Черепанов О.А.

КОНВЕРСИЯ И СВЯЗЬ ЧИСЕЛ ФИДИЯ И НЕПЕРА

Неперово число e = 2.719…, принятое основанием натуральных логарифмов, фигурирует в функциях $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, связанных квадратично выражением равнобочной гиперболы *Б*) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1^2$ с асимптотами $y = x$ и $y = -x$. И тот же аргумент $x \ge 0$ задает гиперболу *А*) $y = x^{-1}$ с асимптотами $y = 0$ и $x = 0$. (*Рис.* 1.) При этом сходные линии (*А*) и (*Б*) пересекаются в точке $M\,(x_M, y_M)$ декартовой плоскости, где $x_M = \operatorname{ch} m = m^{-1}$ и $y_M = \operatorname{sh} m = m$. Как видно, координаты x_M и y_M взаимно обратны, а m, как число, кажущееся единственным неизвестным, требует определения.

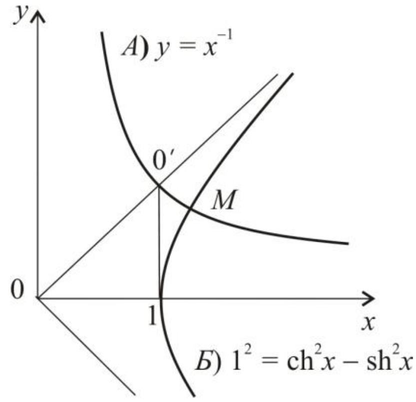

Рис. 1.

Ясно, что $\operatorname{sh} m \cdot \operatorname{ch} m = 1$ для точки M, а уменьшаемое и вычитаемое в тождестве $\dfrac{\operatorname{ch} m}{\operatorname{sh} m} - \dfrac{\operatorname{sh} m}{\operatorname{ch} m} = 1^2$ взаимно обратны. И зная, что $\operatorname{ch} m = \dfrac{e^m + e^{-m}}{2}$ и $\operatorname{sh} m = \dfrac{e^m - e^{-m}}{2}$ из $\operatorname{sh} m \cdot \operatorname{ch} m = 1$ получим $e^{2m} - e^{-2m} = 4$, где $e^{2m} = \varphi^{-3}$ и $e^{-2m} = \varphi^3$ взаимно обратны, а φ = 0.618… - число Фидия, такое, что $\varphi^{-3} - \varphi^3 = 4$, тогда как $\operatorname{cth} m - \operatorname{th} m = \varphi^{-1} - \varphi^1 = 1^2$, где φ^{-1} и φ^1 взаимно обратны. Причем $m = \ln\sqrt{\varphi^{-3}}$, откуда $e^{-2m} = \varphi^3$, что выражает связь скаляров φ и e через число m =0.721…

Но кроме того, $\operatorname{th} m = \dfrac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}} = \dfrac{1 - e^{-2m}}{1 + e^{-2m}} = \dfrac{1 - \varphi^3}{1 + \varphi^3} = \varphi^1$. При этом $\dfrac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3} = \varphi^1 \Leftrightarrow \varphi^3 = \dfrac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1}$, что надо понимать как конверсию чисел φ^1 и φ^3, понятие которой распространяется на дробно-линейную (гиперболическую) функцию $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, при $0 \le x \le 1$ формализующую симметричную дугу равнобочной гиперболы $y = x^{-1}$ с вершиной $0'$ в качестве серединной точки при $0 \le y \le 1$.

Кривую $y = x^{-1}$ вместе с метками $M\,(m^{-1}, m)$ и $0'\,(1, 1)$ сместим по оси x на $-(2-\sqrt{2})$ и на столько же опустим по оси y. В итоге гипербола $y = x^{-1}$ пересечет оси x и y в точках (0, 1) и (1, 0), а точки M и $0'$ получат координаты $(m^{-1} - (2-\sqrt{2}),\, m - (2-\sqrt{2}))$ и $(\sqrt{2}-1,\ \sqrt{2}-1)$ соответственно.

Головную часть линии $y = x^{-1}$ с уравнением $y = \dfrac{1-x}{1+x}$, где $0 \le x \le 1$, назовем дугой конверсии, имея в виду связь переменных x и y вида $\dfrac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \dfrac{1-y}{1+y}$. Ясно, что x и y принимают значения $c \in [1, 0)$ и $d \in [0, 1)$, конверсивные по определению $\dfrac{1-d}{1+d} = c \Leftrightarrow d = \dfrac{1-c}{1+c}$. И понятно, что скаляры $1 - d$ и $1 + d$ – это числа $a \in [1, 0)$ и $b \in [1, 2)$, контрсимметричные относительно единицы $1 = \dfrac{a+b}{2}$, откуда $2 = a + b$. Причем $2 = (1 + c)(1 + d) = (1 + c^{-1})(1 - d)$, где смена знака перед числом-отклонением d предполагает инверсию числа-отношения c.

Таким образом, действительные числа 1, a, b, c, d, 2 из множества от 0 до 2 принадлежат секстетной структуре ✧ 1 \ a \ b \ c \ d \ 2 ✧ общего вида \ ✧ \, а дугу конверсии составляют точки A (c, d) с абсциссой $c = x$ и ординатой $d = y$, среди которых выделяются степени 1 и 3 числа Фидия φ. (*Рис.* 2.) Причем число $c = \varphi^3$ по значению совпадает с e^{-2m}, где e – число Непера. Тем самым через скаляр $m = 0.721\ldots$, такой, что $\operatorname{th} m = \varphi$, утверждена связь $\varphi^3 = e^{-2m}$ чисел $\varphi = 0.618\ldots$ и $e = 2.718\ldots$ При этом целое число $2 = a + b = (1 + c)(1 + d) = (1 + c^{-1})(1 - d)$ является особым, так как не все его свойства до сего времени известны. Например, понятие секстетной структуры множества от 0 до 2 сформулировано впервые, а примечательной связи единицы и двойки $\sqrt{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{\sqrt{2} \pm 1}$ сопутствует равенство $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

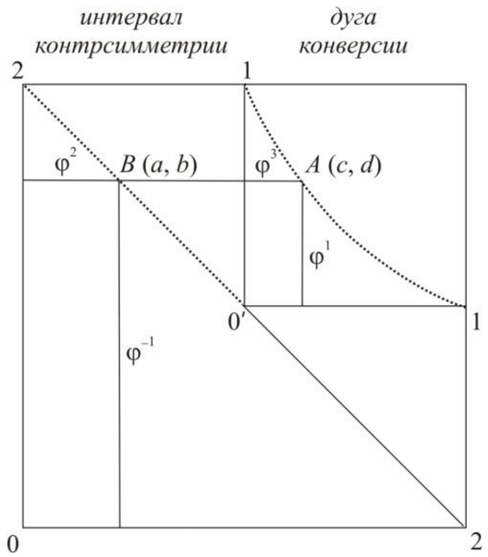

Рис. 2.

Но если число Непера играет выдающуюся роль в математическом анализе, то константа Фидия важна для теории системных чисел, аксиомы и первые теоремы которой представлены ниже.

Итак, числовой секстет \ ✧ \ общего вида ставит в соответствие каждой точке A (c, d) дуги конверсии определенную точку B (a, b) интервала контрсимметрии, представленного половиной диагонали квадрата 2 × 2. При этом на дуге конверсии есть точка A с характеристиками $c = \varphi^3$ и $d = \varphi^1$, а соответствующую ей точку B интервала контрсимметрии характеризует пара чисел $a = \varphi^2$ и $b = \varphi^{-1}$, отличающихся от действительных принадлежностью к другой числовой системе.

В тех же декартовых координатах на плоскости заданы равнобочные гиперболы A) $y = x^{-1}$ и $Б$) $1 = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x$, разные как по форме, так и по формуле. И при условии $x \geq 0$ их общая точка M имеет координаты $x = m^{-1}$ и $y = m$, где $m = \ln\sqrt{\varphi^{-3}} = 0.721\ldots$, что отвечает алгебраическим связям $e^{2m} = \varphi^{-3}$ и $e^{-2m} = \varphi^3$ числа Фидия $\varphi = 0.618\ldots$ с числом Непера $e = 2.719\ldots$ При этом $\operatorname{th} m = \varphi$.

Уравнению $x^2 - y^2 = 1^2$ параболы ($Б$), где $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$, сообщим параметрическую форму, принимая $x = t$ и $y = f(t)$, где $t = 2S$ – площадь криволинейного треугольника $0KL$. При этом расстояние от точки L до оси симметрии кривой $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1^2$ выражает функция $y = \operatorname{sh} t$, неизменная при повороте линии $y = f(t)$ в положение, когда оси x и y будут ее асимптотами, а оси симметрии гипербол (A) и ($Б$) совпадут с биссектрисой первого квадранта декартовых координат.

Оказывается, что точки K и L пересечения кривых (A) и ($Б$) с осями симметрии на линии $y = x$ имеют координаты (e^{-1}, e^{+1}) и (e^{+1}, e^{-1}). Причем 1) $e^{+1} + e^{-1} = 2\operatorname{ch} t$ и 2) $e^{+1} - e^{-1} = 2\operatorname{sh} t$, если $t = 1$. Но этому противоречат геометрические построения на плоскости. (*Рис.* 3.) Ведь сумма ch 1 + sh 1, алгебраически равная e^{+1}, в геометрии является диагональю квадрата $e \times e$ и по теореме Пифагора равна $e\sqrt{2}$. И по той же теореме для гипотенуз $e^{+1}+e^{-1}$ и $e^{+1}-e^{-1}$ при катетах ch 1 и sh 1 с точками L и K, удаленными от сторон квадрата на e^{-1}, следует $(e^{+1}+e^{-1})^2 = 2\,\mathrm{ch}^2 1$ и $(e^{+1}-e^{-1})^2 = 2\,\mathrm{sh}^2 1$, откуда 1*) $e^{+1}+e^{-1} = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,1$ и 2*) $e^{+1}-e^{-1} = \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,1$. И хорошо видно, что формы (1) и (2) при t = 1 и формулы (1*) и (2*) отличаются множителями 2 и $\sqrt{2}$ в правых частях при одинаковых левых.

Таким образом, числовые значения ch 1 = 1.543… и sh 1 = 1.175… по константе Непера не поддерживаются графическими построениями, что выглядит парадоксом, обнажающим конфликт между геометрией и алгеброй, произросший на поле гиперболической тригонометрии. Иначе говоря, теорема Пифагора при t = 1 противоречит определению функций ch t и sh t посредством числа e^{+1} = 2.718… и обратного ему скаляра $\pm e^{-1}$ как отрезков, заданных в осях x и y с масштабной единицей 1^1.

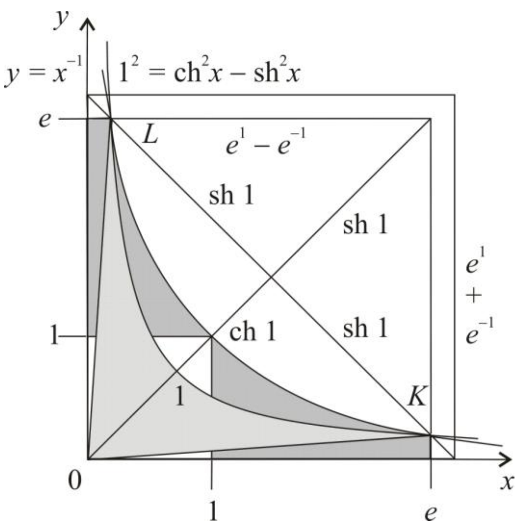

Рис. 3.

И действительно, на рис. 3 видно, что отрезки $e^{+1}+e^{-1}$ и $e^{+1}-e^{-1}$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами ch 1 и sh 1 соответственно. Однако теорема Пифагора не является способом расчета данных треугольников по причинам, указанным выше. Обнаруженное рассогласование назовем геометро-алгебраическим парадоксом.

Заметим, что дуга LK гиперболы (*Б*) и отрезки $0K$ и $0L$ ограничивают площадь $2S = 1^2$, а площадь между дугой LK линии (*A*) и осями координат, замкнутая перпендикулярными к ним отрезками длиной e^{-1}, равна трем единичным квадратам. (*Рис*. 4.)

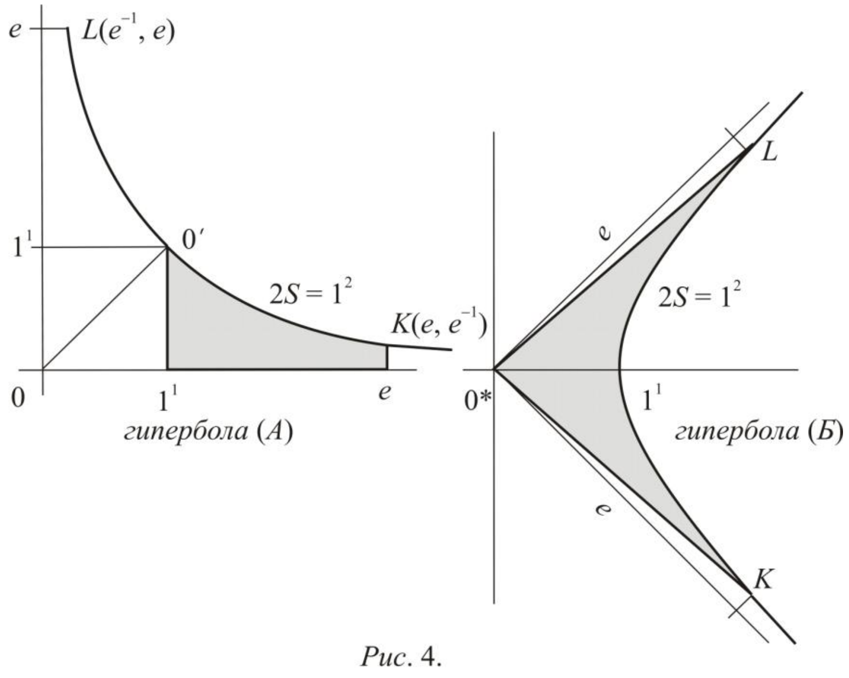

Рис. 4.

По таблице с результатами тригонометрических преобразований ch и sh чисел-площадей 1 и 2 выделим структуру, указывающую направление дальнейших исследований.

Бинарное выражение	Значение бинарного выражения	Сочетание значений бинарных выражений
ch 1 + sh 1 ch 1 – sh 1	e^{+1} e^{-1}	$e^{+1} + e^{-1} = 2\text{ch } 1$ $e^{+1} - e^{-1} = 2\text{sh } 1$
$\text{ch}^2 1 + \text{sh}^2 1$ $\text{ch}^2 1 - \text{sh}^2 1$	$\dfrac{e^{+2} + e^{-2}}{2}$ 1	$\dfrac{e^{+2} + e^{-2}}{2} = \text{ch } 2$ $e^{+1} \cdot e^{-1} = (\text{ch } 1 + \text{sh } 1)(\text{ch } 1 - \text{sh } 1)$
ch 2 + sh 2 ch 2 – sh 2	e^{+2} e^{-2}	$e^{+2} = (\text{ch } 1 + \text{sh } 1)^2$ $e^{-2} = (\text{ch } 1 - \text{sh } 1)^2$
$\text{ch } 2 = \dfrac{e^{+2} + e^{-2}}{2}$ $\text{sh } 2 = \dfrac{e^{+2} - e^{-2}}{2} = \dfrac{e^{+1} + e^{-1}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{e^{+1} - e^{-1}}{\sqrt{2}} \times \dfrac{2}{2} = 2\,\text{ch}\,1 \cdot \text{sh}\,1$		

Заметим, что $\dfrac{\text{ch}\,2 - 1}{\text{ch}\,2 + 1} = \dfrac{2\,\text{sh}^2 1}{2\,\text{ch}^2 1} = \text{th}^2 1$. Причем $\dfrac{1 + \text{th}^2 1}{1 - \text{th}^2 1} = \text{ch}\,2$ и можно говорить о взаимной замене чисел ch 2 = 3.762… и $\text{th}^2 1$ = 0.580… со сменой знаков в числителе и в знаменателе на противоположные. Как видно, конверсии сопутствует инверсия. Причем в случае sh 2 = 2ch 1 · sh 1 принятые выражения 1) $e^{+1} + e^{-1} = 2\,\text{ch}\,1$ и 2) $e^{+1} - e^{-1} = 2\,\text{sh}\,1$ функций sh и ch получаются умножением произведения неприемлемых значений 1*) $\dfrac{e^{+1} + e^{-1}}{\sqrt{2}}$ и 2*) $\dfrac{e^{+1} - e^{-1}}{\sqrt{2}}$ на единицу 1 = $\dfrac{2}{2}$, что результативно, однако странно.

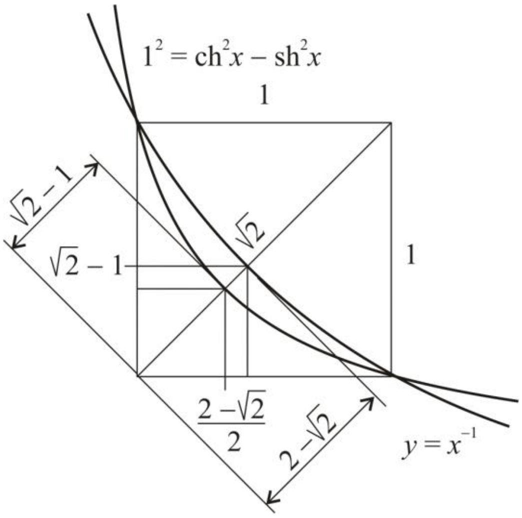

Рис. 5.

Особую роль иррационального числа $\sqrt{2}$, как множителя, теряемого при размещении симметричных дуг равнобочных гипербол (*А*) и (*Б*) внутри квадрата $e \times e$, подчеркивает случай пересечения данных линий в вершинах квадрата 1 × 1 на его диагонали. (*Рис*. 5.)

Головные дуги гипербол (*А*) и (*Б*) окажутся в единичном квадрате после переноса этих линий вдоль их осей симметрии в положение, когда они пересекают оси абсцисс и ординат в точках (1, 0) и (0, 1) соответственно. При этом вершина кривой $y = x^{-1}$ переместится из точки (1, 1) в точку ($\sqrt{2} - 1$, $\sqrt{2} - 1$), а вершина линии $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$ окажется в точке $(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2})$ на расстоянии $\sqrt{2}-1$ от начала координат. Причем сравнение отличающихся на $3-2\sqrt{2}$ расстояний от начала координат до вершин пересекающихся гипербол, дает выражение $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}$, подобное равенству $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$. То есть, тождество $\frac{2\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pm1}=\sqrt{2}$ безразлично к смене знаков и к перемножению дробей $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ и $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ с оппозитным расположением «+» и «–». И кроме того, единица и число $\sqrt{2}$ связаны интересным тождеством $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=6=1+2+3=1\cdot2\cdot3$.

Итак, аргументом функции *Б*) $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1^2$ служит площадь $t = S_{0LK}$ между отрезками $0L$, $0K$ и симметричной дугой LK равнобочной гиперболы с асимптотами-биссектрисами первого и четвертого квадрантов декартовых координат, а гипербола *А*) $y = x^{-1}$ при положительных x и y имеет асимптотами оси абсцисс и ординат. При этом площади между линиями (*А*), (*Б*) и их асимптотами беспредельны, но не равны и после поворота гиперболы (*Б*) вокруг начала координат на половину прямого угла против часовой стрелки сохраняют свою бесконечность. Таким образом, на графиках равнобочных гипербол (*А*) и (*Б*), сведенных в один квадрант, есть две единицы – первостепенная 1^1 (как масштаб осей) и второстепенная 1^2 (как масштаб площади).

Квадроединицу 1^2 в формуле (*Б*) представим в виде $1^2=(\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t)(\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t)$ и заметим, что $\frac{\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}=\frac{1-\operatorname{th} t}{1+\operatorname{th} t}=e^{-2t}$, откуда $\operatorname{th} t=\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$. И это надо рассматривать как конверсивную связь $\frac{1-\operatorname{th} t}{1+\operatorname{th} t}=e^{-2t}\Leftrightarrow \operatorname{th} t=\frac{1-e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$ чисел $e^{-2t}\in[1^2,0)$ и $\operatorname{th} t\in[0,\ 1^*)$ для всех значений $t\ge0$. При этом $(\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t)^{-1}=\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t$, что означает взаимную обратимость (инверсивность) сомножителей квадроединицы 1^2, после деления на $\operatorname{ch} t$ принимающих числовые значения $a=1^2-\operatorname{th} t=1^2-d$ и $b=1^2+\operatorname{th}\ t=1^2+d$, равноотстоящие (контрсимметричные) по числу-отклонению $\mp d\in[0,1^*)$ от 1^2.

Как видно, скаляры $a\in[1^2,\ 0)$, $b\in[1^2,\ 2^*)$, $c\in[1^*,\ 0)$ и d квадратичны, включая число 2*, такое, что $2^* = a + b$ и $2^* = (1 + c)(1 + d) = (1 + c^{-1})(1 - d)$, где a, b, c и d – взаимозависимые переменные, объединенные в секстетную структуру \ ✧ \ (*см. выше*). Причем $c=e^{-2t}$ и $d = \operatorname{th} t$. А это значит, что данная структура использует тригонометрические характеристики точек равнобочной гиперболы *Б*) $\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1^2$, тогда как дугу конверсии составляют точки $A(c,\ d)$ головного участка кривой *А*) $y = x^{-1}$ между точками (1, 0) и (0, 1) ее пересечения с осями x и y. Ведь вершина данной кривой удалена от каждой из осей на расстояние $d=\frac{1-d}{1+d}=\sqrt{2}-1$, вычисляемое как первый корень квадратного уравнения $d^2 + 2d - 1 = 0$, получаемого из определения конверсии $\frac{1-d}{1+d} = c \Leftrightarrow d = \frac{1-c}{1+c}$ при $c = d$.

А теперь рассмотрим конверсивные связи частного порядка, соответствующие значениям 1, 2 и $m = 0.721\ldots$ аргумента t как площади криволинейного треугольника $0LK$.

Выше показано, что $\operatorname{th}1 = \frac{1-e^{-2}}{1+e^{-2}} \Leftrightarrow \frac{1-\operatorname{th}1}{1+\operatorname{th}1} = e^{-2}$ и $\operatorname{th}^2 1 = \frac{1-\operatorname{ch}^{-1}2}{1+\operatorname{ch}^{-1}2} \Leftrightarrow \frac{1-\operatorname{th}^2 1}{1+\operatorname{th}^2 1} = \operatorname{ch}^{-1}2$, где $\operatorname{ch}2 = \frac{e^2+e^{-2}}{2}$. При этом $\operatorname{th}m = \frac{1-e^{-2m}}{1+e^{-2m}} \Leftrightarrow \frac{1-\operatorname{th}m}{1+\operatorname{th}m} = e^{-2m}$. А так как $\operatorname{th}m = \varphi^1$ и $e^{-2m} = \varphi^3$, то фактически существует штучная конверсия $\frac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3} = \varphi^1 \Leftrightarrow \varphi^3 = \frac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1}$. И если $\operatorname{th}^2 m = \varphi^2$, то дробь $\frac{1-\operatorname{th}^2 m}{1+\operatorname{th}^2 m}$ равна числу $5^{-0.5}$, что предполагает конверсию $\frac{1+\varphi^2}{1-\varphi^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \varphi^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ с инверсией.

Таким образом, гиперболическая функция th и неперово число e объединены структурой, определенной как числовой секстет ✧ 1 \ a \ b \ c \ d \ 2 ✧ с контрсимметричными элементами a и b и конверсивными составляющими c и d, выраженными числом φ в степенях 1, 2 и 3. При этом присутствует одиозный скаляр $\sqrt{5} = \varphi + \Phi = \Phi^2 - \varphi^2 = 2 + \varphi^3$, от которого можно избавиться. А теперь дополним определение числового секстета общего вида кое-какими сведениями и затем представим секстетные структуры из чисел Фибоначчи и Люка.

Уточним понятие секстетной структуры множества действительных чисел от 0 до 2, бинарно представляя двойку как $2 = a + b$, где слагаемые $a = 1 - d$ и $b = 1 + d$ связаны отношением порядка $0 < a \le b < 2$ и либо равны единице, либо контрсимметричны относительно нее с разницей $\mp d = \frac{b-a}{2}$, которую назовем числом-отклонением. При этом скаляр $c = \frac{a}{b} = \frac{1-d}{1+d}$ назовем числом-отношением. И в результате определений получим три бинарных представления двойки: аддитивное *а*) $2 = a + b$ и аддитивно-мультипликативные *б*) $2 = b\,(1 + c)$ и *в*) $2 = a\,(1 + c^{-1})$.

Таким образом, дробные числа $a \in (1,0)$, $b \in (1,2)$, $c \in (1,0)$ и $d \in (0,1)$ вместе с целыми 1 и 2 образуют секстет ✧1 \ a \ b \ c \ d \ 2✧, элементы которого связаны арифметическими операциями – адицией, субстракцией, мультипликацией и дивизией. При этом дивизные ($\frac{a}{b} = c$) члены a и b контрсимметричны, а числа c и d конверсивны, то есть взаимозаменимы: $\frac{1-d}{1+d} = c \Leftrightarrow d = \frac{1-c}{1+c}$.

Выражения (*б*) и (*в*) представим как $1 = \frac{2}{1+d} - c^{+1}$ и $1 = \frac{2}{1-d} - c^{-1}$, откуда сразу следует двойственность числа 1: при $d = 0$ оно определено дихотомией $2 = 1 + 1$, а при $d \to 1$, когда $a \to 0$ и $b \to 2$, предельная единица $\underline{1} = \infty - \infty$ из (*в*) сингулярна.

Геометрическая интерпретация секстета \✧\, содержащая интервал контрсимметрии и дугу конверсии (*см. рис.* 2), показывает связь абсциссы a и ординаты b точки B отрезка $0'2$, которой соответствует конверсия координат c и d связанной с B (a, b) точки A (c, d) дуги равнобочной гиперболы $c = \dfrac{1-d}{1+d}$ при $d \in (0,1)$. Убедимся, что данная дуга содержит точки, координаты которых определены отношениями чисел Фибоначчи и Люка, связанных рекурсивно.

<u>Т е о р е м а о ТОП-сходе.</u> Графическое представление секстетной структуры \✧\ содержит отдельные точки с координатами, отвечающими структурному единству рекурсивных рядов Фибоначчи 1, 1, 2, … F_N, … и Люка 1, 3, 2^2, …, L_N, … с общими элементами 1 и 3.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Известно, что ряды $\{F_N\}$ и $\{L_N\}$ с пронумерованными по N = 1, 2, 3, … членами сопряжены рекурсиями $F_N = F_{N+1} - F_{N-1}$ и $L_N = F_{N-1} + F_{N+1}$, откуда следует $\dfrac{F_N}{L_N} = \dfrac{1 - F_{N-1}/F_{N+1}}{1 + F_{N-1}/F_{N+1}}$, где $\dfrac{F_N}{L_N} = c_N$ – число-отношение, а $\dfrac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = d_N$ – число-отклонение. При этом дроби $1 - \dfrac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = a_N$ и $1 + \dfrac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = b_N$ контрсимметричны относительно единицы и, значит, $\underline{a}_N + b_N = 2$. (*Рис.* 6.) Причем $\dfrac{F_N}{L_N} = \dfrac{1}{1}$ при N = 1,

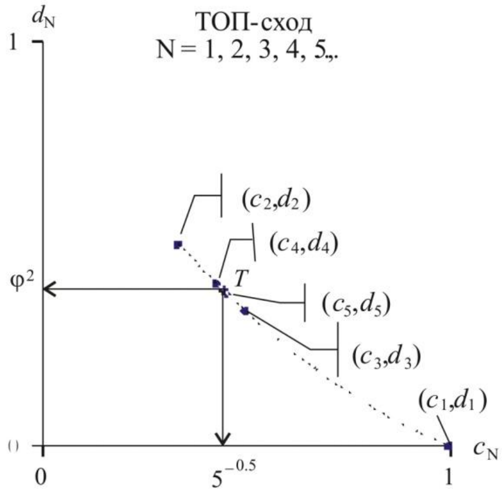

Рис. 6.

$\dfrac{F_2}{L_2} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{F_3}{L_3} = \dfrac{1}{2}$. А так как при N = 2 и N = 3 конверсии $\dfrac{1-d_N}{1+d_N} = c_N \Leftrightarrow d_N = \dfrac{1-c_N}{1+c_N}$ неразличимы, то их надо рассматривать как одну, не делая различий между числом-отношением и числом-отклонением. Это сужает круг поиска существенных фактов бинарной арифметики до операций с числами под номерами 1, 2 и 3.

Итак, ряды Фибоначчи 1, 1, 2, … F_N, … и Люка 1, 3, 2^2, …, L_N, … с одинаковыми членами 1 и 3 связаны секстетной структурой ♦ 1 \ a_N \ b_N \ c_N \ d_N \ 2 ♦, отличающейся от \✧\ дискретностью дробных элементов и тем, что точки симметричной дуги равнобочной гиперболы с координатами $c_N = \dfrac{1-d_N}{1+d_N}$ и $d_N = \dfrac{1-c_N}{1+c_N}$ стремятся к ее пункту T ($5^{-0.5}$, φ^2) сверху и снизу соответственно для четных и для нечетных номеров N = 1, 2, 3, ... Этот тип сходимости точек гиперболического распределения назовем ТОП-сходом.

<u>Т е о р е м а о СТЭП-спуске.</u> Представление структуры \✧\ графиком включает точки, координаты которых отвечают конверсии чисел $\underline{d}_N = (-1)^k \varphi^{2N}$ и $\underline{c}_N = \dfrac{F_N}{L_N}\sqrt{5}$.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Известно, что числа Фибоначчи и числа Люка связаны с числами Фидия φ = 0.618… и Φ = 1.618… формулами Бине $F_N = \dfrac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^N - (-1)^k \varphi^N]$ и $L_N = \Phi^N + (-1)^k \varphi^N$, где $k = 1$ при нечетных N и $k = 2$ при четных. Отсюда следует, что число-отношение c_N,

умноженное на $\sqrt{5}$, равно дроби $\dfrac{\Phi^N - (-1)^k \varphi^N}{\Phi^N + (-1)^k \varphi^N} = \dfrac{1-(-1)^k \varphi^{2N}}{1+(-1)^k \varphi^{2N}}$ с числителем и знаменателем, контрсимметричными относительно единицы. При этом знакопеременные числа-отклонения $\underline{d}_N = (-1)^k \varphi^{2N}$ и скаляры $\underline{c}_N = \dfrac{F_N}{L_N}\sqrt{5}$ связаны конверсией $\dfrac{1-\underline{c}_N}{1+\underline{c}_N} = \underline{d}_N \Leftrightarrow \underline{c}_N = \dfrac{1-\underline{d}_N}{1+\underline{d}_N}$. (*Рис.* 7.)

Заметим, что при четных N число $\underline{c}_N = \dfrac{F_N}{L_N}\sqrt{5}$ меньше единицы, а при нечетных больше нее. То есть, при перемене знака у числа-отклонения $\underline{d}_N = (-1)^k \varphi^{2N}$, вызывающей инверсию числа-отношения $\underline{c}_N$, дробные скаляры $\underline{a}_N = 1 - \underline{d}_N$ и $\underline{b}_N = 1 + \underline{d}_N$, такие, что $\dfrac{\underline{a}_N}{\underline{b}_N} = \underline{c}_N$, обмениваются позициями с контрсимметрией относительно единицы и при $N \to \infty$ скачкообразно приближаются к ней с соблюдением тождества $\underline{a}_N + \underline{b}_N = 2$. При этом особое число 2 равно произведению $(1+\underline{c}_N)(1+\underline{d}_N) = 2$ при четных N. А когда номер N нечетный, то для привязки этих точек к дуге конверсии следует воспользоваться обратными значениями $\underline{c}_N$. После этого гиперболическое распределение точек с ординатами $\underline{d}_N = \varphi^{2N}$ принимает вид стремления к конечному пункту *S* (1, 0) из начальной позиции *T* ($5^{-0.5}$, φ^2). Этот процесс представлен графически и назван СТЭП-спуском.

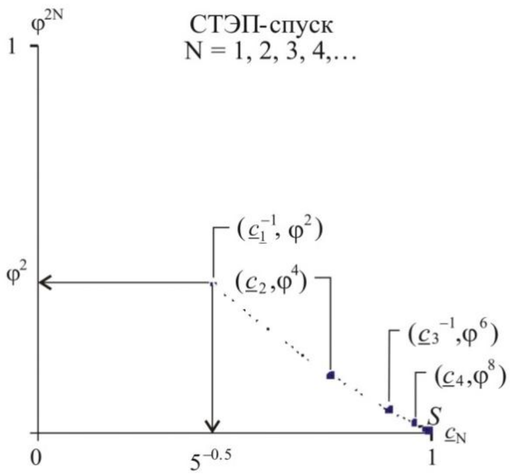

Рис. 7.

Отметим, что теоремы о ТОП-сходе и СТЭП-спуске выделяют точку *T* с абсциссой $5^{-0.5}$ и ординатой φ^2, где $\sqrt{5} = \varphi + \Phi = \Phi^2 - \varphi^2$, как сумма первых степеней фидиевых скаляров φ и Φ является числом первостепенным, а как разность их квадратов относится к числам второстепенным. И аналогичной двойственностью обладает число φ^3, равное разности $\varphi^1 - \varphi^2$, а также разности $(\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2$. Поэтому вычисление φ^3 не дает определенного знания о его порядке и является незавершенным. Но это лишь подтверждает бинарность арифметики системных скаляров, где сложение-адиция, вычитание-субстракция, умножение-мультипликация и деление-дивизия не ориентированы на результат и маскируют некую операцию с константой φ, которую предстоит найти. С этой целью выделим ряд общих свойств рекурсий Фибоначчи и Люка.

Ясно, что члены рядов $\{F_N\}$, $\{L_N\}$ и $\{\varphi^{2N}\}$ входят в структуры, подобные формальной организации множества действительных чисел от 0 до 2. При этом формы, объединяющие данные ряды, являются наборами ♦ $1 \backslash a_N \backslash b_N \backslash c_N \backslash d_N \backslash 2$ ♦ и ◊ $1 \backslash \underline{a}_N \backslash \underline{b}_N \backslash \underline{c}_N \backslash \underline{d}_N \backslash 2$ ◊ из шести чисел каждый. А общими чертами математических объектов \ ♦ \ и \ ◊ \ являются контрсимметрия членов *a* и *b* и конверсия составляющих *c* и *d*. Причем целые члены 1 и 2 секстетов \ ♦ \ и \ ◊ \ должно быть различны семантически.

Итак, конверсии $\frac{1-d_{\mathrm{N}}}{1+d_{\mathrm{N}}}=c_{\mathrm{N}} \Leftrightarrow d_{\mathrm{N}}=\frac{1-c_{\mathrm{N}}}{1+c_{\mathrm{N}}}$ и $\frac{1-\underline{c}_{\mathrm{N}}}{1+\underline{c}_{\mathrm{N}}}=\underline{d}_{\mathrm{N}} \Leftrightarrow \underline{c}_{\mathrm{N}}=\frac{1-\underline{d}_{\mathrm{N}}}{1+\underline{d}_{\mathrm{N}}}$ с рациональными ($c_{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{F_N}}{\mathrm{L_N}}$ и $d_{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{F_{N-1}}}{\mathrm{F_{N+1}}}$) и иррациональными ($\underline{d}_{\mathrm{N}}=(-1)^{\mathrm{k}}\varphi^{2\mathrm{N}}$ и $\underline{c}_{\mathrm{N}}=\frac{\mathrm{F_N}}{\mathrm{L_N}}\sqrt{5}$) членами, различны потому, что первая определяет точки (c_{N}, d_{N}) дуги конверсии при условии $c_{\mathrm{N}}\in(1, 0)$ и $d_{\mathrm{N}}\in(0, 1)$, тогда как точки ($\underline{c}_{\mathrm{N}}$, $\underline{d}_{\mathrm{N}}$) принадлежат этой кривой при четных N, а при нечетных, когда $\underline{c}_{\mathrm{N}} > 1$, следует брать значение первой координаты, обратное $\underline{c}_{\mathrm{N}}$. Только тогда точка с нечетным номером будет лежать на той же дуге.

Однако главным отличием двух конверсий является тот факт, что первая обходится без смены знаков в числителе и знаменателе конвертируемых дробей, которая свойственна второй. Поэтому первую конверсию назовем прямой, а вторую представим как конверсию с инверсией.

Равнобочные гиперболы *А*) $y=x^{-1}$ и *Б*) $\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1^2$, отличающиеся и геометрически и формально, впишем в ортогональные оси *x* и *y*, считая их асимптотами. Допустим, что головные дуги линий (*А*) и (*Б*) расположены в квадрате 1×1 по диагонали. При этом дуги *EF* кривых (*А*) и (*Б*) замкнуты основанием $EF=\sqrt{2}$ треугольника *E*0*F* и отрезают от него затененные сегментовидные части. (*Рис*. 8.) Причем остаток от $\Delta E0F$, обрезанного по кривой (*Б*), равен частному значению аргумента *t* в уравнении (*Б*). Найдем это значение геометрическими построениями и по расчету.

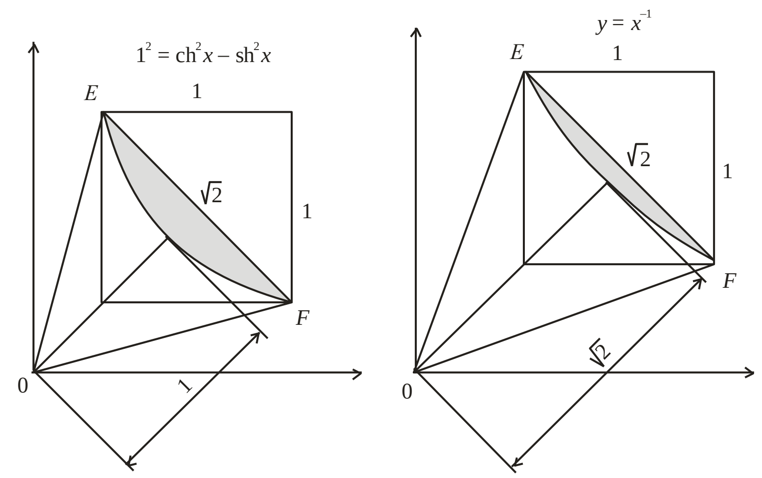

Рис. 8.

Ясно, что дуги EF_A и $EF_Б$ гипербол (*А*) и (*Б*), попавшие в кадр, делят площадь единичного квадрата на части, одна из которых включена в $\Delta E0F$. При этом площадь под дугой *EF* гиперболы (*А*) найдется интегрированием функции $y=\frac{1-x}{1+x}$ со свойством конверсии $\frac{1-x}{1+x}=y \Leftrightarrow x=\frac{1-y}{1+y}$ переменных *x* и *y*, таких, что $0\le x\le 1$ и $0\le y\le 1$. И по расчету искомая площадь малой части квадрата 1×1 составляет $2\,ln\,2-1 = 0.386\ldots$, что близко к $\varphi^2 = 0.381\ldots$ Поэтому можно считать, что дуга EF_A делит квадрат на части, примерно равные φ и φ^2, что сообщает числу Фидия смысл площади. А так как площадь $\Delta E0F_A$ равна $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+2(\sqrt{2}-1)\right]=2+2^{-1}-\sqrt{2}$, то $\Delta E0F_A$ с кривой стороной EF занимает площадь $(2+2^{-1}-\sqrt{2})-\left[2^{-1}-(2\,ln\,2-1)\right]$, так как в масштабе 1×1 затененный сегмент EF_A имеет площадь $2^{-1}-(2\,ln\,2-1)$. И если эту величину прибавить к половине квадрата 1×1, то в результате получим вторую часть от деления площади единичного квадрата надвое головной дугой EF гиперболы (*Б*), примерно равную числу Фидия 0.618… Но при этом главным объектом построений и вычислений является дуга конверсии EF_A.

Ясно, что лобовая часть гиперболы (*Б*), локализованная в квадрате 1×1, делит его площадь на две части, отличающиеся от половины контрсимметрично: $2^{-1}\pm S_c$. Здесь S_c – площадь сегмента гиперболы (*Б*), вычитание которой из площади $\sqrt{2}-2^{-1}$ равнобедренного $\Delta E0F_Б$ оставляет косоугольную фигуру с вершинами 0, E и F. При этом размер вычитаемого сегмента найдется с помощью интеграла функции ch t на интервале от 0 до sh t.

Понятно, что функция $\mathrm{sh}\,t$ ограничена значением $\frac{\sqrt{2}}{2}$, которому отвечает определенная величина t. Найти ее можно, вычислив площадь косоугольного треугольника $0EF_A$. Она равна $\sqrt{2}-2^{-1}-S_c$, где $S_c = 2\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\int\limits_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{ch}\,t\,dt-1\cdot t\right)\right]$. В итоге $t=0.621...\approx 0.618...=\varphi$.

Как видно, числа, близкие к скаляру Фидия, присутствуют в гиперболической геометрии, выражая площади, имеющие вид части единичного квадрата, разделенного надвое дугой EF_A, и выглядящую как площадь между дугой $EF_Б$ и отрезками $0E$ и $0F$. При этом существует число m = 0.721…, такое, что th m = 0.618…, тогда как th φ = 0.5498… Причем $e^{2m}=\varphi^{-3}$, что выражает подлинную связь скаляров Фидия и Непера.

А так как расстояние от точки 0 до вершины гиперболы (*Б*) равно единице, то через числа 1 и 2 можно выразить гиперболические синус и косинус «квадратного» аргумента t. Они равны $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и 1 + $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ соответственно. Отсюда $\mathrm{th}\,t=\frac{\mathrm{sh}\,t}{\mathrm{ch}\,t}=\frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}=0.5469...$ То есть, t = 0.6213… ≈ φ. Таким образом, частные расчеты с использованием числа 2 дают результаты, примерно равные скаляру Фидия.

Заметим, что отрезки $0E$ и $0F$ (*см. рис.* 8) при аргументе t = 1 функции *Б*) $\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1^2$ имеют длину $\sqrt{\mathrm{ch}^2(1)+\mathrm{sh}^2(1)}=\sqrt{2.3811...+1.3811...}$, равную корню квадратному из суммы двух чисел с одинаковой дробной частью, значение которой весьма близко к числу Фидия φ = 0.6180… в квадрате и отличается от единицы на 0.6189... Понятно, что близость величин $\mathrm{ch}^2(1)$ и $\mathrm{sh}^2(1)$ к числам $2+\varphi^2$ и $1+\varphi^2$ не может не удивлять и требует внимания. Тем более, что число под корнем почти равно $4-\varphi^3$, тогда как $4+\varphi^3=\varphi^{-3}$.

Кроме того, выражение $\sin X=(1+\mathrm{cth}^2(1))^{-0.5}$, где X – площадь сектора окружности единичного радиуса с центром 0, ограниченной ее дугой и выделенной направлениями $0E$ и $0F$ (*см. рис.* 8) почти равна числу $e^{-0.5}$ = 0.606…, что также настораживает.

Итак, в гиперболической тригонометрии выделяются контрсимметричные скаляры $a=1^2-\mathrm{th}t=1^2-d$ и $b=1^2+\mathrm{th}t=1^2+d$, где число-отклонение $d=\mathrm{th}\,t$ связано с числом-отношением $c = e^{-2t} = \frac{1^2 - d}{1^2 + d}$ прямой конверсией. При этом на дуге конверсии (*см. рис.* 2) есть точки (d = φ^{+1}, $c = \varphi^3$) и $T\,(5^{-0.5}, \varphi^2)$ с координатами из целых степеней числа Фидия.

А теперь представим аксиоматическую систему, где роль иррационального числа φ = 0.618…, второго в последовательности {2^{-1}; 0.618…; …; s_N; …; $\underline{1}$}, первостепенна.

Вещественные числа s_N и S_N, обеспечивающие тождества $s^1 + s^N = S^1 - s^{N-1} = S^N - S^{N-1} = 1$, назовем системными. При этом скаляры s_N и S_N зависят от N = 1, 2, 3, … и образуют последовательности s = {2^{-1}; 0.618…; …; s_N; …} и S = {2; 1.618…; …; S_N, …}, где $S_N = s_N^{-1}$.

СИСТЕМНЫЕ ЧИСЛА ДЛЯ N = 1 ÷ 7

N	1	2	3	4	5	6	7	…	∞
s_N	0.5	0.618…	0.682…	0.725…	0.778…	0.797…	0.812…	…	$\underline{1}$
S_N	2	1.618…	1.465…	1.380…	1.324…	1.285…	1.255…	…	$\underline{1}$

В таблице приведены значения системных чисел как первичных понятий теории [1, 2].

Под аксиомами теории системных чисел будем понимать представления единицы $1^1 = 2^{-1} + 2^{-1}$ и двойки $2 = 1^* + 1^*$ дихотомиями при N = 1, а при N = 2 диарезисами $1 = \varphi^1 + \varphi^2$ и $2 = \varphi^{-1} + \varphi^2$, связанными инверсией первого слагаемого. При этом единицы 1^1 и 1* формально отличаются вдвое: $1^* = 2\cdot 1^1$. Таким образом, аксиомами теории являются формы представления целых чисел – единиц и двоек, отличающиеся бинарностью – дихотомией и диарезисом.

Определим единицу $\underline{1}$ как конечный элемент множеств {s_N} и {S_N}, отвечающий N = ∞. Тогда сохранение арифметического смысла тождеств $s^1 + s^N = 1^1$ и $S^1 - s^{N-1} = 1^1$ при $s_\infty = S_\infty = \underline{1}$ потребует удвоения определенных членов неравенств $\underline{1} + (\underline{1})^{\infty-1} = 1^1$ и $\underline{1} - (\underline{1})^{1-\infty} = 1^1$, что соответствует аксиоме о единицах, отличающихся множителем 2. При этом элемент $\underline{1}$ рядов s = {2^{-1}; 0.618; …; s_N, …; $\underline{1}$} и S = {2; 1.618…; S_N, …; $\underline{1}$} отвечает N = ∞ и является сингулярным.

<u>Т е о р е м а о неслучайной субстракции.</u> Всем числам s = {2^{-1}; 0.618…; …; s_N; …} и S = {2; 1.618…; …; S_N; …} системных последовательностей {s_N} и {S_N} свойственна связь $s^1 - s^2 = s^{N+1}$ и $S^2 - S^1 = S^{2-N}$ первой и второй степеней через вычитание-субстракцию.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Обычные единицы $1 = s^1 + s^N$ и $1 = S^1 - s^{N-1}$ умножим на s^1 и S^1 соответственно, а полученные равенства $s^1 - s^2 = s^{N+1}$ и $S^2 - S^1 = s^{N-2}$ представим как отношение $\frac{s^1 - s^2}{S^2 - S^1}$, равное s^3 и обратное скаляру $S^3 = \frac{S^2 - S^1}{s^1 - s^2}$. Причем двучлен $s^1 - s^2$ принимает вид $S^2 - S^1$ после умножения на S^3. Напротив, форма $S^2 - S^1$ обращается в $s^1 - s^2$ умножением на s^3.

Как видно, связь через вычитание $s^1 - s^2 = s^{N+1}$ и $S^2 - S^1 = S^{2-N}$ первой и второй степеней членов последовательностей {s_N} и {S_N} не является случайной. Причем субстракция (разность) степеней 1 и 2 числа φ, а также их квадратов естественна в рамках аддитивного свойства $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ членов геометрической прогрессии {φ^N}, не содержащей единицы при условии N ≠ 0. При этом эксклюзивность чисел Фидия, инклюзивных другим членам рядов {s_N} и {S_N} по субстракции, состоит в том, что смена знаков у показателей степени 1 и 2 слагаемых выражения $1 = \varphi^1 + \varphi^2$ с заменой сложения вычитанием дает единичный результат $-1 = \Phi^1 - \Phi^2$ со знаком «–».

Таким образом, единицу определяют не только дихотомии $1 = 2^{-1} + 2^{-1}$ и $2 = 1 + 1$, но и действия с числами $\varphi^{\pm 1}$ и $\varphi^{\pm 2}$ первой и второй степени. При этом единицы, обычно получаемые нормировкой триплета $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ каким-либо из его членов, не удовлетворяют устройству системных рядов $\{s_N\}$ и $\{S_N\}$. Убедимся в этом.

Итак, отношение $\dfrac{s^1 - s^2}{s^{-2} - s^{-1}} = s^3$ неслучайных субстракций $s^1 - s^2 = s^{N+1}$ и $s^{-2} - s^{-1} = s^{N-2}$ равно s^3. А это указывает на особый статус трех первых степеней системных чисел $s = \{2^{-1}$; 0.618…; …; s_N; …} Причем для прогрессии $\{\varphi^N\}$ тождество $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ является ключевым, поскольку общее выражение $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ служит аддитивным законом для всех N, принимая вид $1^0 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$ в результате нормировки по φ^N. Но бинарной арифметике не свойственны нуль и бесконечность.

Идея двух единиц не выглядит гипотезой, но является предположением, которое из-за его обоснованности можно принять особенностью арифметики системных скаляров $\{2^{-1}$; 0.618…; 0.682…; 0.725…; …; s_N; …}. Последовательно обозначим их буквами e, φ, f; h, … с целью продемонстрировать субстрактную связь $s^{N-1} - s^N = s^{2N-1}$, представленную в виде таблицы с крестообразным расположением ячеек.

				$e^0 - e^1 = e^1$		
. . .	$\varphi^{-2} = \varphi^{-1} + \varphi^0$	$\varphi^{-1} = \varphi^0 + \varphi^1$	$\varphi^0 = \varphi^1 + \varphi^2$	$\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$	$\varphi^2 - \varphi^3 = \varphi^4$	…
	1	1	1	$f^2 - f^3 = f^5$	$\varphi^3 = (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2$	
				$h^3 - h^4 = h^7$		
				. . . .		

Как видно, членам числового ряда $e = 2^{-1}$, $\varphi = 0.618...$, $f = 0.682...$, $h = 0.725...$ и т. д. отвечает последовательность субстрактных форм в столбце. Причем обобщением этих форм является тождество $S^N - S^{N-1} = 1$, которое дает нормировка равенств столбца элементами справа. При этом разность (субстракция) членов слева от знака равенства равна их произведению. А так как показатели степени данных членов складываются в показатель степени элемента справа, то устройство рассматриваемой последовательности предполагает мультипликативную связь $s^{N-1} \cdot s^N = s^{2N-1}$ целых степеней иррациональных оснований e, φ, f; h, … с дискретными значениями s_N, зависящими как от натурального числа N в показателях степени, так и от номера $N = 1, 2, 3, ...$

Заметим, что в тождестве $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ показатели степени не только рекурсивны (1 + 2 = 3), но и последовательны как первые три числа натурального ряда. А допуская нулевое и отрицательные значения целых степеней числа φ, получим уходящий влево ряд тождеств, где первые три содержат единицы, получаемые из равенства $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ нормировками по φ^1, φ^2 и

φ^3 соответственно. Но эти единицы не отвечают бинарной арифметике, так как нарушают аддитивно-мультипликативный строй множества $\{\varphi^N\}$ со свойством $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$, допуская $N = 0$. Более того, в конструируемой арифметике единицы 1^1 и $1*$ получаются дихотомиями $2^1 = 1^1 + 1^1$ и $2* = 1* + 1*$, предполагающими их формальное неравенство.

Итак, элементы второй неслучайной субстракции $s^{N-1} - s^N = s^{2N-1}$ чисел $s = \{2^{-1}; 0.618…; 0.682…; …; s_N; …\}$ мультипликативны: $s^{N-1} \cdot s^N = s^{2N-1}$. И при $N = 2$, когда $s_2 = \varphi$, будет $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ и $\varphi^1 \cdot \varphi^2 = \varphi^3$, что не свидетельствует об особом статусе трех первых степеней числа φ, если не учитывать двойственный характер скаляра φ^3, равного как разности чисел φ^1 и φ^2, так и разности их квадратов: $\varphi^3 = (\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2$. Выше этот факт отмечен как важный тем, что равнозначимые субстракции $(\varphi^1)^1 - (\varphi^2)^1$ и $(\varphi^1)^2 - (\varphi^2)^2$ различны семантически: по аналогии первая субстракция может быть длиной отрезка, тогда как вторая выражает площадь. А это значит, что вычисление φ^3 не может быть завершенным в силу неопределенности результата. И если формально равные разности пронормировать общим членом φ^3, то первая примет вид $\Phi^2 - \Phi^1 = 1^3$, а вторая приобретет форму $\Phi^1 - \varphi^1 = 1^3$, где у единиц сохранена степень делителя. Но если $\varphi^1 \cdot \varphi^2 = \varphi^3$ разделить на φ^3, то придется допустить нулевую степень получаемой единицы, тогда как нуль исключен из арифметики с двумя единицами, определяемыми как дихотомиями $1^1 = 2^{-1} + 2^{-1}$ и $2* = 1* + 1*$, так и бинарными сочетаниями («+» и «–») степеней $\varphi^{\pm 1}$ и $\varphi^{\pm 2}$ числа φ, среди которых $\varphi^{-1} + \varphi^{+2}$ и $\varphi^{-2} - \varphi^{+1}$ равны 2, а $\varphi^{+1} + \varphi^{+2}$, $\varphi^{-2} - \varphi^{-1}$ и $\varphi^{-1} - \varphi^{+1}$ равны 1.

Преобразование $2 = \varphi^{-1} + \varphi^{+2}$ в $2 = \varphi^{-2} - \varphi^{+1}$ и $1 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$ в $1 = \varphi^{-2} - \varphi^{-1}$ с заменой всех знаков на противоположные назовем инверсивно-реверсивным. При этом перевод $1 = \varphi^{+1} + \varphi^{+2}$ в $2 = \varphi^{-1} + \varphi^{+2}$ обходится сменой знака показателя степени у первого слагаемого, то есть требует одной-единственной операции – замены единицы +1 на –1 и наоборот. А это значит, что инверсия φ в Φ и обратно различает единицу и двойку или оценивает единицы 1^1 и $1*$, отличающиеся вдвое. Выделим похожие единицы геометрически.

<u>Т е о р е м а о площадях.</u> Субстракциям $e^0 - e^1 = e^1$, $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$, $f^2 - f^3 = f^5$, $h^3 - h^4 = h^7$ и т.д., обобщаемым формой $S^N - S^{N-1} = s^{-N} - s^{1-N} = 1$ с системными скалярами $s = e, \varphi, f, h, …$, соответствуют трисекции единичного квадрата.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Деление площади 1×1 по числам $e = 2^{-1}$, $\varphi = 0.618...$, $f = 0.682...$, $h = 0.725...$ и т. д. характерно тем, что прямоугольники внутри квадрата, отмеченные звездочкой, подобны. А так как затененные прямоугольники с площадями e^2, φ^3, f^5, h^7 и т. д. получаются вычитанием из единичного квадрата площадей, подобных затененным, а также площадей, расположенных над ними, то для системных чисел ряда $\{s_N\}$ выполняется равенство $1 \times 1 =$

$$= (1\times e) + (e\times e) + (e\times e) = (1\times\varphi) + (\varphi^2\times\varphi) + [\varphi^2\times(1-\varphi)] = (1\times f) + (f^3\times f^2) + [f^3\times(1-f^2)] = (1\times h) + (h^4\times h^3) + [h^4\times(1-h^3)] = ...$$

$= A_1 + A_2 + A_3$. (*Рис.* 9.) И поскольку суммируемые площади $A_1 = s_N$, $A_2 = s_N^{2N-1}$ и $A_3 = s_N^N - s_N^{2N-1}$, то трисекции единичного квадрата отвечает тождество $s^1 + s^N = 1$ и, значит, системные числа s = {2^{-1}; 0.618…; …; s_N; …} можно назвать «скверными» от англ. *square* – площадь. При этом бинарная арифметика приобретает смысл исчисления площадей.

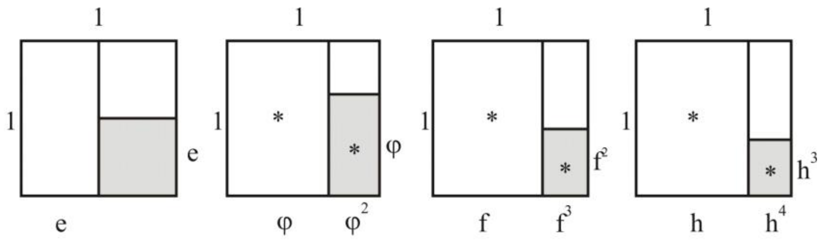

Рис. 9.

<u>Т е о р е м а о единичных площадях.</u> Субстракция $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$, обобщающая аддитивное свойство $\varphi^N = \varphi^{N+1} + \varphi^{N+2}$ членов геометрической прогрессии $\{\varphi^N\}$, двойственна и является ключевой для единиц площади, отличающихся в два раза.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о.</u> Пусть перемножение двух единиц определяет площадь 1×1, встроенную в «золотой» прямоугольник $1\times\varphi^{-1}$ или пристыкованную к нему снаружи, а сумма $1\times\varphi^1 + 1\times\varphi^2$ отображает бисекцию квадрата 1×1 на фигуры, подобные $1\times\varphi^{-1}$ и $1\times\varphi^{-2}$. *(Рис.* 10.) При этом площадки $1\times\varphi^1 = (1\times\varphi^{-1}) - (1\times1)$ и $1\times\varphi^{-2} = (1\times\varphi^{-1}) + (1\times1)$ контрсимметричны относительно площади $1\times\varphi^{-1}$, то есть отличаются от нее на $-(1\times1)$ и на $+(1\times1)$ соответственно.

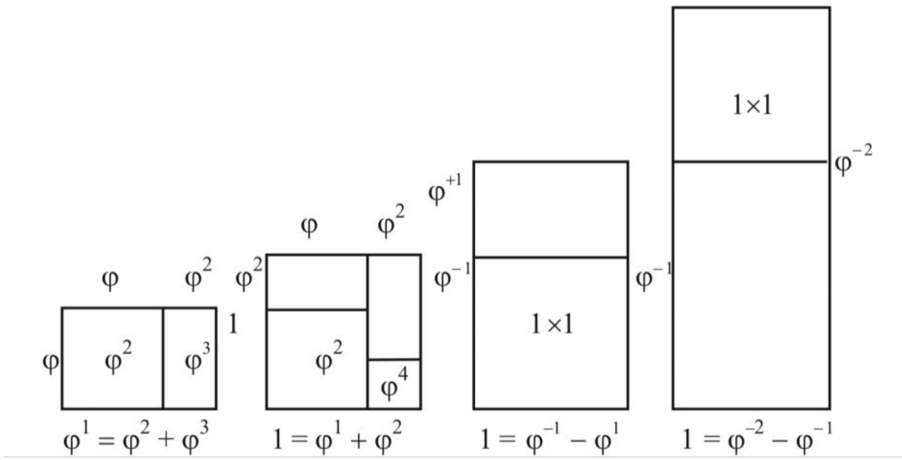

Рис. 10.

Площадь 1×1, как показатель контрсимметрии площадок, определяемых «скверными» числами φ^{-2} и φ^{+1}, отличающимися от φ^{-1} на единицу, обозначим как 1^1. И убедимся, что «золотая» арифметика содержит число $1^2 = 2\cdot1^1$, интерпретируемое как удвоенная площадь 1^1. С этой целью покажем, что «алмазный» ключ $\varphi^1 - \varphi^2 = \varphi^3$ представляет структуру с единичным элементом, значение которого вдвое больше единичного морфизма 1^1.

Вспомним о понятии секстетной структуры и представим контрсимметрию чисел-площадей $\varphi = \Phi - 1^1$ и $\Phi^2 = \Phi + 1^1$ после деления на $\Phi = 1.618...$ как □$1^1 \setminus \varphi^2 \setminus \varphi^{-1} \setminus \varphi^3 \setminus \varphi^{+1} \setminus 2^1$□, где

$\varphi^3 = \dfrac{\Phi - 1^1}{\Phi + 1^1} = \dfrac{1^1 - \varphi^{+1}}{1^1 + \varphi^{+1}}$ – число-отношение. При этом $2^1 = \Phi^2 - \varphi = (\Phi + 1^1)(1^1 - \varphi^3)$ и $\varphi^1 = \dfrac{1^1 - \varphi^3}{1^1 + \varphi^3}$ по свойству конверсии. А так как $2^1 = (\Phi^2 - \varphi^2) - \varphi^3 = 5^{0.5} - \varphi^3$, откуда $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$, то особое число $2^1 = 1^1 + 1^1 = 2{\cdot}1^1$, как и число-отклонение 1^1, является скрытым целым «алмазного» ключа.

А теперь сформируем квадратичный секстет на основе контрсимметричных скаляров $\varphi^{-2} - 1^1$ и $\varphi^{-2} + 1^1$ с числом-отношением $(\varphi^{-2} - \varphi^2)^{-1} = 5^{-0,5} = \dfrac{1^1 - \varphi^2}{1^1 + \varphi^2}$ и другими элементами, вид которого □□$1^2 \setminus 1^2 - \varphi^2 \setminus 1^2 + \varphi^2 \setminus \dfrac{1^2 - \varphi^2}{1^2 + \varphi^2} \setminus \varphi^2 \setminus 2^*$□□. Причем $2^* = (\varphi^{-2} + 1^1) - \varphi^{-1} = (\varphi^{-2} + 1^1)(1^1 - 5^{-0,5})$. При этом из $2^* = \varphi^{-3} - (\varphi^{-1} + \varphi^{+1}) = \varphi^{-3} - 5^{0.5}$ следует $\varphi^1 = \varphi^2 + \varphi^3$ и, значит, «алмазный» ключ открывает контрсимметрию $5^{0.5} - 2^* = \varphi^3$ и $5^{0.5} + 2^* = \varphi^{-3}$ чисел φ^3 и φ^{-3}, являющихся действительными корнями $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5} = -2 \pm (2 + \varphi^3)$ уравнения $x^2 + 4x - (1^2)^2 = 0$, такими, что $x_1 = \varphi^3$ и $x_2 = -\varphi^{-3}$. При этом $\varphi^{-3} - \varphi^3 = 2^2$, где $2^2 = (5^{0.5} + 2^1)(1^1 - \varphi^6)$. И число-отклонение 2^* в «скверной» интерпретации предстает двумя квадратами единичной площади. (*Рис*. 11.)

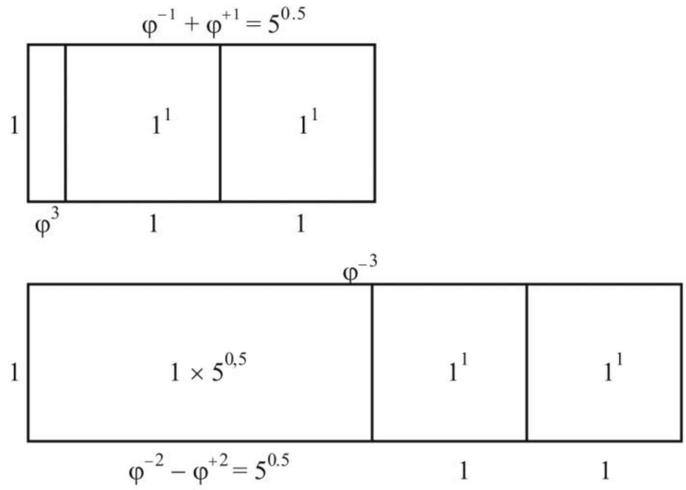

Рис. 11.

Итак, раскрыты контрсимметрии $5^{0.5} - 1 = 2\varphi^{+1}$, $5^{0.5} + 1 = 2\varphi^{-1}$ и $5^{0.5} - 2 = \varphi^{+3}$, $5^{0.5} + 2 = \varphi^{-3}$ относительно числа $5^{0.5}$. При этом $-\varphi^{-3}$ и φ^{+3} – это корни квадратного уравнения $\delta^2 + 4\delta - 1^2 = 0$, получаемого из алгебраической формы $a^2 + ab = b^2$ подстановкой $a = 1 - \delta$ и $b = 1 + \delta$, тогда как при $a = 1$ или $b = 1$ из $a^2 + a \cdot 1 = 1^2$ и $1^2 + 1 \cdot b = b^2$ следует $a_1 = \varphi^{+1}$, $a_2 = -\varphi^{-1}$ и $b_1 = \varphi^{-1}$, $b_2 = -\varphi^{+1}$.

Но кроме того существуют пары чисел $1^2 - \delta^2$ и $1^2 + \delta^2$, контрсимметричных относительно квадроединицы 1^2, подстановка которых в $a^2 + ab = b^2$ дает $\delta^4 + 4\delta^2 - 1^4 = 0$ или $x^2 + 4x - (1^2)^2 = 0$, откуда $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5} = -2 \pm (2 + \varphi^3)$, где $x_1 = \varphi^3$ и $x_2 = -\varphi^{-3}$. Таким образом, $x_1 = \delta_1$ и $x_2 = \delta_2$. А так как $x = \delta^2$, то корни δ_1 и δ_2 равнозначны (идемпотентны) своим квадратам.

Заметим, что из многозвенного равенства $5^{0.5} = 2\varphi^{+1} + 1 = 2\varphi^{-1} - 1 = \varphi^{+3} + 2 = \varphi^{-3} - 2$ следует $\frac{2\varphi^{+1}}{2\varphi^{-1}} = \frac{\varphi^{+3}+1}{\varphi^{-3}-1} = \varphi^{+3}\frac{1+\varphi^{+3}}{1-\varphi^{+3}} = \varphi^{+2}$, откуда $\varphi^{+1}\frac{1+\varphi^{+3}}{1-\varphi^{+3}} = 1^2$, а отсюда с учетом $\frac{1+\varphi^{+3}}{1-\varphi^{+3}} = \varphi^{-1}$ будет $\varphi^{+1}\cdot\varphi^{-1} = 1^2$, что подразумевает $\varphi^0 = 1$ при том, что нуль, как и бесконечность, чужды бинарной арифметике. И очевидно, что корректным является отношение $\frac{\varphi^{+1}}{\varphi^{-1}} = \varphi^2$, где $\varphi^2 = \varphi^1 - \varphi^3$ входит в равенство $\varphi^3 = (\varphi^2)^1 - (\varphi^2)^2$ как основание степеней 1 и 2. При этом $\varphi^2 = \frac{1+\varphi^{+3}}{3+\varphi^{+3}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$.

Таким образом, скаляр φ^3 обслуживает неслучайные субстракции $\varphi^1 - \varphi^2$ и $(\varphi\varphi)^1 - (\varphi\varphi)^2$ и, значит, не имеет однозначного определения. А его двойственность не позволяет завершить вычислительный процесс, в результате чего бинарную арифметику с числом Фидия надо как-то ограничить. Сделаем это, зная, что φ^1 и φ^3 связаны конверсией $\frac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3} = \varphi^1 \Leftrightarrow \varphi^3 = \frac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1}$, объединяющей число-отношение и число-отклонение в определенной секстетной структуре. Например, выше обозначен секстет $\square 1^2 \backslash \varphi^2 \backslash \varphi^{-1} \backslash \varphi^3 \backslash \varphi^{+1} \backslash 2^* \square$, где единицей является площадь $1^2 + 1^2 = 2^*$, удвоенная по сравнению с площадью единичного квадрата 1×1. При этом $2^* = \varphi^{-1} + \varphi^2$ и мы имеем диарезисное представление двойки слагаемыми, которые являются целыми степенями числа φ. Но в секстете \ □ \ место числа-отношения занимает скаляр φ^3, тогда как числом-отклонением служит φ^1. И если их поменять местами, то получится структура $\diamond 1^1 \backslash 2\varphi^2 \backslash 2\varphi^{+1} \backslash \varphi^{+1} \backslash \varphi^3 \backslash 2^1 \diamond$ с единицей $1^1 = \varphi^{+1} + \varphi^2$, вдвое меньше 1^2. Следовательно, $1^2 = 2\cdot 1^1$.

Итак, секстеты $\diamond 1^1 \backslash 2\varphi^2 \backslash 2\varphi^{+1} \backslash \varphi^{+1} \backslash \varphi^3 \backslash 2^1 \diamond$ и $\square 1^2 \backslash \varphi^2 \backslash \varphi^{-1} \backslash \varphi^3 \backslash \varphi^{+1} \backslash 2^* \square$, содержащие «золотое» число $\varphi = 0.618\ldots$ в степени не выше третьей, отвечают диарезисным выражениям единицы $1^1 = \varphi^1 + \varphi^2$ и двойки $2^* = \varphi^{-1} + \varphi^2$, соответствующим дихотомиям $1 = 2^{-1} + 2^{-1}$ и $2 = 1 + 1$, отличающимся вдвое согласно бифуркации $1^* = 2\cdot 1^1$. При этом вычисление $1 = \varphi^1 + \varphi^2$ по секстету \ ◇ \ отличается от определения $2 = \varphi^{-1} + \varphi^2$ по структуре \ □ \ инверсией первого слагаемого, что является одной-единственной операцией, способствующей распознаванию определенных физических процессов, моделируемых перемещением прямой в плоскости без поворота (*tracking*) и ее трансляцию с поворотом (*winding*) [3]. Причем *tracking* предполагает автопараллельность прямой, представленной двумя точками, движущимися по скрещивающимся траекториям, тогда как *winding* подразумевает, что интервал между теми же точками со временем изменяется нелинейно и, значит, их относительная скорость не постоянна как по величине, так и по направлению. И хотя в том и в другом случае точки перемещаются в плоскости прямолинейно и равномерно, то есть «по инерции», их скорости не складываются векторно.

Эффект «флюгера» в косом столкновении массивных сфер [4] подробно рассмотрен и формализован в скалярной механике, а приложения бинарной арифметики к задачам общей физики представлены в публикациях [5-8], содержащих арифмометрический расчет молекулы фуллерена С60 с использованием «золотой» константы φ.

И т о г и

- Установлена арифметическая связь $e^{2m} = \varphi^{-3}$ и $e^{-2m} = \varphi^{3}$ чисел Фидия $\varphi = 0.618\ldots$ и Непера $e = 2.718\ldots$ посредством скаляра $m = 0.721\ldots$, такого¸ что $\mathrm{th}\, m = \varphi^1$. При этом у равнобочных гипербол $y = x^{-1}$ и $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$ с пересекающимися ветвями выделены геометрические элементы, числовые значения которых близки к φ и φ^2.

- Сформулированы основные положения теории системных скаляров $\mathrm{s} = 2^{-1}$; 0.618…; …; $\mathrm{s_N}$; … как пронумерованных чисел, определяемых зависимостью иррационального основания $\mathrm{s_N}$ от показателя степени N = 1, 2, 3… в тождествах $\mathrm{s}^1 + \mathrm{s}^{\mathrm{N}} = 1$, $\mathrm{s}^{-1} - \mathrm{s}^{\mathrm{N}-1} = 1$ и $\mathrm{s}^{-\mathrm{N}} - \mathrm{s}^{1-\mathrm{N}} = 1$.

- Показан двойственный характер чисел 1 и 2 в секстете ✧ 1 \ a \ b \ c \ d \ 2 ✧, где скаляры a и b контрсимметричны, а элементы c и d конверсивны, для чего использована штучная конверсия $\frac{1-\varphi^3}{1+\varphi^3} = \varphi^1 \Leftrightarrow \varphi^3 = \frac{1-\varphi^1}{1+\varphi^1}$ в секстетах $\Diamond 1^1 \backslash 2\varphi^2 \backslash 2\varphi^{+1} \backslash \varphi^{+1} \backslash \varphi^3 \backslash 2^1 \Diamond$ и $\square 1^2 \backslash \varphi^2 \backslash \varphi^{-1} \backslash \varphi^3 \backslash \varphi^{+1} \backslash 2^* \square$,

  а также частные конверсии $\mathrm{th}1 = \frac{1-e^{-2}}{1+e^{-2}} \Leftrightarrow \frac{1-\mathrm{th}1}{1+\mathrm{th}1} = e^{-2}$ и $\mathrm{th}^2 1 = \frac{1-\mathrm{ch}^{-1}2}{1+\mathrm{ch}^{-1}2} \Leftrightarrow \frac{1-\mathrm{th}^2 1}{1+\mathrm{th}^2 1} = \mathrm{ch}^{-1}2$.

- Аксиоме непрерывности в теории действительных чисел противопоставлена арифметическая система с дискретными элементами 2^{-1}; 0.618…; …; $\mathrm{s_N}$; …, упорядоченными по номеру N, равному N в показателе степени равенств $\mathrm{s}^1 + \mathrm{s}^{\mathrm{N}} = 1$, $\mathrm{s}^{-1} - \mathrm{s}^{\mathrm{N}-1} = 1$ и $\mathrm{s}^{-\mathrm{N}} - \mathrm{s}^{1-\mathrm{N}} = 1$ относительно единицы. При этом последовательность $\{\mathrm{s_N}\}$ дополнена конечным элементом $\underline{1}$ сингулярного характера, что позволяет ввести в бинарную арифметику квадроединицу $1^2 = 2 \cdot 1^1$.

С с ы л к и

1. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. – М., Радио и связь. 1984.

2. Stakhov A.P. The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. World Scientific, 2009.

3. Черепанов О.А. Фактология «золотой» пропорции: свежие дополнения. // «Академия Тринитаризма», М., Эл №77-6567,публ.17139 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/2099-chr.pdf)

4. Черепанов О.А. Дефекты и эффекты в теории удара. (http://scicommunity.ru/)

5. Черепанов О.А. Секстетное исчисление в примерах и задачах. (http://scicommunity.ru/)

6. Черепанов О.А. Секстетное моделирование гравитационных экспериментов и явлений. (http://scicommunity.ru/)

7. Черепанов О.А. Опытные и формальные предпосылки секстетного моделирования в оптике. (http://scicommunity.ru/)

8. Черепанов О.А. Где начало того конца?... Геометрия и Арифмометрия. // «Академия Тринитаризма», М, Эл № 77-6567, публ.18194 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0009/001a/1092-chr.pdf