С. К. Абачиев

ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ ДАЁТ НОВЫЕ СТИМУЛЫ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИКИ ГАРМОНИИ

Часть 1

Треугольник Паскаля так прост, что выписать его может и десятилетний ребёнок. В то же время он скрывает в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд ничего общего.

Мартин Гарднер

Едва ли кто-нибудь из нематематиков в состоянии освоиться с мыслью, что цифры могут представлять собой культурную и эстетическую ценность…

Норберт Винер

Двадцать лет спустя я возвращаюсь к своим публикациям 80-х гг. XX в. [1] и [2], которые остались мало замеченными. Тем не менее, в них представлены, несомненно, самые впечатляющие свойства треугольника Паскаля. Соответствующие цветные иллюстрации на рис. 1–11 говорят сами за себя.

На феноменологическом уровне эти свойства треугольника Паскаля впервые были выявлены мной в начале 1980 г. В общем, они, что́ называется, лежали на поверхности. Их математики могли открыть, начиная с П. Ферма и самого́ Б. Паскаля, который впервые подверг арифметический треугольник данного типа разностороннему исследованию. Тем не менее, математикам для выявления этого чрезвычайно впечатляющего комплекса свойств веками не хватало чёткого исходного понимания своих объектов как *многоуровнево-иерархичных систем с относительно автономными комплексами свойств на разных структурных уровнях*. Такой исходный взгляд на объекты познания стал утверждаться только во второй половине XX в. под влиянием понятий и принципов кибернетики. Идею перехода на цветографическую символику я в данной статье воспроизвожу именно так, как она и пришла мне в голову в начале 1980 г. на основе исходного понимания треугольника Паскаля как *многоуровнево-иерархичной системы натуральных чисел*.

Красочные феноменологические схемы, представленные на рис. 1–11, чрезвычайно интересны и автономны сами по себе. Их развитие от рис 2 к рис. 3, от рис. 4 к рис. 6 и от рис. 7 к рис. 11 направляется логикой усложнения идеально симметричных фракталов на плоскости. Эти фракталы *детерминистские*, т. е. имеющие однозначные алгоритмы построения из элементарных форм-модулей до сколь угодно развитых форм (теоретически). Но в конце 1987 г. мне удалось найти систематическое объяснение этой радужной фрактальной феноменологии. На началах рекуррентной формулы из комбинаторики она может быть легко и единообразно рассчитана вручную, без помощи компьютера. Но в этой связи мной была выявлена фундаментальная парадоксальность такого метода расчёта. О ней речь пойдёт в конце данной статьи.

Всё это превращает треугольник Паскаля в уникальный объект познания. Его элементарность на высшем уровне структурной организации натуральных чисел совмещается с нетривиальностью на низшем, наиболее глубоком уровне простых субэлементов-делителей. Исследование его свойств на высшем уровне доступно и школьнику. То же можно сказать и про исследование его глубинных свойств на феноменологическом уровне цветографических схем. Но при этом исследователь уже «предметно» приобщается к современным открытым проблемам теории чисел, комбинаторики, теории групп, фрактальной геометрии и даже синергетики, которые уникально сведены воедино на наиболее глубоком структурном уровне треугольника Паскаля. «Школьная» элементарность исследования при этом переходит в полноценное академическое исследование. Тщательно анализируя поуровневое познание этого уникального математического объекта, можно воочию увидеть и прочувствовать гносеологические законы становления и качественного реформирования теорий в физико-математических науках. Этими возможностями я сполна воспользовался в своей монографии по эволюционной теории познания [3, с. 268– 292, 300–350].

В настоящей статье я не представляю ничего нового по сравнению со своими публикациями 80-х гг. Я просто использую качественно новые возможности оперативности информирования о своих результатах, его полноты и широковещательности, которые за прошедшие два десятилетия предоставил Интернет. Идеально симметричные сложные цветографические субструктуры треугольника Паскаля, развиваемые из простых модулей, могут представлять систематический интерес в связи с оживлением в последние годы исследований модулярных форм и эллиптических функций.

Треугольник Паскаля используется для вычисления коэффициентов в полной формуле сокращённого умножения, которая известна как бином Ньютона. Алгоритм его построения элементарен. Вопреки традиции, я настаиваю на том, чтобы эту систему натуральных чисел наращивать не сверху вниз, а снизу вверх. Так лучше оттеняется момент её поступательного усложнения, особенно – на наиболее глубоком структурном уровне простых субэлементов-делителей.

Схема 1

k = 0 5 10

. . . .

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

10 **1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1**

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 6 15 20 15 6 1

5 **1 5 10 10 5 1**

1 4 6 4 1

1 3 3 1

1 2 1

1 1

n = 0 **1**

Прежде всего, перед нами нагляднейший образец *системного* объекта как *целостного комплекса взаимосвязанных элементов*. В данном случае – натуральных чисел. От аморфного сборища чисел этот объект отличает наглядная организованность чисел на основе определённого закона. Словесно этот закон формулируется так: ***каждое число треугольника Паскаля есть сумма двух ближайших чисел с нижележащей строки.*** Зная этот закон, числовую систему можно наращивать неограниченно.

Придадим основному закону треугольника Паскаля вид алгебраической формулы. Поскольку числа только натуральные, обозначим это их свойство символом ***N.*** На поле чисел введём косоугольную координатную сетку из строк *n* и столбцов *k*. Тогда символом $N_{n,k}$

обозначится то обстоятельство, что многообразие натуральных чисел принадлежит треугольнику Паскаля. При этом словесной формулировке придаётся вид такой формулы:

$$\boldsymbol{N_{n,k} + N_{n,k+1} = N_{n+1,k+1}}, \quad \text{где } n = 0,1,2,3\ \dots,\ k = 0,1,2,3,\ \dots\ n. \qquad \mathbf{(1)}$$

На числовом поле треугольника Паскаля ярко и наглядно выражена *инвариантность* этого отношения между числами, подобающая гносеологическому статусу *научного закона.* Какую бы тройку соседних чисел ближайших строк мы ни взяли, отношение между ними будет одно и то же. На каждом участке числового поля натуральные числа имеют свои конкретные значения, представляют собой числа самой разной значности, являются чётными или нечётными и т. д., но отношение (1) между ними везде одно и то же. Это всеобщее инвариантное отношение и есть *структура* системы чисел, её *организующее начало.* Здесь наглядно видно и то, что для чёткой формулировки этого инвариантного отношения между конкретными числами требуется подняться на высокий уровень абстракции, отвлечься от этой числовой конкретики. Так обстоит дело и в реальной науке, но в данном случае всё наглядно и легко обозримо.

Подобно тому, как молекулы в качестве химических индивидов делятся на атомы, глубже которых уже кончается химия и начинается микрофизика, натуральные числа имеют свои «далее неделимые атомы». Такие числа называются *простыми,* поскольку они делятся только на самих себя, давая единицу, и на единицу, давая самих себя. В системе натурального ряда простые числа ведут себя нерегулярно и загадочно, и я выделю их жирным шрифтом и курсивом:

1, ***2, 3,*** 4, ***5,*** 6, ***7,*** 8, 9, 10, ***11,*** 12, ***13,*** 14, 15, 16, ***17,*** 18 , ***19,*** 20, 21, 22, ***23,*** 24, 25, 26, 27, 28, ***29,*** 30, ***31,*** 32, 33 …

Остальные натуральные числа называются составными, поскольку каждое из них содержит своё уникальное произведение простых субэлементов-делителей в определённых степенях. Общеизвестный натуральный ряд, таким образом, является типичной *многоуровневой системой.* На её наиболее глубоком структурном уровне находятся действительно далее неделимые натуральные числа. Но эти числа неделимы только в качестве *натуральных,* в то время как их можно представлять в виде всевозможных произведений дробных субэлементов-делителей. В общем виде этот принцип устройства натуральных чисел можно представить в виде такого выражения:

$$\boldsymbol{N = 2^a.3^b.5^c.7^d.11^e.13^f\ \dots}, \quad \text{где } a,b,c,d,e,f\ \dots = 0,1,2,3\ \dots \qquad \mathbf{(2)}$$

Соответственно, и треугольник Паскаля имеет аналогичную субструктуру. Начальный этап развития треугольника Паскаля со структурированными числами $\boldsymbol{N_{n,k}}$ представлен на схеме 2. В целях экономии места изображается только левая половина треугольника Паскаля, так как она исчерпывающе информативна ввиду его симметричности относительно вертикальной оси.

Уже здесь можно подметить важные закономерности поведения простых чисел в структурном фундаменте треугольника Паскаля. Во-первых, простые субэлементы-делители группируются в треугольные зоны за исключением делителя 2, который может быть представлен и точечно. Во-вторых, по мере развития треугольника Паскаля новые простые делители вступают в игру только со строки *n* с соответствующим номером. Это же относится и к степеням, в которых представлены простые субэлементы.

Схема 2

. . . .

1 2^4 $2^3.3.5$ $2^4.5.7$ $2^2.5.7.13$ $2^4.3.7.13$ $2^3.7.11.13$ $2^4.5.11.13$ $2.3^2.5.11.13$

1 3.5 3.5.7 5.7.13 3.5.7.13 3.7.11.13 5.7.11.13 $3^2.5.11.13$

1 2.7 7.13 $2^2.7.13$ 7.11.13 2.7.11.13 3.7.11.13 $2^3.3.11.13$

1 13 2.3.13 2.11.13 5.11.13 $3^2.11.13$ $2^2.3.11.13$

1 $2^2.3$ 2.3.11 $2^2.5.11$ $3^2.5.11$ $2^3.3^2.11$ $2^2.3.7.11$

1 11 5.11 3.5.11 2.3.5.11 2.3.7.11

1 2.5 $3^2.5$ $2^3.3.5$ 2.3.5.7 $2^2.3^2.7$

1 3^2 $2^2.3^2$ $2^2.3.7$ $2.3^2.7$

1 2^3 $2^2.7^1$ $2^3.7$ 2.5.7

1 7 3.7 5.7

1 2.3 3.5 $2^2.5$

1 5 2.5

1 2^2 2.3

1 3

1 2

1

1

Однако чем дальше вверх по строкам *n*, тем числовая система становится более громоздкой, тем труднее отслеживать организацию простых суб-элементов.

Результаты таких расчётов требуется представить в более компактной форме. Во-первых, следует отражать организацию каждого из простых субэлементов (2, 3, 5, 7 и т. д.) на отдельной схеме. Во вторых, отсутствие в структуре конкретного числа $N_{n,k}$ простого субэлемента-делителя следует обозначать точкой, а его присутствие – только показателем степени, в которой он представлен. На схеме 3 таким образом отражена организация простого субэлемента-делителя 2 в пределах строк треугольника Паскаля *n = 0–31.*

Подобные схемы становятся особенно наглядными и эстетичными, если перейти к цветографической символике. Во-первых, числовая треугольная схема 3 заменяется треугольной схемой геометрических ячеек той или иной формы. Каждая ячейка обозначает то или иное число $N_{n,k}$. Во-вторых, на схеме числа $N_{n,k}$ следует представить в виде геометрической схемы ячеек, располагаемых в шахматном порядке, как и сами числа. В-третьих, условными цветами закраски ячеек следует обозначить показатели степеней, в которых тот или иной субэлемент представлен во внутренней структуре чисел $N_{n,k}$. В частности, незакрашенные ячейки на картинках обозначают

Схема 3

. . . . .

. 1 . 2 . 1 . 3 . 1 . 2 . 1 . 4 . 1 . 2 . 1 . 3 . 1 . 2 . 1 .

. . 1 1 . . 2 2 . . 1 1 . . 3 3 . . 1 1 . . 2 2 . . 1 1 . .

. 2 1 2 . 3 2 3 . 2 1 2 . 4 3 4 . 2 1 2 . 3 2 3 . 2 1 2 .

. . . . 1 1 1 1 . . . . 2 2 2 2 . . . . 1 1 1 1 . . . .

. 1 . 3 1 2 1 3 . 1 . 4 2 3 2 4 . 1 . 3 1 2 1 3 . 1 .

. . 2 2 1 1 2 2 . . 3 3 2 2 3 3 . . 2 2 1 1 2 2 . .

. 3 2 3 1 3 2 3 . 4 3 4 2 4 3 4 . 3 2 3 1 3 2 3 .

. . . . 1 1 1 1 1 1 1 1 . . . .

. 1 . 2 . 1 . 4 1 2 1 3 1 2 1 4 . 1 . 2 . 1 .

. . 1 1 . . 3 3 1 1 2 2 1 1 3 3 . . 1 1 . .
. 2 1 2 . 4 3 4 1 3 2 3 1 4 3 4 . 2 1 2 .
. . . . 2 2 2 2 1 1 1 1 2 2 2 2 . . . .
. 1 . 4 2 3 2 4 1 2 1 4 2 3 2 4 . 1 .
. . 3 3 2 2 3 3 1 1 3 3 2 2 3 3 . .
. 4 3 4 2 4 3 4 1 4 3 4 2 4 3 4 .
. . . .
. 1 . 2 . 1 . 3 . 1 . 2 . 1 .
. . 1 1 . . 2 2 . . 1 1 . .
. 2 1 2 . 3 2 3 . 2 1 2 .
. . . . 1 1 1 1 . . . .
. 1 . 3 1 2 1 3 . 1 .
. . 2 2 1 1 2 2 . .
. 3 2 3 1 3 2 3 .
. . . .
. 1 . 2 . 1 .
. . 1 1 . .
. 2 1 2 .
. . . .
. 1 .
. .
.

такие числа $N_{n,k}$, которые не содержат в своей структуре простого субэлемента. Красным ячейкам соответствует его присутствие в 1-й степени, оранжевым – во 2-й, жёлтым – в 3-й, зелёным – в 4-й, голубым – в 5-й, синим – в 6-й, фиолетовым – в 7-й, коричневым – в 8-й.

Серия цветографических схем на рис. 1–11 представляет организацию в треугольнике Паскаля простых субэлементов-делителей 7, 5, 3 и 2.

Таким образом, система свойств треугольника Паскаля чётко, наглядно и легко обозримо «расслаивается» на два относительно автономных комплекса свойств, на два *структурных уровня.* Высшему уровню соответствует система свойств, организуемая на началах закона (1). На этом структурном уровне много своих закономерностей, которые не зависят от составленности каждого из чисел $N_{n,k}$ из простых субэлементов. Таков закон суммирования чисел $N_{n,k}$ одной строки, в результате которого всегда получается число 2 в степени, равной номеру этой строки *n.* Есть на этом высшем уровне много других закономерностей такого рода.

Теоретическое описание свойств на разных структурных уровнях требует совершенно разных математических понятий. На высшем уровне всё управляется законом (1), на основе которого треугольник Паскаля может развернуть и десятилетний ребёнок. На низшем уровне всё неизмеримо сложнее, так как здесь сплетены воедино теория чисел и теория групп, комбинаторика и геометрия фракталов. Эта несоизмеримость понятийного аппарата двух уровней сродни несоизмеримости понятийного аппарата химии на уровне ныне уже «школьной» дальтоновской атомистики (простейшие уравнения 1-й степени) и на уровне квантовой теории атомов.

Двухуровневый комплекс свойств треугольника Паскаля великолепно иллюстрирует также общесистемную *подчинённость низшего высшему.* С одной стороны, субструктуры каждого из чисел $N_{n,k}$ определяются законом (2). Его называют основным законом арифметики, понимаемой как теория чисел. В соответствии с ним, каждое составное число $N_{n,k}$ является уникальной комбинацией своих простых субэлементов с уникальным сочетанием степеней каждого из них. И в этом смысле в высшей системе треугольника Паскаля натуральные числа остаются самими собой. Но, с другой стороны, поскольку они объединяются в системное целое законом высшего структурного уровня (1), именно этот высший закон «лепит» из уникальной субструктуры каждого из них фрактальные субструктуры типа тех, которые представлены на рисунках 1–11. Если организовать натуральные числа в высшие двумерные системы на основе других принципов (например, треугольника Фибоначчи или треугольника Люка), то и соответствующие субструктуры будут совсем другими. (Сравните на рис. 12.)

Субструктуры треугольника Паскаля иллюстрируют также принципы *фрактального самоподобия.* На рис. 1, 6, 9 и 11 отчётливо видно, что зоны сплошь закрашенных ячеек самоподобны: то, что́ находится под очередной сплошь закрашенной центральной фигурой, находится также слева и справа от неё. И так повторяется в большом и в малом вплоть до элементарных цветовых фигур, соответствующих представительству простого субэлемента-делителя в 1-й степени (зоны сплошной закраски красным цветом, включая точечные для простого субэлемента-делителя 2.)

Выбор геометрических ячеек типа «пчелиные соты» лучше всего показывает, что во фрактальной организации простых субэлементов треугольника Паскаля безраздельно господствует то, что́ в теории групп называют *вращательной симметрией 3-го порядка.* Это значит, что цветовые структуры становятся тождественными через каждые 120^0, если вращать лист.

Наконец, треугольник Паскаля демонстрирует даже то, ка́к часть фрактальной организации его простых субэлементов фундаментального структурного уровня непосредственно «просвечивает» на высшем структурном уровне. Имея перед глазами развёрнутый треугольник Паскаля с «погашенной» субструктурой чисел $\boldsymbol{N_{n,k}}$, невозможно увидеть, как организуются в треугольные зоны простые субэлементы 3, 7, 11 и др. Зато при этом на виду чётные числа и их самоподобные фрактальные группировки. Аналогично на высшем структурном уровне треугольника Паскаля явно проявляет себя геометрия расположения простого субэлемента 5, ибо содержащие его числа легко распознаются по пятёрке или нулю на конце. В общесистемном смысле это несколько напоминает «прямую трансляцию» сокровенных законов физического микромира в сверхпроводниках на макроскопический уровень наблюдаемых явлений.

В целом же цветные мозаики представляют собой *феноменологическую теорию* организации простых чисел в треугольнике Паскаля. Она феноменологична в том смысле, что *оставляет открытым вопрос о причинах* именно такой организации простых субэлементов на поле чисел $\boldsymbol{N_{n,k}}$. Так, несмотря на то, что сравнительно быстро постигаются общие законы поступательного усложнения цветовых структур по мере подъёма по строкам *n,* остаются необъяснёнными бесцветные перемычки, которыми в обязательном порядке отделены друг от друга все сплошь закрашенные структуры. Феноменологичен такой подход и в том смысле, что *вполне довольствуется традиционной схемой треугольника Паскаля, хотя теперь изучаются законы качественно более глубокого структурного уровня этой числовой системы.* Говоря языком современной методологии физико-математических наук, феноменологические закономерности многоцветных структур лишь *постулируются*, не находя объяснений с позиций более глубоких и общих понятий и законов.

В данном случае радикальное повышение эффективности развития модифицированного треугольника Паскаля достигается благодаря *эффективной визуализации* знания о целостном поведении его простых субэлементов. В этом плане системный подход, предложенный мной в 80-х гг., оказывается вполне в русле современных тенденций перехода физико-математических наук на графическую форму представления информации с использованием условных цветов. Это особенно так постольку, поскольку фрактальные объекты обычно в принципе невозможно описать аналитическими формулами. Они описываются только алгоритмами построения с немедленным выводом результатов на видеомонитор компьютера.

Фрактальность субструктур треугольника Паскаля однотипна с фрактальностью ковра Серпинского, если не принимать во внимание фактор степеней, в которых в числах

$\boldsymbol{N_{n,k}}$ представлены их простые субэлементы. С учётом этого фактора фрактальность треугольника Паскаля оказывается существенно более сложной и интересной. Казалось бы, у таких фрактальных структур тем более не может быть аналитической, «формульной» версии построения. Тем не менее, у треугольника Паскаля такая версия есть. *У его радужной фрактальной феноменологии есть «формульные» основания для систематических расчётов, т. е. объяснений.* В этом плане фрактальность субструктур треугольника Паскаля весьма своеобразна, если не уникальна.

Окончание следует

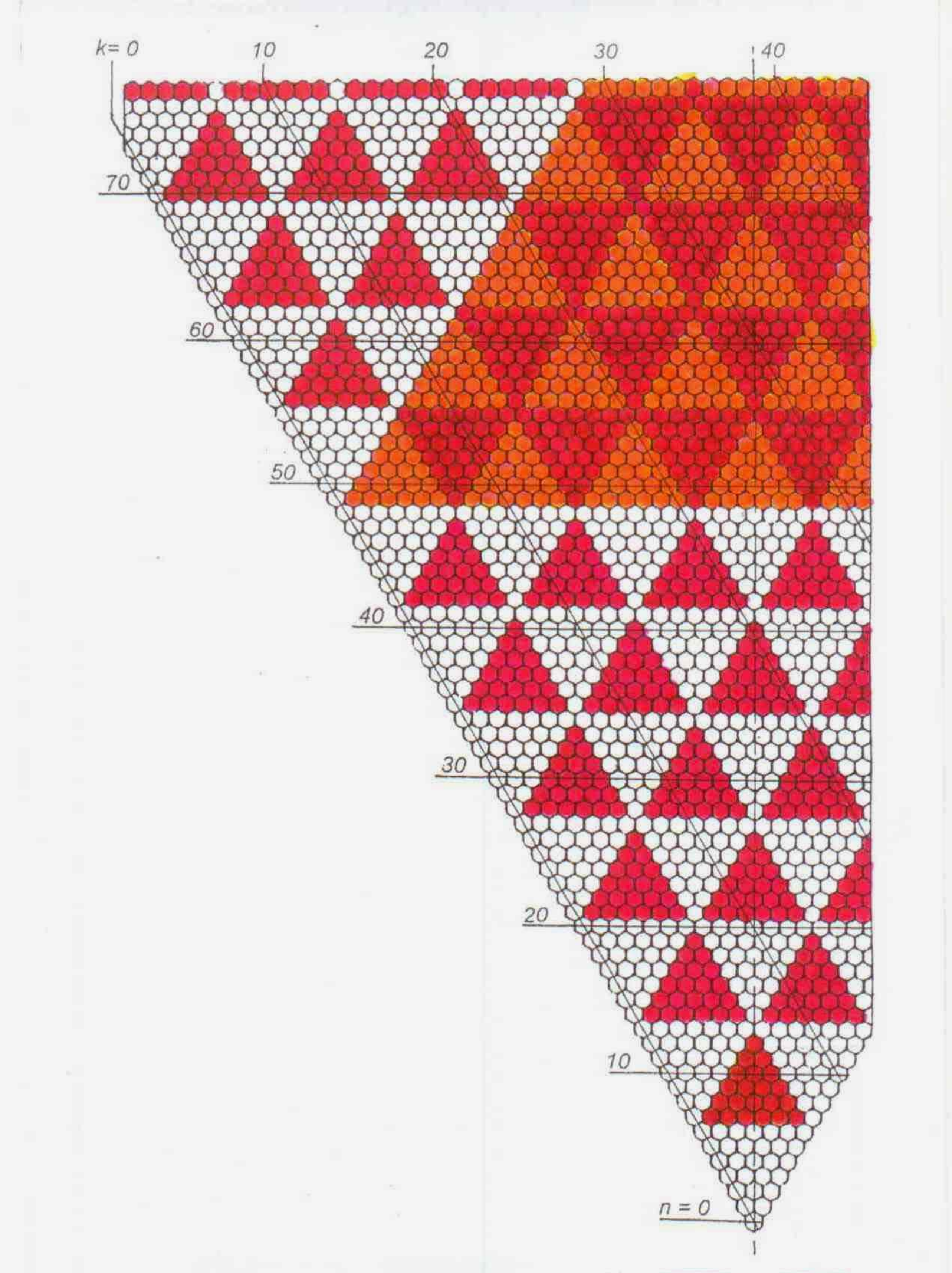

Рис. 1. Организация простого субэлемента-делителя 7. Этот простой субэлемент «вступает в игру», начиная со строки $n = 7$. Субэлемент $49 = 7^2$ появляется со строки $n = 49 = 7^2$. Для простых субэлементов такое поведение в системе треугольника Паскаля является правилом без исключений.

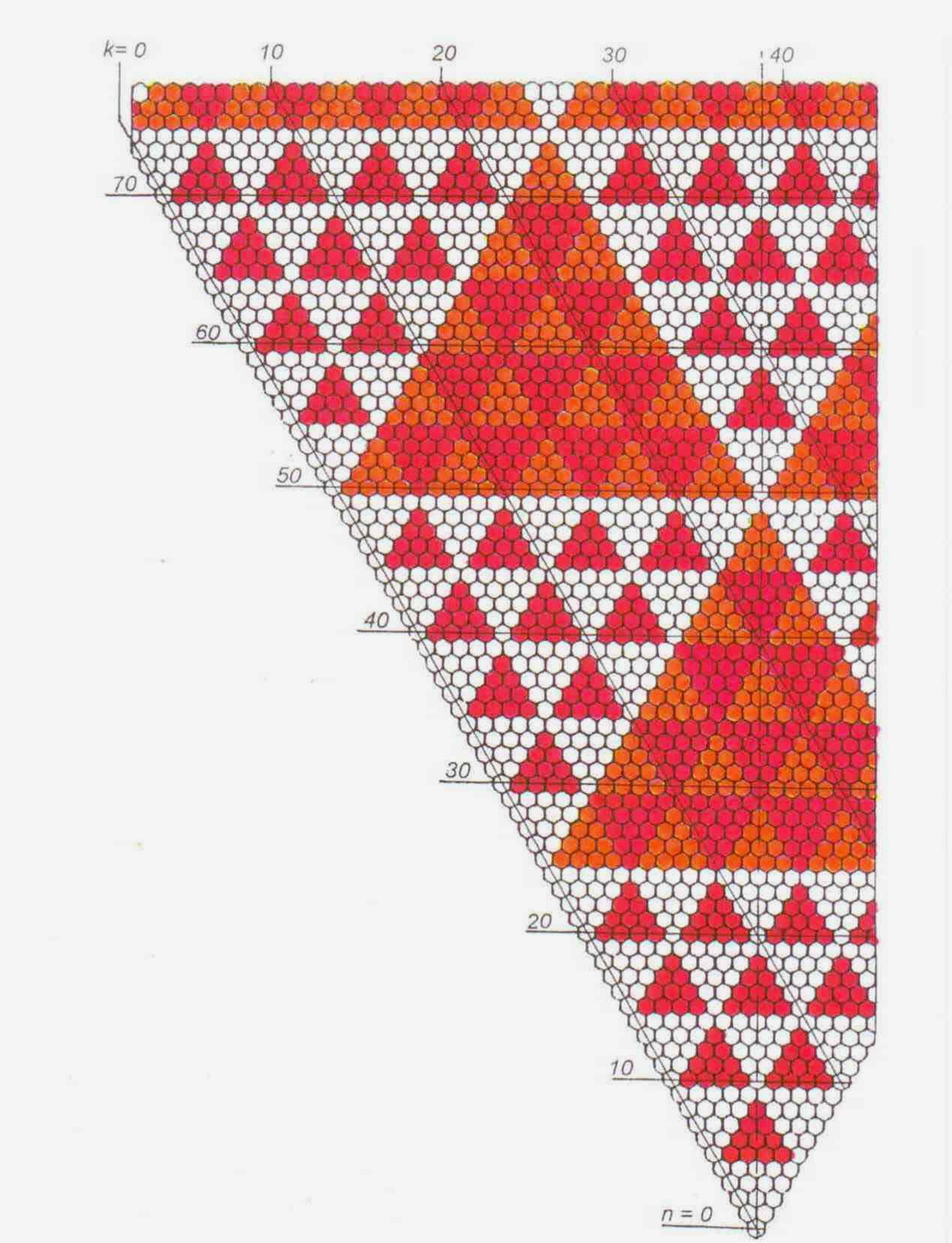

Рис. 2. Организация в треугольнике Паскаля простого субэлемента 5. Она однотипна с той, которая представлена на предыдущем рисунке. Однако усло-жнение цветовых структур для этого простого субэлемента происходит интенсивнее.

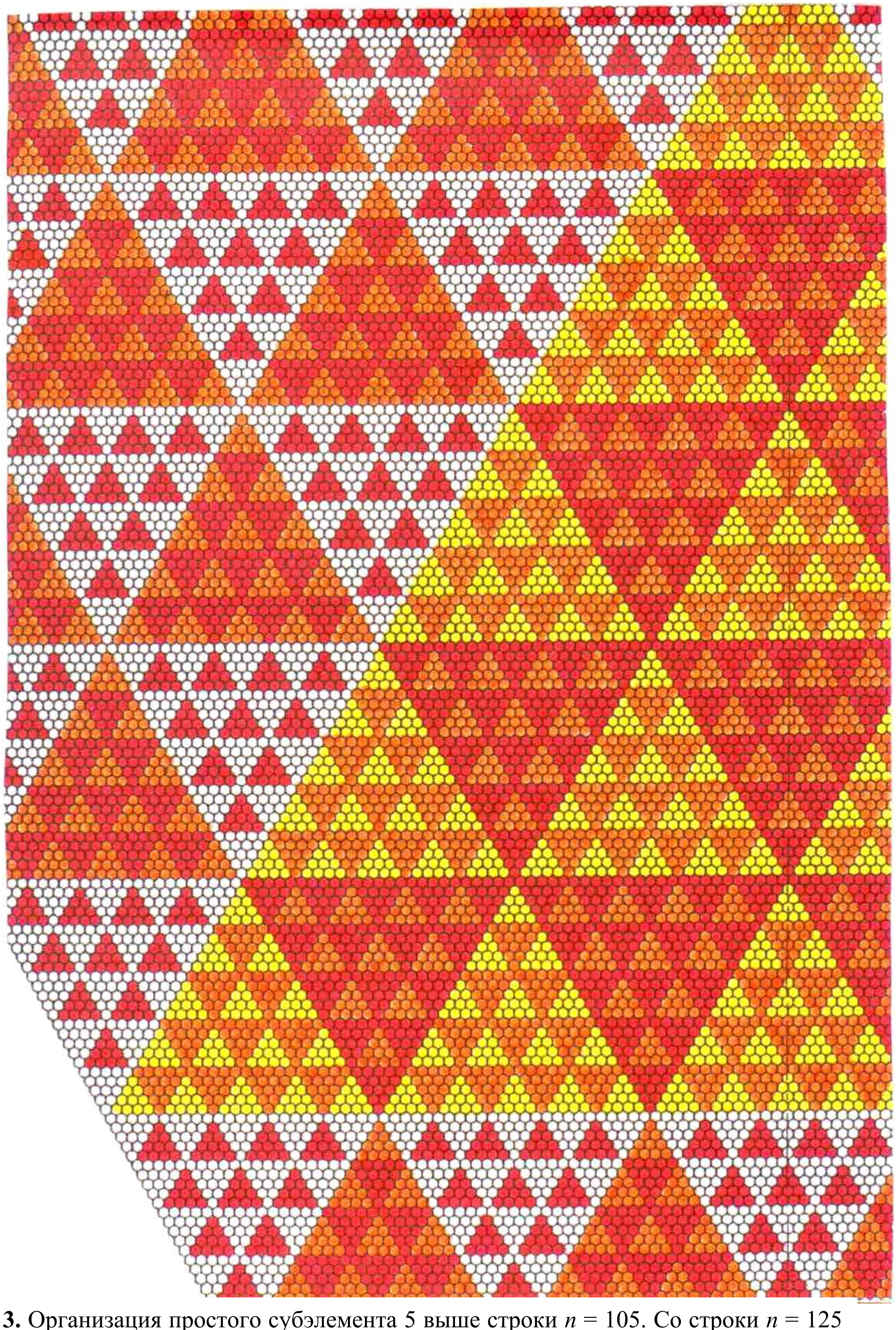

Рис. 3. Организация простого субэлемента 5 выше строки n = 105. Со строки n = 125 = 5^3 появляются субэлементы 125 = 5^3 (ячейки жёлтого цвета).

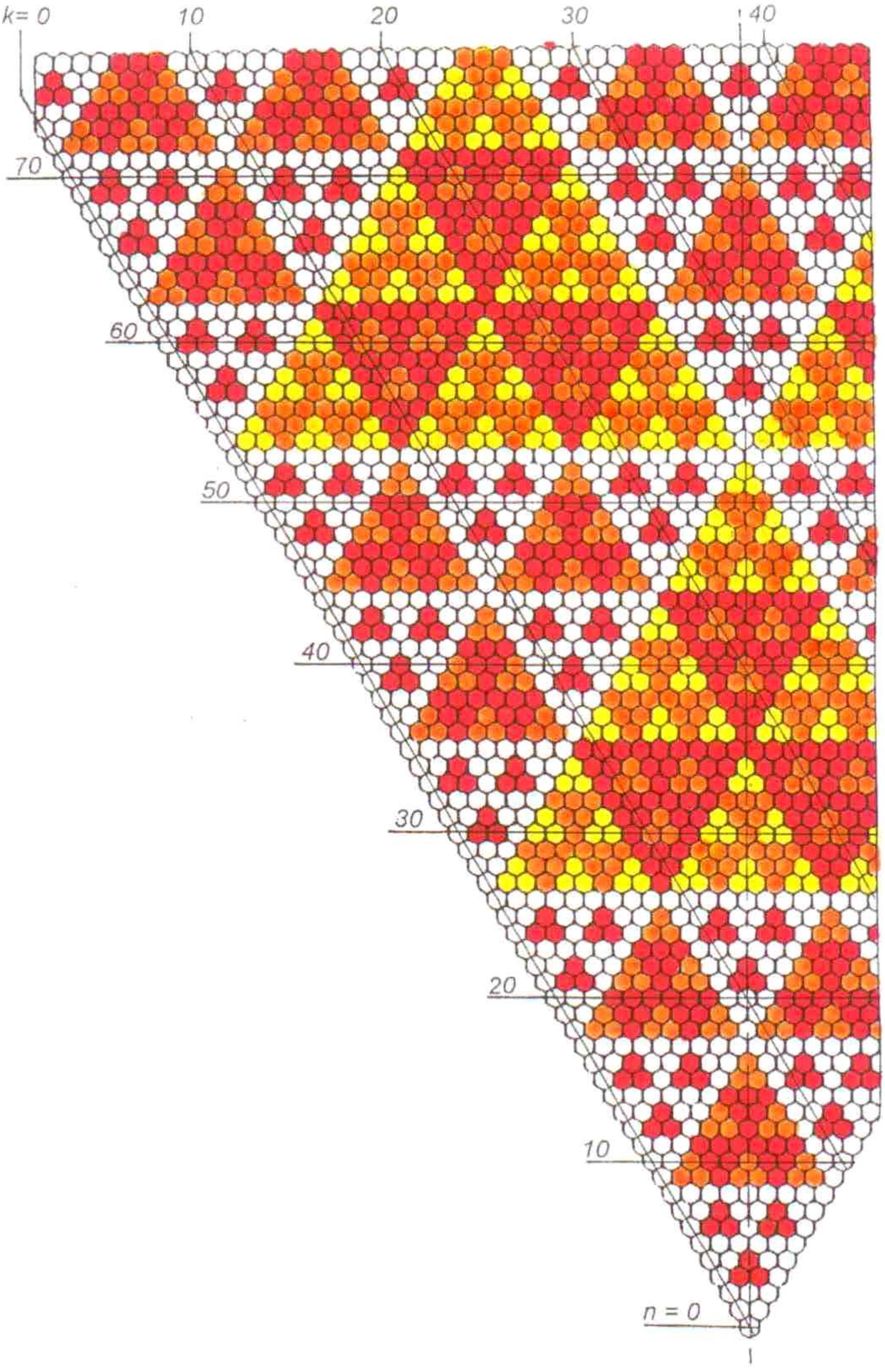

Рис. 4. Организация простого субэлемента 3 в начале треугольника Паскаля. Цветовые структуры при этом однотипны с теми, которые характерны для субэлементов 5 и 7. Однако новые степени этого простого субэлемента появляются значительно чаще и он уже демонстрирует наиболее впечатляющие формы фрактального усложнения своей организации по мере продвижения вверх по строкам *n*.

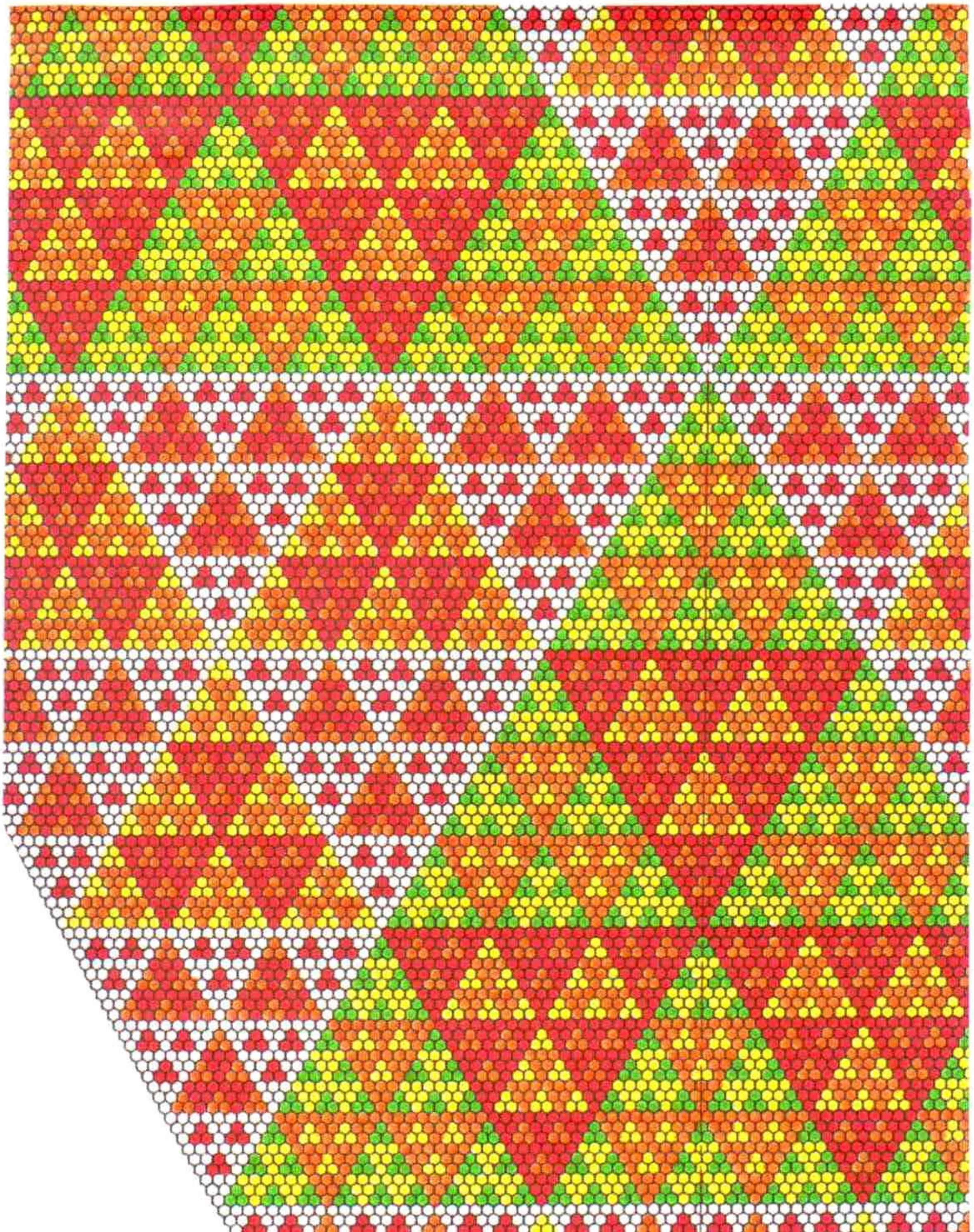

Рис. 5. Организация простого субэлемента 3 выше строки $n = 63$. Со строки $n = 81 = 3^4$ появляются числа $81 = 3^4$ (зелёные ячейки).

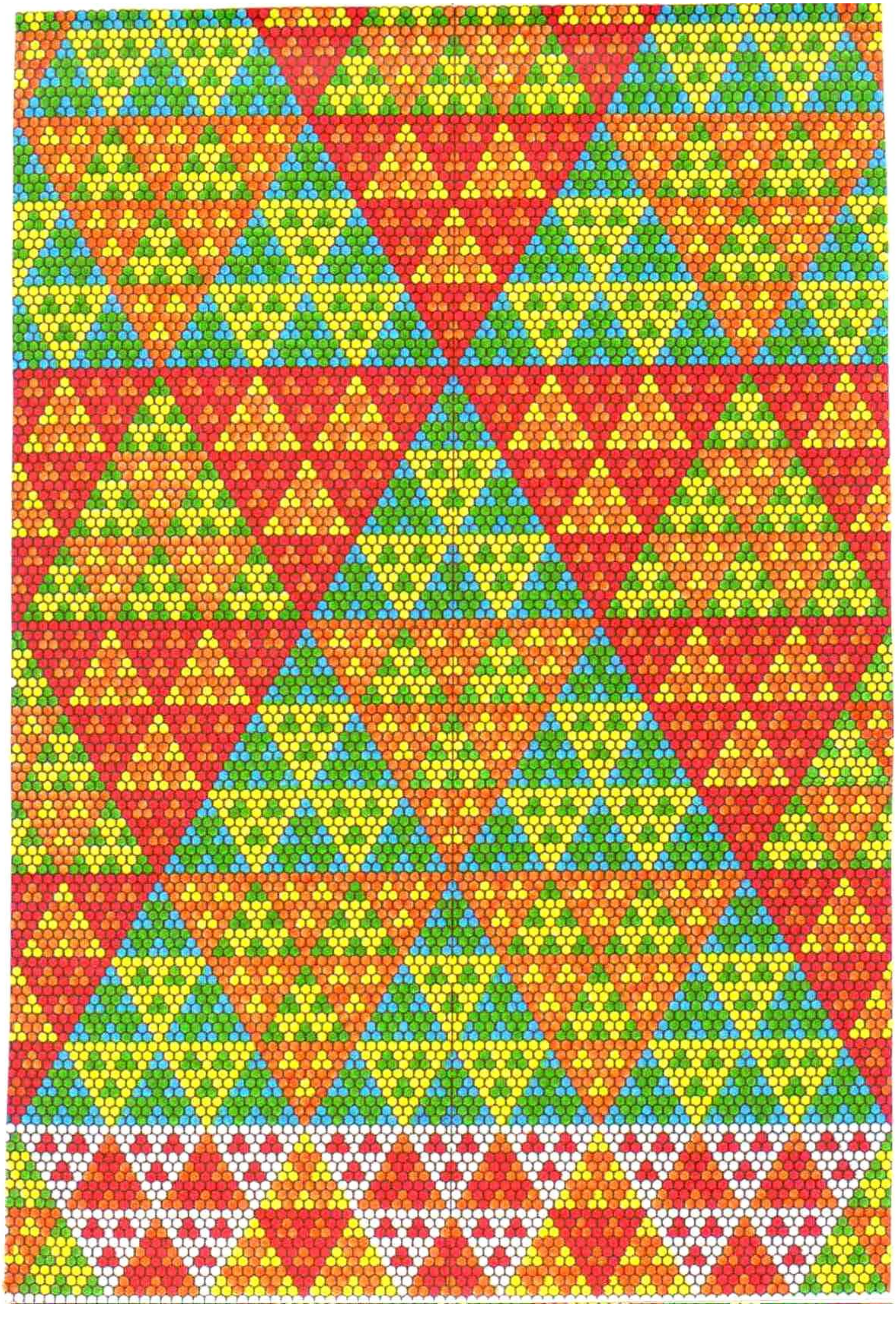

Рис. 6. Организация простого субэлемента 3 выше строки n = 225. Со строки $n = 243 = 3^5$ появляются числа $243 = 3^5$ (голубые ячейки).

Комментарий к рис. 7.

По мере подъёма по строкам *n* степенны́е (и, соответственно, цветографические) структуры у простого субэлемента-делителя 2 усложняются наиболее интенсивно. Поэтому цветографические схемы для него наиболее показательны в плане понимания общего фрактального алгоритма поступательного усложнения. Этот алгоритм у всех простых субэлементов-делителей является однотипным. У субэлемента 2 уже в пределах n = 0–14 образуются элементарные модули, из которых складываются сколь угодно развитые идеально симметричные цветографические структуры.

В каждой центральной сплошь закрашенной зоне имеется сердцевина из ячеек красного цвета. Структура под этой центральной фигурой воспроизводится слева и справа от неё. Это так уже в случае элементарной центральной фигуры на строках n = 4–6. После закономерной бесцветной перемычки по всей строке *n* образуется новая центральная сплошь закрашенная структура с участием нового цвета (соответственно, присутствия на поле чисел треугольника Паскаля простого субэлемента в новой степени). В ней красная сердцевина образуется из красной сердцевины предыдущей центральной сплошь закрашенной фигуры. При этом некрасная «шляпка» над последней окружается слева и справа двумя такими же сплошь закрашенными фигурами с участием красного цвета, которая находится под этой «шляпкой». (Это так уже на строках n = 0–6.) Более сложный фрагмент слева и справа от новой сплошь закрашенной центральной фигуры повторяет тот фрагмент, который находится под ней. (Это тоже так уже на строках n = 0–6.) И так – во всех случаях, когда после очередной закономерной горизонтальной бесцветной перемычки по всей строке *n* вступает в игру новый цвет.

Построение очередного большого фрагмента цветографической схемы с участием нескольких цветов следует начинать с красной сердцевины новой сплошь закрашенной центральной фигуры. Затем в неё вписываются внутренние оранжевые зоны, а сверху и по бокам пристраиваются три внешних оранжевых зоны. (Это – для субэлемента 2, а для субэлементов 3, 5, 7 и т. д. количество вписываемых и описываемых зон большее.) Затем в неё вписываются внутренние жёлтые зоны, а по бокам и сверху приписываются внешние жёлтые зоны. И т. д. После такой прорисовки сплошь закрашенной центральной фигуры слева и справа от неё от простого к сложному прорисовываются те цветографические структуры с бесцветными перемычками, которые находятся под ней.

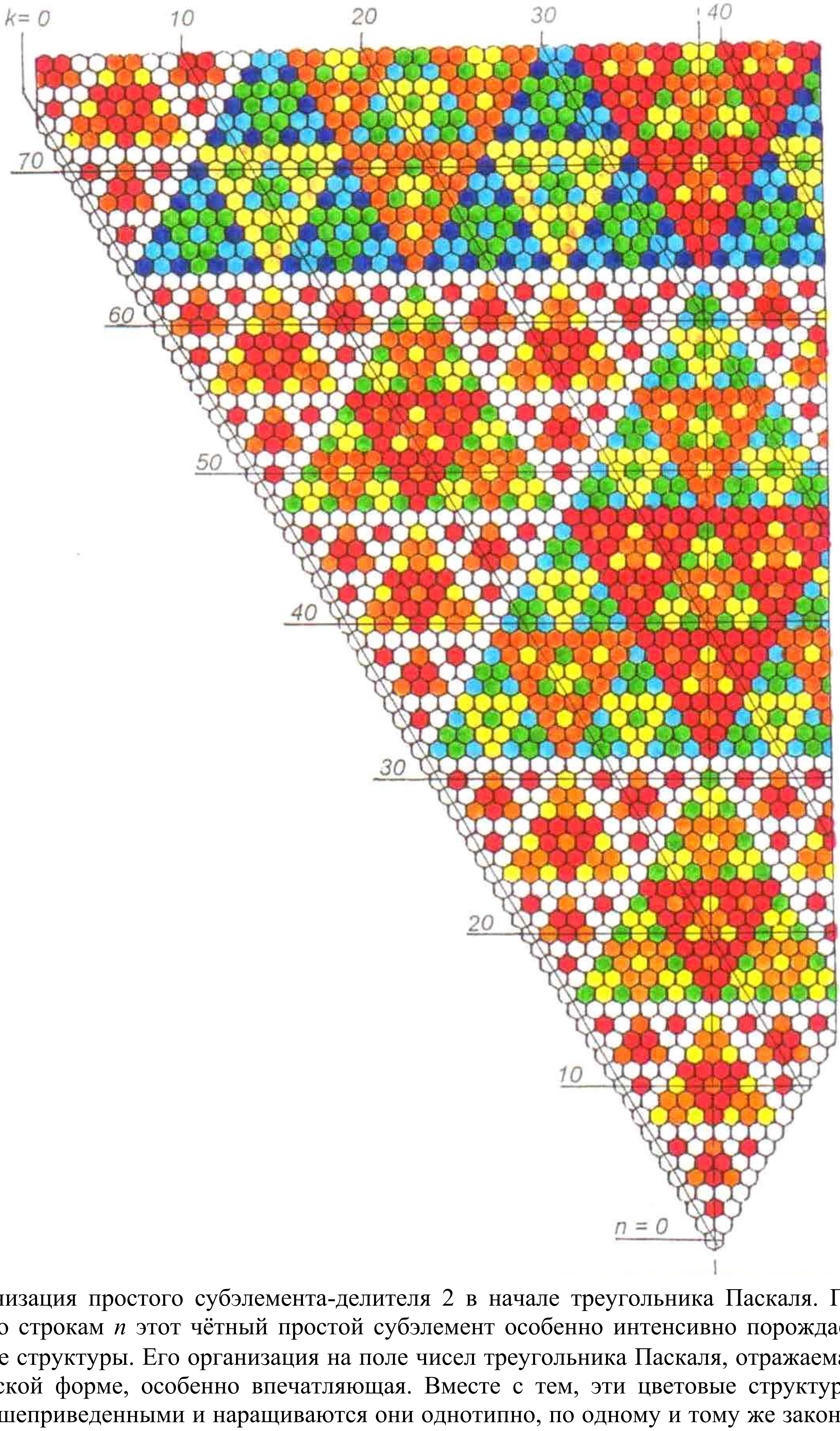

Рис. 7. Организация простого субэлемента-делителя 2 в начале треугольника Паскаля. По мере подъёма по строкам *n* этот чётный простой субэлемент особенно интенсивно порождает новые степенны́е структуры. Его организация на поле чисел треугольника Паскаля, отражаемая в цветографической форме, особенно впечатляющая. Вместе с тем, эти цветовые структуры однотипны с вышеприведенными и наращиваются они однотипно, по одному и тому же закону. Разница только в том, что элементарные треугольные модули в данном случае вырождаются в точечные.

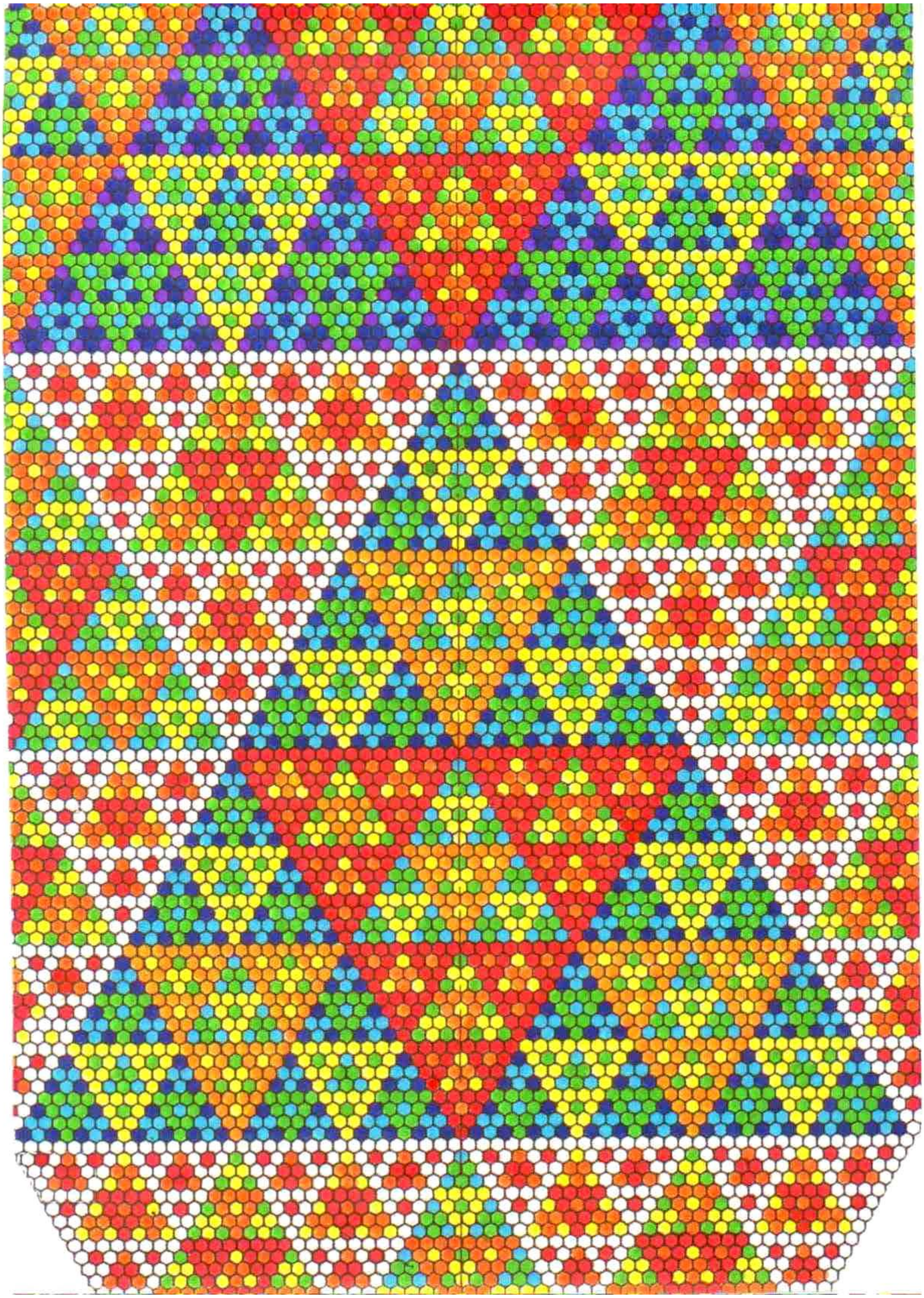

Рис. 8. Организация простого субэлемента-делителя 2 выше строки $n = 51$. Со строки $n = 64 = 2^6$ появляются числа $64 = 2^6$ (синие ячейки).

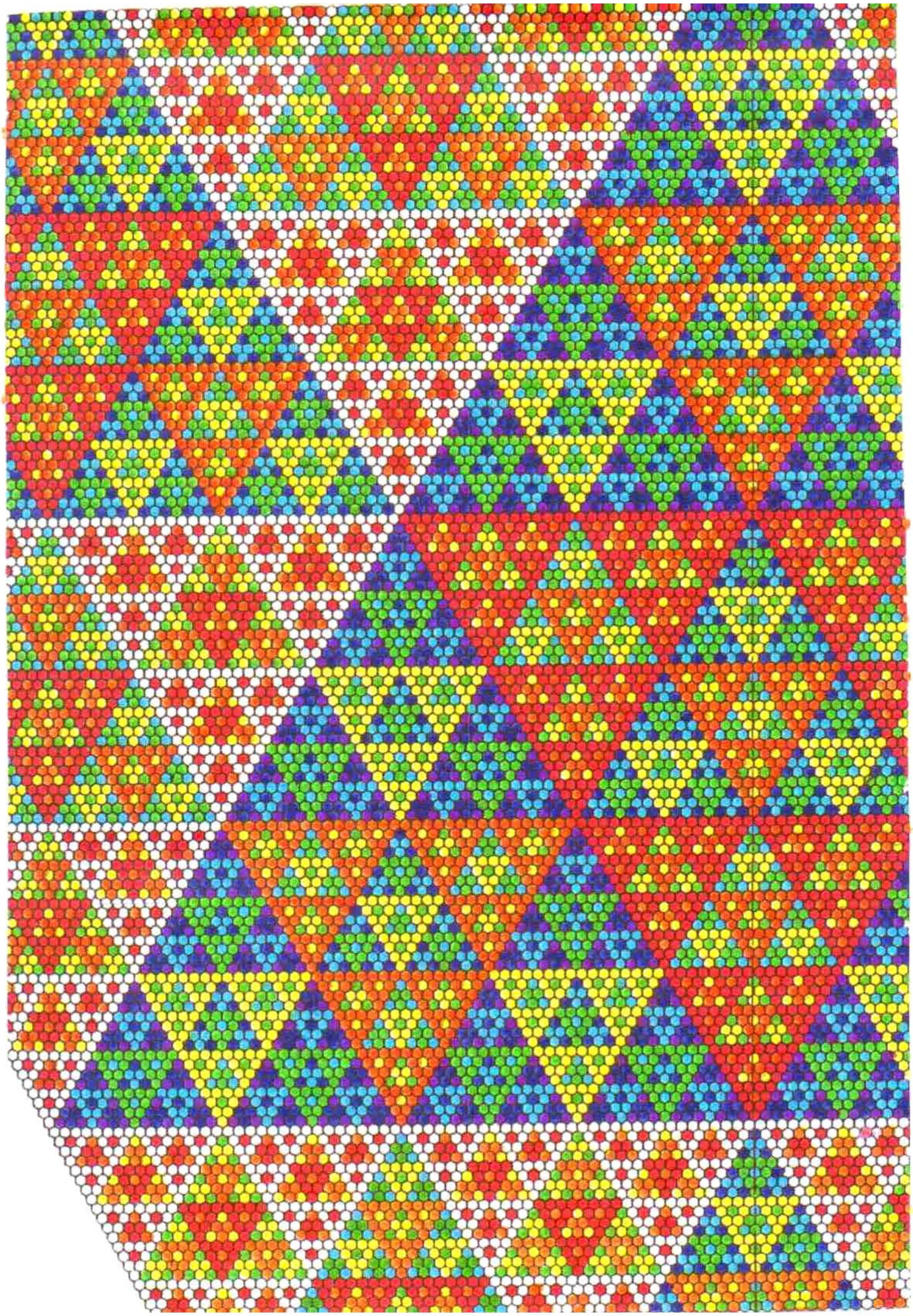

Рис. 9. Организация простого субэлемента-делителя 2 выше строки $n = 108$. Со строки $n = 128 = 2^7$ появляются числа $128 = 2^7$ (фиолетовые ячейки). Засияла семицветная фрактальная радуга треугольника Паскаля.

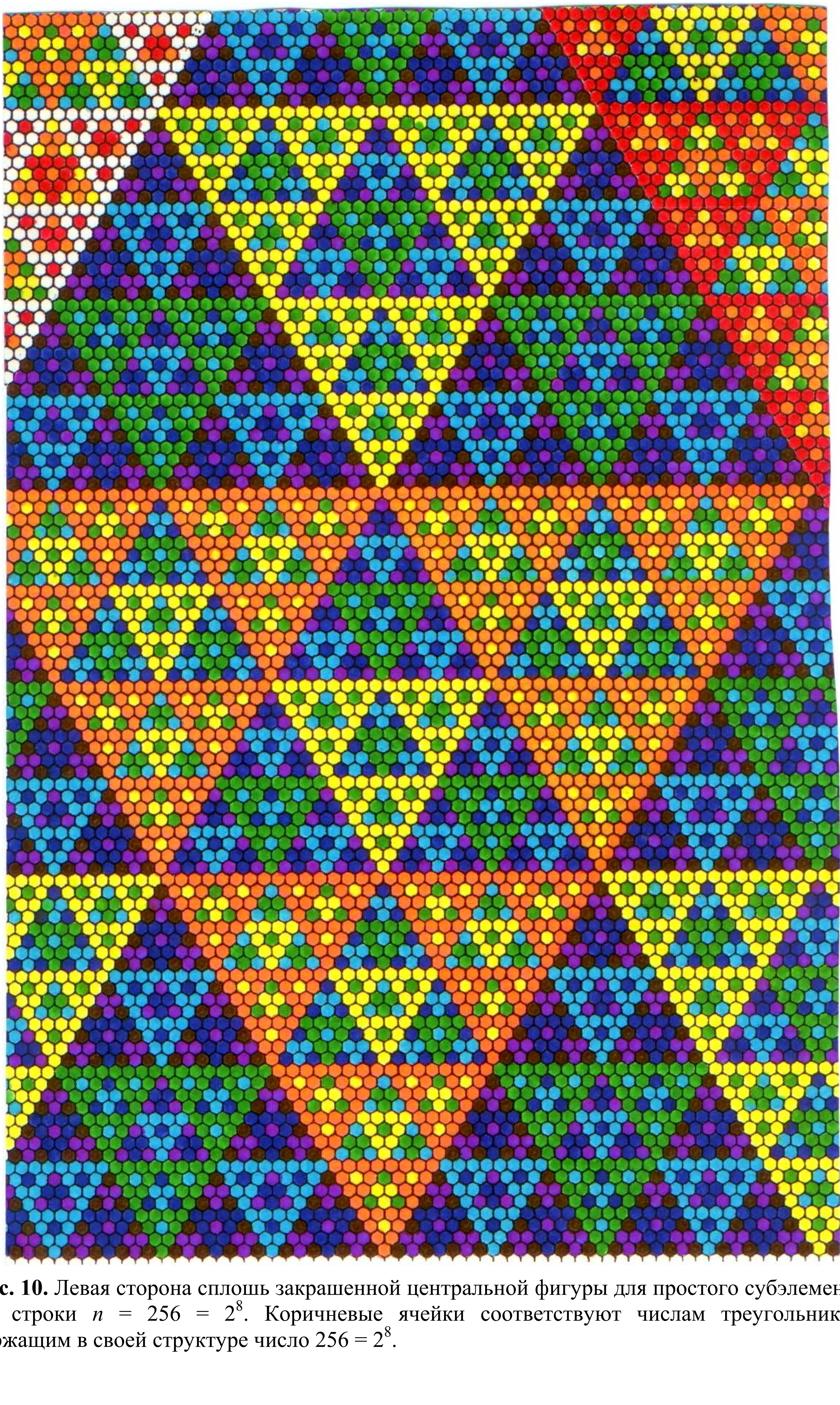

Рис. 10. Левая сторона сплошь закрашенной центральной фигуры для простого субэлементаделителя 2 со строки $n = 256 = 2^8$. Коричневые ячейки соответствуют числам треугольника Паскаля, содержащим в своей структуре число $256 = 2^8$.

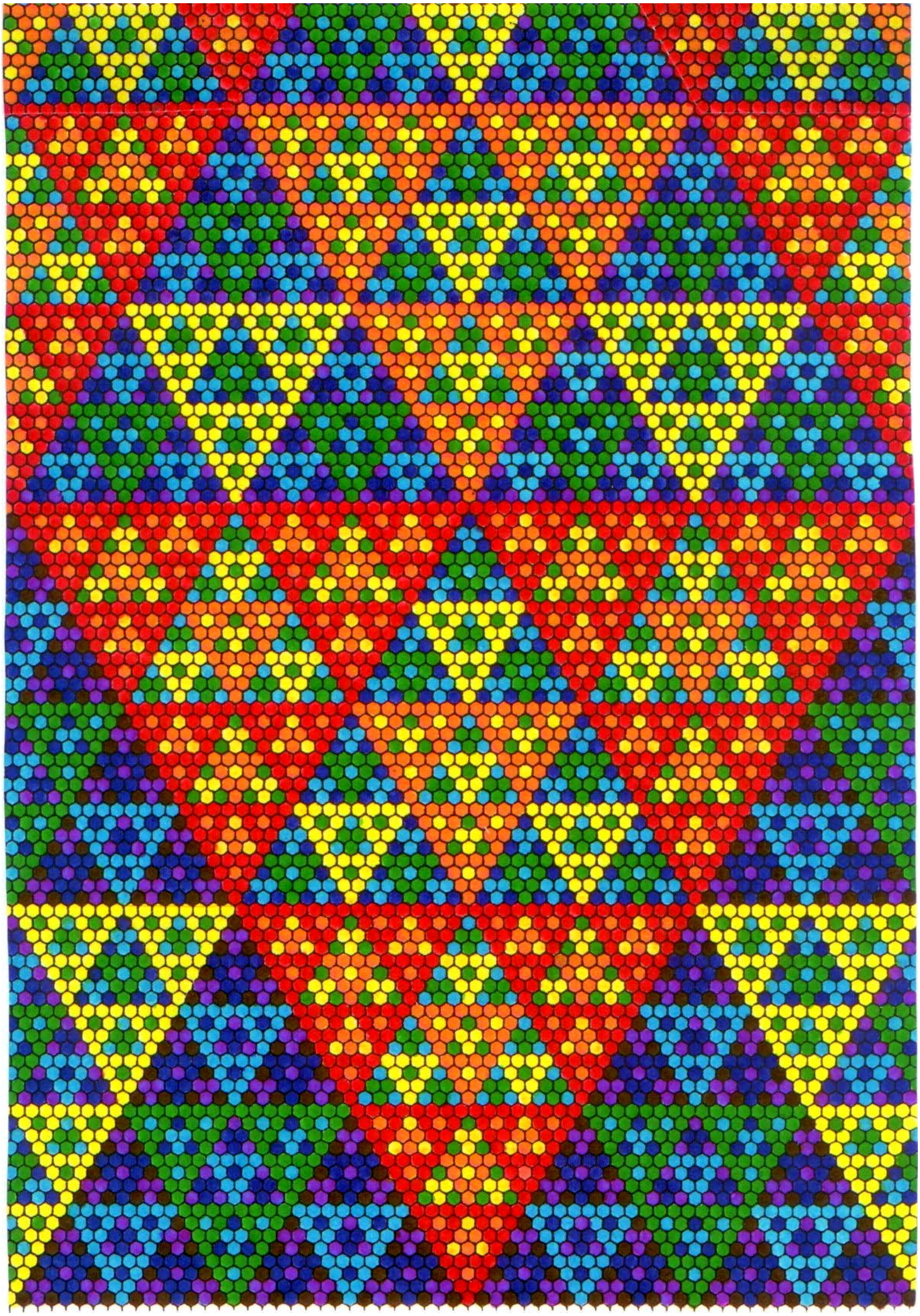

Рис. 11. Сердцевина центральной сплошь закрашенной фигуры для простого субэлемента-делителя 2, начиная со строки $n = 256 = 2^8$. Вертикальная ось симметрии треугольника Паскаля проходит через середину рисунка.

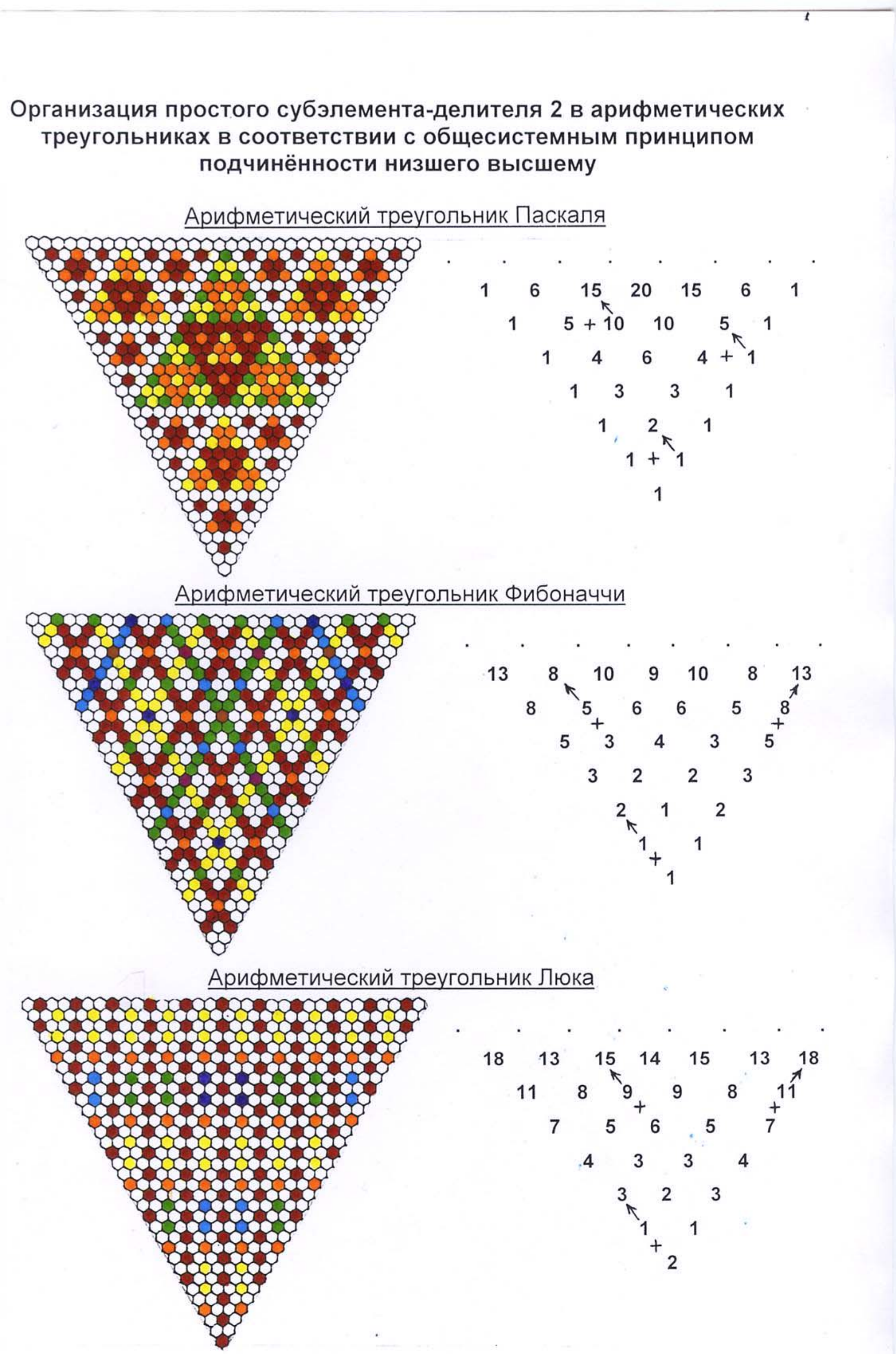

Рис. 12. В случае арифметических треугольников общесистемная подчинённость низшего высшему наглядна и совершенно очевидна.