Г. Я. Мартыненко

Классификационный треугольник уравнений, связанных с золотым сечением

Процесс открытия все новых и новых замечательных свойств золотого сечения обречен на непрерывность. Причем свойства эти отличаются удивительной красотой, в которой царствуют простота и порядок. Это заставляет вспомнить известную числовую меру американского математика G. Биркгофа и ее интерпретатора немецкого искусствоведа М. Бензе (Birkhoff, 1933; Bense,1969)

$$M = \frac{O}{S},$$

где M – мера эстетического, O – мера порядка, S – мера сложности, т. е. мера эстетического прямо пропорциональна мере порядка и обратно пропорциональна мере сложности. Сам Биркгоф относился к своей формуле не слишком серьезно (и даже иронично), но все-таки пытался конструировать с ее помощью вазы, мелодии и стихи, предупреждая при этом, что «полное количественное применение основной формулы возможно только когда, когда элементы порядка преимущественно формальны» (Birkhoff, 1933, с. 13). Можно по-разному относиться к этой формуле, но если отнестись к ней всерьез, то золотое сечение и семейство его обобщений могут претендовать на одно из первых мест в череде явлений, подтверждающих ее справедливость. Давно замечено, что красота золотого сечения и последовательностей Фибоначчи проявляется в их удивительной *симметрийной упорядоченности и предельной простоте* математических структур. Это относится как к числовым, так и к алгебраическим и геометрическим конструкциям.

В данной работе мы рассмотрим варианты алгебраических структур и их пространственную упорядоченность.

Исходное уравнение, на основании которых строятся обобщения Фибоначчи имеет вид:

$$x^n - x^{n-k} - 1 = 0,$$

где $n > k$, при этом k и n пока будем считать целыми числами.

На основании этой формулы может быть построен треугольник обобщений золотого сечения, «вершиной» которого является классическое уравнение Эвклида. Похожий способ упорядочивания использовал Д. И. Менделеев в своей знаменитой таблице химических элементов, а также советский лингвист Л. В. Щерба при классификации гласных фонем (треугольник Щербы). Напомним также, что табличный способ систематизации последовательностей Фибоначчи использован в работе (Мартыненко, 2008). В приведенной ниже таблице по вертикали располагаются значения n, а по горизонтали значения $n - k$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	$x^2 - x - 1 = 0$ 1,618								
3	$x^3 - x - 1 = 0$ 1,325	$x^3 - x^2 - 1 = 0$ 1,465							
4	$x^4 - x - 1 = 0$ 1,221	$x^4 - x^2 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}618} = 1{,}272$	$x^4 - x^3 - 1 = 0$ 1,380						
5	$x^5 - x - 1 = 0$ 1,167	$x^5 - x^2 - 1 = 0$ 1,194	$x^5 - x^3 - 1 = 0$ 1,236	$x^5 - x^4 - 1 = 0$ 1,325					
6	$x^6 - x - 1 = 0$ 1,135	$x^6 - x^2 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}325} = 1{,}151$	$x^6 - x^3 - 1 = 0$ $\sqrt[3]{1{,}618} = 1{,}174$	$x^6 - x^4 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}465} = 1{,}209$	$x^6 - x^5 - 1 = 0$ 1,285				
7	$x^7 - x - 1 = 0$ 1,116	$x^7 - x^2 - 1 = 0$ 1,124	$x^7 - x^3 - 1 = 0$ 1,138	$x^7 - x^4 - 1 = 0$ 1,158	$x^7 - x^5 - 1 = 0$ 1,191	$x^7 - x^6 - 1 = 0$ 1,255			
8	$x^8 - x - 1 = 0$ 1,098	$x^8 - x^2 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}221} = 1{,}105$	$x^8 - x^3 - 1 = 0$ 1,115	$x^8 - x^4 - 1 = 0$ $\sqrt[4]{1{,}618} = 1{,}128$	$x^8 - x^5 - 1 = 0$ 1,146	$x^8 - x^6 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}380} = 1{,}175$	$x^8 - x^7 - 1 = 0$ 1,232		
9	$x^9 - x - 1 = 0$ 1,085	$x^9 - x^2 - 1 = 0$ 1,091	$x^9 - x^3 - 1 = 0$ $\sqrt[3]{1{,}325} = 1{,}098$	$x^9 - x^4 - 1 = 0$ 1,107	$x^9 - x^5 - 1 = 0$ 1,119	$x^9 - x^6 - 1 = 0$ $\sqrt[3]{1{,}465} = 1{,}136$	$x^9 - x^7 - 1 = 0$ 1,162	$x^9 - x^8 - 1 = 0$ 1`,213	
10	$x^{10} - x - 1 = 0$	$x^{10} - x^2 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}167} = 1{,}080$	$x^{10} - x^3 - 1 = 0$ 1,086	$x^{10} - x^4 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}193} = 1{,}092$	$x^{10} - x^5 - 1 = 0$ $\sqrt[5]{1{,}618} = 1{,}101$	$x^{10} - x^6 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}240} = 1{,}113$	$x^{10} - x^7 - 1 = 0$ 1,126	$x^{10} - x^8 - 1 = 0$ $\sqrt{1{,}325} = 1{,}151$	$x^{10} - x^9 - 1 = 0$ 1,197

Значения корней уравнений, размещенных в таблице, вычислялись с помощью повторных радикалов. Для этого использовалась универсальная формула:

$$x \to \sqrt[n-k]{\sqrt[\frac{n-k}{n}]{1+\sqrt[\frac{n-k}{n}]{1+\sqrt[\frac{n-k}{n}]{1+\ldots}}}}\,.$$

Например для уравнения $x^5 - x^3 - 1 = 0$

$$x \to \sqrt[3]{\sqrt[\frac{3}{5}]{1+\sqrt[\frac{3}{5}]{1+\sqrt[\frac{3}{5}]{1+\ldots}}}} = 1{,}236\,.$$

Прокомментируем распределение уравнений по треугольнику. Вертикальный «катет» (первый столбец) данного треугольника состоит из уравнений Газале (коричневые клетки) (Газале, 2002), а «гипотенуза» – из уравнений Стахова (сиреневые клетки) (Стахов, 2003). В пространстве между катетом и гипотенузой располагается множество обобщений, в которых степени при первом члене кратны таковому при втором. При этом «биссектрисой» (или осью симметрии), исходящей из вершины треугольника, является цепочка уравнений «лестницеобразно» спускающейся вниз с пропуском одной строки. Решениями этих уравнений являются возрастающие четные степени корня из золотого числа 1,618. Эту цепочку, уравнений, закрашенную желтым цветом, мы позволим себе назвать обобщением Г. Мартыненко.

Коэффициенты уравнений, расположенных в незакрашенных клетках, также кратны соответствующим коэффициентам «вышестоящих» и «нижестоящих» уравнений. Например, уравнение $x^5 - x^2 - 1 = 0$ кратно вышестоящему уравнению $x^{\frac{5}{2}} - x - 1 = 0$ и нижестоящему $x^{10} - x^4 - 1 = 0$. Показатель степени при первом члене при этом оказывается дробным. Это означает, что в клетках могут располагаться не только целые, но и любые дробные числа.

А теперь рассмотрим другие вариации уравнений золотого сечения. Начнем со столбцов.

Во втором столбце коричневым цветом закрашены клетки, в которых располагаются уравнения, в которых показатели степени при первом и втором членах вдвое больше чисел исходной цепочки уравнений Газале. Решениями этих уравнений являются квадратные корни из решений исходных уравнений.

Во втором столбце также располагаются уравнения Газале, но здесь уже работает кратность, равная трем. В нашей таблице реально фигурирует только одно такое уравнение, но если «основание» треугольника расширять, мы получим уравнения с коэффициентами 12,3; 15,3 и т. д.

В четвертом, шестом и десятом столбцах располагаются уравнения Стахова, кратные 2 относительно чисел основной цепочки, а в столбце 6 мы видим также уравнение Стахова, коэффициенты которого кратны 3 относительно уравнений исходной цепочки. Решения этих уравнений также определяются величиной показателя степени при втором члене. Все стаховские уравнения (основные и кратные) закрашены сиреневым цветом.

В заключение отметим, что предлагаемый треугольник является не только классификационной таблицей уравнений и их корней, но может также рассматриваться как способ решения обширного класса уравнений высоких порядков. В разрешении этой проблемы со времен Кардано особых успехов не достигнуто. Эту тему автор надеется обсудить в следующей работе. Заметим только, что трехчленные уравнения обсужденного типа имеют явные решения при любых значениях степеней при первом и втором членах. Так, корень уравнение $x^{2,7} - x^{1,4} - 1 = 0$ вычисляется следующим образом:

$$x = \sqrt[\frac{1}{1,4}]{1 + \sqrt[\frac{1,4}{2,7}]{1 + \sqrt[\frac{1,4}{2,7}]{1 + \ldots}}} \approx 1,437$$

Литература

1. *Bense M.*. Einführung in die Informations-theoretische Ästhtik. Hamburg, 1969
2. *Birkhoff G. D.* Aesthetic Measure. Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1933
3. *Gazale M.* Гномон. От фараонов до фракталов. Перев. с англ. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002
4. *Мартыненко Г.Я.* Пространственная типология последовательностей Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14720, 19.02.2008. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/2321077_Typology_Fibonacci.pdf.
5. *Стахов А. П.*. Сакральная геометрия и математика гармонии // Проблеми гармонії, симетрії і золотого перетину в природі, науці та містецтві. Вінниця: Вінницький державний аграрний університет, 2003. С. 8–26.