**Н. Ф. Семенюта**

# ОБОБЩЕННЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТИПА ФИБОНАЧЧИ

## 1. Исходные положения

В природе, науке, искусстве широкое использование получили рекуррентные числовые последовательности в основе которых лежат последовательности чисел Фибоначчи, Люка и др.[1, 2]. Они же, как простейшие числовые последовательности, более всего исследованы. Целью настоящей статьи является исследование основных теоретико-числовых свойств обобщенной числовой последовательности с более высокой степенью абстракции.

Обобщенные последовательности чисел удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}. \qquad (1)$$

В зависимости от значения начальных чисел $G_1$ и $G_2$ соотношение (1) порождает бесконечное множество числовых последовательностей, в том числе и простейшие последовательности Фибоначчи ($G_1 = F_1 = 1$, $G_2 = F_2 = 1$) и Люка ($G_1 = L_1 =1$, $G_2 = L_2 = 3$) и др. [3]. Если обозначить $G_1 = p$ и $G_2 = q$, то обобщенная числовая последовательность (1) примет следующий вид:

$$\begin{array}{llllllll} & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 \ldots \\ G_n(p;q) & p, & q, & p+q, & p+2q, & 2p+3q, & 3p+5q, & 5p+8q, \ldots \end{array} \qquad (2)$$

Из (2) следует общее правило образования последовательностей обобщенных рекуррентных чисел, в основе которых лежит последовательность Фибоначчи:

$$G_n(p;q) = pF_{n-2} + qF_{n-1}, \qquad n = 3, 4, 5,\ldots \qquad (3)$$

где $F_n$ – числа последовательности Фибоначчи.

Таким образом, обобщенная рекуррентная последовательность (3) состоит из двух последовательностей типа Фибоначчи, которые начинаются числами $G_1 = p$ и $G_2 = q$. Числа $G_1 = p$ и $G_2 = q$ своего рода гены, которые определяют значения всех последующих чисел и свойств обобщенных последовательностей. Струкуры с двумя числовыми последовательностями характерны для Природы и др.

## 2. Основная последовательность чисел Фибоначчи

Основной числовой последовательности Фибоначчи соответствует последовательность $F_n(1;1)$ с начальными членами $G_1 = p = 1$ и $G_2 = q = 1$ ($F_1 = 1$ и $F_2 = 1$):

:

$$\begin{array}{lllllllll} & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \quad F_9\ldots, \\ F_n(1;1) & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, & 8, & 13, & 21,\ldots \end{array} \qquad (4)$$

и члены последовательности образуются по рекуррентному соотношению:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n = 3, 4, 5,\ldots$$

. Суть основной последовательности Фибоначчи (4) не изменяется если к ней добавить член $F_0 = 0$:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ …, |
| $F_n(0;1)$ | 0, | 1, | 1, | 2, | 3, | 5, | 8, | 13, | 21,… |

(5)

## 3. Обобщенные числовые последовательности типа Фибоначчи

Обобщенные числовые последовательности образуются путем суммирования членов основной последовательности Фибоначчи (4) и соответствующего числа последовательности (5). Так, при суммировании $F_n(1;1)$ и $F_n(0;1)$ образуется последовательность $F_n(1;2)$:

| $G_n\,(p;q)$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ | $G_6$ | $G_7$ | $G_8$ | $G_9$…, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n(1;1)$ | 1, | 1, | 2, | 3, | 5, | 8, | 13, | 21. | 34,…, |
| $F_n(0,1)$ | 0, | 1, | 1, | 2, | 3, | 5, | 8, | 13, | 21,…, |
| $\boldsymbol{F_n(1;2)}$ | **1** | **2** | **3** | **5** | **8** | **13** | **21** | **34** | **55…** |

(6)

В результате сложения получили производную последовательность, известную как последователность Фибоначчи $F_n(1;2)$, числа которой образуются по рекуррентному соотношению:

$$G_n = F_n = F_{n-1} + 2F_{n-2}, \qquad n = 3, 4, 5,\ldots \tag{7}$$

и $G_1 = p = F_1 = 1$ и $G_2 = q = F_2 = 2$.

Суммируя далее последовательности $F_n(1;2)$ и $F_n(0;1)$, получим последовательность $F_n(1;3)$:

:

| $G_n\,(p;q)$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ | $G_6$ | $G_7$ | $G_8$ | $G_9$ …, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n(1;2)$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55…, |
| $F_n(0;1)$ | 0, | 1, | 1, | 2, | 3, | 5, | 8, | 13, | 21,…, |
| $\boldsymbol{L_n(1;3)}$ | **1** | **3** | **4** | **7** | **11** | **18** | **29** | **47** | **76…** |

(8)

Последовательность (8)**,** известна как последовательность Люка $L_n(1;3)$, и ее члены определяются по рекуррентному соотношению:

$$G_{\underline{n}} = L_n = F_n + 3F_{n-1}, \qquad n = 3, 4, 5,\ldots \tag{9}$$

Приняв, $G_1 = 1$ и $G_2 = q$ равным целым чиселам, получим другие рекуррентные последовательности, которые будут представлять суммы членов последовательностей $G(1;q)$ и последовательности Фибоначчи (5). Так, для случая $G_1 = 1$ и $G_2 = 4$, получим последовательность $G_n(1;4)$, которая является суммой последовательностей: Люка $G_n(1;3)$ и Фибоначчи $F_n(0;1)$:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_n\,(p;q)$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ | $G_4$ | $G_5$ | $G_6$ | $G_7$ | $G_8$ | $G_9\ldots,$ | |
| $L_n(1;3)$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 …, | |
| $F_n(0;1)$ | 0, | 1, | 1, | 2, | 3, | 5, | 8, | 13, | 21, ..., | |
| **$G_n(1;4)$** | **1** | **4** | **5** | **9** | **14** | **23** | **37** | **60,** | **97…** | (10) |

Следовательно, члены последовательность $G_n(1,4)$ определяются соотношением

$$G_{\mathrm{n}} = F_n + 4F_{n-1}, \qquad n = 3, 4, 5,\ldots \tag{11}$$

Таким образом, при $p = 1$ *и* $q = 1$ образуется основная последовательность Фибоначчи (4**),** при $p = 1$ и $q = 2$ – производная последовательность Фибоначчи (6), при $p = 1$ и $q = 3$ – последовательность Люка (8), при $p = 1$ и $q = 4$ последовательность (10) и т. д., т. е. частные последовательности образуются как суммы основной последовательности (4) и соответствующего числа последовательностей (5):

$$G_{\mathrm{n}} = F_n + q\,F_{n-1}, \qquad q = 1, 2, 3,\ldots \tag{12}$$

В рассмотренных примерах $G_1 = p$ и $G_2 = q$ целые числа и числа последовательностей были также целыми числами. Рассмотрим случай, когда $G_1 = p = 1$, а $G_2 = q= 1/H$**,** т. е. дробные число. Например, если $G_1 = p = 1$, а $G_2 = = q = 1/2$, то последовательность $G_n = (1;1/2)$ имеет вид:

$$G_n(1;\frac{1}{2}) \qquad 1\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{4}{2}\ \frac{7}{2}\ \frac{11}{2}\ \frac{18}{2}\ \frac{29}{2}\ \frac{47}{2}\cdots$$

или

$$\boldsymbol{G_n(1;\frac{1}{2}) \qquad \frac{1}{2}(2\ \ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 7\ \ 11\ 18\ \ 29\ \ 47\ \ 76\ \ldots).} \tag{13}$$

Если $G_2 = q =1/3$, то последовательность $G_n(1;1/3)$ имеет вид:

$$G_n(1;\frac{1}{3}) \qquad 1\ \frac{1}{3}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{3}\ \frac{9}{3}\ \frac{14}{3}\ \frac{23}{3}\ \frac{37}{3}\ \frac{60}{3}\cdots$$

или

$$\boldsymbol{G_n(1;\frac{1}{3}) \qquad \frac{1}{3}\,(3\ \ 1\ \ 4\ \ 5\ \ 9\ \ 14\ \ 23\ \ 37\ldots).} \tag{14}$$

Если $G_2 = q = 1/4$, то последовательность $G_n(1;1/4)$ имеет вид:

$$G_n(1;\frac{1}{4}) \qquad 1\ \frac{5}{4}\ \frac{6}{4}\ \frac{11}{4}\ \frac{17}{4}\ \frac{28}{4}\ \frac{45}{4}\ \frac{73}{4}\ldots$$

или

$$\boldsymbol{G_n(1;\frac{1}{4}) \qquad \frac{1}{4}\,(4\ \ 1\ \ 5\ \ 6\ \ 11\ \ 17\ \ 28\ \ 45\ \ 73\ldots).} \qquad (15)$$

Таким образом, при дробном $G_2 = q = 1/H$ обобщенная последовательность имеет вид:

$$G_n(1;1/H) \qquad 1\ \frac{1}{H}\ \frac{H+1}{H}\ \frac{H+2}{H}\ \frac{2H+3}{H}\ \frac{3H+5}{H}\ \ldots$$

или

$$\boldsymbol{G_n(1;1/H) \qquad \frac{1}{H}\,(H\ \ 1\ \ H{+}1\ \ H{+}2\ \ 2H{+}3\ \ 3H{+}5\ \ldots).} \qquad (16)$$

Из полученных результатов (13) – (15) следует, что в случае дробного $G_2 = q/H$ последовательность принимает вид (16). Последователььости в скобках соответствует последовательностям $G_n(H;\ 1)$, начинающейся с $G_0 = H$ Множитель последовательности равен $1/H$. Из полученных результатов (16) также следует объяснение появление члена $L_0 = H = 2$ в известной последовательности Люка:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 & L_5 & L_6 & L_7 & L_8 & L_9\ldots \\ \boldsymbol{L_n(2;1)} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{11} & \mathbf{18} & \mathbf{29} & \mathbf{47} & \mathbf{76\ldots} \end{array} \qquad (17)$$

Одной из частных последовательностей является также, так называемая золотая последовательность чисел, в основе которой лежат начальные числа $G_1 = p = \Phi^0 = 1$ и $G_2 = q = \Phi^1 = 1{,}618$:

$$\begin{array}{lccccccc} G_n\,(1;\Phi) & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7\ldots, \\ & \Phi^0 & \Phi^1 & \Phi^2 & \Phi^3 & \Phi^4 & \Phi^5 & \Phi^6\ldots, \\ & 1 & 1{,}618 & 2{,}618 & 4{,}236 & 6{,}854 & 11{,}090 & 17{,}944\ldots \end{array} \qquad (18)$$

Если $G_1 = p = 1$ и дробное число $G_2 = q = 1/\Phi = 0{,}618$, то числовая последовательность имеет вид:

$$\begin{array}{lccccccc} G_n\,(1;1/\Phi) & G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7\ldots, \\ & \frac{\Phi}{\Phi} & \frac{1}{\Phi} & \frac{\Phi+1}{\Phi} & \frac{\Phi+2}{\Phi} & \frac{2\Phi+3}{\Phi} & \frac{3\Phi+5}{\Phi} & \frac{5\Phi+8}{\Phi}\ldots, \\ & 1 & 0{,}618 & 1{,}618 & 2{,}236 & 3{,}854 & 6{,}090 & 10{,}090\ldots \end{array}$$

или

$$G_n\,(1;1/\Phi) \qquad \boldsymbol{\frac{1}{\Phi}\,(\Phi\ \ 1\ \ \Phi{+}1\ \ \Phi{+}2\ \ 2\Phi{+}3\ \ 3\Phi{+}5\ \ 5\Phi{+}8\ \ldots).}$$

## 4. Простейшие свойства обобщенных числовых последовательностей

***Сумма первых n чисел последовательности***:

$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_n = G_{n+2} - 1, \qquad q = 1,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_n = G_{n+2} - 2, \qquad q = 2,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_n = G_{n+2} - 3, \qquad q = 3,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{\mathrm{n}} = G_{n+2} - 4, \qquad q = 4,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{\mathrm{n}} = G_{n+2} - 5, \qquad q = 5$$

Из полученных результатов следует, что в общем случае:

$$\mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \ldots + \mathrm{G}_n = G_{n+2} - q, \qquad q = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots \qquad (19)$$

***Сумма первых n чисел с нечетными индексами***:

$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n}, - 0, \qquad q = 1,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n}, - 1, \qquad q = 2,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n}, - 2, \qquad q = 3,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n}, - 3, \qquad q = 4,$$
$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n}, - 4, \qquad q = 5.$$

Из полученных результатов следует, что в общем случае:

$$G_1 + G_3 + G_5 + \ldots + G_{2n-1} = G_{2n} - (q-1), \qquad q = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots \qquad (20)$$

***Сумма первых n чисел с четными индексами***:

$$G_2 + G_4 + G_6 + \ldots + G_{2n} = G_{2n+1} - 1, \qquad q = 1, 2, 3, 4, 5,\ldots \qquad (21)$$

***Сумма произведений смежных чисел***:

$$G_1G_2 + G_2G_3 + \ldots + G_{n-1}G_n = \frac{G_{n-1}G_{n+1} + G_n^2 - 1}{2}, \qquad q = 1,$$

$$G_1G_2 + G_2G_3 + \ldots + G_{n-1}G_n = \frac{G_{n-1}G_{n+1} + G_n^2 - 3}{2}, \qquad q = 2,$$

$$G_1G_2 + G_2G_3 + \ldots + G_{n-1}G_n = \frac{G_{n-1}G_{n+1} + G_n^2 - 7}{2}, \qquad q = 3,$$

$$G_1G_2 + G_2G_3 + \ldots + G_{n-1}G_n = \frac{G_{n-1}G_{n+1} + G_n^2 - 13}{2}, \qquad q = 4,$$

$$G_1G_2 + G_2G_3 + \ldots + G_{n-1}G_n = \frac{G_{n-1}G_{n+1} + G_n^2 - 21}{2}, \qquad q = 5.$$

Из полученных результатов следует, что в общем случае

$$G_1G_2 + G_2G_3 + \ldots + G_{n-1}G_n = \frac{G_{n-1}G_{n+1} + G_n^2 - a}{2}\ , \qquad (22)$$

где $a = q(q-1) + 1$.

***Сумма произведений смежных чисел, оканчивающихся нечетным членом*:**

$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n}G_{2n+1} = G_{2n+1}^2 - 1, \qquad q = 1,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n}G_{2n+1} = G_{2n+1}^2 - 3, \qquad q = 2,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n}G_{2n+1} = G_{2n+1}^2 - 7, \qquad q = 3,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n}G_{2n+1} = G_{2n+1}^2 - 13, \qquad q = 4,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n}G_{2n+1} = G_{2n+1}^2 - 21. \qquad q = 5.$$

Из полученных результатов следует, что в общем случае:

$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n}G_{2n+1} = G_{2n+1}^2 - a, \qquad q = 1, \qquad (23)$$

где $a = q(q-1) + 1$.

***Сумма произведений смежных чисел, оканчивающихся четным членом*:**

$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n-1}G_{2n} = G_{2n}^2 - 0, \qquad q = 1,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n-1}G_{2n} = G_{2n}^2 - 2, \qquad q = 2,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n-1}G_{2n} = G_{2n}^2 - 6, \qquad q = 3,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n-1}G_{2n} = G_{2n}^2 - 12, \qquad q = 4,$$
$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n-1}G_{2n} = G_{2n}^2 - 20, \qquad q = 5.$$

Из полученных результатов следует, что в общем случае:

$$G_1G_2 + G_2G_3 + G_3G_4 + \ldots + G_{2n-1}G_{2n} = G_{2n}^2 - c, \qquad (24)$$

где $c = q(q-1)$.

***Квадрат любого числа последовательности*:**

$$G_n^2 = G_{n-1}G_{n+1} - 1(-1)^n, \qquad q = 1,$$
$$G_n^2 = G_{n-1}G_{n+1} + 1(-1)^n, \qquad q = 2,$$
$$G_n^2 = G_{n-1}G_{n+1} + 5(-1)^n, \qquad q = 3,$$
$$G_n^2 = G_{n-1}G_{n+1} + 11(-1)^n, \qquad q = 4,$$
$$G_n^2 = G_{n-1}G_{n+1} + 19(-1)^n, \qquad q = 5.$$

Из полученных результатов следует, что в общем случае:

$$G_{n+1}^2 = G_{n-1}G_{n+1} + d\,(-1)^n, \qquad q = 1, 2, 3, 4, 5,...$$

где $d = q(q-1) - 1$.

***Сумма квадратов первых n чисел последовательности*:**

$$G_1^{\,2} + G_2^{\,2} + \ldots + G_n^{\,2} = G_n\,G_{n+1} - 0, \qquad q = 1,$$
$$G_1^{\,2} + G_2^{\,2} + \ldots + G_n^{\,2} = G_n\,G_{n+1} - 1, \qquad q = 2,$$
$$G_1^{\,2} + G_2^{\,2} + \ldots + G_n^{\,2} = G_n\,G_{n+1} - 2, \qquad q = 3,$$
$$G_1^{\,2} + G_2^{\,2} + \ldots + G_n^{\,2} = G_n\,G_{n+1} - 3, \qquad q = 4,$$
$$G_1^{\,2} + G_2^{\,2} + \ldots + G_n^{\,2} = G_n\,G_{n+1} - 4, \qquad q = 5.$$

Из полученных результатов следует, что в общем случае:

$$G_1^{\,2} + G_2^{\,2} + \ldots + G_n^{\,2} = G_n\,G_{n+1} - f\,,$$

где $f = q - 1$.

## Заключение

Основным параметром обобщенных числовых последовательностей являются начальные числа (гены) $p$ и $q$ [3]. В случае обобщенной числовой последовательности типа Фибоначчи $p = 1$ и основным параметром остается $q$.

Из анализа теоретико-числовые свойства обобщенных числовых последовательностей, следует, что простейшие последовательности Фибоначчи ($q = 1$, $q = 2$) и Люка ($q = 3$), являются частными случаями обобщенной рекуррентной последовательности чисел. Они же, как простейшие, со времен Древнего мира, более всего исследованы. В целом же обобщенная числовая последовательность ждет своих исследователей.

Результаты проведенного анализа ставят также проблему разработки универсальной электрической модели рекуррентных последовательностей чисел [4, 5], отражающих как свойства обобщенных последовательностей, так и связи между ними и золотым сечением, треугольником Паскаля, гиперболическими функциями, филлотаксисом, изоэкстремальными функциями П. Л. Чебышева и др., лежащими в основе природы, науки, техники, искусства, общества [1, 2].

### Литература


1. Семенюта Н. Ф. Гармонические пропорции в природе и искусстве. – Гомель: БелГУТ, 2002. – 82 с.
2. Семенюта Н. Ф. Гармонические пропорции в науке и технике. – Гомель: БелГУТ, 2012. – 172 с.
3. Яглом И. М. Как разрезать квадрат? (Математическая библиотека). – М.: Наука, 1968. – 87 с.
4. Семенюта, Н. Ф. Электрическая модель обобщенных рекуррентных чисел и рядов // «Академия Тринитаризма»: – http://trinitas.ru /rus.doc /0232/012a /02322014 htm.12.03. 2009.

5. Семенюта Н. Ф. Электрические модели золотого сечения и рекуррентных последовательностей чисел / Гармоноческое развитие систем – третий путь человечества. – Одесса, ООО «Институт креативных технологий», 2011. – С. 87–94.