В.П. Шенягин

Рациональная и иррациональная составляющие золотых пропорций

Москва
Академия тринитаризма
Институт золотого сечения
2014

УДК 511.176; 511.41
ББК 22.1; 87.2; 84(2)

Шенягин В.П.
Ш47 Рациональная и иррациональная составляющие золотых пропорций / Научное издание. – М.: Академия тринитаризма, Институт золотого сечения, 2014. – 67 с.

Понятие золотых пропорций (металлических пропорций, мантиссовых пропорций) пополняется новым качеством.

Выявлена взаимосвязь рациональной и иррациональной составляющих золотых пропорций. Заострено внимание на особенностях и свойствах разности и суммы больших и малых золотых пропорций.

Приведен оптимальный алгоритм геометрического нахождения тетрады золотых констант на числовой оси с применением циркуля и линейки.

Дано новое прочтение золотых пропорций как четырех констант с равными мантиссами.

На основе синтеза единицы и золотых пропорций рассмотрены тетрады констант конкретных золотых пропорций, раскрывающих математическое изящество и числовую красоту чисел с равными мантиссами. Приведены примеры геометрического построения тетрады отрезков, соответствующие длины которых соотносятся в гармонических пропорциях. Тетрадные отношения в золотых пропорциях выявляют особенность первой классической золотой пропорции в этом аспекте.

В работе также приведены особенности корневых *r*-пропорций, составляющих особый класс гармоничных соотношений, и их некоторые проявления в областях знаний.

Брошюра предназначена всем желающим изучать и развивать математические основы гармонии. При этом материал изложен подробно с целью беспроблемности его восприятия теми, кто только начинает знакомство с гармонией.

УДК 511.176; 511.41
ББК 22.1; 87.2; 84(2)

Алексею Петровичу Стахову ко дню 75-летия
с благодарностью, признательностью и глубоким уважением

Содержание

Список рисунков

Список таблиц

Вместо предисловия

Прибегая к золотым (металлическим) пропорциям, мы для удобства допускаем перестановку слагаемых, например, заменяя формулу $\bar{s}_{n_1} = \dfrac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}$ формулой $\bar{s}_{n_1} = \dfrac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$. От перемены мест слагаемых сумма (результат) не меняется. Но в нашем примере меняется суть, поскольку в простых алгебраических формулах гармонии сокрыт более глубинный смысл, чем видится на первый взгляд. С него и начнем повествование в настоящей работе.

1. Инверсные числа

Условия

Имеются инверсные числа (золотые константы) s_n и $\bar{s}_n$:

$$\bar{s}_n = \frac{1}{s_n} \text{ и } s_n = \frac{1}{\bar{s}_n}. \tag{1}$$

Условие 1. Произведение инверсных чисел равно единице:

$$s_n \bar{s}_n = 1. \tag{2}$$

Условие 2. Разность инверсных чисел равна целому числу, поскольку их мантиссы равны между собой:

$$\begin{cases} s_n - \bar{s}_n = n, \\ \bar{s}_n - s_n = -n. \end{cases} \tag{3}$$

При этом возможны два результата.

Условие 2а. Разность между бо́льшим и меньшим (прямым и обратным) инверсным числом равна целому положительному числу:

$$s_n - \bar{s}_n = n,$$

$$s_n - \frac{1}{s_n} = n, \tag{4}$$

где n – целые положительные числа, включая ноль и бесконечность.

Условие 2б. Разность между меньшим и бо́льшим (обратным и прямым) инверсным числом равна целому отрицательному числу:

$$\bar{s}_n - s_n = -n,$$

$$\bar{s}_n - \frac{1}{\bar{s}_n} = -n, \tag{5}$$

где $-n$ – целые отрицательные числа, включая ноль и бесконечность.

Инверсные числа в основе золотых пропорций

Ныне известно, что инверсные числа характеризуют гармонию. Они достаточно хорошо изучены различными авторами. При этом остались не выявленными некоторые особенности золотых пропорций. Обратимся к уравнениям, характеризующим их:

$$s_n^2 - n s_n - 1 = 0, \tag{6}$$

$$\bar{s}_n^2 + n \bar{s}_n - 1 = 0, \tag{7}$$

$$s_n^2 - ns_n + 1 = 0. \tag{8}$$

Вспомним, как при поиске гармоничных соотношений, подобных классической золотой пропорции (сечению), получены уравнения (6) и (7), корни которых характеризуют золотые пропорции. И заметим, что в этой системе не хватает четвертого уравнения

$$s_n^2 + ns_n + 1 = 0. \tag{9}$$

Коэффициент и индекс n является порядковым номер золотой пропорции.

Авторские определения некоторых видов чисел и числовых рядов

Инверсные числа (золотые константы) или взаимно инверсные числа – группа пар чисел, произведение которых равно единице, разность – целым (рациональным) числам, сумма – гармоническим (иррациональным) числам.

Инверсные числа обычно обозначаются мной в виде s_m и $\bar{s}_m$, в настоящей материале – в виде s_n и $\bar{s}_n$, но, как выявлено в данной работе, равносильно обозначение в виде s_h и $\bar{s}_h$ (см. гармонические числа).

Характеризуют гармоничные соотношения частей и целого, значения золотых пропорций (металлических пропорций, мантиссовых пропорций, T_m-гармоний, гномонных Φ_m-гармоний). Являются разновидностями взаимно обратных чисел. Понятие «инверсные числа» в Википедии и иных распространенных энциклопедических и справочных источниках отсутствует.

Представляют собой ряды чисел.

Инверсный ряд чисел (ряд инверсных чисел) – последовательность инверсных чисел, расположенных в порядке возрастания:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ 1+\sqrt{2},\ \frac{3+\sqrt{13}}{2},\ \ldots,\ \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2};$$

$$1{,}618\ldots;\ 2{,}414\ldots;\ 3{,}302;\ \ldots;\ \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}.$$

Гармонические числа. Обозначаются мной в виде s_h и $\bar{s}_h$.

Гармонический ряд чисел – последовательность гармонических чисел, расположенных в порядке возрастания:

$$\sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{13},\ \ldots,\ \sqrt{n^2+4}. \tag{10}$$

Понятие «гармонические числа» в Википедии отсутствует.

Примечание. Выражения типа $s_{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{4}+\sqrt{\left(\sqrt{4}\right)^2-\left(\sqrt{4}\right)^2}}{\sqrt{4}} = 1$ для удобства восприятия будем записывать без скобок в виде $s_{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{4}+\sqrt{\sqrt{4}^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}} = 1$ и использовать, в основном, арифметические значения корней.

Округление чисел проводим не по правилам арифметического округления, а путем отбрасывания разрядов мантисс для сохранения лучшей узнаваемости числовых констант.

Математические константы будем обозначать малыми буквами, поскольку их не принято обозначать заглавными, особенно в физике. Хотя золотую пропорцию обозначают по-разному, часто в виде $\Phi, \phi, \varphi, \lambda, \tau$, Phi [1]. Большая золотая пропорция в настоящей работе обозначается малой буквой ϕ, малая – $\bar{\phi}=1/\phi$ [30], кстати, соответствуя обозначению обратной величине, принятой в математике. Обозначение с горизонтальной чертой относится ко всем золотым пропорциям.

Малые корневые и дробные пропорции для определенности будем обозначать в виде $\tilde{r}_n$ и $\tilde{f}_n$, используя волнистую линию $\tilde{r}_n$ вместо прямой черты у малой золотой пропорции $\bar{\phi}$ или у обобщенных золотых пропорций $\bar{s}_n$, поскольку корневые и дробные пропорции не инверсны, а связаны соотношениями $\tilde{r}_n=\dfrac{n}{r_n}$; $r_n=\dfrac{n}{\tilde{r}_n}$.

Индексы, характеризующие номер золотых пропорций, равно как и корневых, и дробных, будем обозначать буквой n вместо буквы m, уже ставшей распространенной, т.е. s_n вместо s_m. Это продиктовано сутью настоящей работы, базирующейся на рациональной и иррациональной составляющей золотых пропорций, где натуральный ряд целых чисел сопровождается в математике символом n.

2. Разность инверсных чисел

Исходным моментом в поиске золотых пропорций явилось задание условия 1 формулой (2) $s_n\bar{s}_n=1$ и условия 2 выражением (3), которое рассмотрим в обеих разновидностях (4) и (5).

Разность между б*о*льшим и меньшим (прямым и обратным) инверсным числом

Из условия (4) $s_n-\dfrac{1}{s_n}=n$ следует квадратное уравнение

$$s_n^2-ns_n-1=0 \tag{11}$$

с положительными

$$s_{n_1}=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} \tag{12}$$

и отрицательными корнями

$$s_{n_2}=\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2}. \tag{13}$$

Именно такие рассуждения, задав условие (4), и приводят в своих публикациях авторы: Г.Б. Аракелян [1], открывший инверсные числа с равными мантиссами, и открывшие золотые пропорции В.П. Шенягин [15], В. Шпинадель [29], М. Газале [4]. А.А. Татаренко в публикации [8] не уточняет исходные посылы получения уравнения, задающего T_m-гармонии, а к его первой публикации 1999 г. у меня доступа нет.

Геометрическое нахождение на числовой оси констант (12) и (13) приведено ниже на рисунке 12.

Поскольку в большинстве прикладных случаев необходимы положительные значения корней, возникла необходимость поиска уравнения, для которого s_{n_2} было бы положительным, т.е. противоположным по знаку (13) $\bar{s}_n=\dfrac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$. Для этого в уравнении (11) достаточно знак перед вторым слагаемым сменить на противоположный и сделать замену переменной s_n на $\bar{s}_n$. При этом условие (4) по существу меняется на (5).

Разность между меньшим и бо́льшим инверсным числом

Условие (5) $\bar{s}_n - \dfrac{1}{\bar{s}_n} = -n$ приводит к квадратному уравнению

$$\bar{s}_n^2 + n\bar{s}_n - 1 = 0 \tag{14}$$

с корнями

$$\bar{s}_{n_1} = \frac{-n + \sqrt{n^2+4}}{2}, \tag{15}$$

$$\bar{s}_{n_2} = \frac{-n - \sqrt{n^2+4}}{2}, \tag{16}$$

также как и при сумме инверсных чисел положительными и отрицательными соответственно.

Значения корней (12) и (16), а также (13) и (15) равны по абсолютным величинам $s_{n_1} = |\bar{s}_{n_2}|$, $\bar{s}_{n_1} = |s_{n_2}|$, но ситуации поменялись местами: отрицательные корни стали положительными, положительные – отрицательными.

Геометрическое нахождение на числовой оси золотых констант (15) и (16) приведено ниже на рисунке 13.

Подчеркнем еще раз, что результатом разности инверсных чисел является целое положительное значение *n*, включая ноль.

Представим численные значения золотых констант в таблице 1.

Таблица 1

Численные значения золотых констант при разности инверсных чисел

n	s_{n_1}	s_{n_2}	$\bar{s}_{n_1}$	$\bar{s}_{n_2}$	$s_{n_1} - \bar{s}_{n_1}$	$\bar{s}_{n_2} - s_{n_2}$
0	1,000	–0,000	0,000	–1,000	1	–1
1	1,618	–0,618	0,618	–1,618	1	–1
2	2,414	–0,414	0,414	–2,414	2	–2
3	3,302	–0,302	0,302	–3,302	3	–3
4	4,236	–0,236	0,236	–4,236	4	–4
5	5,192	–0,192	0,192	–5,192	5	–5

Необходимость отрицательных величин при разности инверсных чисел

Отрицательные величины корней в исследованиях пропорций необходимы по нескольким причинам.

Во-первых, для того, чтобы обеспечить возможность получения величины отрезка (мы ведем рассуждения в одномерной линейной системе координат), равного значению $\sqrt{n^2+4}$. Например, для первой золотой пропорции это есть величина $\sqrt{5} = 2{,}236$, для второй золотой пропорции $\sqrt{8} = 2{,}828$.

Возникает необходимость захода в область отрицательных значений чисел. Так, длина отрезка $\sqrt{5}$ складывается для первого результата в виде

$\sqrt{5} = 1{,}618 + |-0{,}618| = 2{,}236$, для второго результата $\sqrt{5} = 0{,}618 + |-1{,}618| = 2{,}236$. Пример сопроводим рис. 1.

$$\begin{array}{ccc} \phi_2 & 0 & \phi_1 \\ -0{,}618 & 0 & 1{,}618 \\ \leftarrow & \sqrt{5} & \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \bar{\phi}_2 & 0 & \bar{\phi}_1 \\ -1{,}618 & 0 & 0{,}618 \\ \leftarrow & \sqrt{5} & \rightarrow \end{array}$$

Рис. 1. Представление $\sqrt{5}$

Во-вторых, поскольку золотые пропорции характеризуют проявления гармонии в различных областях знаний, ожидается, что им принадлежит главенствующая роль в общей теории гармонии мироздания. Об этом, например, свидетельствует теория золотых гиперболических функций, развиваемая А.П. Стаховым. Теория ГФФЛ позволила ему с С.Х. Арансоном найти более строгое доказательство, по сути, новое решение четвертой проблемы Гильберта. Поиск законов мироздания и новых, для нас-землян, гармонических миров заставляет принимать во внимание наличие миров и антимиров, «+» и «–» условных полярностей, «женских» и «мужских» начал, добра и зла, хаоса и порядка и т.п.

В-третьих, наличие симметричных (инверсных) по величинам и противоположным (инверсным) по знакам корней, которых четыре, ведет в четверичную систему анализа и синтеза. Об этом чуть ниже.

А здесь (напомню, что мы рассматриваем разность между меньшим и б*о*льшим (обратным и прямым) инверсным числом), чтобы избежать отрицательных чисел, следует найти условие, уравнение и его корни, дающие лишь положительные значения чисел, характеризующих золотые константы.

Здесь же напомню, что *разность инверсных чисел, равная целым числам n, позволила найти главное – сами эти числа, характеризующие гармонию как золотые константы*. Но при этом оказался упущенным поиск глубинной сути гармонии – особенностей реликтовых иррациональных чисел, задающих величины пар инверсных золотых констант.

Поиск реликтового иррационального числа, одновременно с нахождением собственно самих инверсных чисел, позволяет осуществить операция суммы инверсных чисел.

3. Сумма инверсных чисел

К исследованиям золотых пропорций, в части особенностей проявления в них рациональной и иррациональной составляющих, в свое время меня подтолкнули идеи и результаты, изложенные О.Б. Балакшиным в брошюре [2]. Ныне многое и разнообразное свелось воедино. Различия и общность рациональной и иррациональной составляющих золотых пропорций позволила выявить сумма инверсных чисел [27], открывшихся мне в 1997 году.

Постановка задачи

Допустим, что величины s_n и $\bar{s}_n$ нам еще неизвестны. Предположим, что имеются инверсные числа s_h и $\bar{s}_h = 1/s_h$, произведение которых равно единице $s_h \bar{s}_h = 1$ и их мантиссы одинаковы. Но к соблюдению этого условия мы приходим не через разность инверсных чисел, а через их сумму, и, надо признать, весьма необычно и неожиданно [27].

Положим, что их сумма равна положительному гармоническому числу, различному для разных золотых пропорций:

$$s_h + \bar{s}_h = h,$$

$$s_h + \frac{1}{s_h} = h, \tag{17}$$

где h– порядковый номер инверсных гармонических чисел.

Условие 3. Сумма инверсных чисел равна гармоническому числу $s_h + \bar{s}_h = h$

При этом, казалось бы, возможен лишь один вариант суммы. Однако, с учетом возможности смены полярности результата, своеобразной полярностной инверсии, можно сформулировать условие 4, та именно – сумма инверсных чисел равна отрицательному гармоническому числу $s_h + \bar{s}_h = -h$, что представляется надуманным, вводя в область лишь отрицательных чисел. Но, тем не менее, зафиксируем это условие.

Условие 4. Сумма инверсных чисел равна отрицательному гармоническому числу $s_h + \bar{s}_h = -h_n$

Из условия (17) следует

$$s_h^2 - hs_h + 1 = 0 \tag{18}$$

Оба корня уравнения (18) положительные:

$$s_{h_1} = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4}}{2}; \tag{19}$$

$$s_{h_2} = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4}}{2}. \tag{20}$$

А теперь главное. Найдем значения h такие, чтобы в (19) и (20) подкоренное выражение $\sqrt{h^2 - 4}$ было целым числом для упрощения ситуации путем перехода от иррациональных чисел к рациональным. Требование о целостности дискриминанта является основным условием для суммы инверсных чисел.

Основное условие для суммы инверсных чисел: дискриминант $\sqrt{h^2 - 4}$ должен быть целым числом, включая ноль

Ему отвечают следующие числа:

$\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{29}$, …, h.

При этом дискриминант $D = \sqrt{h^2 - 4}$ будет равен целым числам, включая ноль: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, n.

Корни (19) примут вид:

$$s_{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{4}+\sqrt{\sqrt{4}^2-4}}{2}=\frac{2+0}{2}=1=s_0;$$

$$s_{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618=s_1=\phi;$$

$$s_{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{\sqrt{8}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{8}+2}{2}=\sqrt{2}+1=2{,}414=s_2;$$

$$s_{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{\sqrt{13}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{13}+3}{2}=3{,}302=s_3;$$

$$s_{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}+\sqrt{\sqrt{20}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{20}+4}{2}=\sqrt{5}+2=4{,}236=s_4;$$

$$s_{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{29}+\sqrt{\sqrt{29}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{29}+5}{2}=5{,}192=s_5 \text{ и т.д.}$$

Замечание: более строго, например, $s_{\sqrt{5}}$ примет значение $s_{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{5}\pm1}{2}=\frac{\pm2{,}236\pm1}{2}=\begin{cases}\pm1{,}618;\\ \pm0{,}618,\end{cases}$ но мы, согласно условия (17), берем к рассмотрению лишь положительные величины корней.

Корни (20) равны величинам:

$$\bar{s}_{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{\sqrt{4}^2-4}}{2}=\frac{2-0}{2}=1=s_0;$$

$$\bar{s}_{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{5}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618=\bar{s}_1=\bar{\phi};$$

$$\bar{s}_{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{\sqrt{8}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{8}-2}{2}=\sqrt{2}-1=0{,}414=\bar{s}_2;$$

$$\bar{s}_{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}-\sqrt{\sqrt{13}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{13}-3}{2}=0{,}302=\bar{s}_3;$$

$$\bar{s}_{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{\sqrt{20}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{20}-4}{2}=\sqrt{5}-2=0{,}236=\bar{s}_4;$$

$$\bar{s}_{\sqrt{29}}=\frac{\sqrt{29}-\sqrt{\sqrt{29}^2-4}}{2}=\frac{\sqrt{29}-5}{2}=0{,}192=\bar{s}_5 \text{ и т.д.}$$

Условие 3 (17) $s_h+\frac{1}{s_h}=h$ с учетом (19) и (20) запишется в виде:

$$\frac{h+\sqrt{h^2-4}}{2}+\frac{1}{\frac{h+\sqrt{h^2-4}}{2}}=h;\quad \frac{h+\sqrt{h^2-4}}{2}+\frac{h-\sqrt{h^2-4}}{2}=h.$$

Пример:

$$\sqrt{4}=\frac{2+0}{2}+\frac{2-0}{2}=1+1=2;$$

$$\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1{,}618+0{,}618=2{,}236;$$

$$\sqrt{8}=\frac{\sqrt{8}+2}{2}+\frac{\sqrt{8}-2}{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)=2{,}414+0{,}414=2{,}828;$$

$$\sqrt{13}=\frac{\sqrt{13}+3}{2}+\frac{\sqrt{13}-3}{2}=3{,}302\ldots+0{,}302\ldots=3{,}605\ldots;$$

здесь 3,605… не ошибка, поскольку округление чисел проводим не по правилам арифметического округления, а путем отбрасывания разрядов для лучшей узнаваемости гармонических чисел;

$$\sqrt{20}=\frac{\sqrt{20}+4}{2}+\frac{\sqrt{20}-4}{2}=\left(\sqrt{5}+2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)=4{,}236+0{,}236=4{,}472 \text{ и т.д.}$$

Представим численные значения в таблице 2.

Таблица 2

Численные значения величин при сумме инверсных чисел

h	s_h	s_h	$s_h = s_n$	$\bar{s}_h$	$\bar{s}_h$	$\bar{s}_h = \bar{s}_n$	$s_h+\bar{s}_h=h$
$\sqrt{4}$	$s_{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{4}+0}{2}=1{,}000$	s_0	$\bar{s}_{\sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{4}-0}{2}=1{,}000$	$\bar{s}_0$	$1{,}000+1{,}000=2{,}000$
$\sqrt{5}$	$s_{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618$	s_1	$\bar{s}_{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618$	$\bar{s}_1$	$1{,}618+0{,}618=2{,}236$
$\sqrt{8}$	$s_{\sqrt{8}}$	$\sqrt{2}+1=2{,}414$	s_2	$\bar{s}_{\sqrt{8}}$	$\sqrt{2}-1=0{,}414$	$\bar{s}_2$	$2{,}414+0{,}414=2{,}828$
$\sqrt{13}$	$s_{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{13}+3}{2}=3{,}302$	s_3	$\bar{s}_{\sqrt{13}}$	$\frac{\sqrt{13}-3}{2}=0{,}302$	$\bar{s}_3$	$3{,}302+0{,}302=3{,}605$
$\sqrt{20}$	$s_{\sqrt{20}}$	$\sqrt{5}+2=4{,}236$	s_4	$\bar{s}_{\sqrt{20}}$	$\sqrt{5}-2=0{,}236$	$\bar{s}_4$	$4{,}236+0{,}236=4{,}472$
$\sqrt{29}$	$s_{\sqrt{29}}$	$\frac{\sqrt{29}+5}{2}=5{,}192$	s_5	$\bar{s}_{\sqrt{29}}$	$\frac{\sqrt{29}-5}{2}=0{,}192$	$\bar{s}_5$	$5{,}192+0{,}192=5{,}385$
s_∞	s_∞	∞	s_∞	$\bar{s}_\infty$	0	$\bar{s}_\infty$	$\infty+0=\infty$

Уравнение (18) для соответствующих пропорций в терминах иррациональной и рациональной составляющих будет иметь разновидности:

$s_{\sqrt{4}}^2-2s_{\sqrt{4}}+1=0;$ $s_0^2-2s_0+1=0;$

$s_{\sqrt{5}}^2-\sqrt{5}s_{\sqrt{5}}+1=0;$ $s_1^2-\sqrt{5}s_1+1=0;$ $\phi^2-\sqrt{5}\phi+1=0;$

$s_{\sqrt{8}}^2-\sqrt{8}s_{\sqrt{8}}+1=0;$ $s_2^2-2\sqrt{2}s_2+1=0;$

$s_{\sqrt{13}}^2-\sqrt{13}s_{\sqrt{13}}+1=0;$ $s_3^2-\sqrt{13}s_3+1=0$ и т.д.

Особенности

Подчеркнем особенности, выявленные суммой инверсных чисел.

1. Сумма инверсных значений для нулевой, первой и второй золотых пропорций находится в пределах от 2,000 до 2,828.

h	$s_h + \bar{s}_h = h$
0	$1{,}000 + 1{,}000 = 2{,}000$
1	$1{,}618 + 0{,}618 = 2{,}236$
2	$2{,}414 + 0{,}414 = 2{,}828$

2. Сумма инверсных значений первой золотой пропорции не есть число 1 с некоторой мантиссой, а составляет число 2,236, тогда как для всех остальных золотых пропорций сумма равна числу номера пропорции и конкретной мантиссы. Причем, величина мантисс сумм инверсных значений с ростом номера золотой пропорции уменьшается, в пределе до нуля для $n \to \infty$.

3. Первая классическая золотая пропорция имеет сумму инверсных значений бо*льшую двум из-за двоякого стремления. С одной стороны, желая улучшиться, она стремится увеличить бо*льшую гармоничную часть, превращаясь в единицу и теряя меньшую часть, тем самым прекращая существование как гармонии, достигая статуса «космического яйца» [24]. С другой стороны, не желая идти по пути ликвидации гармонии, начинает уменьшать бо*льшую часть, превращаясь во вторую золотую пропорцию, отчего первая и вторая золотые пропорции инверсны с коэффициентом асимметричности 0,032 или 3,2% [24]. Таким образом, классическая золотая пропорция контролирует «поле» двоицы.

4. Наибольшей мантиссой 0,828 обладает сумма инверсных значений второй золотой пропорции $s_2 + \bar{s}_2 = 2{,}414 + 0{,}414 = 2{,}828$. Вероятно, именно по этой причине она нашла наиболее широкое распространение и проявляется в различных областях знаний.

5. Только нулевая и бесконечная золотая пропорция имеют равные мантиссы 0,000…, точнее, отсутствие мантисс, не только для прямой $s_0 = 1{,}000... = 1$ и обратной $\bar{s}_0 = 1{,}000... = 1$ пропорций, но и их суммы $1{,}000... + 1{,}000... = 2{,}000...$, или $1 + 1 = 2$ и $\infty + 0 = \infty$. Отсюда нулевая и бесконечная пропорции инверсны, что изложено в эссе [24].

6. Величины арифметических корней (19) и (20) при сумме инверсных чисел (17) только положительные в отличие от значений (12) и (13) при разности инверсных констант (4).

7. Идеальной (равномерной по «качеству», без меньшей части) является инверсия с числами равных мантисс, которая в ряду гармонических иррациональных чисел для $h = \sqrt{4}$ принимается в виде начальной точки отсчета гармонического ряда

$$\boxed{\sqrt{4} = \frac{\sqrt{4}+0}{2} + \frac{\sqrt{4}-0}{2} = 1 + 1 = 1{,}000... + \frac{1}{1{,}000...} = 2{,}000...}$$

И здесь вновь обращает на себя вездесущее число 2.

4. Рациональный и иррациональный ряды

Рациональный ряд натуральных чисел

Натуральный (рациональный) ряд положительных целых чисел:

1, 2, 3, …, n, ….

Для создания золотых пропорций натуральному ряду требуются отрицательные числа. Возникает натуральный ряд из положительных и отрицательных чисел:

…, –n, …, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …, n, ….

Для этого потребовалось введение нуля (ноля).

Точкой отсчета ряда в виде нулевого члена ряда является именно ноль (0).

Натуральный ряд положительных чисел запишется так:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots. \qquad (21)$$

Иррациональный ряд

Гармонический (иррациональный) ряд:

$$\sqrt{4},\ \sqrt{5},\ \sqrt{8},\ \sqrt{13},\ \ldots,\ h,\ \ldots. \qquad (22)$$

Причем $h = \sqrt{n^2 + 2^2} = \sqrt{n^2 + 4} = \sqrt{n^2 + \sqrt{4}^2}$.

Отметим особенности гармонического ряда для создания золотых пропорций.

1. Отрицательные числа, как таковые, отдельно не требуются, поскольку их включают в себя все члены ряда, будучи квадратными корнями:

$\sqrt{4} = \pm 2$; $\sqrt{5} = \pm 2{,}236\ldots$ и т.д.

Здесь не лишне провести следующую аналогию: наличие «+» и «–» как дуальных символов, атрибутов недостаточно для характеристики некоторой системы, поскольку требуется третий атрибут, одновременно обладающий чертами (свойствами, значениями, характеристиками) и первого, и второго атрибутов.

Атрибут (от лат. attributio – приписывание, признак); атрибут в философии – необходимое, существенное, неотъемлемое свойство предмета или явления, в отличие от его преходящих случайных состояний.

В нашем случае третьим атрибутом, возможно, является «$\pm$» и/или «$\mp$», в совокупности с противополярными «+» и «–», составляя триаду/тетраду. К такой мысли пришел и мой коллега Сергей Левчук.

2. Введение нуля не требуется, поскольку нет явного разделения чисел на положительные и отрицательные.

3. Лишь один член ряда является целым числом, это первый член ряда с арифметическим корнем $\sqrt{4} = 2$. Вновь выделяется вездесущее число 2.

4. Точкой отсчета ряда в качестве нулевого члена ряда является $\sqrt{4} = 2$.

5. Ряд создается как нечто среднее между средним арифметическим и средним геометрическим, т.е. с применением операции возведения в квадрат очередного числа натурального ряда и возведения в квадрат исходного нулевого члена гармонического ряда, суммирования квадратов, извлечения квадратного корня из суммы, т.е. $h = \sqrt{n^2 + \sqrt{4}^2}$.

6. Именно для обеспечения возможности суммирования квадратов, полученных из целых чисел n натурального ряда n^2 и числ*а* из гармонического иррационального ряда $\sqrt{4}^2$, это число из иррационального ряда является рациональным и при том начальным, нулевым и единственным целым $\sqrt{4} = 2$.

5. Ряд чисел золотых пропорций

Ряд чисел золотой пропорции, созданный «по инициативе» гармонического ряда из его чисел

Каждый член ряда является средним арифметическим соответствующего числа h гармонического ряда и квадратного корня из разности квадратов данного числа h^2 и числа начального нулевого члена $\sqrt{4}^2$, становящегося целым натуральным числом n $\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}=n$ [27]:

$$\boxed{s_h=\frac{h+\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}} \qquad (23)$$

Мы назвали результат (23) средним арифметическим, хотя в знаменателе строго значится $\sqrt{4}$, как начальный член гармонического ряда, впрочем, единственный из иррационального ряда рациональный член $\sqrt{4}=2$ (сравни с моделью (26) $s_n=\dfrac{n+\sqrt{n^2+2^2}}{2}$).

Значения нескольких золотых пропорций для арифметических корней приведены ранее (стр. 12), в частности:

$$s_{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{4}+\sqrt{\sqrt{4}^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{4}+0}{2}=1;$$

$$s_{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5}^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1{,}618=\phi;$$

$$s_{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{\sqrt{8}^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{8}+2}{2}=2{,}414;$$

$$s_{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}+\sqrt{\sqrt{13}^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{13}+3}{2}=3{,}302 \text{ и т.д.} \qquad (23)$$

Особенности ряда чисел золотой пропорции, созданных по модели (23):

– второе слагаемое среднего, полученное из чисел гармонического иррационального ряда, становится рациональным, разумеется, соответствующим числам натурального ряда. То есть собственно золотые пропорции при их создании из чисел гармонического ряда не могут быть созданы без рациональной составляющей в виде целых чисел;

– сумма подлежит делению на $\sqrt{4}$, которое соответствует начальному члену гармонического ряда;

– поскольку $\sqrt{4}=2$, золотые пропорции, созданные из чисел гармонического ряда, являются средними арифметическими;

– порядковый номер члена ряда s_h соответствует члену гармонического ряда h;

– обобщенно (23)

$$s_h=\frac{h+\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}=\frac{h+n}{2}. \qquad (24)$$

Вспомним незамысловатый нюанс, изложенный в подразделе «Вместо предисловия», и сравним (24) с (27), также взглянув на таблицу 3.

Ряд чисел золотой пропорции, созданный «по инициативе» гармонического ряда из его чисел с привлечением чисел натурального ряда

Каждый член ряда является средним арифметическим числа h гармонического ряда и соответствующего рационального числа n натурального ряда:

$$s_h = \frac{h+n}{2}. \tag{25}$$

Значения нескольких золотых пропорций для арифметических корней приведены выше (стр. 12), а именно:

$$s_{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}+0}{2} = 1;$$

$$s_{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618 = \phi;$$

$$s_{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}+2}{2} = 2{,}414;$$

$$s_{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}+3}{2} = 3{,}302 \text{ и т.д.} \tag{25а}$$

Порядковый номер члена ряда s_h соответствует члену гармонического ряда h.

Ряд чисел золотой пропорции, созданный «по инициативе» натурального ряда из его чисел

Каждый член ряда является средним арифметическим соответствующего числа n натурального ряда и квадратного корня из суммы квадратов данного числа n и числа 2, т.е. $\sqrt{n^2+2^2}$:

$$\boxed{s_n = \frac{n+\sqrt{n^2+2^2}}{2}} \tag{26}$$

Золотые пропорции получаются из чисел натурального ряда по модели, напоминающей модель (23) $s_h = \dfrac{h+\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}$. Но под корнем присутствует сумма, а не разность. Второе слагаемое под корнем не является начальным членом натурального ряда 0 или даже 1, а соответствует по аналогии с (23) числу гармонического ряда $\sqrt{4}^2 = 2^2$. Знаменатель также соответствует знаменателю модели (23), т.е. $\sqrt{4} = 2$.

Приведем значения нескольких золотых пропорций для арифметических корней:

$$s_0 = \frac{0+\sqrt{0^2+2^2}}{2} = 1;$$

$$s_1 = \frac{1+\sqrt{1^2+2^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = \phi;$$

$$s_2 = \frac{2+\sqrt{2^2+2^2}}{2} = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2} = 2{,}414;$$

$$s_3 = \frac{3+\sqrt{3^2+2^2}}{2} = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3{,}302 \text{ и т.д.}$$

Особенности ряда чисел золотой пропорции, созданных по этой модели:

– второе слагаемое среднего арифметического, полученное из чисел натурального ряда, становится неким иррациональным, разумеется, соответствующим числам гармонического ряда. Мы написали «неким иррациональным», например, для второй золотой пропорции имеется в виду $\sqrt{2}$, которого нет в гармоническом ряду. То есть, *собственно золотые пропорции не могут быть созданы только из рациональных чисел без иррациональной составляющей, равно как и без рациональной составляющей в виде целых чисел*;

– порядковый номер члена ряда s_n соответствует члену натурального ряда n;

– обобщенно (25а)

$$s_n = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} = \frac{n+h}{2}. \tag{27}$$

Вновь обратимся к нюансу «Вместо предисловия» и сравним (27) с (24).

Ряд чисел золотой пропорции, созданный «по инициативе» натурального ряда из его чисел с привлечением чисел гармонического ряда

Каждый член ряда является средним арифметическим (алгебраическим) соответствующего числа n натурального ряда и соответствующего иррационального числа h гармонического ряда:

$$s_n = \frac{n+h}{2}. \tag{28}$$

Приведем значения нескольких золотых пропорций для арифметических корней:

$$s_0 = \frac{0+\sqrt{4}}{2} = 1;$$

$$s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = \phi;$$

$$s_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 2{,}414;$$

$$s_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3{,}302 \text{ и т.д.}$$

Порядковый номер члена ряда s_n соответствует члену натурального ряда n.

> Золотые пропорции s_n и s_h, состоящие из рациональных и иррациональных составляющих, как и подобает, имеют свою собственную нумерацию в рациональных и иррациональных числах s и h.

Сводные данные

Сведем модели получения золотых пропорций из чисел натурального и гармоничного ряда в таблицу 3.

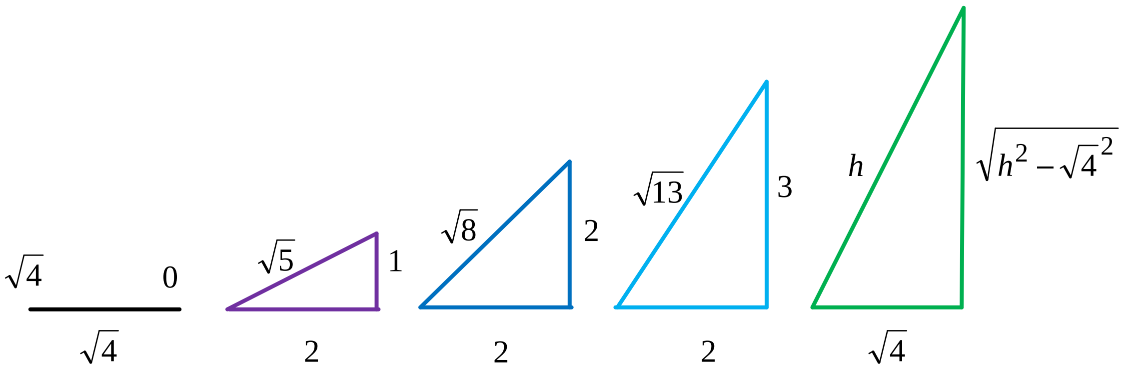
Таблица 3

Модели получения золотых пропорций из чисел натурального и гармонического ряда

	«Инициатива» гармонического ряда	«Инициатива» натурального ряда
Применение чисел одного из рядов – гармонического или натурального	$s_h = \dfrac{h+\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}$	$s_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+2^2}}{2}$
Применение чисел из обоих рядов – гармонического и натурального	$s_h = \dfrac{h+n}{2}$	$s_n = \dfrac{n+h}{2}$

Треугольники, поясняющие золотые константы

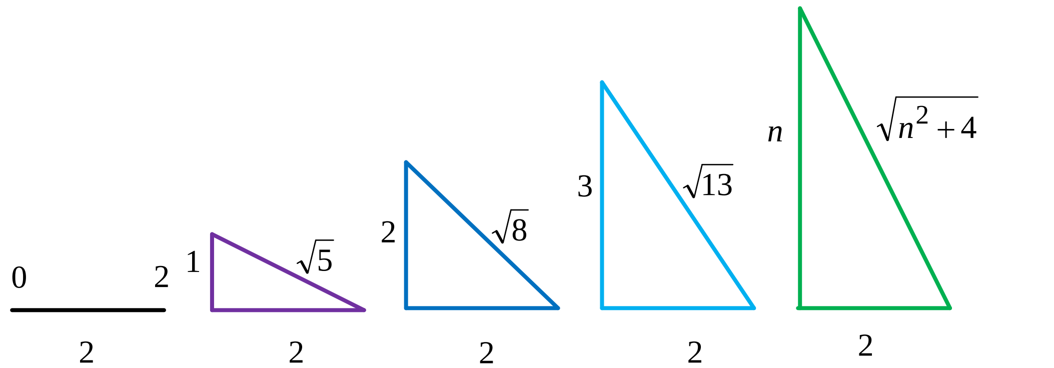
Представим золотые константы с помощью системы треугольников (рис. 2 и 3) [28] в виде суммы гипотенузы и вертикального катета, деленной на величину горизонтального базисного катета.



$$s_{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{4}+0}{\sqrt{4}} \quad s_{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad s_{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}+2}{2} \quad s_{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}+3}{2} \quad s_h = \frac{h+\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}}$$

Рис. 2. Треугольники, поясняющие золотые константы s_h,

формируемые из чисел гармонического ряда $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, …, h



$$s_0 = \frac{0+\sqrt{4}}{2} \quad s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad s_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} \quad s_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \quad s_n = \frac{n+\sqrt{n^2+2^2}}{2}$$

Рис. 3. Треугольники, поясняющие золотые константы s_n, формируемые из чисел натурального ряда 0, 1, 2, 3, …, n

Рисунки 2 и 3 иллюстрируют перестановку мест чисел гармонического и натурального ряда, перестановку «рейтинга» (роли) чисел этих рядов, своеобразную инверсию.

Золотые константы получаются в двумерной системе координат и иллюстрируются треугольниками.

В одномерной системе координат они могут быть получены при условии наличия двух числовых осей – натурального ряда (рациональная составляющая) и гармонического ряда (иррациональная составляющая) путем нахождения их средней арифметической (рис. 4).

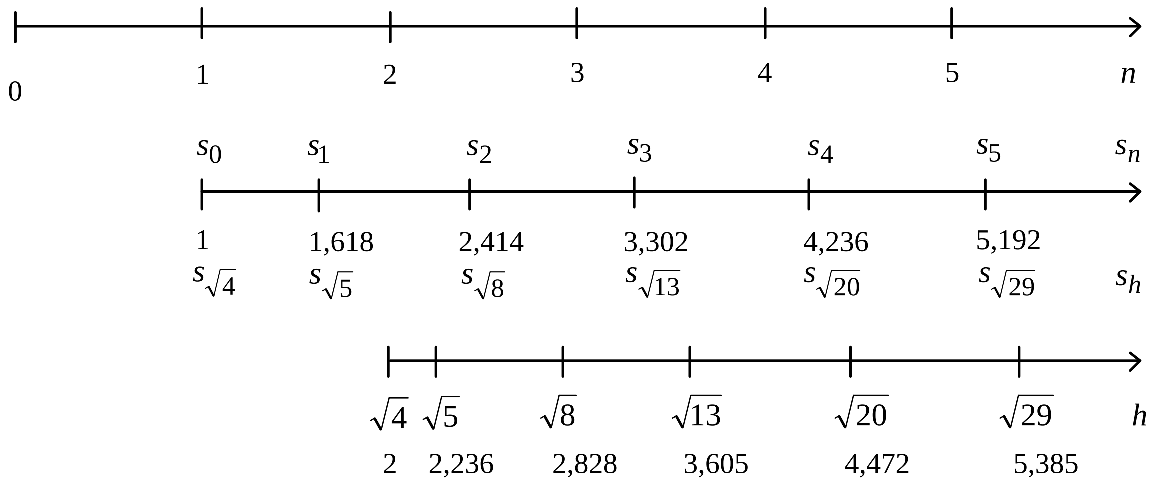


Рис. 4. Натуральная числовая ось 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, n (первая ось) и гармоническая числовая ось $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{29}$, …, h (третья ось), поясняющие золотые константы (вторая ось)

Взаимное получение рационального и иррационального рядов

При формировании золотой пропорции с использованием разности инверсных чисел получаем (24):

$$s_h = \frac{h+\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}} = \frac{h+n}{2}.$$

Откуда следует

$$\sqrt{h^2-\sqrt{4}^2} = n. \qquad (29)$$

Гармонический ряд чисел $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{29}$, …, h способен создавать числовой натуральный ряд 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, n:

$$\sqrt{h^2-4} = n$$

Формирование золотой пропорции с использованием суммы инверсных чисел дает (27):

$$s_n = \frac{n+\sqrt{n^2+2^2}}{2} = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2} = \frac{n+h}{2}.$$

Откуда

$$\sqrt{n^2+4}=h. \qquad (30)$$

Натуральный ряд чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, …, n
способен создавать числовой гармонический ряд $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{29}$, …, h:

$$\sqrt{n^2+4}=h$$

Запишем (29) и (30) в виде системы:

$$\begin{cases} h^2-4=n^2, \\ n^2+4=h^2. \end{cases} \qquad (31)$$

Гармония в виде золотых пропорций, являющихся золотыми константами, не может быть сформирована только из чисел иррационального ряда, равно как не может быть создана лишь из чисел натурального ряда. *Золотые константы создаются с участием соответствующих чисел иррационального и гармонического ряда*.

Если придать этому математическому выводу философское прочтение образа, можно заключить, что как идеал, сознание (в нашем примере пусть это будет иррациональное) не может существовать без материи (в нашем примере – это рациональное), равно и наоборот.

6. Геометрическое построение с помощью циркуля и линейки отрезков, соответствующих золотым константам

Золотые константы на числовой рациональной оси определяются как средние арифметические двух величин, одна из которых есть целое n, другая – иррациональная величина в виде длины гипотенузы (рис. 2 и 3). Один из катетов, образующих ее, есть квадрат номера константы, т.е. переменный, другой катет постоянен и равен числу 2.

Отсюда возможен следующий (не лучший) метод определения золотых констант на числовой оси, иллюстрированный на рис. 5 для третьей золотой пропорции:

1) провести прямую линию;

2) на линии определить начало координат;

2) из начала координат отложить отрезок длиной n условных масштабных единиц (в нашем примере 3 единицы);

3) из начала координат отложить отрезок длиной две единицы;

4) на отрезке длиной две единицы построить прямоугольник, вторая (вертикальная) сторона которого составляет n единиц (в нашем примере 3 единицы);

5) установить одну ножку циркуля в начало координат, вторую ножку – в противоположный угол прямоугольника, тем самым зафиксировав длину диагонали прямоугольника величиной $\sqrt{n^2+2^2}$ единиц (в нашем примере $\sqrt{13}=3{,}605$ единицы);

6) отложить длину диагонали на прямой линии; ее величина будет несколько больше величины n единиц, иными словами n получила приращение величиной $\sqrt{n^2+2^2}-n$ единиц (в нашем примере $\sqrt{13}-3=0{,}605$ единицы);

7) с помощью циркуля и линейки найти половину длины приращения, т.е. половину отрезка между точками n и $\sqrt{n^2+2^2}$. Половина приращения равна величине

$\dfrac{\sqrt{n^2+2^2}-n}{2}$ и находится от начала координат в точке $n+\dfrac{\sqrt{n^2+2^2}-n}{2}$ (в нашем примере $3+\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=3{,}302$ единицы);

8) расстояние от начала координат до полученной точки и определяет золотую пропорцию $n+\dfrac{\sqrt{n^2+2^2}-n}{2}=\dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}=s_n$ (в нашем примере третью золотую пропорцию $3+\dfrac{\sqrt{13}-3}{2}=3{,}302=s_3$).

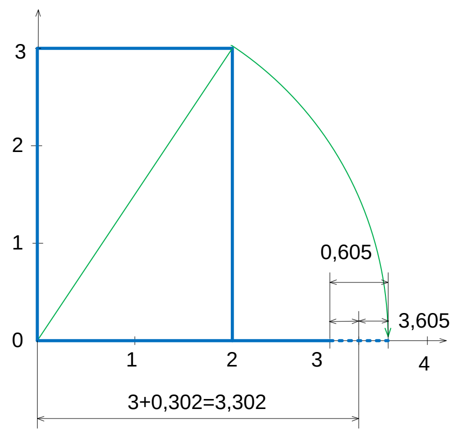


Рис. 5. Геометрическое построение золотых пропорций

Недостатком метода является необходимость деления величины приращения, т.е. длины отрезка пополам. Этого недостатка не содержит следующий метод, вероятно, самый простой и оптимальный. Он основывается лишь на операции сложения двух величин без операции деления.

Ряд чисел с шагом 0,5

Для нахождения оптимального алгоритма построения золотых констант достаточно преобразовать формулу (26) в вид:

$$s_n=\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2+4}{4}}=\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}=\frac{n}{2}+\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+1};$$

$$s_n=\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}. \tag{32}$$

Выражение (32) переносит процедуру построения на числовую ось рациональных чисел с шагом 0,5 единиц.

Поскольку иррациональный гармонический ряд начинается с $\sqrt{4}=2$, составим рациональный ряд с начальным членом, инверсным $\sqrt{4}=2$, т.е. 1/2 = 0,5:

$$0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ \ldots;\ \frac{n}{2}, \tag{33}$$

где n – целые числа.

Замечание: формулу (26) можно представить и в виде

$$s_n = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2+4}{4}} = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2+3}{4} + \frac{1}{4}}, \qquad (34)$$

что полезно в некоторых случаях.

Ряд чисел золотой пропорции, созданный из рациональных чисел с шагом 0,5

Каждый член ряда чисел золотой пропорции является суммой соответствующего числа $n/2$ натурального ряда и иррационального числа:

$s_0 = 0 + \sqrt{1} = 1$;

$s_1 = 0{,}5 + \sqrt{1{,}25} = 1{,}618 = \phi$;

$s_2 = 1 + \sqrt{2} = 2{,}414$;

$s_3 = 1{,}5 + \sqrt{3{,}25} = 3{,}302$;

$s_4 = 2 + \sqrt{5} = 4{,}236$;

$s_5 = 2{,}5 + \sqrt{7{,}25} = 5{,}192$;

…;

$$s_n = \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2+4}{4}}.$$

Математическая формулировка общего члена, характеризующего золотые пропорции, пригодна для их графического построения на линейной шкале чисел. Причем найденный алгоритм оказывается наиболее простым и надежным, т.е. оптимальным.

Оптимальный алгоритм и примеры геометрического построения положительных больших золотых констант на линейной шкале

Алгоритм построения [27] иллюстрирует рис. 6.

Подготовительная работа:

– выбрать прямоугольную систему координат на плоскости, образуемую двумя взаимно перпендикулярными осями координат, пересекающимися в точке 0 – начале отсчёта. На каждой оси выбрано положительное направление. Ось абсцисс играет роль числовой прямой (числовой оси), на которой необходимо построить отрезки прямой линии, изображающие искомые интервалы, числовые значения;

– на оси ординат отложить отрезок прямой единичной длины, точку1.

Построение золотых констант на числовой прямой:

1) на оси абсцисс из начала координат отложить отрезок длиной $n/2$ условных масштабных единиц, выделив точку $n/2$;

2) установить одну ножку циркуля в точку $n/2$ на оси абсцисс, вторую ножку – в точку 1 на оси ординат, тем самым зафиксировав раствором циркуля длину гипотенузы величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$;

3) отложить длину гипотенузы на числовой прямой поворотом циркуля, добавив к отрезку длиной $n/2$ отрезок величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$. Расстояние от начала координат до полученной точки и определяет величину золотых констант $\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{4}+1} = s_n$ согласно (32).

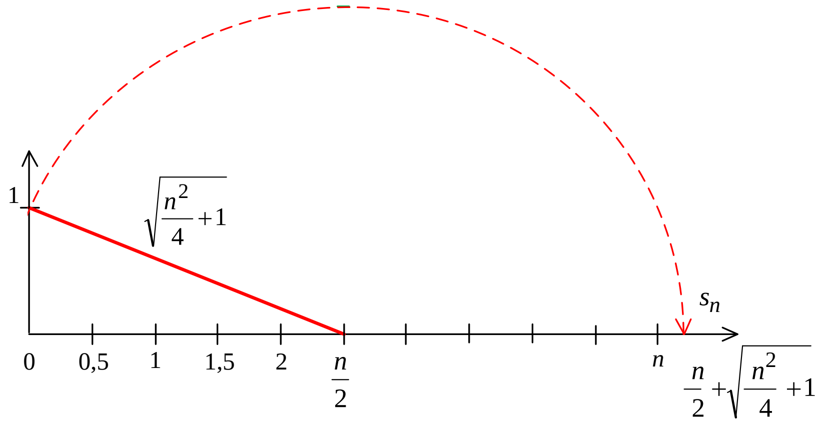


Рис. 6. Геометрическое построение *n*-золотой положительной большой константы

Приведем примеры геометрического построения первых четырех положительных больших золотых констант на рис. 7 – 10.

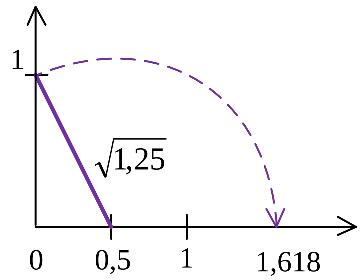


Рис. 7. Геометрическое построение первой золотой константы

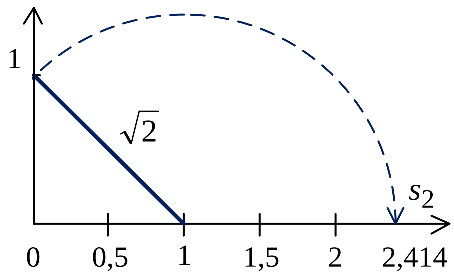


Рис. 8. Геометрическое построение второй золотой константы

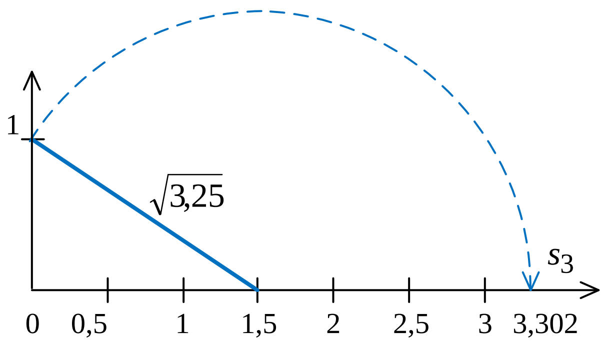


Рис. 9. Геометрическое построение третьей золотой константы

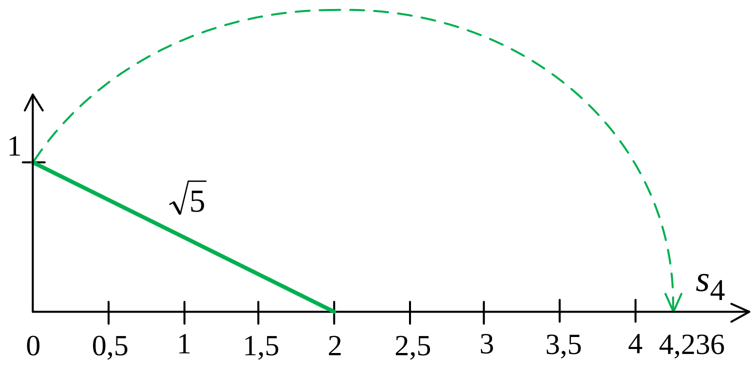


Рис. 10. Геометрическое построение четвертой золотой константы

Построение классической золотой пропорции, соответствующее рисунку 7, также выполнили С.Л. Василенко и А.В. Никитин в работе [3, рис. 9].

Оптимальный алгоритм построения положительных малых золотых констант на линейной шкале

Приведем построение *n*-золотой малой константы $\bar{s}_n$ на рис. 11.

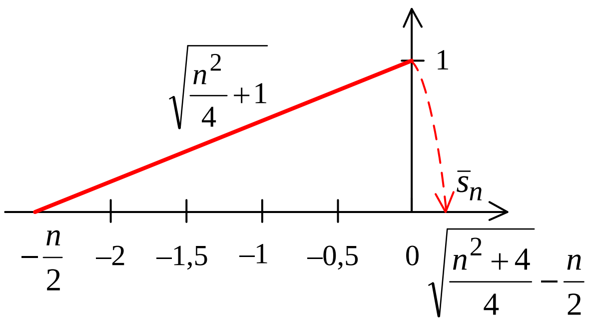


Рис. 11. Геометрическое построение *n*-золотой положительной малой константы

Подготовительная работа:

– выбрать прямоугольную систему координат на плоскости, образуемую двумя взаимно перпендикулярными осями координат, пересекающимися в точке 0 – начале отсчёта. На оси абсцисс выбраны и положительное, и отрицательное направления. Ось абсцисс играет роль числовой прямой, на которой необходимо построить отрезки прямой линии, изображающие искомые числовые интервалы;

– на оси ординат отложить отрезок единичной длины, точку 1.

Построение:

1) на оси абсцисс из начала координат отложить отрезок длиной $-n/2$ условных масштабных единиц, выделив точку $-n/2$;

2) установить одну ножку циркуля в точку $-n/2$ на оси абсцисс, вторую ножку – в точку 1 на оси ординат, тем самым зафиксировав раствором циркуля длину гипотенузы величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$;

3) отложить длину гипотенузы на числовой прямой поворотом циркуля, добавив к отрезку длиной –*n*/2 отрезок величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$. Расстояние от начала координат до полученной точки определяет величину золотых констант $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}-\frac{n}{2}=\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}=\bar{s}_n$, что соответствует (15).

Геометрическое нахождение на линейной шкале чисел больших и малых положительных и отрицательных золотых констант

Алгоритм геометрического нахождения положительных больших и отрицательных малых *n*-золотых констант, соответствующих (12) и (13), ясен из рис. 12, а построение отрицательных больших (15) и положительных малых (16) констант иллюстрирует рис. 13.

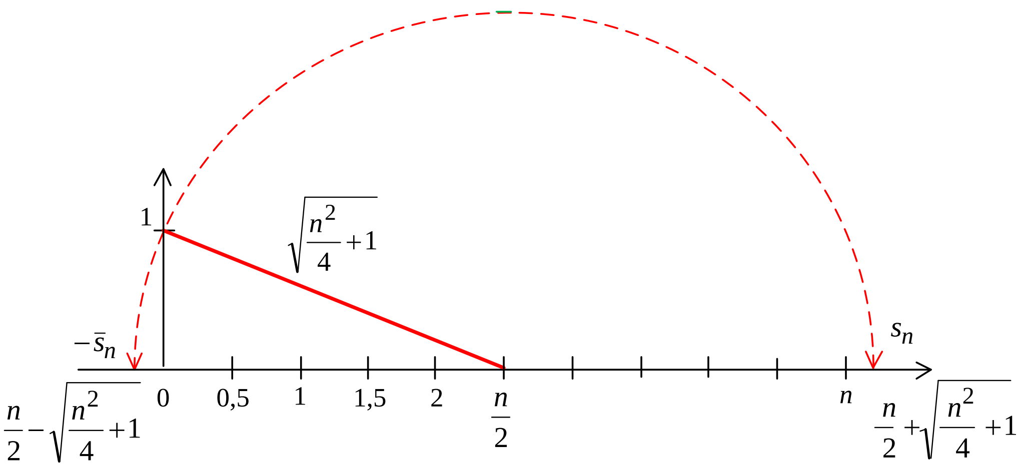


Рис. 12. Геометрическое построение положительных больших и отрицательных малых *n*-золотых констант

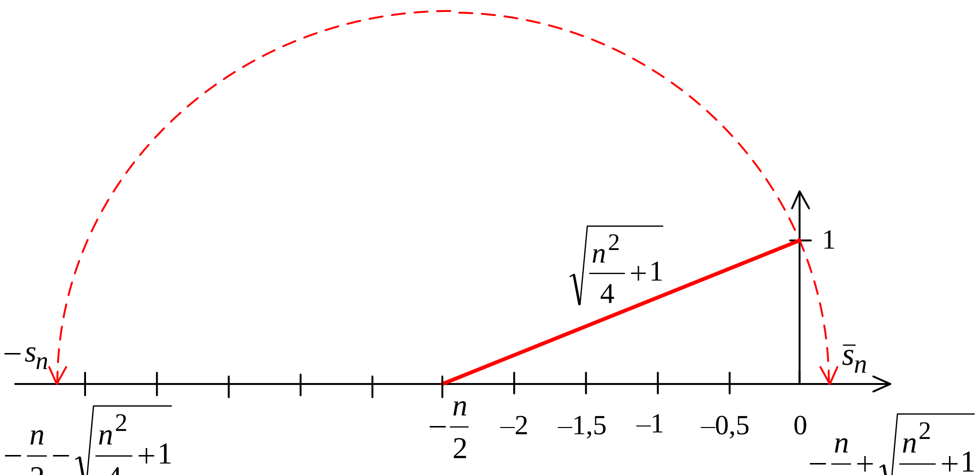


Рис. 13. Геометрическое построение отрицательных больших и положительных малых *n*-золотых констант

Оптимальный алгоритм построения кварты *n*-золотых констант на линейной шкале

Объединив рис. 12 и рис. 13 в рис. 14, получим оптимальный алгоритм геометрического построения кварты *n*-золотых констант [27].

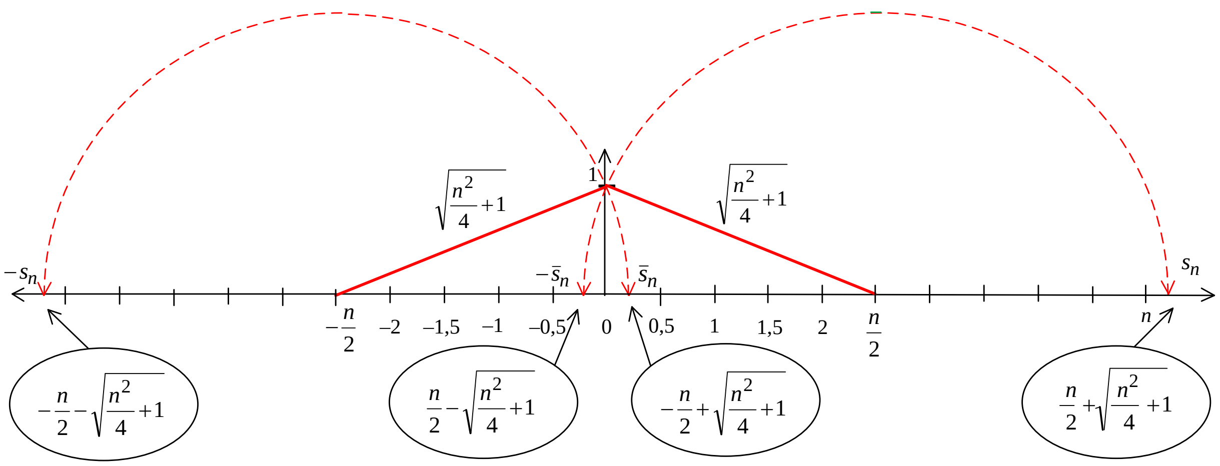


Рис. 14. Геометрическое построение кварты *n*-золотых констант

7. Новое прочтение золотых пропорций как четырех констант с равными мантиссами

Неожиданная особенность чисел с мантиссами золотых констант

Классическая золотая пропорция обращает на себя внимание соотношением

$$\frac{2{,}618...}{1{,}618...}=1{,}618.... \tag{35}$$

Поэтому вскоре после открытия золотых пропорций в 1997 году меня заинтересовал поиск подобных пар чисел для других золотых пропорций. Результат не заставил себя долго ждать. Подобные пары нашлись в каждой золотой пропорции, правда, не в виде квадратов пропорций, как в (35):

$$\frac{3{,}414...}{2{,}414...}=1{,}414...;\ \frac{4{,}302...}{3{,}302...}=1{,}302...;\ \frac{5{,}236...}{4{,}236...}=1{,}236...;\ \frac{6{,}192...}{5{,}192...}=1{,}192...;$$

$$\frac{7{,}162...}{6{,}162...}=1{,}162...;\ \frac{8{,}140...}{7{,}140...}=1{,}140...;\ \frac{9{,}123...}{8{,}123...}=1{,}123...;\ \frac{10{,}109...}{9{,}109...}=1{,}109...;$$

$$...;$$

$$\frac{1+s_n}{s_n}=1+\bar{s}_n. \tag{36}$$

Модель (формула) (36) становится тождественной отношению четырех чисел в виде

$$\frac{1+s_n}{s_n}=\frac{1+\bar{s}_n}{1}. \tag{37}$$

Откуда следует синтез триады чисел 1, s_n, $\bar{s}_n$, образующих тетраду $1+s_n$, s_n, $1+\bar{s}_n$, 1, имеющих пять величин $\bar{s}_n$, 1, $1+\bar{s}_n$, s_n, $1+s_n$, а также число *n*.

Синтез единицы и золотых пропорций

Золотые пропорции (большие и малые) не могут существовать без единицы. Поэтому они, именно пропорции, проявляются лишь в «компании» совместно с единицей, выполняющей роль меры как нормированной величины числа и единицы длины отрезка.

Синтезируем единицу и золотые пропорции, получив длины отрезков р*а*вно как и собственно числ*а* $1+s_n$ и $1+\bar{s}_n$.

Организуем отношение $1+s_n$ к некоторому числу такое, чтобы оно было равно $1+\bar{s}_n$. Таким отношением будет $\frac{1+s_n}{s_n}=\frac{1}{s_n}+1=1+\bar{s}_n$, соответствующее (36) и (37).

Отсюда следует возможность получения тетрады отрезков, находящихся в гармонических отношениях (рис. 15), в виде:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{n^2+4}-(n-2)}{2}\text{, т.е. }\frac{1+s_n}{s_n}=\frac{1+\bar{s}_n}{1}=1+\bar{s}_n.$$

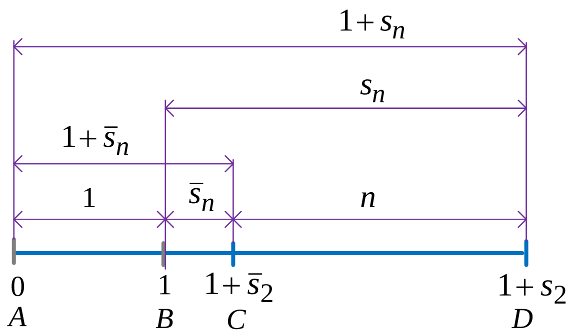


Рис. 15. Синтез единицы и золотой пропорции при создании *n*-золотой тетрады

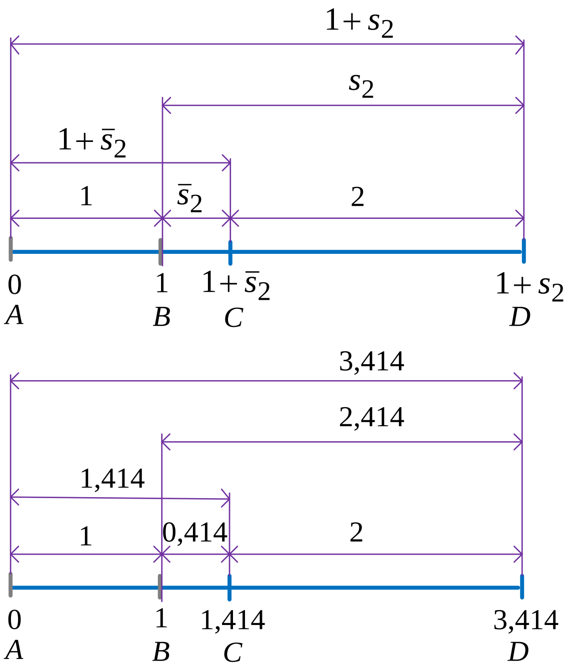


Рис. 16. Синтез единицы и второй золотой пропорции при создании второй золотой тетрады

На рис. 15 отношение отрезков определится выражением

$$\frac{1+s_n}{s_n}=\frac{1+\bar{s}_n}{1}=1+\bar{s}_n=1+\frac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}=\frac{\sqrt{n^2+4}-(n-2)}{2}. \qquad (38)$$

Для второй золотой пропорции изображение примет вид рис. 16, где

$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}$, т.е. $\frac{1+s_2}{s_2}=\frac{1+\bar{s}_2}{1}=1+\bar{s}_2$ или $\frac{3{,}414}{2{,}414}=\frac{1{,}414}{1}=1{,}414$.

Золотые тетрады

Математическое изящество и числовая красота чисел (36) раскрывается при рассмотрении тетрады констант конкретных золотых пропорций при сведении их в таблицу 4.

Таблица 4

Новое прочтение золотых отношений (пропорций) как констант с равными мантиссами

n	AB	BC	AC	BD	AD	$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}$	$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AB}$
1	1	0,618	1,618	1,618	2,618	$\frac{2{,}618}{1{,}618}=1{,}618$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{\sqrt{5}-(-1)}{2}$
2	1	0,414	1,414	2,414	3,414	$\frac{3{,}414}{2{,}414}=1{,}414$	$\frac{\sqrt{8}-0}{2}=\sqrt{2}$
3	1	0,302	1,302	3,302	4,302	$\frac{4{,}302}{3{,}302}=1{,}302$	$\frac{\sqrt{13}-1}{2}$
4	1	0,236	1,236	4,236	5,236	$\frac{5{,}236}{4{,}236}=1{,}236$	$\frac{\sqrt{20}-2}{2}=\sqrt{5}-1$
5	1	0,192	1,192	5,192	6,192	$\frac{6{,}192}{5{,}192}=1{,}192$	$\frac{\sqrt{29}-3}{2}$
6	1	0,162	1,162	6,162	7,162	$\frac{7{,}162}{6{,}162}=1{,}162$	$\frac{\sqrt{40}-4}{2}=\sqrt{10}-2$
7	1	0,140	1,140	7,140	8,140	$\frac{8{,}140}{7{,}140}=1{,}140$	$\frac{\sqrt{53}-5}{2}$
8	1	0,123	1,123	8,123	9,123	$\frac{9{,}123}{8{,}123}=1{,}123$	$\frac{\sqrt{68}-6}{2}=\sqrt{17}-3$
9	1	0,109	1,109	9,109	10,109	$\frac{10{,}109}{9{,}109}=1{,}109$	$\frac{\sqrt{85}-7}{2}$
10	1	0,099	1,099	10,099	11,099	$\frac{11{,}099}{10{,}099}=1{,}099$	$\frac{\sqrt{104}-8}{2}=\sqrt{26}-4$
n	1	$\bar{s}_n$	$1+\bar{s}_n$	s_n	$1+s_n$	$\frac{1+s_n}{s_n}=\frac{1+\bar{s}_n}{1}$	$\frac{\sqrt{n^2+4}-(n-2)}{2}$

8. Оптимальные алгоритмы геометрического построения золотых тетрад

Рассмотрим первый алгоритм [27] (рис. 17):

1) на числовой прямой с началом 0 (первая необходимая точка A) и шагом 0,5 условной масштабной меры отложить отрезок длиной 1, получив вторую необходимую точку B;

2) из точки B восстановить перпендикуляр, на котором отложить отрезок длиной 1, и на числовой оси отложить отрезок длиной $n/2$ условных масштабных единиц, выделив точки $1+n/2$ и $1–n/2$;

3) установить одну ножку циркуля в точку $1+n/2$, вторую ножку – в точку 1 на перпендикуляре, тем самым зафиксировав раствором циркуля длину гипотенузы величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$, которую поворотом циркуля отложить на числовой оси, добавив к отрезку длиной $1+n/2$ отрезок величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$, получив третью искомую точку D, расстояние от начала координат A до которой равно $1+\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}=1+s_n$;

4) из точки D отложить отрезок длиной n единиц (или отложить дважды отрезок длиной $n/2$ между точками 1 и $1+n/2$) в обратном направлении числовой оси, отметив четвертую искомую точку C, расстояние до которой из начала координат равно $1+\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}-n=1-\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}=1+\bar{s}_n$.

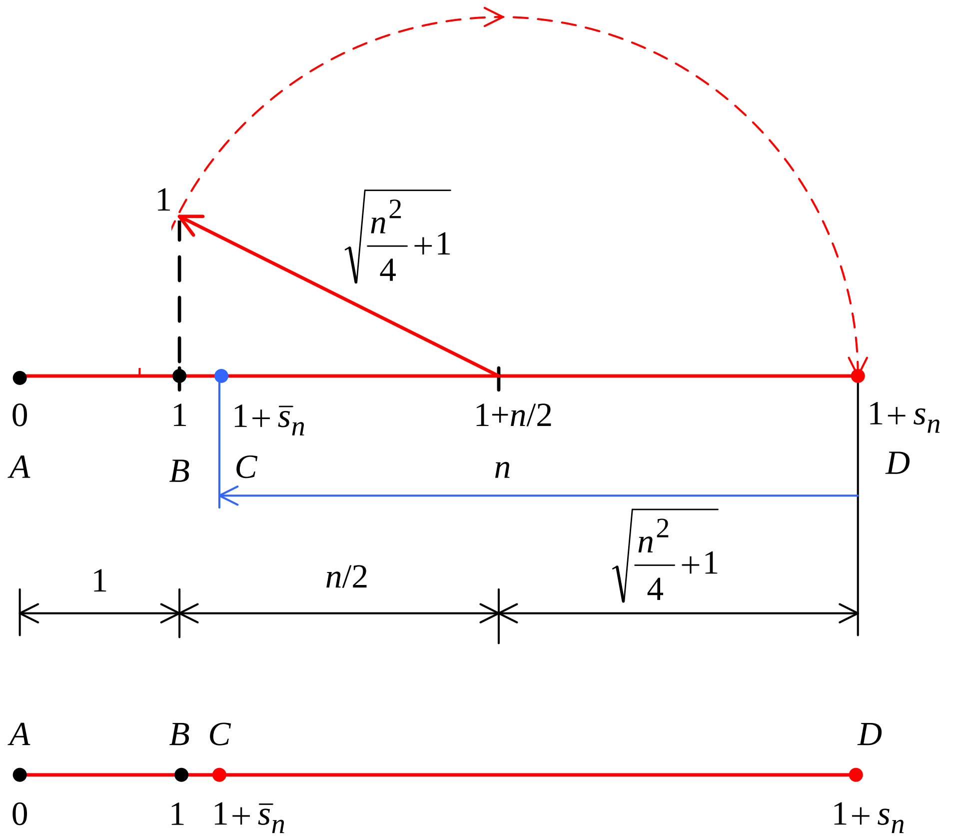


Рис. 17. Геометрическое построение n-золотой тетрады (алгоритм 1)

Рассмотрим второй алгоритм построения золотых тетрад:

1) на числовой прямой с началом 0 (первая необходимая точка *A*) и шагом 0,5 отложить отрезок длиной 1, получив вторую необходимую точку *B*;

2) из точки *B* восстановить перпендикуляр, на котором отложить отрезок длиной 1, и на числовой оси в обоих направлениях отложить отрезки длиной *n*/2, выделив точку 1+*n*/2;

3) установить одну ножку циркуля в точку 1+*n*/2, вторую ножку – в точку 1 на перпендикуляре, зафиксировав раствором циркуля длину гипотенузы, которую поворотом циркуля отложить на числовой оси, добавив к отрезку длиной 1+*n*/2 отрезок величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$, получив третью искомую точку *D*, расстояние от начала координат *A* до которой равно $1+\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}=1+s_n$;

4) установить одну ножку циркуля в точку 1– *n*/2, вторую ножку – в точку 1 на перпендикуляре, зафиксировав раствором циркуля длину гипотенузы величиной $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}$, которую поворотом циркуля отложить на оси, получив четвертую искомую точку *C*, расстояние от начала координат *A* до которой равно $\sqrt{\frac{n^2}{4}+1}-\frac{n}{2}=1+\bar{s}_n$.

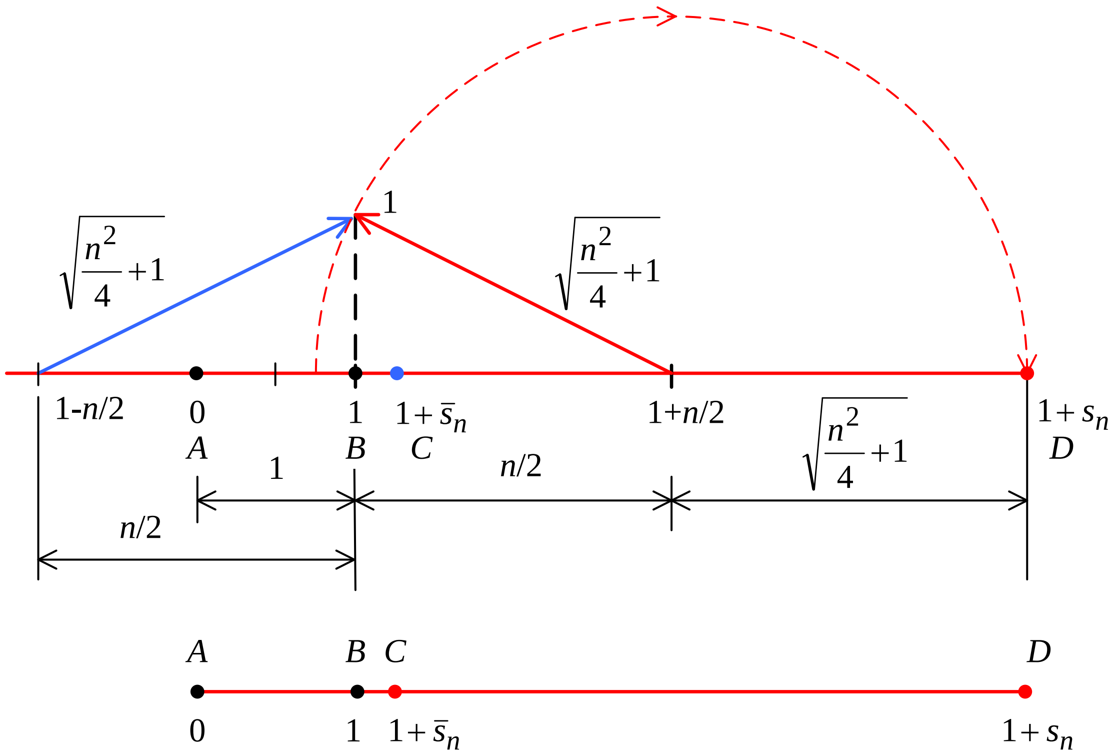


Рис. 18. Геометрическое построение *n*-золотой тетрады (алгоритм 2)

Оба алгоритма построения тетрад можно считать оптимальными.

Приведем примеры двух алгоритмов геометрического построения первой (рис. 19) и второй (рис. 20) золотых тетрад и пример второго алгоритма построения третьей (рис. 21) и четвертой (рис. 22) золотой тетрады.

Примеры геометрического построения золотых тетрад

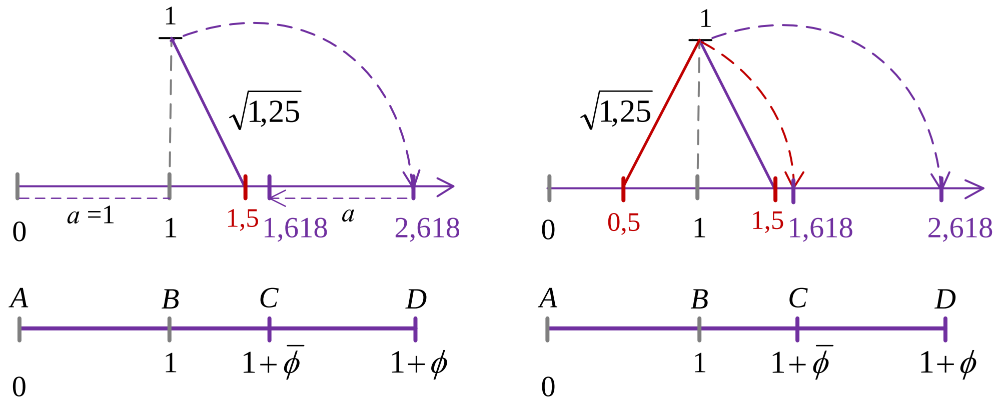


Рис. 19. Геометрическое построение первой золотой тетрады (алгоритмы 1 и 2)

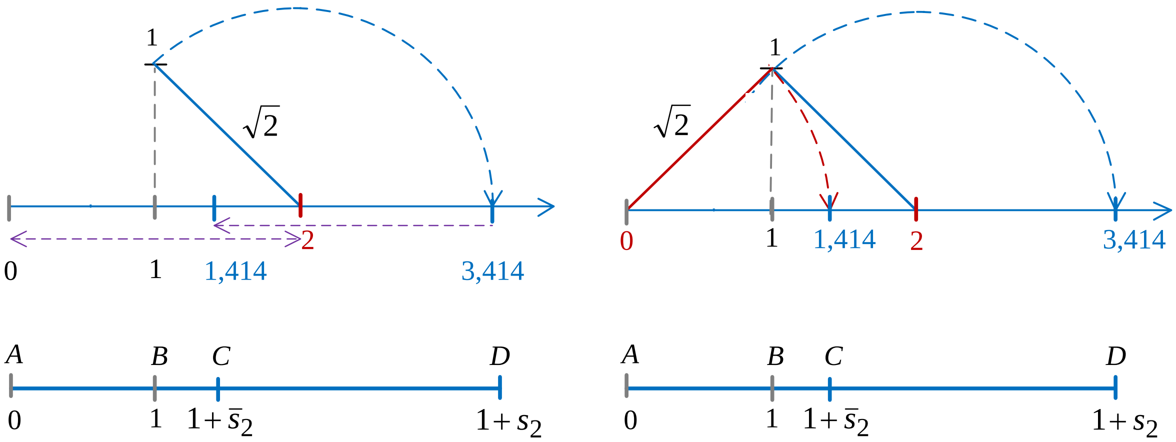


Рис. 20. Геометрическое построение второй золотой тетрады (алгоритмы 1 и 2)

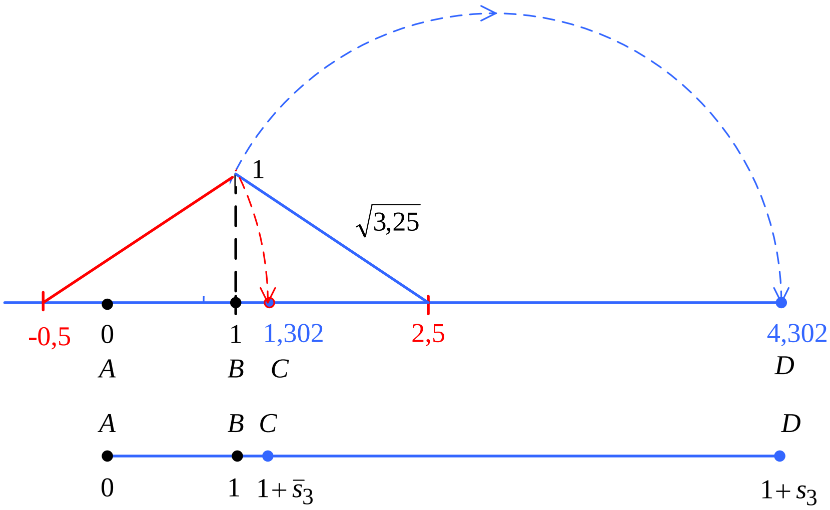


Рис. 21. Геометрическое построение третьей золотой тетрады (алгоритм 2)

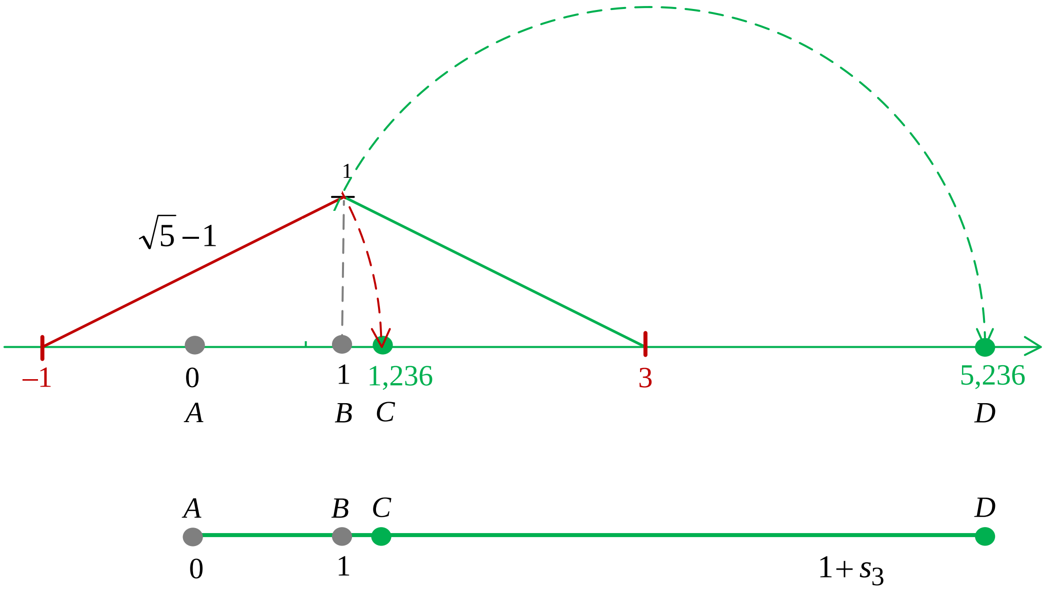


Рис. 22. Геометрическое построение четвертой золотой тетрады (алгоритм 2)

9. Особые проявления

Способность натурального ряда порождать гармонический ряд и наоборот

Поскольку пропорции порождаются с участием рациональной и иррациональной составляющей, а золотые пропорции, в частности, с участием чисел натурального и гармонического рядов, эти числа способны взаимно порождать друг друга с помощью своих механизмов, подобных друг другу и, по своему, инверсных.

Получение гармонического ряда из чисел натурального ряда (30):

$h=\sqrt{n^2+2^2}$.

Получение натурального ряда из чисел гармонического ряда (29):

$n=\sqrt{h^2-2^2}$.

Прямое и обратное преобразование чисел – это своего рода инверсия гармонии.

Механизмы прямого и обратного преобразования подобны друг другу и, по своему, инверсны за счет суммы и разности алгебраического слагаемого 2^2.

Прямое и обратное преобразование здесь в чем-то символически перекликается с прямым и обратным преобразованием Фурье.

Особая роль числа 2

Назовем факты в пользу всепроникающей роли числа 2:

– гармонический ряд начинается с числа $\sqrt{4}=\pm 2$;

– механизм прямого и обратного преобразования чисел натурального и гармонического рядов базируется на $\pm 2^2$;

– три первых числа гармонического ряда есть числа 2 с некоторыми мантиссами и ее отсутствием, т.е. $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{5}=2{,}236...$; $\sqrt{8}=2{,}828...$, являя собой своеобразную триаду двоицы. Кстати, здесь половина суммы мантисс $\frac{0{,}236...+0{,}828...}{2}=\frac{1{,}064...}{2}=0{,}532...$ за вычетом 1/2 составляет 0,032… или 3,2%, т.е. идеальную асимметрию:

$$\frac{\sqrt{5}-2+\sqrt{8}-2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{2}-5+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{2}-\frac{5-\sqrt{5}}{2}=0{,}032....$$

Данные о натуральном, гармоническом и золотом рядах сведем в таблицы 5-9. В какой-то мере они в части ранжирования поддаются характеристике по образу теоремы Коши [2]. Известные сведения об арифметическом, геометрическом и гармоническом средних приведем в приложении 4.

Таблица 5

Ранжирование членов рядов

Натуральный ряд	0	1	2	3	4	5
Гармонический ряд	2	2,236	2,828	3,604	4,472	5,385
Золотой ряд	1	1,618	2,414	3,302	4,236	5,190

Таблица 6

Обобщенные данные о натуральном, гармоническом и золотом рядах

Ряд чисел		0	1	2	3	4	n
Натуральный	n	0	1	2	3	4	$n=n_{-1}+1$
Гармонический	h	$\sqrt{4}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{n^2-(\sqrt{4})^2}$
		2	2,236	2,828	3,605	4,472	
Золотой	$s_n=s_h$	$\frac{0+\sqrt{4}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{8}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{4+\sqrt{20}}{2}$	$\frac{n+h}{2}$
		1	1,618	2,414	3,302	4,236	

Таблица 7

Триады (малые, средние, большие) двоиц, троиц, четвериц и т.д. получения золотых пропорций из чисел натурального и гармонического ряда

	Малые (n) двоица, троица, четверица и т.д.	Средние ($s_n=s_h$) двоица, троица, четверица и т.д.	Большие (h) двоица, троица, четверица и т.д.
двоицы	2	2,414	2,828
троицы	3	3,302	3,604
четверицы	4	4,236	4,472
пятерицы	5	5,190	5,385

Здесь единица выбивается из общей системы, поскольку она в образе большой единицы заходит на поле двоицы.

Таблица 8

Понятия единицы, двоицы, троицы и их золотых эквивалентов

Единица	$s_1-\bar{s}_1=1$ $\phi-\bar{\phi}=1$	золотая единица	$1+\bar{s}_1=s_1=1{,}618...$ $1+\bar{\phi}=\phi=1{,}618...$
двоица	$s_2-\bar{s}_2=2$	золотая двоица	$2+\bar{s}_2=s_2=2{,}414...$
троица	$s_3-\bar{s}_3=3$	золотая троица	$3+\bar{s}_3=s_3=3{,}302...$
четверица	$s_4-\bar{s}_4=4$	золотая четверица	$4+\bar{s}_4=s_4=4{,}236...$

Приведем данные о видовой, системной и интегральной инверсии в табл. 9 [24].

Таблица 9

Триада инверсии: видовая, системная, интегральная

№ ЗП	Отрезок с частями в качестве золотых пропорций	Видовая инверсия (первая инверсия)		Единица, двоица, троица и т.д.	Системная инверсия (вторая инверсия)	Интеграль-ная инверсия (третья инверсия)
			Нуль	0		
0	$0+1$	$\frac{0+1}{1}=\frac{1}{1}$	Единица	$0+(1+0)$		$\frac{1}{0}$
1	$1+0{,}618$	$\frac{1+0{,}618}{1}=\frac{1}{0{,}618}$	Двоица	$1+(0{,}618+0{,}381)$	$\frac{0{,}618}{0{,}381}\approx\frac{0{,}6}{0{,}4}$	
2	$2+0{,}414$	$\frac{2+0{,}414}{1}=\frac{1}{0{,}414}$	Троица	$2+(0{,}414+0{,}585)$	$\frac{0{,}414}{0{,}585}\approx\frac{0{,}4}{0{,}6}$	
3	$3+0{,}302$	$\frac{3+0{,}302}{1}=\frac{1}{0{,}302}$	Четверица	$3+(0{,}302+0{,}697)$		
4	$4+0{,}236$	$\frac{4+0{,}236}{1}=\frac{1}{0{,}236}$	Пятерица	$4+(0{,}236+0{,}763)$		
m	$m+\bar{s}_m$	$\frac{m+\bar{s}_m}{1}=\frac{1}{\bar{s}_m}$		$m+\left(\bar{s}_m+(1-\bar{s}_m)\right)$		
∞	$\infty+0$	$\frac{\infty+0}{1}=\frac{1}{0}$		$\infty+(0+1)$		$\frac{0}{1}$
			Бесконечн.	∞		

Золотые константы приведем на рис. 23 [24], на котором следует в правой части рисунка рядом с обозначениями s_0, s_1, s_2, s_3 и т.д., отвечающими нумерации из натурального ряда, указать их соответствие нумерации из гармонического ряда, а именно $s_{\sqrt{4}}, s_{\sqrt{5}}, s_{\sqrt{8}}, s_{\sqrt{13}}$ и т.д.

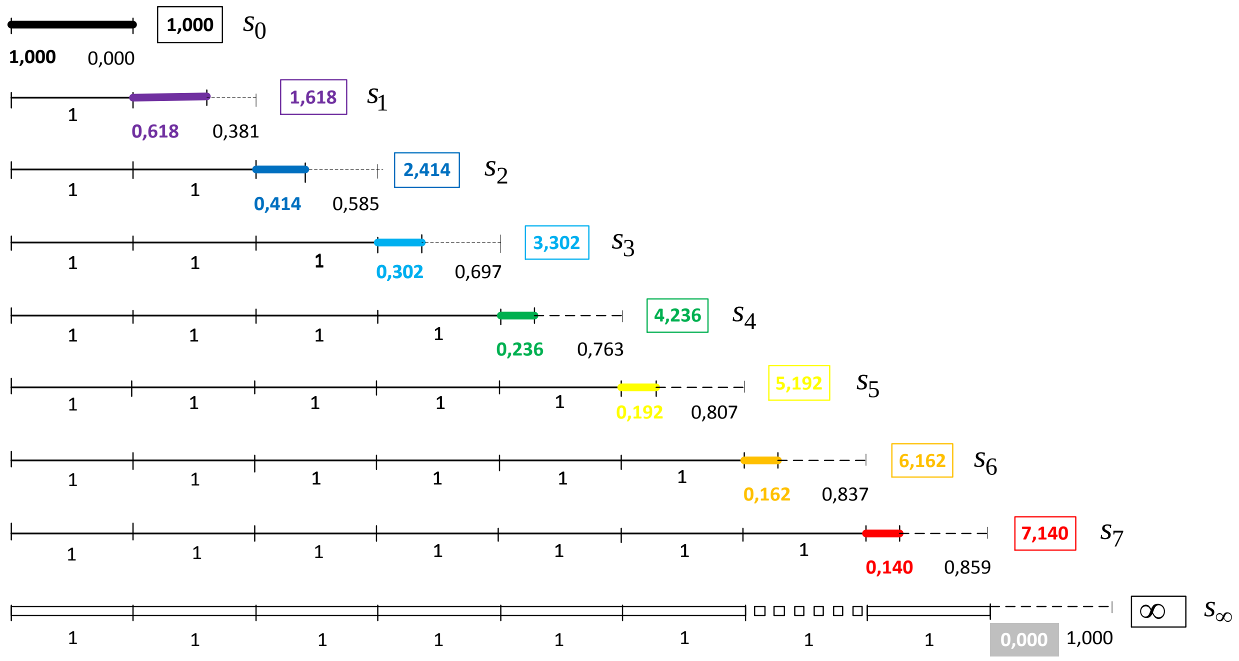


Рис. 23. Золотые константы

10. Кубиты золотых констант

Золотые константы в одномерной системе координат

Мы знаем, что

$$s_n+\bar{s}_n=\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}+\frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}=\sqrt{n^2+4}.$$

Например, $s_2+\bar{s}_2=2\sqrt{2}$.

Золотые константы в одномерной системе координат изобразим на рис. 24, в т.ч. с примером для второй золотой пропорции.

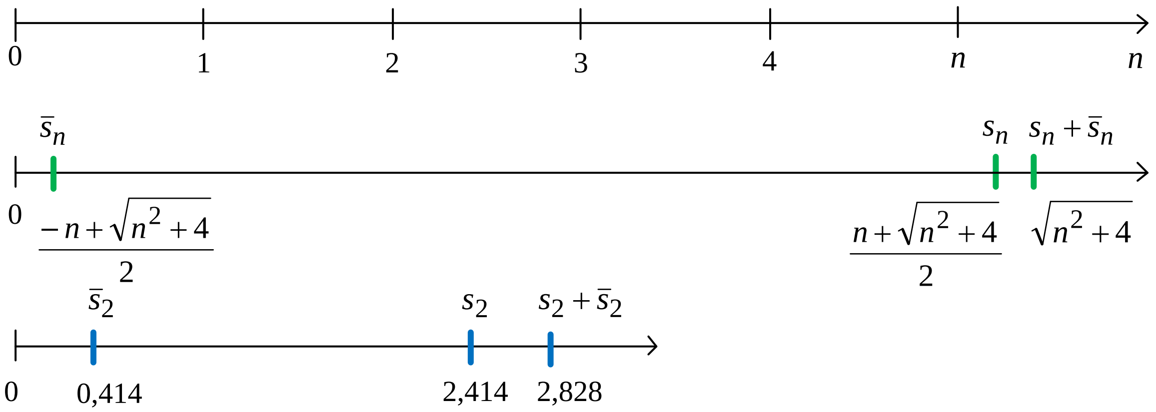


Рис. 24. Золотые константы в одномерной системе координат

Золотые константы в двумерной системе координат

Суммой золотых констант в двумерной системе координат будет длина гипотенузы треугольника, катетами которого являются эти константы. Найдем выражение гипотенузы:

$$\sqrt{s_2^2+\bar{s}_2^2}=\sqrt{\left(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)^2+\left(\frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2}\right)^2}=\sqrt{n^2+2}.$$

Например, $s_2^2+\bar{s}_2^2=\sqrt{6}$.

Изобразим золотые константы в двумерной системе координат на рис. 25, в т.ч. для второй золотой пропорции.

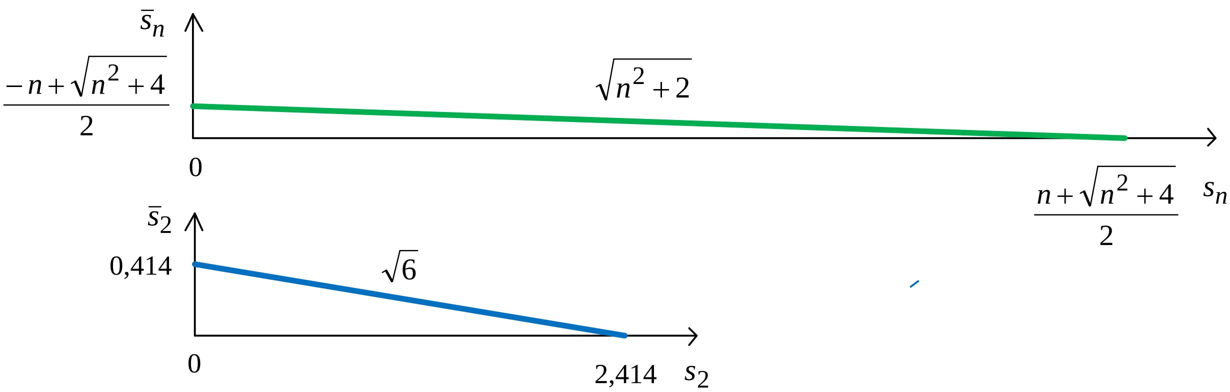


Рис. 25. Золотые константы в двумерной системе координат

Золотые константы в трехмерной системе координат

Суммой золотых констант в трехмерной системе координат станет длина диагонали параллелепипеда, двумя сторонами которого являются эти константы, например, большая пропорция представляет собой длину, малая – высоту, а третьей стороной – глубиной – будет искомая величина.

Заметим, что гипотенуза определяется значением $\sqrt{n^2+2}$, похожим на дискриминант, который входит в выражения, определяющие константы, в т.ч. $\sqrt{n^2+4}$. Отсюда следует, что если в качестве третьей стороны параллелепипеда взять $\sqrt{2}$, его диагональ будет равна $\sqrt{n^2+4}$ – реликтовому числу, порождающему золотые константы.

Такому параллелепипеду дадим название *золотой кубит*, который, предположительно, является своеобразным «кирпичом» мироздания. Изобразим кубит на рис. 26 и проверим наши вычисления для второй золотой пропорции.

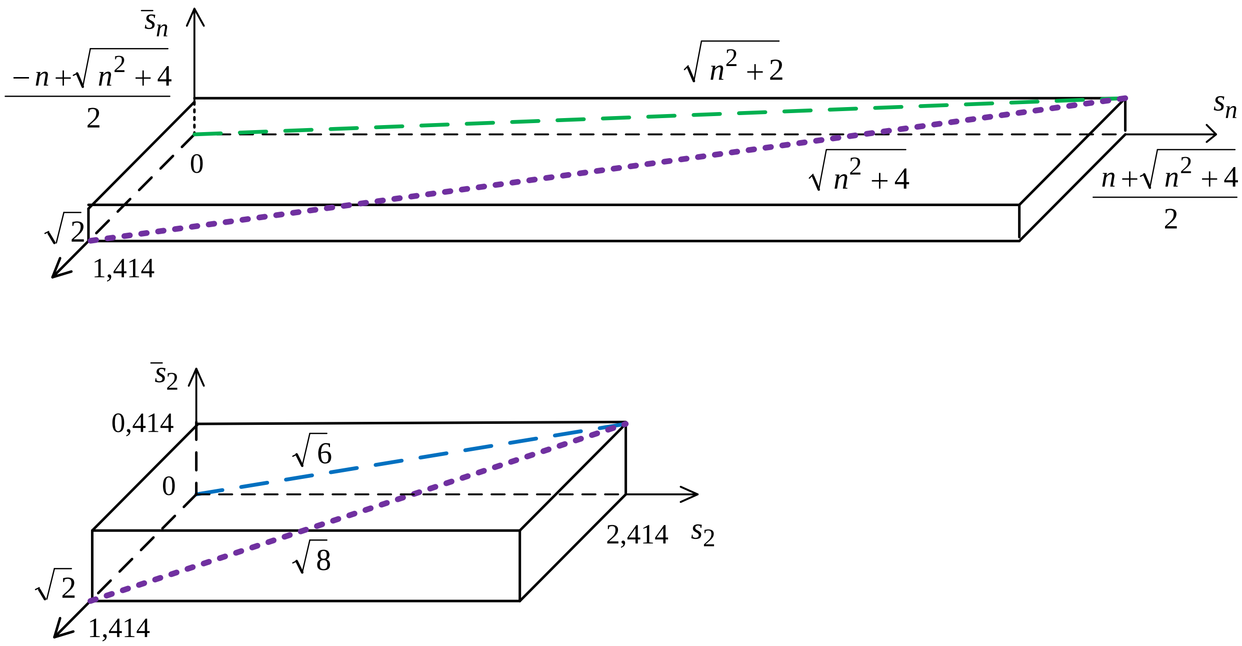


Рис. 26. Золотые константы в трехмерной системе координат

Кубит классической золотой пропорции изобразим на рис. 27.

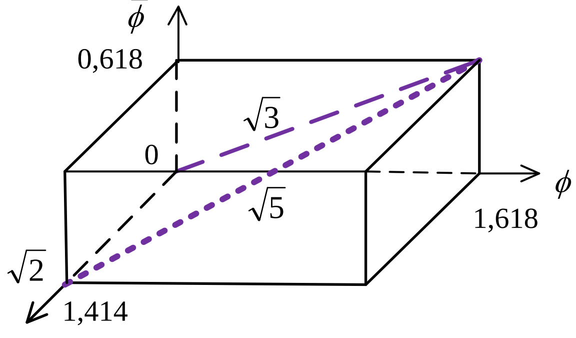


Рис. 27. Кубит для классической золотой пропорции

Кубит вторых золотых констант как главный «строительный материал» мироздания

Повторим рис. 26, подчеркнув особую роль $\sqrt{2}$ (рис. 28).

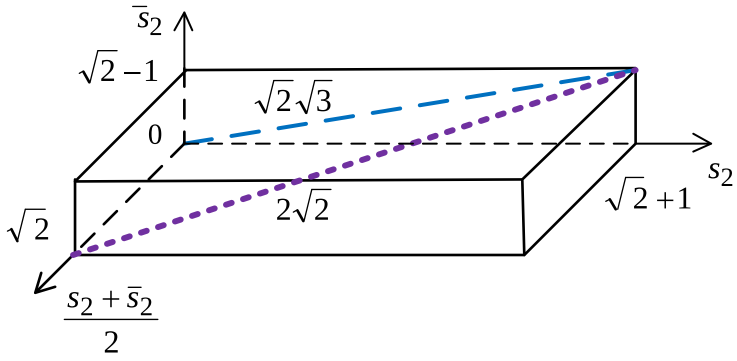


Рис. 28. Кубит второй золотой пропорции как главный «строительный материал» мироздания

11. Разность инверсных и сумма обратных чисел

Особенность разности инверсных чисел

1. Заметим интересную особенность:

$$1+\sqrt{2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=2; \qquad s_2-\bar{s}_2=2;$$

$$2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}=4; \qquad s_4-\bar{s}_4=4;$$

$$3+\sqrt{10}-\frac{1}{3+\sqrt{10}}=6; \qquad s_6-\bar{s}_6=6;$$

$\ldots;$

$$n+\sqrt{n^2+1}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}=2n. \qquad s_{2n}-\bar{s}_{2n}=2n. \tag{39}$$

2. Перейдем полностью в иррациональную систему чисел, с помощью которой получаются четные целые числа:

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=2;$$

$$\sqrt{4}+\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}=4;$$

$$\sqrt{9}+\sqrt{10}-\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}}=6;$$

$\ldots;$

$$\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}-\frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}=2n. \tag{40}$$

Инверсное число является суммой корней двух рядом стоящих чисел $\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}$.

3. Здесь первый корень из n^2, являющийся целым числом, складывается с корнем из числа, значащимся следующим в иррациональном ряду n^2+1. Поступим наоборот.

Сумма обратных чисел

1. Сложим первый корень из n^2 с корнем из предыдущего числа в иррациональном ряду n^2-1. Сумма корней $\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}$ будет несколько меньше соответствующего целого числа $2n$. Поэтому к сумме добавим число, инверсное по отношению к ней $\frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}}$, в ожидании, что результатом станет рациональное целое число, как и в выражении (40).

Так и есть (!):

$$\sqrt{1}+\sqrt{0}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{0}}=2;$$

$$\sqrt{4}+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=4;$$

$$\sqrt{9}+\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{8}}=6;$$

…;

$$\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2-1}}=2n, \qquad (41)$$

$$n+\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=2n. \qquad (42)$$

2. Примечательно, что в (42):

$$3+\sqrt{8}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=s_2^2+\bar{s}_2^2=6;$$

$$9+\sqrt{80}+\frac{1}{9+\sqrt{80}}=s_4^2+\bar{s}_4^2=18;$$

$$19+\sqrt{360}+\frac{1}{19+\sqrt{360}}=s_6^2+\bar{s}_6^2=38;$$

$$33+\sqrt{1088}+\frac{1}{33+\sqrt{1088}}=s_8^2+\bar{s}_8^2=66;$$

$$51+\sqrt{2600}+\frac{1}{51+\sqrt{2600}}=s_{10}^2+\bar{s}_{10}^2=102 \text{ и т.д.}$$

Результат примечательный, но, наверное, малополезный.

Одинаковость результатов суммы обратных и разности инверсных чисел

1. Сумма корней (41) и разность (39) дали одинаковые результаты:

$$1+\sqrt{0}+\frac{1}{1+\sqrt{0}}=2=1+\sqrt{2}-\frac{1}{1+\sqrt{2}};$$

$$2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=4=2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}};$$

$$3+\sqrt{8}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=6=3+\sqrt{10}-\frac{1}{3+\sqrt{10}};$$

…;

$$n+\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=2n=n+\sqrt{n^2+1}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}.$$

2. Вернемся, например, к выражению

$$2+\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=4=2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}.$$

Упрячем двойку в иррациональных числах:

$$\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2=\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{5}-\sqrt{3}=\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Аналогично

$$3+\sqrt{8}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=6=3+\sqrt{10}-\frac{1}{3+\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \sqrt{8}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=3=\sqrt{10}-\frac{1}{3+\sqrt{10}}.$$

$$\boxed{\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=n=\sqrt{n^2+1}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}} \tag{43}$$

или так

$$\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}=\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}.$$

Выясним, какие числовые особенности проявятся с помощью сумм и разностей инверсных чисел.

12. Сумма и разность четных и нечетных степеней золотых пропорций

Сумма четных степеней классической золотой пропорции

Рассмотрим сумму четных степеней $2n$ классической золотой пропорции [30, с. 21]:

$\phi^0+\bar{\phi}^0=2$;

$\phi^2+\bar{\phi}^2=3$;

$\phi^4+\bar{\phi}^4=7$;

$\phi^6+\bar{\phi}^6=18$;

$\phi^8+\bar{\phi}^8=47$ и т.д.

> Сумма четных степеней образует ряд нечетных чисел Люка:
> 2, 3, 7, 18, 47, 123, …, $3u_{k-1}-u_{k-2}$ (44)

Напомним, что ряд Люка составляют числа

$$2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ 199,\ \ldots,\ u_k=u_{k-2}+u_{k-1}. \tag{45}$$

Выражение для общего члена ряда (44)

$$u_k=3u_{k-1}-u_{k-2}. \tag{46}$$

Разность нечетных степеней классической золотой пропорции

Разность нечетных степеней $2n+1$ классической золотой пропорции [30, с. 21]:

$\phi - \bar{\phi} = 1$;

$\phi^3 - \bar{\phi}^3 = 4$;

$\phi^5 - \bar{\phi}^5 = 11$;

$\phi^7 - \bar{\phi}^7 = 29$ и т.д.

Разность нечетных степеней составляет ряд четных чисел Люка: 2, 3, 7, 18, 47, 123, …, $3u_{k-1} - u_{k-2}$	(47)

Разность нечетных степеней также составляет ряд чисел Люка через один член: 1, 4, 11, 29, 76, 199, …, $3u_{k-1} - u_{k-2}$.

Выражение для общего члена ряда (47) также определяется формулой (46).

Перемеженные ряды (44) и (47) дают полноценный ряд Люка (45).

Рассмотрим сумму и разность для других золотых пропорций, сведя результаты в таблицу 10.

Сумма четных степеней второй золотой пропорции

Сумма четных степеней второй золотой пропорции:

$s_2^0 + \bar{s}_2^0 = 2$;

$s_2^2 + \bar{s}_2^2 = 6$;

$s_2^4 + \bar{s}_2^4 = 34$;

$s_2^6 + \bar{s}_2^6 = 198$;

$s_2^8 + \bar{s}_2^8 = 1154$ и т.д.

Сумма четных степеней второй золотой пропорции порождает ряд чисел:

2, 6, 34, 198, 1154, …, $u_k = 6u_{k-1} - u_{k-2}$. (48)

Разность нечетных степеней второй золотой пропорции

Разность нечетных степеней второй золотой пропорции:

$s_2 - \bar{s}_2 = 2$;

$s_2^3 - \bar{s}_2^3 = 14$;

$s_2^5 - \bar{s}_2^5 = 82$;

$s_2^7 - \bar{s}_2^7 = 478$;

$s_2^9 - \bar{s}_2^9 = 2786$ и т.д.

Разность нечетных степеней второй золотой пропорции составляет числовой ряд:

2, 14, 82, 478, 2786, …, $u_k = 6u_{k-1} - u_{k-2}$. (49)

Перемеженные ряды (48) и (49) дают ряд:

2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, …, $u_k = u_{k-2} + 2u_{k-1}$.

Он эквивалентен ряду (после уменьшения всех членов вдвое):

1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239, 577, …, $u_k = u_{k-2} + 2u_{k-1}$, не удовлетворяя (48) и (49) по формуле общего члена.

Сумма четных и разность нечетных степеней третьей золотой пропорции

Степени третьей золотой пропорции составляют ряды:

сумма четных степеней 2, 11, 119, 1298, 14159, …, $11u_{k-1}-u_{k-2}$;

разность нечетных степеней 3, 36, 393, 4287, 46764, …, $11u_{k-1}-u_{k-2}$;

общий ряд 2, 3, 11, 36, 119, 393, 1298, 4287, …, $u_{k-2}+3u_{k-1}$.

Сумма четных и разность нечетных степеней четвертой золотой пропорции

Степени четвертой золотой пропорции составляют ряды:

сумма четных степеней 2, 18, 322, 5778, 103682, …, $18u_{k-1}-u_{k-2}$;

разность нечетных степеней 4, 76, 1364, 24476, 439204, …, $18u_{k-1}-u_{k-2}$;

общий ряд 2, 4, 18, 76, 322, 1364, 5778, 24476, 103682, 439204, …, $u_{k-2}+4u_{k-1}$.

Таблица 10

Сумма четных и разность нечетных степеней первых четырех золотых пропорций

Степень	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\phi^{2m}+\bar{\phi}^{2m}$	2	–	3	–	7	–	18	–	47	–
$\phi^{2m+1}-\bar{\phi}^{2m+1}$	–	1	–	4	–	11	–	29	–	76
$s_2^{2m}+\bar{s}_2^{2m}$	2	–	6	–	34	–	198	–	1154	
$s_2^{2m+1}-\bar{s}_2^{2m+1}$	–	2	–	14	–	82	–	478	–	2786
$s_3^{2m}+\bar{s}_3^{2m}$	2	–	11	–	119	–	1298	–	14159	
$s_3^{2m+1}-\bar{s}_3^{2m+1}$	–	3	–	36	–	393	–	4287	–	46764
$s_4^{2m}+\bar{s}_4^{2m}$	2	–	18	–	322	–	5778	–	103682	
$s_4^{2m+1}-\bar{s}_4^{2m+1}$	–	4	–	76	–	1364	–	24476	–	439204

Вторая степень суммы пропорций (графа 2 табл. 10) определяется выражением

$$k^2+2. \tag{50}$$

Оно определяет коэффициент перед первым слагаемым u_{k-1} в (44), (47), (48), (49) и т.п., в т.ч. для конкретных золотых пропорций:

первая 3;
вторая 6;
третья 11 и т.д.;
n-ая n^2+2.

Образуются ряды, члены которых описываются формулой

$$u_k=\left(k^2+2\right)u_{k-1}-u_{k-2}. \tag{51}$$

Сведем результаты данных исследований в табл. 11.

Из таблицы следует, что классическая золотая пропорция как всегда выбивается из общей картины, в данном случае тем, что первая сумма четных степеней, равная 2, больше первой разности нечетных степеней, равной 1.

Таблица 11

Ряды чисел из суммы четных и разности нечетных степеней золотых пропорций

№ ЗП	Ряды	u_k	u_k
1	2, 3, 7, 18, 47, 123, …	$3u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	1, 4, 11, 29, 76, 199, …	$3u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47,…	–	$u_{k-2} + u_{k-1}$
2	2, 6, 34, 198, 1154, …	$6u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	2, 14, 82, 478, 2786, …	$6u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, …	–	$u_{k-2} + 2u_{k-1}$
3	2, 11, 119, 1298, 14159, …	$11u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	3, 36, 393, 4287, 46764, …	$11u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	2, 3, 11, 36, 119, 393, 1298, 4287, …	–	$u_{k-2} + 3u_{k-1}$
4	2, 18, 322, 5778, 103682, …	$18u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	4, 76, 1364, 24476, 439204, …	$18u_{k-1} - u_{k-2}$	–
	2, 4, 18, 76, 322, 1364, 5778, 24476, 103682, …	–	$u_{k-2} + 4u_{k-1}$
n	–	$\left(k^2+2\right)u_{k-1} - u_{k-2}$	$u_{k-2} + nu_{k-1}$

Отношение членов ряда (51) как для суммы, так и для разности инверсных чисел есть квадрат большой золотой пропорции для нарастающего ряда:

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{\left(k^2+2\right)u_{k-1}}{u_{k-1}} - \frac{u_{k-2}}{u_{k-1}}; \quad \frac{u_k}{u_{k-1}} = k^2 + 2 - \frac{1}{\dfrac{u_{k-1}}{u_{k-2}}};$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{u_{k-1}} = k^2 + 2 - \lim_{k\to\infty}\frac{u_{k-2}}{u_{k-1}}; \; x_k = k^2 + 2 - \frac{1}{x_k}.$$

Откуда следует уравнение

$$x_k^2 - \left(k^2+2\right)x_k + 1 = 0. \tag{52}$$

Корни (52)

$$x_{k_{1,2}} = \frac{k^2 + 2 \pm \sqrt{\left(k^2+2\right) - 4}}{2} = \frac{k^2 + 2 \pm k\sqrt{k^2+4}}{2} = s_n^2. \tag{53}$$

13. О рациональной и иррациональной составляющих корневых пропорций

Корни квадратных уравнений, определяющих корневые и дробные пропорции, разумеется, содержат рациональные и иррациональные составляющие. Однако они в этой части не обладают такой особенностью, которая присуща золотым пропорциям, в чем, собственно, основная мысль и идея настоящего материала. Попутно покажем это.

Сведения о корневых пропорциях

Корневые пропорции определяются:

корнями $r_{n_{1,2}} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$ уравнения (большие пропорции)

$$r_n^2 - r_n - n = 0 \tag{54}$$

и корнями $\tilde{r}_{n_{1,2}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$ уравнения (малые пропорции)

$$\tilde{r}_n^2 + \tilde{r}_n - n = 0\,, \tag{55}$$

где n – целые числа, включая ноль.

Мантиссы чисел r_n и $\tilde{r}_n$ равны, но числа не взаимообратны, как у золотых пропорций. И всё же им присуща своеобразная инверсия в виде $\tilde{r}_n = \dfrac{n}{r_n}$ и $r_n = \dfrac{n}{\tilde{r}_n}$. Поэтому малые корневые пропорции $\tilde{r}_n$ для большей определенности здесь снабдим волнистой чертой, а не прямой линией как у золотых пропорций.

Разность корневых пропорций равна ± 1:

$$r_{n_1} - \tilde{r}_{n_1} = \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2} - \frac{-1+\sqrt{1+4n}}{2} = 1;$$

$$\tilde{r}_{n_2} - r_{n_2} = \frac{-1-\sqrt{1+4n}}{2} - \frac{-1+\sqrt{1+4n}}{2} = -1\,.$$

Именно разность пропорций $r_n - \tilde{r}_n = 1$, т.е. $r_n - \dfrac{n}{r_n} = 1$ дает уравнение (54).

Представим численные значения в таблице 12.

Таблица 12

Численные значения корневых пропорций

n	r_{n_1}	r_{n_2}	$\tilde{r}_{n_1}$	$\tilde{r}_{n_2}$	$r_{n_1} - \tilde{r}_{n_1}$	$\tilde{r}_{n_2} - r_{n_2}$
0	1	–1	0	0	1	–1
1	1,618	–1,618	0,618	–0,618	1	–1
2	2	–2	1	–1	1	–1
3	2,302	–2,302	1,302	–1,302	1	–1
4	2,561	–2,561	1,561	–1,561	1	–1
5	2,791	–2,791	1,791	–1,791	1	–1
6	3	–3	2	–2	1	–1
7	3,192	–3,192	2,192	–2,192	1	–1
8	3,372	–3,372	2,372	–2,372	1	–1
9	3,541	–3,541	2,541	–2,541	1	–1
10	3,701	–3,701	2,701	–2,701	1	–1
11	3,854	–3,854	2,854	–2,854	1	–1
12	4	–4	3	–3	1	–1
n	$\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{1+4n}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{1+4n}}{2}$	1	–1

О рациональной и иррациональной составляющих корневых пропорций

Аналогично (17) рассмотрим сумму большой и малой корневой пропорции, допустив, что величины r_x и $\tilde{r}_x = \dfrac{x}{r_x}$ нам еще неизвестны. Зададим условие равенства суммы этих чисел единице:

$$r_x + \tilde{r}_x = 1, \quad r_x + \frac{x}{r_x} = 1, \tag{56}$$

где x– порядковый номер искомых инверсных чисел, характеризующих корневые пропорции.

Здесь результат должен быть таким, чтобы выполнялось и условие равенства мантисс чисел между собой.

Из условия (56) следует уравнение

$$r_x^2 - r_x + x = 0 \tag{57}$$

с корнями $r_{x_{1,2}} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. …(58)

В (58) отсутствуют положительные значения x такие, чтобы дискриминант $\sqrt{1-4x}$ вообще было возможно вычислить, кроме $x = 0$. Поэтому для нашего условия (56) выражение (58) не имеет решений.

14. О рациональной и иррациональной составляющих дробных пропорций

Сведения о дробных пропорциях

Дробные пропорции определяются

корнями $f_{n_{1,2}} = \dfrac{n \pm \sqrt{n^2+4n}}{2}$ (большие пропорции) уравнения

$$f_n^2 - nf_n - n = 0 \tag{59}$$

и корнями $\tilde{f}_{n_{1,2}} = \dfrac{-n \pm \sqrt{n^2+4n}}{2}$ (малые пропорции) уравнения

$$\tilde{f}_n^2 + n\tilde{f}_n - n = 0, \tag{60}$$

где n – целые числа, включая ноль.

Мантиссы чисел f_n и $\tilde{f}_n$ равны, но числа не взаимообратны, им присуща инверсия, аналогичная корневым пропорциям в виде $\tilde{f}_n = \dfrac{n}{f_n}$ и $f_n = \dfrac{n}{\tilde{f}_n}$.

Разность корневых пропорций равна $\pm n$:

$$f_{n_1} - \tilde{f}_{n_1} = \frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2} - \frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{2} = n,$$

$$\tilde{r}_{n_2} - r_{n_2} = \frac{-n-\sqrt{n^2+4n}}{2} - \frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{2} = -n.$$

Именно разность пропорций $f_n - \tilde{f}_n = n$, т.е. $f_n - \dfrac{n}{f_n} = n$, приводит к уравнению (59).

Представим численные значения дробных пропорций в таблице 13.

Таблица 13

Численные значения дробных пропорций

n	f_{n_1}	f_{n_2}	$\tilde{f}_{n_1}$	$\tilde{f}_{n_2}$	$f_{n_1} - \tilde{f}_{n_1}$	$\tilde{f}_{n_2} - f_{n_2}$
0	0	0	0	0	0	0
1	1,618	–1,618	0,618	–0,618	1	–1
2	2,732	–2,732	0,732	–0,732	2	–2
3	3,379	–3,379	0,379	–0,379	3	–3
4	4,8281	–4,828	0,828	–0,828	4	–4
5	5,8541	–5,854	0,8541	–0,854	5	–5
n	$\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$	$\frac{n-\sqrt{n^2+4n}}{2}$	$\frac{-n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$	$\frac{-n-\sqrt{n^2+4n}}{2}$	n	$-n$

О рациональной и иррациональной составляющих дробных пропорций

Аналогично (17) и (56) рассмотрим сумму большой и малой дробной пропорции, допустив, что величины f_n и $\tilde{f}_n = \frac{n}{f_n}$ нам еще неизвестны. Сформулируем условие – сумма этих чисел равна гармоническому числу:

$$f_y + \tilde{f}_y = y\,,\ \ f_y + \frac{y}{f_y} = y\,, \tag{61}$$

где y – порядковый номер искомых инверсных чисел, характеризующих дробные пропорции.

Здесь результат должен быть таким, чтобы выполнялось условие равенства мантисс.

Из условия (61) следует уравнение

$$f_y^2 - yf_y + y = 0 \tag{62}$$

с корнями $f_{y_{1,2}} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4y}}{2}$. (63)

В (63) дискриминант $\sqrt{y^2-4y}$ вычисляется, начиная с $y = 4$. Численные значения приведены в таблице 14, где $f_y = f_{n+4}$ и $f_y = \frac{y+\sqrt{y^2-4y}}{2} = \frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2} + 2 = f_n + 2$.

Однако корни (63), по сути, повторяют корни уравнения (59), не расширяя смысл суммы корней дробных пропорций в части присвоения им номеров иррациональной составляющей подобно золотым пропорциям. Поэтому для нашего условия (61) выражение (63) интереса не представляет. Приходится констатировать, что особенность в части рациональной и иррациональной составляющих присуща лишь золотым пропорциям, подчеркивая их уникальность.

Таблица 14

Численные значения величин при сумме инверсных чисел

y	f_y	f_y	f_y	n	$f_n = f_{y-4}$	$f_n = f_y - 2$	$f_n = f_y - 2$
4	f_4	$\frac{4+\sqrt{4^2-4\cdot 4}}{2}=2$	2	0	f_0	f_0	0
5	f_5	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$	3,618	1	f_1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618
6	f_6	$\frac{6+\sqrt{12}}{2}=3+\sqrt{3}$	4,732	2	f_2	$1+\sqrt{3}$	2,732
7	f_7	$\frac{7+\sqrt{21}}{2}$	5,791	3	f_3	$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$	3,791
8	f_8	$\frac{8+\sqrt{32}}{2}=4+2\sqrt{2}$	6,828	4	f_4	$2+2\sqrt{2}$	4,828
9	f_9	$\frac{9+\sqrt{45}}{2}$	7,854	5	f_5	$\frac{5+\sqrt{45}}{2}$	5,854
y	f_y	$\frac{y+\sqrt{y^2-4y}}{2}$	8,854	n	$\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$	$\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$	6,854

15. Квадраты чисел, мантиссы которых равны мантиссам корневых пропорций

Вернемся вновь к примеру (35) $\frac{2,618...}{1,618...}=1,618...$. Отметим, что всё же в числах, определяемых моделью (36) $\frac{1+s_n}{s_n}=\frac{1+\bar{s}_n}{1}$, не фигурируют квадраты прямых золотых пропорций. Более того, мантиссы их квадратов не равны мантиссам прямых и обратных пропорций.

Подобно (35) возникает желание найти отношения чисел с равными мантиссами, одно из которых (в числителе) есть квадрат пропорции, поскольку эта особенность не реализовалась в формуле (36). Впрочем, так задача там и не ставилась. И всё же найдем эти квадраты.

Отметим, что классическая золотая пропорция является прообразом многих пропорций благодаря своим уникальным проявлениям. Но одна особенность золотой пропорции в иных гармоничных соотношениях остаётся незамеченной, – это ее тройственное представление в виде равенства мантисс для малой, большой и квадрата большой пропорции:

$$\bar{\phi}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0,618...;\ \phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618...;\ \phi^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=2,618...;$$

$$\begin{cases}\bar{\phi}=\phi-1,\\ \phi,\\ \phi^2=\phi+1.\end{cases} \tag{64}$$

Постановка задачи – нахождение пропорций с равными мантиссами для большой, малой и квадрата большой пропорции

Для искомых пропорций проблема кроется в реализации *квадрата большой золотой пропорции*:

$$\phi^2 = \phi + 1. \tag{65}$$

По аналогии с (65) задача решается при выполнении следующего равенства:

$$x_n^2 = x_n + n.$$

Оно, в свою очередь, соответствует корневым *r*-пропорциям:

$$r_n^2 = r_n + n, \tag{66}$$

где n – действительное целое число, в т. ч. ноль.

Из (66) вытекает уравнение $r_n^2 - r_n - n = 0$, соответствующее (54) с корнями $r_{n_{1,2}} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$.

Из равенства (66) следует $r_n = 1 + \dfrac{n}{r_n} = 1 + \tilde{r}_n$, $\tilde{r}_n = r_n - 1$, где $\tilde{r}_n$ – малая пропорция; r_n – большая пропорция.

Таким образом, заключаем, что:

> Корневые *r*-пропорции обладают тройственным представлением в виде равенства мантисс малой, большой и квадрата большой пропорции подобно классической золотой пропорции (64):
>
> $$\begin{cases} \tilde{r}_n = r_n - 1, \\ r_n, \\ r_n^2 = r_n + n. \end{cases} \tag{67}$$

Еще раз подчеркнем, что в отличие от золотой пропорции, где $\bar{\phi} = 1/\phi$, $\phi = 1/\bar{\phi}$ малая и большая корневые пропорции не взаимообратны, не инверсны, а связаны соотношениями $\tilde{r}_n = \dfrac{n}{r_n}$; $r_n = \dfrac{n}{\tilde{r}_n}$.

Численные значения корневых пропорций для наглядности с величинами квадратов больших пропорций приведем в таблице 15.

В таком тройственном проявлении мантисс только корневые пропорции своей уникальностью впитывают особенность классической золотой пропорции (64), правда, не будучи прямо инверсными.

Таблица 15

Тройственное представление корневых *r*-пропорций
в виде равенства мантисс малой, большой и квадрата большой пропорции

n	Уравнение	(+) корень уравнения	$\tilde{r}_n$	r_n	r_n^2
0	$r_0^2 - r_0 = 0$	$\dfrac{1+\sqrt{1}}{2} = 1$	0	1	1

1	$r_1^2 - r_1 - 1 = 0$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	0,6180339	1,6180339	2,6180339
2	$r_2^2 - r_2 - 2 = 0$	$\frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$	1	2	4
3	$r_3^2 - r_3 - 3 = 0$	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	1,3027756	2,3027756	5,3027756
4	$r_4^2 - r_4 - 4 = 0$	$\frac{1+\sqrt{17}}{2}$	1,5615528	2,5615528	6,5615528
5	$r_5^2 - r_5 - 5 = 0$	$\frac{1+\sqrt{21}}{2}$	1,7912878	2,7912878	7,7912878
6	$r_6^2 - r_6 - 6 = 0$	$\frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$	2	3	9
7	$r_7^2 - r_7 - 7 = 0$	$\frac{1+\sqrt{29}}{2}$	2,1925824	3,1925824	10,1925824
8	$r_8^2 - r_8 - 8 = 0$	$\frac{1+\sqrt{33}}{2}$	2,3722813	3,3722813	11,3722813
9	$r_9^2 - r_9 - 9 = 0$	$\frac{1+\sqrt{37}}{2}$	2,5413812	3,5413812	12,5413812
10	$r_{10}^2 - r_{10} - 10 = 0$	$\frac{1+\sqrt{41}}{2}$	2,7015621	3,7015621	13,7015621
11	$r_{11}^2 - r_{11} - 11 = 0$	$\frac{1+\sqrt{45}}{2}$	2,8541019	3,8541019	14,8541019
12	$r_{12}^2 - r_{12} - 12 = 0$	$\frac{1+\sqrt{49}}{2} = 4$	3	4	16
n	$r_n^2 - r_n - n = 0$	$\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$	$\frac{\sqrt{1+4n}-1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}+n$

Оригинальность корневых пропорций подчеркивают и иные их особенности.

Особенности корневых *r*-пропорций

На математических свойствах корневых r-пропорций базируются следующие закономерности.

1. *Корневые пропорции есть истинная сущность числа n.* Корневые r-пропорции тождественны понятию истинной сущности числа, – определения, навеянного терминологией Пифагора в бесконечном варианте о числе, его сущности и тождестве [15]:

$$r_n = \sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}\ .$$

Напомним несколько примеров:

– истинная сущность числа 1 есть золотая пропорция $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = \phi$;

– анти сущность числа 1 есть малая золотая пропорция $\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\ldots}}} = \bar{\phi}$;

– истинная сущность числа 2 равна самому себе $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2$;

– анти сущность числа 2 равна единице $\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots}}}=1;$

– истинная сущность куба золотой пропорции ϕ^3 $\sqrt{\phi^3+\sqrt{\phi^3+\sqrt{\phi^3+\ldots}}}=\begin{cases}\phi^2,\\-\phi;\end{cases}$

– анти сущность куба золотой пропорции ϕ^3 $\sqrt{\phi^3-\sqrt{\phi^3-\sqrt{\phi^3-\ldots}}}=\begin{cases}\phi,\\-\phi^2;\end{cases}$

– истинная сущность модифицированного числа Фейгенбаума $F_*=4{,}67077427\ldots$ равно числу e $\sqrt{F_*+\sqrt{F_*+\sqrt{F_*+\ldots}}}=e$.

2. *Тройственное представление пропорций в части равенства мантисс*. Корневые r-пропорции обладают равенством мантисс малой, большой и квадрата большой пропорции (67) $\begin{cases}\tilde{r}_n=r_n-1,\\r_n,\\r_n^2=r_n+n.\end{cases}$ подобно золотой пропорции (64) $\begin{cases}\bar{\phi}=\phi-1,\\\phi,\\\phi^2=\phi+1.\end{cases}$.

3. *Обобщенная Парето-оптимальность*. Корневые r-пропорции являются мерой согласования обобщенной Парето-оптимальности, выраженной в целых числах, с коэффициентами дробных и золотых пропорций (таблица 16) [14].

Таблица 16

Парето-оптимальность в целых числах (%), близких к корневым, дробным и золотым пропорциям

A/a, %	A/a	k^2	k^2	r_n	r_n	f_n	s_n
40/60	0,381/0,618	0,618	$(\sqrt{5}-1)/2$		–		
60/40	0,585/0,414	1,414	$\sqrt{2}$		–		s_2-1
	0,618/0,381	1,618	$(\sqrt{5}+1)/2$	$r_1=\phi$	–	f_1	–
70/30	0,697/0,302	2,302	$(\sqrt{13}+1)/2$	–	r_3	–	s_3-1
80/20	0,791/0,208	3,791	$(\sqrt{21}+3)/2$	r_5+1	–	f_3	–
	0,807/0,192	4,192	$(\sqrt{29}+3)/2$	–	r_7+1	–	s_5-1
85/15	0,854/0,146	5,854	$(\sqrt{45}+5)/2$	$r_{11}+2$	–	f_5	–
	0,859/0,140	6,140	$(\sqrt{53}+5)/2$	–	$r_{13}+2$	–	s_7-1
90/10	0,887/0,112	7,887	$(\sqrt{77}+7)/2$	$r_{19}+3$	–	f_7	–
	0,890/0,109	8,109	$(\sqrt{85}+7)/2$	–	$r_{21}+3$	–	s_9-1
	0,908/0,091	9,908	$(\sqrt{117}+9)/2$	$r_{29}+4$	–	f_9	–
	0,909/0,090	10,090	$(\sqrt{125}+9)/2$	–	$r_{31}+4$	–	$s_{11}-1$
				$r_{n(n+1)-1}+$ $+n-1$	$r_{n(n+1)+1}$ $++n-1$	f_{2n-1}	$s_{2n+1}-1$

Сущностью коэффициентов, уравнивающих части A_n и a_n при умножении меньшей и делении большей части на коэффициент $\sqrt{f_n}$, т. е. $A_n/\sqrt{f_n}=\sqrt{f_n}\cdot a_n$, являются большие дробные f-пропорции. Уравнивающий коэффициент для классической золотой пропорции равен $\sqrt{\dfrac{\bar{\phi}}{1-\bar{\phi}}}=\sqrt{\phi}\approx 1{,}272$ и характеризует соотношения в «сакральном» треугольнике, всесторонне исследованном П.Я. Сергиенко [32].

4. Закон масштабирования. Корневые r-пропорции обладают двумя свойствами $r_n-\tilde{r}_n=1$ и $r_n\tilde{r}_n=n$, порождающими системный закон (правило) [11]. Здесь мы, в отличие от [11], заменяем обозначения m на n, R_m на r_n, r_m на $\tilde{r}_n$ для придания настоящему материалу общего стиля оформления.

Два фактора r_n и $\tilde{r}_n$ могут служить масштабом системы протяженностью n при выполнении двух системных условий $\begin{cases} r_n-\tilde{r}_n=1, \\ r_n\tilde{r}_n=n. \end{cases}$

Здесь:

– масштаб, равный минимальной единице масштабирования – числу 1, определяет корневая пропорция $r_n, \tilde{r}_n$ в виде разности (необходимое условие) $r_n-\tilde{r}_n=1$;

– удовлетворяя протяженности системы в виде произведения (достаточное условие) $r_n\tilde{r}_n=n$;

– дополнительные условия $r_n+\tilde{r}_n=\sqrt{n}$, $\tilde{r}_n=\dfrac{n}{r_n}$, $r_n=\dfrac{n}{\tilde{r}_n}$.

Гипотетические законы мироздания для сравнения приведем в таблице 17.

Таблица 17

Законы мироздания (гипотеза)

Закон целостного, закон размера	Закон масштабирования	Закон согласования масштаба и размера	Закон сохранения единицы
Золотые пропорции	Корневые пропорции	Дробные пропорции	Классическая золотая пропорция
$s_n-\bar{s}_n=n$	$r_n-\tilde{r}_n=1$	$f_n-\tilde{f}_n=n$	$\phi-\bar{\phi}=1$
$s_n\bar{s}_n=1$	$r_n\tilde{r}_n=n$	$f_n\tilde{f}_n=n$	$\phi\bar{\phi}=1$
$s_n+\bar{s}_n=\sqrt{n^2+4}$	$r_n+\tilde{r}_n=\sqrt{1+4n}$	$f_n+\tilde{f}_n=\sqrt{n^2+4n}$	$\phi+\bar{\phi}=\sqrt{5}$

5. *Взаимосвязь золотых и корневых пропорций*. Корневые r-пропорции способны выразить собой золотые s-пропорции, что изложено в статьях [21], удостоившись упоминания в Реферативном журнале РАН, ВИНИТИ [31].

6. *Корневые пропорции и расширение познаний о нуле.* В частности в [13] показано, что:

– истинная сущность нуля есть ноль или единица $\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\ldots}}}=\begin{cases} 0, \\ 1; \end{cases}$

– непрерывный повторный кубический корень из нуля равен нулю, единице или минус единице $\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\ldots}}}=\begin{cases} -1, \\ 0, \\ 1. \end{cases}$

7. *Процесс, порождающий гармонию.* Пусть процесс характеризуется взятием целого x, извлечением из него квадратного корня $\sqrt{x}$, добавлением к результату n,

получив $n+\sqrt{x}$, извлечением квадратного корня $\sqrt{n+\sqrt{x}}$, добавлением *n*, получив $n+\sqrt{n+\sqrt{x}}$, извлечением квадратного корня $\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{x}}}$ и т. д. [17]. Процесс приводится к фрактальному равенству $x=\sqrt{n+x}$, откуда следует уравнение (54), определяющее корневые пропорции.

16. Систематизация формул гармонии, в т.ч. золотых пропорций с учетом рациональной и иррациональной составляющих

Наиболее общее уравнение

Общие уравнения, корни которых характеризуют *q*-пропорции [30]:

$$q_n^{n+1}-q_n^n-\ldots-q_n^2-q_n-1=0; \tag{68}$$

$$q_n^{n+1}-q_n^n-\ldots-q_n^2-q_n+1=0; \tag{69}$$

$$q_n^{n+1}+q_n^n+\ldots+q_n^2+q_n-1=0. \tag{70}$$

Наиболее обобщенное уравнение (68), равно как аналогично и для (69) и (70), имеет вид

$$k_{n+1}q_n^{n+1}-k_nq_n^n-\ldots-k_2q_2^2-k_1q_1-k=0,$$

где $k_{n+1}, k_n, \ldots, k_2, k_1, k_0$ – числовые коэффициенты.

Три группы трехчленных степенных уравнений

Приведем три группы трехчленных степенных уравнений, составленных из крайних членов уравнения (68), включая свободный член, т. е. $q_n^{n+1}, q_n^n, q_n^2, q_n$, –1 [22], [16]:

$q_n^2-q_n-1=0$ – младшие степенные уравнения или квадратные уравнения;

$q_n^{n+1}-q_n^n-1=0$ – старшие степенные уравнения;

$q_m^{n+1}-q_n-1=0$ – крайние степенные уравнения.

Они закрепились как инструменты и объекты при исследовании пропорций и поиске их проявлений, в следующих обозначениях:

$\phi^2-\phi-1=0$ – характеризует классическую золотую пропорцию; (71)

$p_n^{n+1}-p_n^n-1=0$ – характеризует *p*-пропорции А.П. Стахова [7];

$v_n^{n+1}-v_n-1=0$ – характеризует *v*-пропорции Э.М. Сороко [6].

Виды уравнений младших степенных пропорций (квадратных уравнений)

Из уравнения классической золотой пропорции (71), путем задания перед членами каждого соответствующих коэффициентов *n*,получены следующие квадратные (младшие степенные) уравнения:

$\phi^2-\phi-1=0$ – характеризует классическую золотую пропорцию;

$r_n^2-r_n-n=0$ – характеризует корневые пропорции (*r*-пропорции);

$s_n^2-ns_n-1=0$ – характеризует золотые пропорции (*s*-пропорции); (72)

$f_n^2-nf_n-n=0$ – характеризует дробные пропорции (*f*-пропорции);

$na_n^2 - a_n - 1 = 0$ – равноценное $a_n^2 - \frac{a_n}{n} - \frac{1}{n} = 0$;

$nb_n^2 - b_n - n = 0$ – равноценное $b_n^2 - \frac{b_n}{n} - 1 = 0$;

$nc_n^2 - nc_n - 1 = 0$ – равноценное $c_n^2 - c_n - \frac{1}{n} = 0$.

Первые четыре уравнения будем считать основными.

Систематизация трех групп уравнений с учетом четырех разновидностей

Систематизация групп и видов уравнений наглядна при представлении ее в виде таблицы (табл. 18).

Таблица 18

Группы и виды уравнений, характеризующих пропорции в нумерации рациональной составляющей

Группы исходных уравнений	Виды уравнений, характеризующих классическую золотую, корневые, золотые и дробные пропорции
$\phi^2 \mp \phi - 1 = 0$	$\phi^2 \mp \phi - 1 = 0$
	$r_n^2 \mp r_n - n = 0$
	$s_n^2 \mp ns_n - 1 = 0$
	$f_n^2 \mp nf_n - n = 0$
$p_n^{n+1} \mp p_n^n - 1 = 0$	$p_n^{n+1} \mp p_n^n - 1 = 0$
	$p_{rn}^{n+1} \mp p_{rn}^n - n = 0$
	$p_{sn}^{n+1} \mp np_{sn}^n - 1 = 0$
	$p_{fn}^{n+1} \mp np_{fn}^n - n = 0$
$v_n^{n+1} \mp v_n - 1 = 0$	$v_n^{n+1} \mp v_n - 1 = 0$
	$v_{rn}^{n+1} \mp v_{rn} - n = 0$
	$v_{sn}^{n+1} \mp nv_{sn} - 1 = 0$
	$v_{fn}^{n+1} \mp nv_{fn} - n = 0$

Основные характеристики четырех квадратичных больших пропорций из первой группы младших степенных (квадратичных) уравнений приведем в приложении 2.

Систематизация уравнений золотых пропорций в терминах рациональной и иррациональной составляющей

Дадим завершающую систематизацию уравнений золотых пропорций в терминах рациональной и иррациональной составляющих, что и явилось основной целью работы (табл. 19).

Таблица 19

Виды уравнений, характеризующих золотые пропорции
в терминах рациональной и иррациональной составляющей

	Уравнение	Первый корень	Второй корень
В терминах рациональной составляющей	$s_n^2 - ns_n - 1 = 0$	$\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$	$\frac{n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}$
	$s_n^2 + ns_n - 1 = 0$	$\frac{-n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}$	$\frac{-n - \sqrt{n^2 + 4}}{2}$
	$s_n^2 - ns_n + 1 = 0$	$\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}$	$\frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}$
В терминах иррациональной составляющей	$s_h^2 - hs_h - 1 = 0$	$\frac{h + \sqrt{h^2 + 4}}{2}$	$\frac{h - \sqrt{h^2 + 4}}{2}$
	$s_h^2 + hs_h - 1 = 0$	$\frac{-h + \sqrt{h^2 + 4}}{2}$	$\frac{-h - \sqrt{h^2 + 4}}{2}$
	$s_h^2 - hs_h + 1 = 0$	$\frac{h + \sqrt{h^2 - 4}}{2}$	$\frac{h - \sqrt{h^2 - 4}}{2}$

Выводы

Соприкоснувшись с числом, научись обращаться со словом.
Напутствие автора читателю и самому себе

Хочу научиться говорить красиво.
Похвальное желание студентки,
недавно окончившей ВУЗ

1. Задание условия – разность инверсных чисел равна целому числу – привела к открытию золотых пропорций. Задание условия – сумма инверсных чисел равна гармоническому числу –выявило особенности рациональных и иррациональных составляющих золотых пропорций и, в принципе, позволило повторить открытие пропорций, как таковых. Сумма инверсных чисел и особенность их рациональной и иррациональной составляющих выявила ряд особенностей, присущих классической первой и второй золотой пропорции.

2. Иррациональная составляющая золотых пропорций определяется членами гармонического ряда, состоящего из иррациональных чисел $h = \sqrt{n^2 + 2^2}$ с начальной точкой $\sqrt{4} = 2$.

3. Запись золотых пропорций тождественна и адекватна в двух разновидностях:

$$s_n = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}; \; s_n = \frac{n + h}{2};$$

$$s_h = \frac{h + \sqrt{h^2 - \sqrt{4}^2}}{\sqrt{4}} = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4}}{2}; \; s_h = \frac{h + n}{2};$$

$h=\sqrt{n^2+4}$; $n=\sqrt{h^2-4}$.

4. Золотые s-пропорции имеют собственную нумерацию s_n и s_h в рациональных и иррациональных числах n и h.

5. Системные условия (принципы) существования золотых пропорций:

$$\begin{cases} s_n=\dfrac{1}{\bar{s}_n},\ \bar{s}_n=\dfrac{1}{s_n}; \\ s_n\bar{s}_n=1; \\ s_n-\bar{s}_n=n;\ n-\text{ряд натуральных чисел}; \\ s_n+\bar{s}_n=h_n;\ h_n-\text{ряд гармонических чисел}; \\ s_n=\dfrac{n+h}{2}; \\ s_h=\dfrac{h+n}{2}. \end{cases}$$

6. Даны оптимальные алгоритмы геометрического построения с помощью циркуля и линейки отрезков, соответствующих золотым константам. Приведены примеры построения для конкретных золотых констант.

7. Золотые пропорции характеризуются четырьмя константами с равными мантиссами, приводящими к тождественному отношению в виде $\dfrac{1+s_n}{s_n}=\dfrac{1+\bar{s}_n}{1}$. Данная особенность трактует золотые пропорции в качестве золотых тетрад.

8. Приведены оптимальные алгоритмы геометрического построения с помощью циркуля и линейки золотых тетрад.

9. Золотые константы в трехмерной системе координат образуют своеобразные кубиты золотых констант. Приведены примеры золотых кубитов для первой и второй золотых пропорций.

10. Разность инверсных и сумма обратных чисел в рациональной и иррациональной числовой системе одинаковы и порождают четные числа

$$n+\sqrt{n^2-1}+\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}=2n=n+\sqrt{n^2+1}-\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$$

11. Сумма четных и разность нечетных степеней золотых пропорций образуют ряды, члены которых определяются формулой

$$u_k=\left(k^2+2\right)u_{k-1}-u_{k-2}.$$

12. Корневые r-пропорции обладают тройственным представлением в части равенства мантисс (малой, большой и квадрата большой пропорции) подобно классической золотой пропорции

$$\begin{cases} \bar{\phi}=\phi-1, \\ \phi, \\ \phi^2=\phi+1, \end{cases}\quad \text{т.е.}\quad \begin{cases} \tilde{r}_n=r_n-1, \\ r_n, \\ r_n^2=r_n+n. \end{cases}$$

13. Рациональная и иррациональная составляющие золотых пропорций систематизируются в их собственных терминах.

14. Так следует ли, как обращено внимание в предисловии, в формулах гармонии делать перестановку слагаемых, $\bar{s}_{n_1} = \dfrac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{n^2+4}-n}{2}$ и т.п.? Можно и нужно, тем более, когда мы понимаем, что и какое место отводится этим показателям.

15. Оставим наши результаты без философских комментариев, заменив их напутствием: «Соприкоснувшись с Числом, научись обращаться со Словом».

«Вселенная как Троица имеет суть, основу и основание».
Физические основы Вселенной – это обобщенные законы физики,
основание Вселенной – ее характеристики как системы.
«А в чем же суть Вселенной? А суть ее тоже тройственна:
Все и Ничто, Вечность и Миг, Бесконечность и Ноль.
Суть за Пределом – что ее обсуждать?».
Н.А. Жук

***

Пусть всё останется строго математически без философского и мифологизированного абстрагирования.

В работе (статье) должна чувствоваться динамика. Статика и отсутствие чувства движения присущи материалу, изложенному в стиле справочника.

Недосказанная статья всегда остается работой в развитии.

Приложение 1. Определения видов чисел и числовых рядов

Приведем определения видов чисел и числовых рядов по материалам Википедии и иных распространенных энциклопедических и справочных источников.

Натуральные числа (*естественные числа*) (от лат. naturalis – естественный) – числа, возникающие естественным образом в процессе счёта как в смысле перечисления, так и исчисления. Множество всех натуральных чисел принято обозначать символом n (от лат. naturalis – естественный). Множество натуральных чисел является бесконечным. Не являются натуральными отрицательные и нецелые (рациональные, вещественные, …) числа. Ноль некоторые авторы включают в множество натуральных чисел, другие – нет.

Натуральный ряд чисел – последовательность всех натуральных чисел, расположенных в порядке их возрастания:

(0), 1, 2, 3, …, n, ….

Целые числа – расширение множества натуральных чисел n путем добавления нуля и отрицательных чисел вида $-n$:

…, $-n$, …, –3; –2, –1, 0, 1, 2, 3, …, n, ….

Рациональное число (лат. ratio – отношение, деление, дробь) – число, представляемое обыкновенной дробью $\frac{m}{n}$, где m–целое число, n–натуральное число, причем $n \neq 0$ кроме случая при $m = 1$ или $m = \infty$. Рациональные числа возникли из потребности оперировать частями целого.

Вещественное число (*действительное число*)– математическая абстракция, возникшая из потребности измерения геометрических и физических величин окружающего мира, а также проведения ряда операций, таких как извлечение корня, вычисление логарифмов, решение алгебраических уравнений. Вещественные числа предназначены для измерения непрерывных величин.

Иррациональное число – вещественное число, которое не является рациональным, то есть не может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m–целое число, n–натуральное число, причём $n \neq 0$ кроме случая при $m = 1$ или $m = \infty$.Иррациональное число может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Множество иррациональных чисел обычно обозначается заглавной латинской буквой $\mathbb{I}$ в полужирном начертании без заливки.

В настоящей работе иррациональные числа представлены ограниченной последовательностью цифр после запятой путем исключения старших разрядов для лучшей узнаваемости золотых констант, а не округления числа по правилам арифметики.

Обратное число (обратное значение, обратная величина) – число, на которое надо умножить данное число, чтобы получить единицу. Два числа, произведение которых равно единице, называются *взаимно обратными*.

Приложение 2. Основные характеристики больших золотых пропорций

Таблица 20

Основные характеристики квадратичных больших пропорций, где $A + a$ – целое, состоящее из большей части A и меньшей a

	Уравнение	Положит. корень	Сумма	Квадрат	Число u_n
ϕ	$\phi^2 - \phi - 1 = 0$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$	$\phi^2 = 1 + \phi$	$u_{k-2} + u_{k-1}$
r_n	$r_n^2 - r_n - n = 0$	$\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$	$r_n = 1 + \frac{n}{r_n}$	$r_n^2 = n + r_n$	$nu_{k-2} + u_{k-1}$
s_n	$s_n^2 - ns_n - 1 = 0$	$\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$	$s_n = n + \frac{1}{s_n}$	$s_n^2 = 1 + ns_n$	$u_{k-2} + nu_{k-1}$
f_n	$f_n^2 - nf_n - n = 0$	$\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2}$	$f_n = n + \frac{n}{f_n}$	$f_n^2 = n + nf_n$	$nu_{k-2} + nu_{k-1}$
a_n	$na_n^2 - a_n - 1 = 0$ $a_n^2 - \frac{a_n}{n} - \frac{1}{n} = 0$	$\frac{1+\sqrt{1+4n}}{2n}$	$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{na_n}$	$a_n^2 = \frac{1}{n} + \frac{a_n}{n}$	$\frac{u_{k-2}}{n} + \frac{u_{k-1}}{n}$
b_n	$nb_n^2 - b_n - n = 0$ $b_n^2 - \frac{b_n}{n} - 1 = 0$	$\frac{1+\sqrt{1+4n^2}}{2n}$	$b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{b_n}$	$b_n^2 = 1 + \frac{b_n}{n}$	$u_{k-2} + \frac{u_{k-1}}{n}$
c_n	$nc_n^2 - nc_n - 1 = 0$ $c_n^2 - c_n - \frac{1}{n} = 0$	$\frac{n+\sqrt{n^2+4n}}{2n}$	$c_n = 1 + \frac{1}{nc_n}$	$c_n^2 = c_n + \frac{1}{n}$	$\frac{u_{k-2}}{n} + u_{k-1}$

Продолжение таблицы 20

	Соотношения между целым и частями	Соотношения между частями и целым	Фрактальная дробь	Фрактальный корень
	6	7	8	9
ϕ	$\frac{A+a}{A} = \frac{A}{a}$	$\frac{A}{a} = \frac{A+a}{A}$	$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}$	$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$
r_n	$\frac{A+a}{A} = n\frac{A}{a}$	$\frac{A}{a} = \frac{1}{n} \cdot \frac{A+a}{A}$	$1 + \cfrac{n}{1 + \cfrac{n}{1 + \ldots}}$	$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}}$
s_n	$\frac{A+a}{A} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{A}{a}$	$\frac{A}{a} = n^2\frac{A+a}{A}$	$n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \ldots}}$	$\sqrt{1+n\sqrt{1+n\sqrt{1+\ldots}}}$
f_n	$\frac{A+a}{A} = \frac{1}{n} \cdot \frac{A}{a}$	$\frac{A}{a} = n\frac{A+a}{A}$	$n + \cfrac{n}{n + \cfrac{n}{n + \ldots}}$	$\sqrt{n+n\sqrt{n+n\sqrt{n+\ldots}}}$

a_n	$\frac{A+a}{A}=n\frac{A}{a}$	$\frac{A}{a}=\frac{1}{n}\cdot\frac{A+a}{A}$	$\frac{1}{n}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1}{n}+\cfrac{1}{1+\dots}}}$	$\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}+\dots}}}$
b_n	$\frac{A+a}{A}=n^2\frac{A}{a}$	$\frac{A}{a}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{A+a}{A}$	$\frac{1}{n}+\cfrac{1}{\frac{1}{n}+\cfrac{1}{\frac{1}{n}+\dots}}$	$\sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}\sqrt{1+\dots}}}$
c_n	$\frac{A+a}{A}=\frac{1}{n}\cdot\frac{A}{a}$	$\frac{A}{a}=n\frac{A+a}{A}$	$1+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{n+\dots}}}$	$\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\dots}}}$

Продолжение таблицы 20

	Доминанта
	10
ϕ	$\phi=1+\frac{1}{\phi}$; $\phi^2=1+\phi$; $u_{k-2}+u_{k-1}$; $\frac{A+a}{A}=\frac{A}{a}$; $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}$; $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$
r_n	$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\dots}}}$; $r_n^2=n+r_n$; $nu_{k-2}+u_{k-1}$
s_n	$s_n-n=\frac{1}{s_n}$; $u_{k-2}+nu_{k-1}$
f_n	$n+\cfrac{n}{n+\cfrac{n}{n+\dots}}$; $nu_{k-2}+nu_{k-1}$
a_n	$\frac{A}{a}=\frac{1}{n}\cdot\frac{A+a}{A}$
b_n	$b_n-\frac{1}{n}=\frac{1}{b_n}$; $b_n=\frac{1}{n}+\cfrac{1}{\frac{1}{n}+\cfrac{1}{\frac{1}{n}+\dots}}$
c_n	$\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\dots}}}$

Приложение 3. Соотношения между частями и целым для трех групп пропорций

Существует стройная система соотношений между частями и целым для трех групп пропорций, размещенных на строках таблицы 21 с индексами *r*, *s*, *f*.

Таблица 21

Соотношения между частями *A*/*a* и целым и большей частью (*A*+*a*)/*A*

Квадратичные пропорции		*p*-пропорции		*v*-пропорции	
ϕ	$\frac{A}{a}=\frac{A+a}{A}$	p_n	$\left(\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_n	$\sqrt[n]{\frac{A+a}{A}}$
r_n	$\frac{A}{a}=\frac{1}{n}\cdot\frac{A+a}{A}$	p_{r_n}	$\frac{1}{n}\left(\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_{r_n}	$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{A+a}{A}}$
s_n	$\frac{A}{a}=n\left(n\frac{A+a}{A}\right)$	p_{s_n}	$n\left(n\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_{s_n}	$n\cdot\sqrt[n]{n\frac{A+a}{A}}$
f_n	$\frac{A}{a}=n\frac{A+a}{A}$	p_{f_n}	$\left(n\frac{A+a}{A}\right)^n$	v_{f_n}	$\sqrt[n]{n\frac{A+a}{A}}$

Приложение 4. Арифметическое, геометрическое и гармоническое среднее

Гармония предполагает, в том числе, взаимодействие с прямыми и обратными величинами. Широко распространены несколько средних величин, особенно пифагорова тройка средних, которые приведем для двух величин параметров *a* и *b* [33]:

– среднее арифметическое $x = \frac{a+b}{2}$;

– среднее геометрическое $g = \sqrt{ab}$;

– среднее гармоническое $h = \frac{2ab}{a+b}$.

причем $x > g > h$.

Сумма двух чисел нормируется их средним значением до двух единиц:

$$\frac{a+b}{x} = 2.$$

Если среднее арифметическое и среднее геометрическое оперируют с прямыми величинами, то среднее гармоническое – с обратными.

Среднее гармоническое выражает обратную величину половины суммы обратных значений:

$$h = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Название среднего гармонического с ключевым словом «гармоническое» кем-то угадано впечатляюще, поскольку оно выражает обратную величину половины суммы обратных значений:

$$h = \frac{1}{\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}} = \frac{2}{\bar{a}+\bar{b}}.$$

Здесь можно иметь в виду, что если *a* и *b* периоды времени, то их обратные значения будут частотами, т.е. гармониками. Например, $T = a$; $\frac{1}{a} = \bar{a} = f = \frac{1}{T}$.

Частично возможно обратное утверждение – между величинами устанавливается гармония, когда их средняя определяется, исходя из вычисления обратных значений [34].

К тому же среднее гармоническое вобрало в себя признаки среднего арифметического в виде суммы $a+b$ и среднего геометрического в виде произведения *ab*.

Более того, среднее гармоническое двух величин равно произведению обратного значения среднего арифметического $1/x$ и обратного действия со средним геометрическим, а, именно, взятия его квадрата g^2 в противовес извлечению корня, т.е.

$$h = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{a+b}\left(\sqrt{ab}\right)^2 = \frac{1}{x}\cdot g^2.$$

Отсюда

$$g = \sqrt{xh}.$$

Т. е. среднее геометрическое двух чисел равно средней геометрической их средних арифметической и гармонической, что широко известно.

Пример. Пусть $a = 5$, $b = 45$, $a + b = 50$.

Вычислим средние:

$$x=\frac{5+45}{2}=25,\ g=\sqrt{5\cdot 45}=15,\ h=\frac{2\cdot 5\cdot 45}{5+45}=9.$$

Найдем среднее геометрическое средних арифметической и гармонической:

$$g=\sqrt{9\cdot 25}=15.$$

Здесь $x=25>g=15>h=9$.

Поскольку среднее геометрическое чисел равно средней геометрической их средних арифметической и гармонической, среднее геометрическое в этом плане более фундаментально по сравнению с двумя другими средними, отчего среднее геометрическое и темпы роста в геометрической прогрессии нашли широкое распространение во многих областях знаний.

Подтверждением этому известному факту является и сама золотая пропорция как отношение

$$\frac{A}{a}=\frac{A+a}{A},\ A^2=a(A+a),$$

$$A=\sqrt{a(A+a)}.$$

Т. е. большая часть A отрезка $A+a$, разделенного в золотой пропорции, представляет собой среднее геометрическое между малой частью a и всем отрезком $A+a$.

Средние значения для n различных величин $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ определяются известными формулами:

– среднее арифметическое $\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} x_i$;

– среднее геометрическое $\sqrt[n]{\prod_{i=2}^{n} x_i}$;

– среднее гармоническое $$\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}}{n}}=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots\frac{1}{x_n}}.$$

Источники

1. *Аракелян Г.Б.* Математика и История Золотого Сечения. – Национальная Академия Наук Армении, 2013. – 396 с. – (Электронный вариант книги, значащейся на правах рукописи, автор направил своим коллегам-единомышленникам).

2. *Балакшин О.Б.* Коды да Винчи – новая роль в естествознании? Неожиданное о золотом сечении: Гармония асимметричных подобий в Природе. – М.: КомКнига, 2005. – 112 с.

3. *Василенко С.Л., Никитин А.В.* От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17972, 07.04.2013. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

4. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 272 с., с.61-65. – http://lib100.com/book/Gnomon. – (На англ. яз. 1999 г.).

5. *Жук Н.А.* Новая стационарная модель вселенной как отражение обобщенных законов физики // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 18484, 02.02.2014. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162257.htm.

6. *Сороко Э.М.* Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: Введение в общую теорию гармонии систем. Изд. 2-е. – М.: КомКнига, 2006. – 264 с. – (Первое издание 1984 г.).

7. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

8. *Татаренко А.А.* На пороге первого тысячелетия эры полигармонии Мира // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 12658, 04.12.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320005.htm.

Татаренко А.А. На пороге первого тысячелетия Эры Полигармонии Мира. Сборник докладов на Международной Конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве». Винница, Украина, 2003.

9. *Шенягин В.П.* Доминанты пропорций и последовательностей / INTERMATIC-2005 // Материалы Международной научно-технической конференции «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения», 25-28 октября 2005 г., г. Москва. – М.: МИРЭА, 2006, часть 2. – 284 с., с. 31-40.

10. *Шенягин В.П.* Дробные *f*-пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17213, 13.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322120.htm.

11. *Шенягин В.П.* Законы мироздания // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17963, 30.03.2013. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02021156.htm.

12. *Шенягин В.П.* Корневые *r*-пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17112, 17.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322086.htm.

13. *Шенягин В.П.* Нуль (ноль): число, функция, образ, проявление и систематизация // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 16504, 03.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161828.htm.

14. *Шенягин В.П.* Оптимальность в гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17967, 03.04.2013. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321266.htm.

15. *Шенягин В.П.* Пифагор, или Каждый создает свой миф. Философское эссе / Ежемесячный литературный журнал Союза писателей Молдовы «Кодры. Молдова литературная». – Кишинев, Кодры. Молдова литературная, 1997, № 9-10. – 288 с., с. 204-227.

16. *Шенягин В.П.* «Пифагор, или Каждый создает свой миф» – четырнадцать лет с момента первой публикации о квадратичных мантиссовых s-пропорциях // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17031, 27.11.2011. –

http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322050.htm.

17. *Шенягин В.П.* Процессы, порождающие гармонию // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17337, 28.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321243.htm.

18. *Шенягин В.П.* Проявления гармонии в экономике / «Экономический журнал», 2013 г., № 2(30); РГГУ. – М.: Издательство «Каллиграф», 2013. – 136 с., с. 30-46.– Тир. 1500 экз.– (Рецензируемый научный журнал из перечня ВАК).

19. *Шенягин В.П.* Сигналы золотой пропорции // Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: Цифровая обработка сигналов и ее применение. 6-я Международная конференция и выставка. Вып. VI-2. – М.: 2004. – с. 224-231.

20. *Шенягин В.П.* Системы пропорций и их использование при формировании сигналов / Международная научно-техническая конференция к 100-летию со дня рождения В.А. Котельникова: Москва, 21-23 октября 2008 г.: Тезисы докладов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 176 с., с. 43-45.

21. *Шенягин В.П.* Сущность чисел и их взаимосвязь с золотой *ф*-пропорцией. Intermatic-2004: Материалы Международной научно-практической конференции «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения», Москва, 7-10 сент., 2004. Ч. 2. – М.: Изд-во МИРЭА; Изд-во ЦНИИ «Электроника», 2004, с. 26-31.

22. *Шенягин В.П.* Системы пропорций и их использование при формировании сигналов / Международная научно-техническая конференция к 100-летию со дня рождения В.А. Котельникова: Москва, 21-23 октября 2008 г.: Тезисы докладов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 176 с., с. 43-45.

23. *Шенягин В.П.* Тектоника чисел: анализ и синтез // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17793, 19.12.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162042.htm.

24. *Шенягин В.П.* Триада инверсии в основах мироздания // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 18427, 07.01.2014. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0001/005a/00011319.htm.

25. *Шенягин В.П.* Фактор числа // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 18014, 02.05.2013. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162113.htm.

26. *Шенягин В.П.* Эволюция экономической теории и ростки гармонии (часть 1) / «Экономический журнал», № 4(32), 2013; РГГУ. – М.: Издательство «Каллиграф», 2013. – 178 с., с. 25-40. – Тир. 1500 экз. – (Рецензируемый научный журнал из перечня ВАК).

27. *Шенягин В.П.* Эволюция экономической теории и ростки гармонии (часть 2) / «Экономический журнал», № 1(33), 2014; РГГУ. – М.: Издательство «Каллиграф», 2014. – 160 с., с. 36-53. – Тир. 1500 экз. – (Рецензируемый научный журнал из перечня ВАК).

28. *Шенягин В.П.* *s*-пропорции и сигналы / Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: Научная сессия, посвященная Дню радио. Выпуск: LXI, 17-18 мая 2006 г., г. Москва. – М.: 2006. – 394 с., с. 390-393.

29. *Vera W. de Spinadel*, From the Golden Mean to Chaos, Nueva Libreria (1998), second edition Nobuko (2004).

Vera W. de Spinadel. The metallic means family and forbidden symmetries the metallic means family and forbidden symmetries // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 12603, 18.11.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320033.htm.

30. *Ясинский С.А.* Прикладная «золотая» математика и ее приложения в электросвязи. – М.: Горячая линия-Телеком. – 239 с.

31. 07.04-13А.26. Сущность чисел и их взаимосвязь с золотой *ф*-пропорцией. Шенягин В.П. Intermatic-2004: Материалы Международной научно-практической

конференции «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения», Москва, 7-10 сент., 2004. Ч. 2. – М.: Изд-во МИРЭА; Изд-во ЦНИИ «Электроника», 2004, с. 26-31. Библ. 7. Рус. – М.: РАН, Всероссийский институт научной и технической информации (ВИНИТИ), Реферативный журнал, 13. Математика. Сводный том. 4, 2007. – с. 6.

32. *Сергиенко П.Я.* «Сакральный треугольник» Платона как математический объект гармоничной Вселенной // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 18697, 20.03.2014. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162279.htm.

33. *Мартыненко Г.Я.* Степенные средние в теории золотого сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 14652, 05.12.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321076.htm.

34. *Владимиров В.Л., Стахов А.П.* Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 16523, 22.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm.

Шенягин Виктор Павлович

Рациональная и иррациональная составляющие золотых пропорций

Научное издание

Опубликовано в авторской редакции

Компьютерная верстка автора

Москва
Академия тринитаризма
Институт золотого сечения

2014