области».**

Денеш Надь пишет:

«Если вы скажете «компьютерная наука», мой ответ таков: Стахов А.П. «Коды золотой пропорции» (1984). Украинский ученый опубликовал свою первую книгу «Введение в алгоритмическую теорию измерения» значительно раньше (1977). В этой книге он ввел «арифметику Фибоначчи». Он продолжил свои исследования во многих статьях и книгах. Стахов – очень колоритная фигура в «золотом движении» и он всячески поощрял междисциплинарные исследования. Мы еще возвратимся к его исследованиям ниже.

Если вы скажите «живопись», мой ответ таков: Ковалев Ф.В. «Золотое сечение в живописи» (1989). К сожалению, эта книга Ковалева, художника и историка искусства, издана посмертно, год спустя после его смерти. Книга написана с учебной целью для школ искусств. Действительно, книга содержит *много иллюстраций, которые полезны для педагогов в области искусства. Книга содержит также некоторые новые приложения золотого сечения, включая его использование при создании цветовых гамм.*

Если вы скажите «музыка» или «архитектура», мой ответ таков: Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. «Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии» (1990). Здесь мы имеем «золотой треугольник», состоящий из архитектора Шевелева из Костромы, композитора Марутаева из Москвы, и архитектора Шмелева из Санкт-Петербурга. Мы уже упоминали о Шевелеве много раз. Раньше Марутаев также опубликовал ряд статей по золотому сечению с точки зрения его теории гармонии. Он связал его с Периодической таблицей Менделеева. Подход Марутаева был изучен биологом-философом Урманцевым, чья книга по симметрии была раньше упомянута в конце последней главы Имя Шмелева, как мы видели, также ассоциируется с ранними публикациями по золотому сечению в архитектуре, включая статью о его "modulor duplex" с соответствующими, но различными пропорциональными фигурами для мужского и женского тела; другая статья по сравнению канонов и пропорциональных систем различных регионов с выводами, основанными на "modulor duplex"; и наконец еще одна статья по «золотой симфонии» Египетского искусства и архитектуры, которая опубликована в сборнике статей «Проблемы русской и зарубежной архитектуры» (Ленинград, 1988)».

И далее.

«Если вы скажете «медицина», мой ответ таков: Суббота А.Г. «Золотое сечение ("sectio aurea") в медицине» (1994). Это обстоятельная книга, которая связана с другой книгой, которую мы обсудим позже. Мы также должны обратиться к некоторым более специальным книгам: Цветков В.Д. «Ряды Фибоначчи и оптимальная организация сердечной деятельности млекопитающих» (1989); Цветков В.Д. «Сердце, золотое сечение, симметрия» (1997). Основная идея Цветкова – установление возможной роли золотого сечения и чисел Фибоначчи в организации кардиальных циклов и минимизации расхода энергии при функционировании сердца.

Если мы скажем «теория литературы» или «теория культуры», я отсылаю к разнообразным работам, написанным членами Школы семиотики (Москва-Тарту), которые стали всемирно известными в этой области».

Далее.

«Если мы скажем "engineering", мой ответ таков: Коробко В.И. «Закономерности золотой пропорции в строительной механике» (1984). Мы можем также обратиться к книге Сергея Петухова по приложениям золотого сечения в биомеханике (1981) и работам Сергея Ясинского по использованию этой пропорции в системах связи (1999, 2003).

Если мы скажем «искусство и наука», мой ответ таков: Николай Васютинский «Золотая пропорция» (1990); Коробко и Примак «Человек и золотая пропорция» (1991); Коробко и Примак "The Golden Proportion and a Man: Anthropometry, Physiology, Ergonomic (Human Engineering), Art" Здесь также мы должны обратиться к книге Коробко (1998), а также к монографии Н. Семенюты и В. Михайленко (2002), посвященной золотой пропорции в природе и искусстве.

Ускорим наши игры. Если мы скажем «геология», мой ответ таков: Степанов «Формы в мире почв» (1986), где мы можем даже увидеть «музыкальную октаву», связанную с отношениями, установленными в науке о почвах. Мы также должны упомянуть статью Семенова «Золотое сечение в геологии» (1986).

Если мы говорим о "fashion design", мой ответ таков: Градова и Гутина «Театральный костюм» (1976), где золотое сечение введено как гармоническая пропорция

Если мы скажем «гимнастика и здоровье», мой ответ таков: Суббота «Гармония движения, золотое сечение и здоровье» (2003).

Между прочим, Сороко в книге «Структурная гармония систем» (1984) дает обширный обзор книг и статей по золотому сечению, в котором дает некоторые «экзотические приложения; на веб-сайте Стахова http://www.goldenmuseum.com/ представлены последние публикации в этой области».

В своей статье [5] Денеш Надь пишет:

«В 1990-е годы, благодаря деятельности А.П. Стахова и других ученых Украины, эта страна становится центром «золотосеченской» деятельности. Украина имеет старые корни, но с 1991 г. она стала независимым государством. В этой ситуации важно представить свои превосходные достижения всему миру. Золотое сечение – древняя концепция, но художники и ученые Украины, следуя ранней традиции, получили новые результаты в этом направлении. Я чувствую здесь «гармонию» между общим желанием представить превосходные научные результаты и результаты, которые «золотое сечение» могло бы предложить. Я думаю, что эта «гармония» помогла некоторым людям привлечь внимание к их деятельности, которая привела к различным публикациям и встречам. Размышляя над экономической ситуацией в стране, мы не должны думать о большом количестве денег. Действительно, активно работающие и увлеченные люди нуждаются только в небольшой поддержке, чтобы осуществлять интересную деятельность.

Алексей Петрович Стахов, которого мы уже встречали в начале этой главы, инициировал организацию международных семинаров с названием «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем», которые прошли в Киеве, столице

Украины, в 1992 и 1993 гг., и были продолжены Виктором Ивановичем Коробко в Ставрополе, русском города на Юго-востоке от Москвы, в 1994, 1995 и 1996 гг. Стахов любит говорить о «Славянской «Золотой» Группе» применительно к этой группе ученых. Действительно, мы не можем сказать, что все они русские (это название обычно использовались на Западе для всех людей, живущих в СССР), поскольку в составе этой неформальной группы имеется много людей из Украины, а Эдуард Сороко, важная фигура этой группы, с Беларуси. В то же время я имею некоторую неудовлетворенность по поводу выражения «Славянская «Золотая» Группа». Действительно, такие славянские страны, которые не были частью СССР (за исключением польского ученого) не были представлены или редко представлены в этой группе. Я признаю, что я видел очень мало болгарских, хорватских, чешских, сербских и словацких работ в области золотого сечения и «золотая деятельность» в этих странах была значительно меньше, чем в Украине. Другая проблема состоит в том, что некоторые важные работы были написаны учеными Средней Азии и кавказских республик. Они не являются славянами, хотя они писали свои работы на русском языке, который был языком коммуникации большого региона. Я думаю, что «золотая связь» группы обусловлена не славянской основой, а некоторыми социальными и культурными аспектами жизни и работы в Царской России, Советском Союзе и сейчас в странах СНГ, со специальными предпочтениями следующих факторов:

(1) Объединение принципов, которые важны для большой страны с многими нациями (как мы обсуждали раньше),

(2) мультидисциплинарное мышление, которое основывается на хорошей образовательной системе, которая производит очень много блестящих художников и ученых,

(3) точные методы, которые ассоциируются с замечательными традициями в математике.

Естественно, общим знаменателем является факт, что они публиковали свои работы и излагали свои идеи в основном на русском языке. Согласно последней переписи (1989), в Советском Союзе жило 163,5 миллионов людей, говорящих на русском языке, и около 69 миллионов людей, для которых русский язык был вторым языком. Естественно, было очень важно, что большинство славян имели трудности в понимании русского языка на некотором уровне, но очевидно, что это было мотивацией для исследований золотого сечения. После дезинтеграции Советского Союза в 1991 г. большую роль начали играть национальные языки, включая, естественно, и украинский язык. Публикация научных книг на английском также стала более популярной. Олег Боднар опубликовал свою первую книгу по золотому сечению на русском языке, но вторую книгу – на украинском, включая аннотацию на английском. Это является причиной, почему я говорю о «блестящих речах на русском и украинском языках» в названии этой статьи. Таким образом, я включил здесь ссылки на книги и статьи, написанные Сороко из Беларуси, Булатовым, Матьякубовым и Ратья из Узбекистана, Кубасовым из Казахстана, Церетели их Грузии и некоторыми другими авторами, поскольку все их работы написаны на русском языке. С другой *стороны, вне всяких сомнений, что большинство работ, в которых золотое сечение находится в центре внимания, написаны русскими и украинскими учеными.*

Любопытно заметить, что в истории различные события часто повторяются. Несколько ведущих российских ученых-золотосеченцев эмигрировали из России еще в 1920-е годы и в настоящее время подобная ситуация повторилось в Украине. Однако, существует огромная разница между этими событиями. Сабанеев после эмиграции не публиковал статей по золотому сечению, в то время как Шиллингер и Яссер лишь коснулись этого предмета после переезда в Нью-Йорк. С другой стороны, деятельность Стахова в этой области, с использованием возможностей Канады, стала еще более активной. Он работает с «Музеем Гармонии и Золотого Сечения», который является двуязычным сайтом (русский и английский языки) http://www.goldenmuseum.com/ Другой ученый, математик Борис Розин, который эмигрировал с Украины в США, работает с другим сайтом http//www.goldensection.net

Материалы по золотому сечению на русском языке настолько богаты, что наш обор является, безусловно, неполным. Интересным аспектом этих работ является комплексный подход, когда различные дисциплины сближаются друг с другом.

Естественно, существуют публикации по золотому сечению и в других странах. Например, я смотрел интересные публикации, написанные учеными Китая, Индии и Австралии. Этот глобальный интерес к золотому сечению возрастает количественно, но не качественно. Существует два основных типа работ, которые могут быть охарактеризованы следующим образом:

- «золотая одержимость» как продолжение «строгого золотого сечениеонизма»: эти авторы пытаются расширить применимость золотого сечения на новые области путем различных переоценок и рассмотрения только положительных данных (и игнорирование отрицательных); для них золотое сечение имеет универсальное значение;

- «золотые новшества» как продолжение «мягкого золотого сечениеонизма»: эти авторы предлагают новые открытия в конкретных областях; для них золотое сечение имеет частное значение для решения некоторых проблем, но не универсальное.

На самом деле, моя рекомендация состоит в том, чтобы иметь строгие критические мнения в области, которая начата в работах Roger Herz-Fishler (Канада), Albert van der Schoot (Нидерланды) и рядом других ученых. Работы, опубликованные на русском и украинском языках, также нуждаются в некотором критическом анализе».

Перспективные направления развития теории золотого сечения. Денеш Надь пишет [5]:

«А теперь обратимся к будущему: к перечню различных результатов и проблем, изложенных на веб-сайте Алекея Стахова http://www.goldenmuseum.com/ в связи с золотым сечением. Я перечисляю здесь некоторые мои собственные идеи, которые могут иметь некоторую ассоциацию с интересами «Золотой группы» ученых, которые публикуют свои работы на русском и украинском языках».

В этой связи Денеш Надь предлагает некоторые перспективные направления развития теории золотого сечения:

Алгоритмы золотого сечения. По мнению Денеша Надя, существуют важные результаты, полученные Кифером (Kiefer) в математике (алгоритмы одномерного поиска, основанные на золотом сечении) и Стаховым в информатике (фибоначчиевые алгоритмы измерения, приводящие к кодам Фибоначчи). В этой связи Денеш Надь предлагает следующие направления использования «алгоритмов золотого сечения»:

«Возможно, некоторые психологические проблемы могут быть решены с использованием алгоритмического подхода (Я думаю, прежде всего, о работах Цветкова). Я думаю, что алгоритмический подход будет полезным в рамках экспериментальной эстетики. Процесс восприятия в пространстве и времени, например, движение глаз, может быть связан с динамическим процессом «алгоритмической эстетики», основанном на оптимальном поиске. Психологи развили различные теории, чтобы объяснить некоторые преимущества золотого сечения, но они упустили математическую теорию оптимального поиска, которая имеет точную математическую основу. Играют ли подобные оптимальные принципы какую-либо роль в человеческом восприятии и другой ментальной деятельности?»

Организация времени на основе золотого сечения. В этом разделе Денеш Надь обращает внимание на работы Флоренского. Еще в 1922 г. Флоренский выдвинул идею о том, что золотое сечение может быть использовано как «средство для организации времени». Эйзенштейн реализовал эту идею на практике в своей кинокартине «Броненосец Потемкин» (1925) и опубликовал статью на эту тему в 1939 г. (Между прочим, было бы интересно знать о связи работ Флоренского и Эйзенштейна с работами Розенова и других исследователей). В последнее время Денеш Надь провел экспериментально-психологические тесты в связи с использованием золотого сечения для организации времени. Он попросил студентов-кинематографистов указать на кульминационные точки их кинокартин определенной длительности. Удивительно, что в среднем это было очень близко к точке золотого сечения. Денеш Надь рекомендует продолжить это исследование не только для музыки и киноискусства, но и для случая повседневной практики. Эти исследования, возможно, имеют связь с «алгоритмами золотого сечения» (Кифер и Стахов).

Математическое обобщение золотого сечения. В этой части Денеш Надь предлагает свой вариант обобщения золотого сечения. Важно подчеркнуть, что его предложения согласуются с теми работами, которые были выполнены Алексеем Стаховым и Эдуардом Сороко по ведению обобщенных золотых сечений, названных золотыми *p*-сечениями, а также с работами Веры Шпинадель, Татаренко, Газале, Каппраффа, Шенягина, Аракеляна по введению так называемых «металлических пропорций».

Физические и технические процессы, относящиеся к золотому сечению («тайна Зубарева»). В этой части Денеш Надь ставит интересную проблему: *«Большинство работ, относящихся к золотому сечению, носит описательный характер (что мы имеем?), в то время как мы знаем очень мало о причинах появления золотого сечения (почему мы это имеем?). Очень важная задача найти такие физические и технические процессы, которые объясняют важность золотого сечения».*

В этой связи Денеш Надь обращает внимание на работы российского исследователя Зубарева, которые изложены в его, к сожалению, неопубликованной книге «Технические основы архитектурных форм Древней Греции». Параграф из этой книги помещен в сборнике «Проблемы архитектуры», том.1, книга 2, Москва, 1936, с. 335-339.

Денеш Надь пишет [5]:

«Исходной точкой исследований Зубарева была «Пифагорова тройка» (3,4,5). Он связал ее с физическими коэффициентами и использовал для объяснения музыкальных гармоний и для аппроксимации золотого сечения: 3/5 или 5/(3+5)=5/8. Зубарев изучил золотое сечение с точки зрения эластических трансформаций (elastic modulus или Young-modulus). Согласно Зубареву, золотое сечение имеет особое значение ля человеческого восприятия, поскольку объективы глаз являются эластическими объектами с кривизной радиусов 3 и 5, соответственно...

Естественно, мы должны фокусировать наше внимание не только на идеях Зубарева, но также и на других возможностях, которые могут дать ответ на вопросы «почему» в связи с золотым сечением».

Итак, в этом разделе Денеш Надь поставил одну из важнейших проблем теории золотого сечения: почему золотое сечение упорно проявляется и обнаруживается во многих физических и биологических процессах и явлениях? Ответ на это вопрос дан в статье Валериана Владимирова и Алексея Стахова «Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения)», опубликованной на сайте АТ [49]. В этой статье золотое сечение связывается с информационной энтропией. При этом показано, что именно в точке «золотого сечения» система обладает максимальной энтропией, что обеспечивает системе максимальные информационные возможности. Статья Владимирова и Стахова объясняет, почему золотое сечение так широко проявляет себя во временных процессах и объектах (музыка, кино, экономика и др.).

Структуры, основанные на золотом сечении, в архитектуре и инженерии. В этой части Денеш Надь пишет [5]:

«Плитки Пенроуза с пентагональной симметрией и их трехмерное обобщение, сделанное Огавой (Ogawa), инициировали много интересных работ в области математики, кристаллографии и физике твердых тел. В то же время спиральные модели, изученные в ботанике (филлотаксис), привлекли внимание биологов, математиков и специалистов в области информатики, включая российских и украинских ученых. Эти модели и некоторые другие структуры могут быть использованы в архитектуре, дизайне, и инженерии. В качестве примеров можно привести работы Гизуме (Hizume) из Японии, Лебедева из России, Боднара из Украины. Ясно, что необходимо продолжить изучение этих структур».

Эпилог: Трисмегист Боднар (Боднар, трижды великий). Заключительная часть статьи Денеша Надя посвящена Олегу Боднару. В этой части он сравнивает Олега Боднара с «трижды великим» Гермесом Трисмагистом, который жил 6 тысяч лет тому назад. Он обращает внимание на тот факт, что Олег Боднар своей новой геометрической теорией филлотаксиса связал воедино три научные дисциплины: архитектуру, ботанику и неевклидову геометрию. Безусловно, научные достижения Олега Боднара всемирно известны и мы должны гордиться, что этот выдающийся славянский ученый является членом Международного Клуба Золотого Сечения. В настоящее время Олег Боднар является активно работающим ученым, который продолжает развивать созданное им научное направление. Это подтверждается его новейшими публикациями – статьями «Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций» [50] и «Теория относительности и филлотаксис: сходство и различие геометрических интерпретаций» [51], опубликованными на сайте АТ.

Комментарий к статье Денеша Надя

1. Статья Денеша Наги уникальна. Прежде всего, она свидетельствует о высокой эрудиции проф. Денеша Наги по исследуемому вопросу и его глубочайших познаниях в области новейшей истории золотого сечения. В его статье впервые проведен глубокий анализ развития «золотосеченского движения» в России, начиная с 19 в. При этом сделан вывод о том, что в 20 в. Россия, а затем и Украина, становятся научными центрами исследований в области золотого сечения в мире.
2. В статье дана высокая оценка деятельности «Славянской «золотой» группы», организованной в Киеве в период проведения 1-го Международного семинара «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем» (1992 г.), Следует отметить, что все основные события в современной истории золотого сечения произошли в России и на Украине: 6 Международных семинаров на тему «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем» (Киев и Ставрополь, 1992-1996), Международная Конференция "Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в

Природе, Науке и Искусстве" (Винница, 2003), Международный Конгресс по Математике Гармонии (Одесса, 2010), Международный online seminar по Математике Гармонии (Институт Золотого Сечения Академии Тринитаризма, 2011-2012). Следует подчеркнуть, что именно членами Международного Клуба Золотого Сечения опубликованы в последние годы фундаментальные книги по «математике гармонии», к которым, прежде всего, необходимо отнести англоязычную книгу Алексея Стахова “The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” (World Scientific, 2009) [56], а также книгу Ю. Григорьева и Г. Мартыненко «Типология последовательностей Фибоначчи: теория и приложения» (LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 2012) [57].

3. В своей статье Денеш Надь поставил ряд задач по дальнейшему развитию «теории золотого сечения». Главнейшими из них являются: поиск новых приложений «алгоритмов золотого сечения» (Кифер, Стахов), развитие идей Флоренского о «золотом сечении» как «средства для организации времени» применительно к повседневной практике, обобщение золотого сечения, что уже сделано в работах современных золотосеченцев, выяснение причин широкого распространения золотого сечения (первый шаг в этом направлении сделан в статье Владимирова и Стахова, раскрывающей новую тайну золотого сечения [53]), применение этой знаменитой математической константы в архитектуре и инженерии, что уже делается в работах Коробко, Боднара, Семенюты и других исследователей.

4. Вместо эпилога: «Математика Гармонии» как «золотая парадигма» современной науки

Развитие славянского (или русскоязычного) «золотосеченского движения» в 21 в. Славянская «золотая» группа, учрежденная в 1992 г. в Киеве, сыграла большую роль в «золотосеческом» движении на территории СССР и постосоветском пространстве (после развала СССР). Деятельность этой группы стала предпосылкой для эффективного развития этого направления в 21 в. К основным научно-организационным достижениям славянской науки (Россия, Украина, Беларусь) в «золотосеченской» области в 21 в. можно отнести следующее:

1. Создание на Интернете Музея Гармонии и Золотого Сечения (2001) http://www.goldenmuseum.com/ Музей был представлен на двух языках (русском и английском) и благодаря этому обстоятельству с научными достижениями членов Славянской «золотой» группы познакомилась не только русскоязычная, но и англоязычная аудитория.
2. Проведение Международной Конференции "Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве" (Винница, Винницкий аграрный университет, 2003) http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html
3. Учреждение Международного Клуба Золотого Сечения (2003) http://goldensectionclub.blogspot.ca/ , http://www.goldensectionclub.net/ . Клуб

был учрежден согласно Решению Винницкой конференции по «Золотому Сечению».

4. Создание Института Золотого Сечения Академии Тринитаризма (2005) http://www.trinitas.ru/rus/002/a0232001.htm
5. Проведение Международного Конгресса по Математике Гармонии (Одесса, Одесский национальный университет, 2010) https://sites.google.com/site/harmonymathkongress/
6. Проведение Международного Online семинара по Математике Гармонии (Институт Золотого Сечения Академии Тринитаризма, 2011-2012) http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321235.htm.

Главное направление научных исследований Международного Клуба Золотого Сечения. Главным направлением стало возрождение в современной науке Пифагрейской доктрины о числовой гармонии мироздания, которая лежит в основе «математики гармонии», создателями которой были Пифагор, Платон, Евклид. Впервые «математика гармонии», которая отражала математическое учение о Природе древних греков, была воплощена в «Началах» Евклида, которые, согласно «гипотезе Прокла», были посвящены созданию теории «правильных многогранников», называемых также Платоновыми телами, которые ассоциировались в Древней Греции с «гармонией Мироздания». Геометрическая теория Платоновых тел изложена Евклидом в 13-й, то есть, заключительной Книге «Начал». Для создания завершенной геометрической теории додекаэдра Евклид уже в Книге 2 вводит «золотое сечение» в виде «задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении».

Впервые в истории науки новое прочтение «Начал» Евклида и возрождение древнегреческой «математики гармонии» (Пифагор, Платон, Евклид) с учетом современных достижений в этой области дано в моей книге **«The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science»** (World Scientific, 2009) [56]. Сам факт, что «математика гармония» возрождена в современной науке украинским ученым Стаховым является бесспорным свидетельством научных достижений славянской науки в этой области.

Что такое «парадигма» и «научная революция»? Как известно, термин «парадигма» происходит от греческого «paradeigma» – пример, образец - и означает совокупность явных и неявных (и часто не осознаваемых) предпосылок, определяющих научные исследования и признанных на данном этапе развития науки. Это понятие, в современном смысле слова, введено американским физиком и историком науки Томасом Куном [1922–1996] в книге «Структура научных революций» (1962) [58]. Согласно Т. Куну, парадигма – это то, что объединяет членов научного сообщества и, наоборот, научное сообщество состоит из людей, признающих определённую парадигму. Как правило, парадигма фиксируется в учебниках, трудах учёных и на многие годы определяет круг проблем и методов их решения в той или иной области науки, в научной школе. К парадигме Т. Кун относит, например, взгляды Аристотеля, ньютоновскую механику и т. п.

Смена парадигм (англ. paradigm shift) – термин, также впервые введённый Томасом Куном [58] для описания изменения базовых посылок в рамках ведущей теории в науке (парадигмы).

Обычно изменение научной парадигмы относится к наиболее драматическим событиям в истории науки. Когда научная дисциплина меняет одну парадигму на другую, по терминологии Куна, это называется «научной революцией» или «сдвигом парадигмы». Решение отказаться от парадигмы всегда одновременно есть решение принять другую парадигму, а приговор, приводящий к такому решению, включает как сопоставление обеих парадигм с природой, так и сравнение парадигм друг с другом.

Что такое «золотая» парадигма? Для ответа на этот вопрос еще раз обратимся к широко известному высказыванию гения российской учености, исследователя эстетики Античной Греции и эпохи Возрождения Алексея Лосева (1893–1988). В этом высказывании А.Ф. Лосев в очень отчётливой форме сформулировал суть «золотой» парадигмы античной космологии. В её основе лежат важнейшие идеи античной науки, которые в современной науке иногда трактуются как «курьезный результат безудержной и дикой фантазии». Прежде всего, это – «Пифагорейская доктрина о числовой гармонии мироздания» и «Космология Платона», основанная на Платоновых телах. При этом Лосев утверждает:

«С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии, мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления – золотого сечения (то есть, целое относится в нем к большей части, как большая часть к меньшей)».

То есть, в центре «золотой» парадигмы поставлено «золотое сечение». Таким образом, обратившись к геометрической структуре мироздания и геометрическим отношениям, выражающим гармонию, в частности, к «золотому сечению» и Платоновым телам, древние греки предвосхитили возникновение математического естествознания, которое начало стремительно развиваться в 20-м веке. Идея Пифагора и Платона о всеобщей гармонии мироздания оказалась бессмертной.

Взлеты и падения «золотого сечения». Эдуард Сороко подчеркивает [30]: *«Если и существуют «вечные» проблемы, которые постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль, то среди них в первую очередь можно назвать проблему гармонии».* Но поскольку «золотое сечение» с античных времен является математическим выразителем Гармонии (см. высказывание Лосева), в истории культуры оно идет в неразрывной связи с «проблемой гармонии». Отсюда вытекает, что высказывание Эдуарда Сороко имеет прямое отношение и к «золотому сечению», которое вместе с «гармонией» относится к разряду «вечных» понятий, интерес к которому сохранялся на всех этапах развития человеческой культуры. Просто степень этого интереса была различной в различные периоды развития культуры. Можно условно говорить о «взлетах» и «падениях» этого интереса.

«Взлеты» относятся к периодам расцвета человеческой культуры: древнеегипетская культура, древнегреческая культура, Возрождение, 19 в., 20 в., 21 в. «Падения» - к тем периодам, когда интерес к развититю науки по тем или иным причинам замедлялся. Таким периодом, например, является период средневековья. Хотя даже в этот период интерес к «проблеме гармонии» сохраняется, в основном в религиозной среде. В этом можно убедиться, познакомившись с книгой В.П. Шестакова Гармония как эстетическая категория (1973) [59]. В главе 2 «Концепция гармонии в эстетике средних веков» Шестаков пишет: *«На протяжении всего средневековья можно проследить две ведущие тенденции, лежащие в основе развития представлений о гармонии. Первая, идущая от пифагорейско-платонической эстетики, сводила гармонию к количественным отношениям, к определенным математическим пропорциям, лежащим в основе всякой красоты и всякого искусства».*

То же самое можно сказать и о периоде с 17 по 19 в., хотя в 17 в. интерес к «золотому сечению» и Платоновым телам поддерживается благодаря, прежде всего, работам Иоганна Кеплера. О 19 в. говорить нечего: Бине, Люка, Цейзинг, Клейн, далее 20 в. – в этот период наблюдается мощнейший всплеск интереса к числам Фибоначчи и «золотому сечению», то же самое и в 21 в. Поэтому утверждение *«После того как научились чертить правильную пятиконечную звезду, деление в крайнем и среднем отношении забыли на многие-многие века. За ненадобностью»* не выдерживает критики. Конечно, эта фраза звучит очень «оригинально» и «парадоксально»! «Свежая мысль» в истории «золотого сечения»! Авторам этих «парадоксальных утверждений» хотелось бы ответить следующее.

Это ж надо, как все просто. А куда же девать древнегреческое искусство, полностью основанное на «золотом сечении»? Обратимся еще раз к книге Эдуарда Сороко [30], в которой утверждается следующее:

«Но, подчеркивает А.Ф. Лосев, «в Египте закон золотого деления есть факт спорадический», в Греции же он – постоянный». Фригийские гробницы и античный Парфенон, «Канон» Поликлета и Афродита Книдская Праксителя, наиболее совершенный театр в Эпидавре и древнейший из дошедших до нас театр Диониса в Афинах – все это яркие образцы ваяния и зодчества, исполненные глубокой гармонии на основе золотого сечения».

Таким образом, согласно выводам Эдуарда Сороко, которые он делает со ссылкой на Алексея Лосева, закон «золотого сечения» проявляется в древнегреческой культуре с удивительным постоянством.

А почему бы не учесть мнение одного из блестящих исследователей «золотой пропорции» украинского ученого Николая Васютинского, автора замечательной книги «Золотая пропорция» [47]. Он подчеркивает выдающуюся роль «золотого сечения» в истории древнеегипетской культуры:

«Современные исследователи приходят к выводу, что египтяне еще в эпоху древнего царства разработали систему «гармонического пропорционирования, причем в его основе лежит золотая пропорция».

А куда девать культуру Возрождения, широко использующую «золотое сечение»? Ведь «эпоха Возрождения» - это Возрождение древнегреческой культуры. И «золотое сечение» возродилось в этот замечательный период человеческой культуры вместе с другими знаниями древних греков. И не случайно, что именно в этот период появилась книга «Божественная пропорция» (1509), написанная знаменитым итальянским математиком Лукой Пачоли и иллюстрированная самим Леонардо да Винчи.

А что делать с работой Кеплера «Гармония мира» (1609)? То же самое касается работ Бине, Люка, Цейзинга (19 в.). Я уже не говорю о 20 и 21 в. Куда девать работы Эдуарда Сороко, Олега Боднара, Сергея Петухова, Николая Васютинского, Виктора Коробко, Виктора Цветкова, Яна Гржездельского, Скотта Олсена, Олега Черепанова, а также работы Иосифа Шевелева, Михаила Марутаева, Александра Татаренко, Веры Шпинадель, Гранта Аракеляна, Бориса Розина, Самуила Арансона, Виктора Шенягина, Николая Семенюты, Анатолия Шелаева, Анатолия Харитонова и многих других известных авторов?

Я мог бы продолжать развивать эту тему. Но не буду. Мне кажется, что слухи о «забвении» золотого сечения после «Начал» Евклида являются слишком преувеличенными и не соответствуют исторической истине.

Взаимосвязь смены научных парадигм в математике и естествознании. Одна из оригинальных идей, высказанных в статье Дениса Клещева [60], состоит в том, что процессы смены парадигм в математике и естественных науках тесно взаимосвязаны. Клещев замечает:

«Изучение истории только ради изучения истории вряд ли может привлечь к ней внимание других исследователей. Поэтому концепцию Куна необходимо дополнить рассмотрением как внутренней, так и внешней структуры смены научных парадигм. Справиться с этой задачей невозможно, если интересоваться естественными науками в отрыве от изучения истории математики, как это практиковал Томас Кун. Но стоит только включить в рассмотрение историю математики, богатую на драматические события и кризисы, как сразу становится видна закономерность, что каждому парадигмальному скачку в физике предшествовали кардинальные преобразования в математике, подготавливающие почву для смены естественнонаучной парадигмы.

Приведенные выше примеры удачного использования Платоновых тел, золотого сечения и чисел Фибоначчи в современном теоретическом естествознании позволяют высказать мысль о том, что в современной науке активно реализуется процесс «гармонизации теоретического естествознания». И этот процесс требует ответной реакции от математики. Этой реакцией на первом этапе стало возникновение «теории чисел Фибоначчи» [9 - 12], а позже привело к созданию «математики гармонии» [56].

Математизация гармонии и гармонизации математики. Рассматривая историю развития математики от древних греков до настоящего времени, можно выделить в ней два процесса, тесно связанных друг с другом, несмотря на более чем двухтысячелетнее временное расстояние между ними. Эта связь осуществляется через «золотую» парадигму древних греков как фундаментальную концепцию («парадигму»), пронизывающую всю историю науки.

Первый из них – это процесс **«математизации гармонии»,** который начался в Древней Греции в 6-5 в. до н.э. (математика Пифагора и Платона) и завершился в

3 в. до н.э. написанием самого знаменитого математического сочинения античной эпохи – «Начал» Евклида. Все усилия древних греков были направлены на создание математического учения о природе, в центре которого стояла «идея Гармонии», выразителями которой в античной науке были Платоновы тела и «золотое сечение». Процесс «математизации гармонии» завершился созданием «Начал» Евклида, главной целью которых было создание завершенной геометрической теория Платоновых тел (Книга XIII «Начал»). Для ее создания Евклид уже в Книге II ввел в рассмотрение задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, то есть, задачу о «золотом сечении», которое он затем использовал при создании геометрической теории додекаэдра.

Второй из них – это процесс **«гармонизации современной математики»**. Этот процесс начался во второй половине 20 в. с работ канадского геометра **Гарольда Коксетера**, [9], советского математика **Николая Воробьева** [10], американского математика **Вернера Хогатта** [11], английского математика **Стефана Вайды** [12] и других математиков-фибоначчистов. Как упоминалось, создатели современной «теории чисел Фибоначчи» [9 - 12] поступили очень мудро. Они «усыпили» бдительность современных ортодоксальных математиков, начав исследовать числовую последовательность Фибоначчи, не акцентируя особого внимания на том факте, что речь идет, по существу, об исследовании одной из важнейших математических закономерностей, которая вместе с «золотым сечением» выражает «Гармонию Природы». Это позволило им создать Фибоначчи-ассоциацию, учредить математический журнал “The Fibonacci Quarterly” и, начиная с 1984 г., начать регулярно (один раз в 2 года) проводить Международную конференцию «Числа Фибоначчи и их приложения». Благодаря активной деятельности Фибоначчи-ассоциации удалось объединить усилия огромного количества исследователей, которые обнаружили числа Фибоначчи и золотое сечение в своих предметных областях.

Начиная с последней четверти 20 в., активную роль в развитии этого направления начала играть так называемая **«Славянская «Золотая» Группа»,** которая была создана в Киеве в 1992 г. во время проведения 1-го Международного семинара «Золотая пропорция и проблемы Гармонии Систем». В эту группу вошли ведущие ученые Украины, России и Беларуси и других стран СНГ в этой области. В 2003 г. по инициативе «Славянской «Золотой» Группы» на базе Винницкого аграрного университета была проведена **Международная конференция «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве».** Согласно решению Конференции «Славянская «Золотая» Группа» была преобразована в **Международный Клуб Золотого Сечения**. В 2005 г. при Академии Тринитаризма (Россия) был организован **Институт Золотого Сечения,** первый в истории науки институт с таким названием. В 2010 г., по инициативе Международного Клуба Золотого Сечения, на базе Одесского национального университета был проведен **1-й Международный Конгресс по Математике Гармонии.**

Что такое «Гармонизация Математики»? Под этим, прежде всего, понимается широкое использование таких фундаментальных понятий «математики гармонии», как Платоновы тела, золотая пропорция, числа Фибоначчи и их обобщения (p-числа Фибоначчи, золотые p-пропорции, «металлические пропорции» и др.), а также вытекающих из них новых математических понятий (Q и Q_p – матрицы Фибоначчи (p=0,1,2,3, ...), гиперболические функции Фибоначчи и Люка и основанные на них «золотые матрицы» [61,62] и др.) для решения тех или иных математических задач и создания новых математических теорий и моделей. Блестящими примерами эффективного применения «теории чисел Фибоначчи» является решение 10-й проблемы Гильберта (Юрий Матиясевич, 1970), основанное на использовании новых математических свойств чисел Фибоначчи, и решение 4-й проблемы Гильберта (Алексей Стахов и Самуил Арансон), основанное на использовании «металлических пропорций». Теория систем счисления с иррациональными основаниями (система Бергмана и коды золотой p-пропорции) [31] и вытекающая из них концепция «золотой» теории чисел [45] являются примерами оригинальных и далеко не тривиальных математических результатов, полученных в рамках «математики гармонии» [56]. Современным математикам еще предстоит осознать, что системы счисления с иррационалными основаниями (система Бергмана и коды золотой p-пропорции) [31] являются новыми определениями действительных чисел и лежат в основе «золотой» теории чисел [45]. Таким образом, «гармонизация математики» возвращает современную математику к своим истокам - «Началам» Евклида, которые завершили процесс «математизации гармонии» в древнегреческой математике.

Заслуга математиков-фибоначчистов состояла в том, что своими исследованиями они «породили искру, из которой возгорелось пламя». Процесс «гармонизации математики» подтверждается довольно внушительным перечнем книг, опубликованных во второй половине 20 в. и начале 21 в.. Среди них особого внимания заслуживают книги Эдуарда Сороко [30], Олега Боднара [48], а также книги Скотта Олсена [63], Алексея Стахова [56], Сергея Петухова [64], Гранта Аракеляна [65], Юрия Григорьева и Григория Мартыненко [57], А.Ю. Южанникова [67] опубликованные в 21 в. При этом наиболее сенсационной является информация о публикации книги «Harmony: A New Way of Looking at Our World», написанной Принцем Чарльзом, наследником английского престола [68].

Следует отметить, что концепция «математики гармонии» встретила активную поддержку членов Международного Клуба Золотого Сечения. В этой связи особо хочется отметить публикации Сергея Абачиева [69 - 72], Григория Мартыненко [73 - 80], Гранта Аракеляна [81], Дениса Клещева [82], Николая Семенюты [83 - 86]. В этой связи необходимо отметить выдающийся вклад Николая Семенюты в развитие теории электрических цепей, основанных на «золотом сеченнии» и числах Фибоначчи [86 - 89]. Благодаря инициативе Сергея Абачиева в ВАК-овском электронном журнале «Науковедение» в 2012 г. опубликован блок статей, посвященных «математике гармонии» http://naukovedenie.ru/index.php?p=issue-4-12

«**Математика Гармонии» Петра Сергиенко.** Активным сторонником концепции «матемаики гармонии» стал известный российский специалист в области триалектики Петр Якубович Сергиенко. Он начал развивать так называемый «Русский проект Математики Гармонии». В этой связи особо следует отметить последнюю статью Петра Сергиенко [89]. Почему статья Сергиенко мне понравилась? После длительных поисков «пространственных геометрических объектов», выражающих Гармонию, Сергиенко пришел к тому, с чего начинала древнеегипетская и древнегреческая наука – к древнеегипетскому «гармоническому треугольнику», который лежит в основе геометрической конструкции Пирамиды Хеопса, и к «Правильным многогранникам» (Платоновым телам), которые были использованы Платоном в его космологии. То есть, Сергиенко своими исследованиями доказал, что ничего лучшего того, что придумали античные ученые для выражения «пространственной гармонии» («гармонический треугольник» и Платоновы тела) пока в науке о Гармонии не придумано. При этом я не отрицаю, что в статье [89] в развитие теории Платоновых тел, в частности, тетраэдра, получено ряд оригинальных результатов, которые могут быть использованы при моделировании трехмерного пространства.

Я хочу заметить, что во всех своих книгах, в частности, в англоязычной книге [56] и научно-популярной книге «Код да Винчи и ряды Фибоначчи» [90] я всегда посвящал специальную главу Платоновым телам, тем самым подчеркивая, что эти геометрические объекты являются важнейшей составной частью «Математики Гармонии» [56]. В «Началах» Евклида «золотое сечение» и Платоновы тела рассматривались как единое и неразрывное целое. Статья П.Я. Сергиенко показала, что, несмотря на попытки создания какого-то «Русского проекта», «Математика Гармонии» представляет собой единую математическую дисциплину, основанную на «золотом сечении», Платоновых телах и других «шармонических» геометрических объектах. И эта «Математика Гармонии», в которую входят и научные результаты П.Я. Сергиенко, восходит в своих истоках к «Началам Евклида». Поздравляю Петра Якубовича с публикацией прекрасной статьи!

Какое место занимает «математика гармонии» в системе современных математических наук? Для ответа на этот вопрос уместно привести мнение выдающегося украинского математика академика двух академий наук (Украинской и Российской) Юрия Алексеевича Митропольского [91]:

«Возникает вопрос, какое место в общей теории математики занимает созданная Стаховым Математика Гармонии? Мне представляется, что в последние столетия, как выразился когда-то Н.И. Лобачевский, «математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою». В результате между «элементарной математикой», лежащей в основе современного математического образования, и «высшей математикой» образовался разрыв. И этот разрыв, как мне кажется, и заполняет Математика Гармонии, разработанная А.П. Стаховым. То есть «Математика Гармонии» — это большой теоретический вклад в развитие, прежде всего, «элементарной математики», и отсюда вытекает важное значение «Математики Гармонии» для математического образования».

Таким образом, академик Митропольский акцентирует внимание на историческом аспекте. Его точка зрения состоит в том, что «математика гармонии»

- это, прежде всего, новая элементарная математика, основанная на необычном прочтении «Начал» Евклида, как исторически первого варианта «математики гармонии», связанного с Платоновыми телами и золотым сечением.

Но кроме этого существуют и другие аспекты «математики гармонии» - прикладной и эстетический.

Прежде всего, следует отметить прикладную направленность «математики гармонии», которая является истинной «математикой природы». Как было показано в моих книгах [56, 90] и книгах других авторов [30,34,46 – 51, 63 - 68], «математика гармонии» обнаруживается во многих явлениях природы, таких, как движение Венеры по небосводу («пентакл Венеры), пентагональная симметрия в природе, ботанические явление филлотаксиса, сердечная деятельность млекопитающих, фуллерены, квазикристаллы, «золотые» геноматрицы, таблица Менделеева и др.

С другой стороны, «математика гармонии» и ее математические результаты полностью удовлетворяет всем критериям красоты математики, а также «принципу математической красоты Дирака». И поскольку, согласно Дираку, «основные идеи должны выражаться в терминах прекрасной математики», то «математика гармонии» и есть та «прекрасная математика», которая, по Дираку, и должна быть воплощена в структурах природы. И этот вывод подтверждается современными научными открытиями, основанными на Платоновых телах и «золотом сечении». «Математика гармонии» может стать тем научным направлением, которое приведет в перспективе к «гармонической» революции в информационных технологиях (*p*-коды Фибоначчи, коды золотой *p*-пропорции, компьютеры Фиюоначчи).

Гармоническое сочетание исторического и прикладного аспектов «математики гармонии», как исторически первого варианта математики, созданного древними греками («Начала» Евклида) и как истинной «математики природы», которую широко использует Природа в своих объектах (явление филлотаксиса, квантовый мир, таблица Менделеева, генетический код, Солнечная система) с ее эстетическим совершенством, которое отражено в ее математических формулах, дают нам основание высказать предположение о том, что именно «математика гармонии» в процессе ее дальнейшего развития может стать «золотой» парадигмой современной науки и тем математическим направлением, которое будет способствовать преодолению кризиса в современной математике [92].

Литература

1. Боднар О.Я. Динамічна симетрія у природі та архітектурі. Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS”). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, - с.234-256.
2. Олег Черепанов. Азбука «золотой» арифметики». Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS”). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, с. 350 – 399.

3. Стахов А.П. Проблема филлотаксиса и геометрия Олега Боднара. Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS"). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, с. 90-97.
4. Стахов А.П. «Роль «золотого сечения» и «математики гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики». Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS"). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, -с.304 – 349.
5. Nagy Denes. Three "Golden Waves": a Social-polytical and Cultural History of the Golden Section. Сборник «Шлях до гармонии: МИСТЕЦТВО+МАТЕМАТИКА» (The Way to harmony: ART+MATHEMATICS"). – Львів, Львівська національна академія мистецтв, - с.20 – 74.
6. Eduard Lucas . The Theory of Simply Periodic Numerical Functions. American Journal of Mathematics, Vol.1 (1878), pp. 184-240, 289-321 (первая часть статьи переопубликована Фибоначчи-Ассоциацией в 1969 г.).
7. Последовательность Люка. Материал из Википедии — свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D1%81%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C_%D0%9B%D1%8E%D0%BA%D0%B0
8. Числа Люка. Материал из Википедии — свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0_%D0%9B%D1%8E%D0%BA%D0%B0
9. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry New York: John Wiley and Sons, 1961.
10. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978 (первое издание – 1961). – 144 с.
11. Hoggat V. E. Jr. Fibonacci and Lucas Numbers. – Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.
12. Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. – Ellis Harwood Limited, 1989.
13. Числа Фибоначчи. Материал из Википедии — свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0_%D0%A4%D0%B8%D0%B1%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D1%87%D1%87%D0%B8
14. Числа Пелля. Материал из Википедии — свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE_%D0%9F%D0%B5%D0%BB%D0%BB%D1%8F
15. Числа Мерсенна. Материал из Википедии — свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0_%D0%9C%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0

16. Числа Ферма. Материал из Википедии — свободной энциклопедии http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0_%D0%A4%D0%B5%D1%80%D0%BC%D0%B0
17. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
18. Vera W. de Spinadel The metallic means family and forbidden symmetries //«Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.12603, 18.11.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320033.htm
19. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (Русский перевод: Мидхат Газале. Гномон. От фараонов до фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с.)
20. Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001. – 490 p.
21. Kappraff Jay. “Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth and Number”. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2002. – 584 p.
22. Татаренко А.А. Золотые T_m – гармонии и D_m – фракталы — суть солитоно-подобного Tm – структурогенеза мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm
23. Аракелян Грант. Числа и величины в современной физике. Ереван: Изд. АН, 1989.
24. Аракелян Грант, О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.17064, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm
25. Шенягин В.П. «Пифагор, или Каждый создает свой миф» - четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17031, 27.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm
26. Косинов Н.В., Золотая пропорция, Золотые константы и Золотые теоремы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14379, 02.05.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321049.htm
27. Falcon Sergio, Plaza Angel. On the Fibonacci k-numbers Chaos, Solitons & Fractals, Volume 32, Issue 5, June 2007 : 1615-1624.
28. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Советское Радио, 1977. – 288 с.
29. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. М.: Знание, 1979. – 64 с. (Новое в жизни, науке и технике. Серия «Математика и кибернетика», вып 6).
30. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
31. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.
32. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.

33. Померанцева Н.А. Эстетические основы искусства Древнего Египта. М.: Искусство, 1985. – 255 с.
34. Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa: Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen).
35. Шевелев И.Ш. Принцип пропорции. М.: Стройиздат, 1986.- 200 с.
36. Система. Симметрия. Гармония. Под ред. В.С. Тюхтина и Ю.А. Урманцева. М.: Мысль, 1988. – 315 с.
37. Петухов С.В. Высшие симметрии, преобразования и инварианты в биологических объектах. В книге «Система. Симметрия. Гармония». Под ред. В.С. Тюхтина и Ю.А. Урманцева. М.: Мысль, 1988. – с. 260 – 274.
38. Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев, Изд-во «Выща школа», 1989 – 143 с.
39. Stakhov A.P. The Golden Section in the Measurement Theory, Computers & Mathematics with Applications, 1989, Vol. 17, No 4-6, 613-638.
40. Стахов О.П. За принципом золотої пропорції: перспективний шлях розвитку обчислювальної техніки. Вісник Академії наук Української РСР, №1-2, 1990 г.
41. Стахов О.П. Золотий переріз і наука про гармонію систем. Вісник Академії наук Української РСР», №12, 1991 г.
42. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.
43. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения: новый взгляд на теорию позиционных систем счисления и компьютерную арифметику. Международный научный журнал «Управляющие системы и машины», №4-5, 1994.
44. Стахов А.П. A generalization of the Fibonacci Q-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, № 9, с. 46-49.
45. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, 2004, Том. 56, №. 8, с. 1143-1150.
46. Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение. Три взгляда на гармонию природы. Москва: Стройиздат, 1990. – 343 с.
47. Васютинский Н.А. Золотая пропорция. М.: Молодая Гвардия, 1990. – 238 с.
48. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов: Свит, 1994. – 204 с.
49. Суббота А. Г. «Золотое сечение» («Sectio aurea») в медицине: лекции. СПб., 1994, 114 с.
50. Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Изд-во Ассоциации строительных вузов стран СНГ, 1998. -373 с.
51. Цветков В. Д. Сердце, золотое сечение и симметрия. Рос. Акад. Наук. Пушк. Науч. Центр, Ин-т теорет. И эксперим. Биофизики. –Пущино : ОНТИПНЦРАН, 1997. 170 с.
52. Семенюта Н.Ф. О становлении белорусской школы золотого сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567,публ.16591, 25.06.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321202.htm

53. Владимиров В.Л., Стахов А.П., Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm
54. Боднар О.Я. Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17259, 26.01.2012 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322135.htm
55. Олег Боднар, Теория относительности и филлотаксис: сходство и различие геометрических интерпретаций // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17097, 12.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322079.htm
56. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong: World Scientific, 2009. – 748 p.
57. Григорьев Ю., Мартыненко Г.. Типология последовательностей Фибоначчи: Теория и приложения. Введение в математику гармонии. LAMBERT Academic Publishing Gmbh & Co.KG. Saarbruecken, Germany, 2012. – 298 с.
58. Kuhn T. S. The Structure of Scientific Revolutions. Chicago, University of Chicago Press, 1962 (русский перевод, 1975).
59. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. М.: Наука, 1973. – 256 с.
60. Клещев Д. Лженаука: болезнь, которую некому лечить // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17012, 22.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322041.htm
61. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993. –с.9-14.
62. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, 23(2): 379-389.
63. Olsen Scott. The Golden Section: Nature’s Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006. – 58 p.
64. Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.-316 с.
65. Аракелян Грант. Теория ЛМФ и принцип золотого сечения. В 6 частях. Академия Тринитаризма, 2011 (электронная публикация).
66. Шевелев И.Ш. Основы гармонии. Визуальные и числовые образы реального мира. М.: Луч, 2009. – 360 с.
67. Южанников А.Ю. Золотое сечение и техноценозов в системах электроснабжения. Красноярск: Поликор, 2009. – 288 с.
68. HRH Charles The Prince of Wales. Harmony: A New Way of Looking at Our World. Harper Publisher, 2010 – 330 p.
69. Абачиев С.К. Современное естествознание в роковом методологическом кризисе. Чем может помочь математика гармонии? // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15259, 28.04.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322045.htm

70. Абачиев С.К. Обильная жатва // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15570, 30.09.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321165.htm
71. Абачиев С.К. Математика гармонии глазами историка и методолога науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15991, 11.07.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321185.htm
72. Абачиев С.К. Математика гармонии: от разработки «по горизонтали» к разработке «по вертикали» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16008, 22.07.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321188.htm
73. Мартыненко Г.Я., Математика гармонии в историческом аспекте: Древняя Греция и Рим // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15627, 01.11.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321173.htm
74. Мартыненко Г.Я., Математика гармонии: Средние века (V-XIII в.) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15679, 02.12.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321101.htm
75. Мартыненко Г.Я., Математика Гармонии: Возрождение (XIV–XVI вв.) (к 500–летию книги Луки Пачоли «О божественной пропорции») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16006, 20.07.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161679.htm
76. Мартыненко Г.Я., Математика гармонии: эпоха рационализма — XVII в. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16063, 05.09.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321102.htm
77. Мартыненко Г.Я., Математика гармонии: Эпоха Просвещения — XVIII в. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16071, 12.09.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321104.htm
78. Мартыненко Г.Я., Математика гармонии: Новое время – XIX век // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16087, 26.09.2010 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321105.htm
79. Мартыненко Г.Я., Математика гармонии: Новейшее время – XX век, 1900–1985 гг. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16262, 03.01.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321107.htm
80. Мартыненко Г.Я., Очерки по истории математико-гармонических представлений: от Пифагора до наших дней // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16369, 19.02.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02321006.htm
81. Грант Аракелян, О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm
82. Денис Клещев. Математика гармонии и многообразие Вселенной. Электронный журнал «Исторические исследования», 2012, №2 http://e-notabene.ru/hr/article_377.html
83. Н.Ф. Семенюта, Математика гармонии: общие вопросы, рекуррентные и мультирекуррентные последовательности, решения рекуррентных соотношений // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16779, 25.08.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321108.htm

84. Н.Ф. Семенюта, Математика гармонии: коды гармонических пропорций, гармонические пропорции в науке и технике // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16841, 26.09.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321229.htm
85. Н.Ф. Семенюта, Математика гармонии: гармонические волны экономики, валовый национальный продукт, налоги и др. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16872, 06.10.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321232.htm
86. Н.Ф. Семенюта, Математика гармонии в теории линейных электрических цепей // «Академия Тринитаризма», М.,Эл № 77-6567, публ.17057, 04.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322062.htm
87. Н.Ф. Семенюта, К электрической модели золотого сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17110, 16.12.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322085.htm
88. Н.Ф. Семенюта, Связь параметров лестничных электрических цепей с матрицами чисел Фибоначчи и соотношением Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17969, 03.04.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321267.htm
89. Сергиенко П.Я., Симметрия-асимметрия трехмерного пространства и алгоритмы ее математического моделирования // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17995, 17.04.2013 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162108.htm
90. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фиббоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006 -320 с.
91. Митропольский Ю.А. Отзыв о научном направлении украинского ученого, доктора технических наук, профессора Алексея Петровича Стахова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12452, 23.09.2005
92. Клайн М. Математика. Утрата определенности (пер. с англ.). М.: Мир, 1984. 434 с.