С.Л. Василенко

ОБЩЕЕ И ЧАСТНОЕ В СИСТЕМАТИКЕ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ

В порядке научной дискуссии в рамках
Международной online-конференции
"*Золотое сечение в современной науке*",
посвященной 70-летию профессора,
д.т.н. Алексея Петровича СТАХОВА

Мы избежим половины разногласий, если сойдемся в определениях.
Верно определяйте значения слов, и половина споров станет ненужной.

Рене Декарт (1596–1650),
французский философ и математик

Введение.

Объектом исследования-эссе являются обобщения "золотого" сечения (ЗС);

предметом анализа – обоснованность и корректность лингвистических конструкций, содержащих словосочетание «обобщенное "золотое" сечение (пропорция)».

основной задачей – выделение общего и частного в систематике ЗС.

В общих чертах данный вопрос затронут в работах [1, 2].

Однако фрагментарность, а порой излишняя эмоциональность его изложения стали причиной критики [3, 4], что в конечном итоге привело к смещению дискуссии (больше одностороннего характера) в другую плоскость, хотя и то и другое лишний раз подчеркивает актуальность темы, давая серьезный повод к ее более обстоятельному освещению.

Для неискушенного читателя в качестве затравочного посыла позволим себе одно образное сравнение.

Корректно ли, а если да, то насколько далеко распространяется понятие «обобщенного самоката» или «обобщенного велосипеда», например, на ракету, если и то и другое является средствами движения (доставки)?

Другими словами, может и не нужны нам вовсе такие слова как «самолет» или «машина», а пусть все будет обобщением колеса – действительно истинного творения человека.

Но не заблудимся ли потом в причинно-следственных связях или не сведем многообразие специфических оттенков русского языка к набору компьютерного сленга?

Перед началом полемизирования по любой теме, надо сначала условиться о ключевых определениях относительно исследуемого объекта. Кроме того, обсуждение объекта, имеющего в первооснове математическую сущность, надлежит вести не ниже некоторого минимально приемлемого уровня знаний. При несоблюдении любой из этих позиций оно подвержено повышенному риску превратиться в пустую говорильню или «спор ни о чем».

Автор не призывает во всем стремиться к предельно-исключительной строгости, которая способна завуалировать истину, но так или иначе строгость в умозаключениях позволяет связать все понятия логически [5], а четкость и ясность в определениях – избежать в дальнейшем ненужных методологических разногласий и противоречий.

Необходимо также следовать правилам формальной логики как искусства правильного мышления, основанного на корректном определении и классификации понятий.

Под определением понятия рекомендуется понимать описание вводимого им объекта с помощью других более широких (родовых) понятий и дополнительных словосочетаний (межвидовых отличий), обеспечивая однозначную идентификацию терминов в рамках системы ИСО 704:2000 [6]:

Понятие – единица мысли для классификации объектов внутреннего и внешнего мира. Определение – полное описание понятия посредством известных понятий, главным образом словесными средствами. Термин – слово или словосочетание (код или имя понятия), используемое для обозначения понятия. Термины должны быть лингвистически правильными и точными, краткими и удобными для образования производных, однозначно выражать только одно понятие (!). Определение должно содержать *существенные признаки,* быть *полным* (соответствовать объему выражаемого понятия) и *пригодным для идентификации* понятия в рамках определенной системы понятий, отличаться *краткостью, исключать логический круг, тавтологию и отрицательные признаки*.

И последнее для уже затянувшейся преамбулы с сакраментальным вопросом «А зачем все это нужно?»

Действительно, по большому счету, вряд ли что-то изменится, если собственные голоса заглушают остальные. С другой стороны, каких только новых, часто несообразных, словесных конструкций с претензией на оригинальность не встретишь сегодня в печати и СМИ.

Может и не стоит этому придавать серьезного значения, – само уладится.

Но Академия Тринитаризма и Институт Золотого Сечения, чтобы и где ни говорили, по праву занимают одно из ведущих мест по разработке и популяризации идей в выбранном направлении, так же как неоспоримы личные заслуги в этом А.П. Стахова, В.Ю Татура и др.

Обширная аудитория участвует в обсуждении, порой горячем (а это верный признак здорового общения), и не менее широкая постигает азы по материалам сайта.

Наступит время, а оно уже приходит, когда наряду с теоретическими разработками ученые и инженеры предложат механизмы их практического воплощения, а от описательно-созерцательного описания перейдут к решению другого немаловажного вопроса «А что это дает?»

И здесь очень важно правильно расставить вешки-указатели, или как говорят, показать дорожную карту, чтобы «входящие в тему» могли легко ориентироваться на местности "золотого" сечения. Чтобы им не приходилось тратить время на открытие истин и с большей продуктивностью продолжать дело, которому многие из нас посвятили и продолжают отдавать лучшие часы своего творчества.

Теперь ближе к существу затронутой темы.

Конкретизация предмета обсуждения. Обобщить (по Ожегову С.И.) – выразить основные результаты в общем положении и придать общее значение чему-нибудь, в нашем случае – "золотому" сечению (пропорции).

Приведем несколько знакомых положений о феномене, который пытаются обобщать.

Прежде всего, он имеет еще две равнозначные интерпретации: 1) деление в крайнем и среднем отношении; 2) гармоническое деление (пропорция).

Пропорция (лат. *proportio*) в общем случае означает соразмерность.

Пропорция в математике – это равенство двух отношений четырех числовых величин $A/B = C/D$, где A и D называют крайними, B и C – средними членами пропорции.

Есть один уникальный случай пропорции, когда ее средние члены равны, а последний член представляет собой разность между первым и средним, то есть $A/B = B/(A-B)$.

В таком виде она имеет единственное решение, приводит к знаменитой константе $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, и вследствие исключительных свойств этого числа особо выделена среди всевозможных вариантов пропорции (сечения – в геометрической трактовке), обретя общеизвестные прилагательные: *золотая*, *гармоническая* и даже *божественная* пропорция.

Все три довольно красочных и экспрессивных эпитета мирно уживаются друг с другом и применяются разными людьми по их усмотрению как тождественные.

Итак, имея бескрайнее море конкретных проявлений пропорции, человек выделил для себя одну особую.

Это как бы из множества растений, мы выбрали одно, на наш взгляд, необычное, и назвали его, допустим морковкой или лотосом.

В таком контексте "золотое" сечение полностью соответствует выше названным требованиям терминологии, в частности, однозначно выражает только одно понятие, содержит существенные признаки и полностью пригодно для идентификации.

ЗС и Фибоначчи. Возникнув еще в древности, как уникальная пропорция, "золотое" сечение наполнилось новым содержанием и еще ярче засияло в связи с открытием чисел Фибоначчи. С тех пор они шагают вместе, дополняя друг друга и открывая перед нами все новые и удивительные грани своей неповторимости.

Они по сей день идут рядом, правда, не всегда синхронно.

Часто их пути расходились. Например, обнаруживались новые свойства ЗС, но без увязки с числами Фибоначчи.

И наоборот последовательности Фибоначчи постепенно расширялись, причем уровень их обобщения достиг таких высот, что от ЗС там ни осталось и следа, хотя и не исключается его незримое присутствие (без явных признаков), о чем будет сказано ниже.

И если для чисел Фибоначчи слова «золотое сечение и Фибоначчи» – это практические синонимы, то в общей систематике Фибоначчи – уже две разные математические конструкции.

Только в одном известном на сегодня случае «Фибоначчи» и «золотое сечение» объединяются, образуя синонимическую пару, когда рекуррентная последовательность формируется по схеме $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 1$ с произвольными начальными условиями (f_0, f_1), одновременно не равными нулю, и асимптотически вырождается в ЗС: $\lim_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n = \Phi$.

Примечательно, что (f_0, f_1) – не обязательно только целые числа, с которыми чаще всего и более охотно оперируют, но и любые вещественные, комплексные, иррациональные и др. Кстати, последнее изучено довольно слабо, и здесь молодым ученым еще многое предстоит исследовать и открыть.

Ключевыми свойствами или «визитной карточкой» чисел Фибоначчи изначально являются: начальные условия, рекурсия и аддитивность. Исходя из этого, они могут обобщаться, формируя уже последовательности Фибоначчи, если сохраняется их главное отличие (от других рядов) в виде аддитивной рекурсии с граничными условиями.

Само расширение может идти в нескольких направлениях: за счет привлечения новых членов (увеличения количества слагаемых до 3, 4 и более), за счет введения и изменения весовых коэффициентов различными способами, не только в виде постоянных чисел, но и зависящими от порядкового номера последовательности, и т.п.

Но, продолжая оставаться систематикой Фибоначчи, в своем прогрессировании с элементами нововведения и усложнения они начисто теряют свойства ЗС в явственном виде.

Так, числа «Трибоначчи», придуманные американским математиком Марком Фейнбергом, расширяют последовательности Фибоначчи в сторону 3-членной аддитивно-линейной рекурсии

$$(T_0, T_1, T_2) = (0, 0, 1), \quad T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3},$$

которая имеет свою, только ей присущую асимптотику

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_{n-1} + T_n + T_{n+1}}{T_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(c + \frac{4}{c} + 1\right) \approx 1{,}839,$$

где $c = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}$ и связано с корнем характеристического уравнения $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

Но никакого (на сегодня выявленного) отношения к "золотому" сечению числа Трибоначчи уже не имеют.

Параллель с цепными дробями. Известно [7], что любое вещественное число x можно эффективно и единственным образом представить рациональным приближением в виде цепной дроби:

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + ...}},$$

где a_0 – целое число, все остальные элементы a_i – положительные целые (натуральные) числа, которые вычисляются рекурсивно:

$$a_0 = \lceil x \rceil, \quad x_0 = x - a_0, \qquad a_n = \lceil x_{n-1}^{-1} \rceil, \quad x_n = x_{n-1}^{-1} - a_n,$$

$\lceil x \rceil$ – целая часть числа x.

Согласно теореме Кузьмина [8, с. 13] вероятность появления среди элементов a_i натурального числа k задается эффективной (но весьма не простой в доказательстве!) формулой

$$p_k = \lg_2\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \lg_2\left(\frac{k+1}{k}\frac{k+1}{k+2}\right).$$

То есть в цепных дробях совокупного множества вещественных чисел наиболее вероятным является все-таки присутствие единицы

$$p_1 = \lg_2 4/3 \approx 0{,}42\ ,$$

а уже потом – двойки, тройки и т.д.

Но есть один уникальный случай, когда все a_i состоят только из единиц или «плотность единиц равна единице» (по Кузьмину), который приводит к "золотому" сечению Ф!

К слову, именно эта цепная дробь хуже всего сходится к своему прародителю.

Но сама "золотая" пропорция от этого не поблекла, а наоборот заиграла в глазах исследователей новой гранью.

"Включаем" псевдонаучную логику обобщения: Пусть $a_i = 1 \Rightarrow x = \Phi$ – исходная цепная дробь с одними единицами, которая приводит к числу Ф. Тогда другая цепная дробь, у которой одно или несколько значений a_i отличается от 1, обобщает исходную дробь. Откуда вытекает, что цепные дроби являются обобщением "золотого" сечения, после чего опять же логически следует противоречие на уровне полного абсурда – вся числовая ось в такой своей стилизации обобщает "золотое" сечение.

Из того, что неповторимое "золотое" сечение можно представить не менее уникальной цепной дробью, вовсе не следует, что цепные дроби его обобщают.

ЗС и алгебраические уравнения.

С цепными дробями вроде бы ясно, если бы не одно обстоятельство.

То же самое (в смысле логики) происходит с некорректным обобщением "золотого" сечения на уровне алгебраических уравнений.

Приняли за исходный посыл тот факт, что квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ приводит к ЗС. Исследуются другие уравнения, например $x^2 - mx - q = 0$ (металлические пропорции), $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ (p-сечения) или $x^p(x-1)^k - 1 = 0$ (pk-сечения), которые при $m = q = 1$ и $p = k = 1$ вырождаются в характеристическое уравнение "золотого" сечения, и только на этом основании (!?) объявляются обобщением или расширением ЗС.

В том, что они охватывают более широкую область пропорциональных соотношений, сомнений нет.

Что это составная часть общей математической теории гармонии, а точнее математической теории пропорций, включая соотношение целого и его частей, – тоже правильно.

Но при чем здесь слово "золотое"?

Практически любое алгебраическое уравнение произвольной степени с хорошо подобранными коэффициентами является генератором рекуррентных числовых последовательностей, в которых отношение соседних членов, как правило, стремится к максимальному действительному корню этих уравнений.

Эти последовательности допустимо называть расширением последовательностей Фибоначчи, находить в них свои закономерности, получать и анализировать разные зависимости.

Но это другая систематика, иные соотношения, совсем не связанные с ЗС.

Из всех сечений и пропорций дополнительными прилагательными "золотое" и "гармоническая" выделен особый единичный случай, и тем самым присвоены соответствующие определения.

Теперь на него мы алогично навешиваем дополнительное слово "обобщенное", хотя нужно просто без слова "золотое" давать (в случае необходимости) свои качественные характеристики новым сечениям. Например: *p*-сечения или с подчеркиванием авторства – *p*-сечения Стахова, *pk*-сечения Василенко и т.п.

Тем самым выделяем одно понятие, наделяем его существенным признаком, исключаем ненужную тавтологию и полностью обеспечиваем однозначную идентификацию в системе ИСО 704:2000.

Эти сечения или разновидности пропорции действительно расширяют наши знания и приводят к новым числовым закономерностям. Но золота в них уже нет. Это самостоятельный класс математической пропорции, ничего не имеющий общего с ЗС в явном виде, кроме того, что они оба порождены алгебраическими уравнениями.

Так, уравнение $x^2-\pi-e=0$ тоже порождает свою последовательность в вещественных (нецелочисленных числах), только без свойств ЗС.

Но если различные комбинации π и e ввести уже в виде затравочных чисел (f_0, f_1) в последовательность Фибоначчи, то в их фиксированном и асимптотическом проявлении везде присутствует число Φ или $\phi=\Phi^{-1}$, в частности,

$$(f_0, f_1)=(\pi, e), \quad f_{n+1}=f_n+f_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_k\phi^{k+1}+f_{k+1}\phi^k}{\pi\phi+e}=1, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\Phi \ ,$$

где n, k – числа натурального ряда.

***p*-сечения Стахова.** На этом классе сечений (пропорций) остановимся подробнее, поскольку именно с ними связано рождение пресловутого «обобщения "золотого" сечения».

Следует сразу отметить что сами p-сечения – прекрасные математические формы, достаточно легко и наглядно выводятся (а это дополнительный плюс), с хорошей геометрической интерпретацией, с широкими возможностями в кодировании информации и т.д.

Более того, p-сечения Стахова отлично работают для любого вещественного числа p, не обязательно целочисленного.

Например, уравнение $x^{\pi+1}-x^{\pi}-1=0$ имеет решение $x=x_\phi\approx 1{,}371$, которое тоже является p-сечением ($p=\pi\approx 3{,}14$) со своей, присущей только ему, геометрией.

Увязка нецелочисленного сечения с последовательностями Фибоначчи вовсе не является обязательной, но при желании может быть проведена, исходя из их комбинаторного представления, путем численного решения уравнения относительно α при достаточно больших значениях $n \geq 300$ (рис. 1)

$$\alpha=\arg\left[x_\phi-\frac{\psi(\alpha,n)}{\psi(\alpha,n-1)}=0\right], \tag{1}$$

где $\quad \psi(\alpha, n) = \sum_{j=0}^{n'} \alpha^j C_{n-(j+1)s}^{\,j}, \quad n' = \left\lceil \frac{n-s}{s+1} \right\rceil,$

s – априори выбираемый порядок аппроксимирующей целой степени для формируемой последовательности Фибоначчи:

$$(f_0, \dots, f_{s-1}, f_s) = (0, \dots 0, 1), \quad f_{n+1} = f_n + \alpha \cdot f_{n-s}, \quad n \ge s.$$

Соотношение (1) обеспечивает нам привычную асимптотику чисел Фибоначчи на большой удаленности от начальных условий.

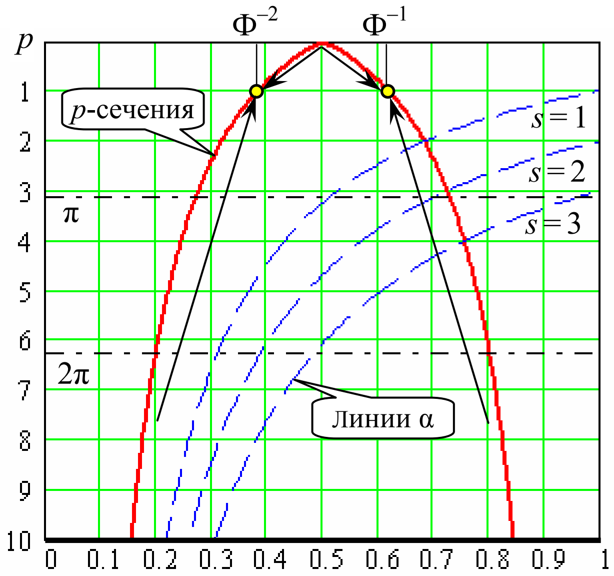

Рис. 1. Непрерывные p-сечения Стахова (p – любое вещественное число) с линиями α – для формирования последовательностей Фибоначчи

То, что решения находятся численными методами, не имеет принципиального значения, поскольку исходное характеристическое уравнение $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$ с целыми $p > 3$ также не имеет аналитических решений.

Таким образом, любому вещественному числу p можно единственным образом сопоставить p-сечение Стахова (в его непрерывном представлении) отрезка единичной длины.

И наоборот, любой точке единичного отрезка соответствует одно p-сечение.

То есть p-сечение полностью покрывает как всю положительную ветвь числовой оси (у нас p), так и все точки интервала $(0, 1)$ – прообраза понятия "целое".

Соотнося единичный интервал с любой целостной структурой, приходим к заключению:

какое бы дуальное сечение не провели, ему можно сопоставит инвариантный непрерывный аналог p-сечения.

Этот замечательный результат в пользу концепции А.П. Стахова можно доказать и математически, хотя он и так уже очевиден.

И здесь в рамках обсуждаемого предмета наступает момент истины.

С одной стороны имеем достаточно универсальные свойства сечения, с другой стороны, – его название в авторской редакции, как «обобщенное золотое p-сечение» или «обобщенная золотая пропорция».

Получается нечто сродни «демону Лапласа», кстати, сыгравшему в свое время прорывную роль в физике. Только у Лапласа шла речь о мысленном эксперименте и способности вымышленного существа воспринимать в любой момент времени положение и скорость всех частиц Вселенной и предсказывать ее детерминистическую эволюцию.

У нас же налицо своеобразный «демон ЗС» как символ всепроникающего нахождения, вездесущности и бесконечного присутствия, который способен в одночасье «проглотить» всю числовую ось или заполнить собой все мировое пространство.

Но одно дело яркий слоган или брэнд, и другое дело – научное понятие.

То есть, имеем явную несовместимость качественных характеристик в одном термине, что не позволяет однозначно выразить только одно понятие. Скорее всего, приходится «жертвовать» словом "золотое". Оно и логично. Не может же произвольное сечение (на две части) называться золотым, которому в математике уже давно отведено свое особое место. Сначала выделили ЗС, теперь же его выкручиваем и обобщаем, а вместо однозначной идентификации получаем «размывание и размазывание» термина.

Даже в дискретном проявлении (не говоря уже о непрерывном) слово "золотое" явно лишний довесок к действительно обобщенному сечению со следующим возможным лингвистическим рядом: «обобщенные (универсальные) p-сечения Стахова».

И все становится на свои места.

В таком виде определение получает четкость, двусмыслица уходит, наслоения пропадают, а термин полностью соответствует требованиям ИСО [6].

Что касается обобщения пропорции, то здесь не все так очевидно, о чем будет сказано ниже.

Конечно, автору жалко расставаться в своих p-сечениях со словом "золотое".

Возможно, будет роздана очередная порция критики, с которой можно заранее согласиться, если она будет адекватна сути дискуссии без повторения штампов, порой напоминающих магические заклинания.

Как же так, термин давно используется, и стал уже почти нарицательным, – а у признанного «золотоискателя» хотят отнять "золото".

Но отбросим эмоции (хотя, право, как же без них) и давайте еще раз внимательно посмотрим на рис.1:

p-сечения непрерывно *сходятся* (!) на "золотую" пропорцию, а потом на дихотомию, которая в свою очередь является частным случаем "золотого" сечения в целочисленных переменных: $\left\langle \Phi^{-2} \right\rangle = 0,\ \left\langle \Phi^{-1} \right\rangle = 1,\ \left\langle \Phi^{-2} \right\rangle + \left\langle \Phi^{-1} \right\rangle = 1$, где $\langle z \rangle$ – округление z до целого.

Разве мы обобщили точку ЗС с переводом ее в p-линию? Нет.

Но зато у линии появилась и наглядно проявляется точка притяжения с ее зеркальным отображением на единичном отрезке.

То есть не p-сечения обобщают "золотую" пропорцию, а напротив она является аттрактором многих разновидностей пропорции, включая и p-сечения.

А именно эта идея о значимости ЗС в мироздании является центральной во многих научных трудах А.П. Стахова.

На наш, взгляд преданность основной идее важнее риторичности формулировок.

Скажем больше: p-сечение наглядно демонстрирует двойственное (дуальное) проявление аттрактора ЗС при $p: 0 \to 1$ и $p: \infty \to 1$, что существенно повышает доверие к результату и подчеркивает новизну концепции.

Именно внутренняя насыщенность p-сечения таким замечательным аттрактором позволила в дальнейшем А.П. Стахову образовать соответствующие p-числа Фибоначчи, которые легли в основу p-кодов и «компьютеров Фибоначчи», а также дать новое геометрическое толкование чисел. При этом автор вовсе не обобщил ЗС, а с «вероятностью до наоборот» с незримой помощью ЗС вышел на прекрасные научные результаты.

В довершение этому, целочисленные p-сечения и их дробно-рациональное расширение в виде pk-сечений, без их претензии на обобщение самого ЗС, выводят на другое чрезвычайно важное и действительно полезное и многостороннее обобщение (не только в общей теории ЗС), которое позволю себе назвать гипотезой-закономерностью Стахова-Василенко:

любое алгебраическое уравнение n-й степени и соответствующая ему n-аддитивно-рекуррентная числовая последовательность Фибоначчи содержат "золотую" пропорцию своим внутренним аттрактором.

Обратим внимание (!):
не обобщают ЗС, а в обратном порядке – к ней многое незримо стекается.

Доказательство, можно попытаться провести на основе теории ветвящихся цепных дробей по цепочкам, представленным одними единицами, с последующим их свертыванием и получением множества, состоящего из набора подходящих дробей числа Φ.

Общее – частное в систематике рядов Фибоначчи и математической пропорции.

Своим рождением "золотое" сечение обязано математическим изысканиям, в частности, изучению пропорции и квадратичного уравнения.

Поэтому рассмотрение отношений в системе «общее – частное» ограничим математическими аспектами.

По определению пропорция – это равенство отношений четырех числовых величин $A/B = C/D$. Числовыми величинами A, B, C, D могут быть любые конструкции, допускающие идентичное числовое проявление: отдельные числа, числовые выражения, значения функций или определенных интегралов, элементы рядов, статистические данные и т.п.

Через пропорцию можно получать новые знания в исследуемой области.

По своей сути пропорция сродни уравнению с найденным решением, именно поэтому многие уравнения допускают их адекватную запись в виде пропорции. И наоборот пропорция может стать прообразом (генератором) того или иного уравнения.

Как пропорция, так и уравнение не обобщаются в принципе, но могут создаваться (выделяться) особые конфигурации: интегральные уравнения, дифференциальные, диофантовые и т.д. Так, несмотря на особую важность, любое дифференциальное уравнение не обобщает и даже не развивает само понятие уравнений, но в его частном проявлении выделяет и изучает свойства целого класса.

Для понятной и однозначной идентификации им придают те или иные уточняющие характеристики, чаще в виде прилагательных, фамилий авторов и т.п.

А уже в пределах выбранного класса могут происходить те или иные обобщения: обобщенные уравнения Гельмгольца, Бернулли, Риккати, Больцмана, Ландау-Лифшица и др., которые развивают направления их авторов-создателей за счет включения дополнительных переменных, введения новых начальных или граничных условий и т.д.

Общее развитие знаний по уравнениям идет в направлении конкретизации от общего к частному. Но в уже выбранном классе одни уравнения могут быть общим представлением других, например: обыкновенные дифференциальные уравнения – дифференциальные уравнения в частных производных.

При этом обобщается не уравнение вообще, а его частные проявления.

Пропорция же имеет дело с четырьмя, всегда конкретными числами, за которыми в общем случае могут стоять и числовые значения переменных величин.

Сами по себе отдельные числа не обобщаются, поэтому нигде в математической литературе мы не находим словосочетания «обобщенная пропорция», – ни с дополнительными качественными признаками, ни с фамилиями авторов.

Нелепость такого обобщения в терминологическом аспекте очевидна.

В целом развитие процессов исследования и научного познания в этой сфере идут в двух противоположных направлениях:

- *в пропорции* – детализация, классификация;
- *в рядах* – образование новых и обобщение существующих.

Например, оставаясь частным в систематике пропорции, *pk*-сечения являются расширением *p*-сечений на их дробно-рациональный случай с соответствующей геометрической интерпретацией и обобщением последовательностей Фибоначчи.

То есть можно говорить, что *pk*-сечения и соответствующие им пропорциональные соотношения в определенном смысле обобщают целочисленные *p*-сечения, но из этого вовсе не следует, что они каким-либо способом обобщают саму пропорцию. Они продолжают оставаться ее частным проявлением, и не более того (рис. 2).

При этом "золотое" сечение с числом Φ в виде частного случая может попасть в некоторый выделяемый подкласс пропорции, но это не означает, что оно наделяет своими золотыми свойствами весь этот подкласс.

Рис. 2. Схема отношений «*Общее – Частное*»
для математической пропорции на примере pk- и p-сечений

В последовательностях Фибоначчи едет постоянное наращивание уровня обобщения.

В пропорции идет обратный процесс дробления (выделения, классификации) и изучения специфических свойств и зависимостей в вычлененных подклассах.

Именно поэтому в научной литературе отсутствует лингвистическая конструкция в виде «обобщенной пропорции», и наоборот присутствуют самые разнообразные «обобщенные последовательности Фибоначчи» (рис. 3).

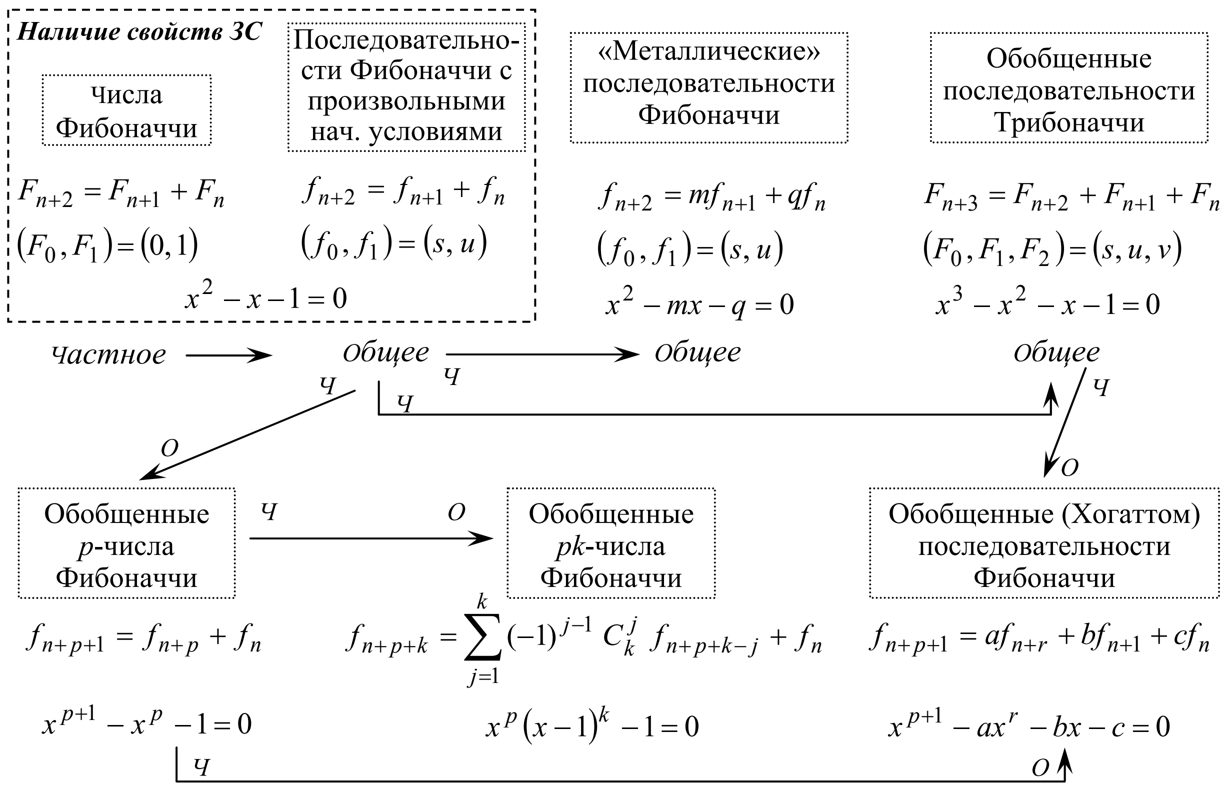

Рис. 3. Схема отношений «*Общее – Частное*»
для чисел и обобщенных последовательностей Фибоначчи
(индексация n специально записана таким образом, чтобы при $n=0$ нагляднее показать инвариант-связь со степенями характеристических алгебраических уравнений)

На основании этого можно высказать несколько частных утверждений:

– p-сечения не являются обобщением математической пропорции, но есть ее частное и приводит к последовательностям, обобщающим числа Фибоначчи;

– pk-сечения не являются обобщением математической пропорции, но есть обобщение целочисленных p-сечений;

– любое сечение, не являясь обобщением пропорции, может порождать последовательности Фибоначчи, которые являются обобщением чисел или иных последовательностей Фибоначчи;

– последовательности Кузьмина [9] обобщают последовательности Хогатта [10], которые в свою очередь одновременно обобщают "*металлические* конструкции сечений", последовательности Трибоначчи и p-сечения и т.д.

Обобщение необобщаемого!? "Золотое сечение" настолько уникально, что не может быть обобщено в принципе.

Хотя порождающее его уравнение может быть модифицировано, приводя к другим конструкциям, но уже без свойств ЗС.

Если разные овощи растут на одной грядке, это вовсе не означает, что все они – "обобщенные" морковки-лотосы. Или тогда все кривые давайте называть обобщенными прямыми, все пространства – обобщенными евклидовыми пространствами, все многоугольники – обобщенными треугольниками (а то и вовсе – обобщенными точками) и т.п. Действуя дальше, романы превращаются в обобщенные сказки, проза становится обобщением поэзии.

Наконец, "золотое" сечение – это константа, и ее нельзя никак обобщить.

Нет же бесконечно большого многообразия обобщенных чисел π, e и т.п.

Математические константы не обобщаются!

Физические – могут уточняться по мере развития экспериментальной науки.

Именно в этом контексте следует понимать «асимптотику "золотого" сечения» [1], выдержки которой позволю еще раз воспроизвести:

> «Непредвзятый простой анализ показывает, что подобные обобщения ЗС на самом деле его не обобщают, но в своем частном проявлении могут вырождаться в гармоническую пропорцию. Они представляют самостоятельные группы (классы) пропорций, возможно, даже очень важные, но не имеющие ничего общего с ЗС, кроме того, что являются корнями алгебраических уравнений, одним из которых описывается и ЗС.
>
> ЗС уже уникально в своих проявлениях, и обобщить его как-то дальше невозможно. Можно развивать и расширять сферу и разнообразие математических соотношений целого и его частей. Но ЗС останется во всем этом безбрежном море-множестве уникальным островком – своеобразным аттрактором и центром притяжения других пропорций. Именно это важно и является главным.
>
> Даже если какое-то новое алгебраическое уравнение неожиданно находит применение в конкретной области науки, то это не повод увязывать его с ЗС только на том основании, что и ЗС – это корень квадратного уравнения.
>
> Поэтому использование термина «обобщенное золотое сечение» в любом его проявлении следует признать неудачным.
>
> На наш взгляд это стало естественным следствием большого желания ряда исследователей (автор относит и себя к их числу) как-то расширить математическую сферу ЗС. Слишком уж несопоставимо ассоциируется обоснованная претензия ЗС занять центральное место в математической гармонии мироздания со сравнительной скудностью его математических свойств, хотя воистину фундаментально-уникальных» [1].

Под впечатление литературных источников, автор и сам неоднократно употреблял подобные терминологические обороты. Хотя из приведенного анализа видно, что такие вольности с определениями не только не корректны, но вносят путаницу и просто бессмысленны.

А если они к тому же возводятся в ранг закона, то становятся не просто легковесными или безобидными образами, но уже содержат определенные риски для развития научного направления ЗС.

«**Закон Сороко Э.М.**». Попытаемся еще раз осмыслить его сущность, имеющую непосредственное отношение к предмету нашего исследования:

«Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную... устойчивость» (подчеркнуто мною – С.Л.) [11].

> Напомним, что под *законом* понимается «категория, отображающая существенные, необходимые и повторяющиеся связи между явлениями реального мира» [12, с. 194].
>
> Он выражает связь, объективно существующую во взаимоотношениях составных элементов предмета, в совокупности вещей, между свойствами вещей или внутри вещи.
>
> Существуют три основные группы законов: специфические или частные (сложение скоростей в механике), общие для больших групп явлений (сохранение и превращение энергии), всеобщие или универсальные (всемирное тяготение).

«Закон Сороко» охватывает естественные системы, поэтому больше относится ко второй группе общих законов, хотя может претендовать и на универсальный характер.

Что же согласно этому закону положено краеугольным камнем в гармоничное строение, режим существования и устойчивость естественных систем?

В основе лежат «обобщенные золотые сечения» как «инварианты».

Но как мы выше увидели, «обобщенные золотые сечения» в их непрерывном представлении (а именно таковыми являются природные системы) охватывают всю числовую ось.

То есть базой гармонии и устойчивости по Сороко становятся числа, и не просто числа, а ВСЕ числа или числа вообще.

Но тогда это философия Пифагора, который учил: «Числа управляют миром», считая, что всемогущество чисел проявляется в том, что все подчиняется числовым отношениям.

И такая формулировка перекрывает «Закон Сороко», поскольку понятие управления шире самоорганизации, стационарности и устойчивости.

Если рассматривать только дискретный аналог p-сечений, то, являясь возможным генератором гармоничного строения, не ясно, как они обеспечивают стационарный режим и устойчивость естественных систем, поскольку стационарность, устойчивость, да и само понятие природной системы – относятся к категории непрерывных процессов и явлений.

То есть в дискретном виде две части закона становятся не соразмерными или без переходного мостика.

> Так, строгое определение основных понятий теории устойчивости, получивших широкую известность, было введено русским ученым А. Ляпуновым в прошлом веке.
>
> В соответствии с его трактовкой траектория движения (развития) называется устойчивой, если *для малого предельного отклонения*, определяющего «коридор постоянства», можно указать такие ограничения для возмущений, при которых система не выйдет из данной зоны.
>
> Нестабильность по Ляпунову рассматривается по отношению к возмущениям начальных данных движения, когда малые исходные различия увеличиваются и приводят в ходе развертывания процесса к сколь угодно большим расхождениям. Чем сильнее влияние факторов, тем в меньшей степени удается сохранить желаемые признаки.

Таким образом, понятие устойчивости в ее классическом представлении ближе к непрерывному характеру процессов и явлений. Отсюда следует, что одни только дискретные проявления сечений без промежуточных переходных и плавных форм не могут в принципе обеспечить устойчивость естественных систем, тем более как инварианты и особенно на важном участке $p = (0, 1)$ (см. рис. 1).

Можно понять логику Эдуарда Максимовича и внутреннюю кухню процесса-сборки.

Поставить во главу угла только "золотую" пропорцию в качестве инварианта, скорее всего, представилось несколько слабоватым в части обобщения, чему должен отвечать закон, или наоборот слишком категоричным, – ведь далеко не все безоговорочно воспринимают ЗС в качестве феномена мироздания.

А вот использование словосочетания «обобщенные золотые сечения (пропорции)» представляется более убедительным, солидным, а если хотите, то и завораживающетуманным. Но не все допустимое для художественного образа приемлемо в качестве научного утверждения.

И как философ он должен был обратить внимание на саму парадоксальность упомянутой словесной конструкции и подмену в ней причинно-следственных отношений.

Во-первых, из самого понятия пропорции непосредственно следует, что она не обобщается. Она или есть, или ее нет, – в зависимости от выбранной системы координат.

Но в своем многообразии реального проявления пропорциональные соотношения могут классифицироваться, образуя группы и подгруппы, они свободно поддаются дроблению с уточняющими прилагательными (геометрическое, среднее, среднеарифметическое и т.д.), превращаясь уже в термины.

Во-вторых, в процессе такой классификации "золотая" пропорция выделена особым и единственным феноменом – *от общего к частному*, и ее любое обобщение становится псевдонаучным, прежде всего, в философском плане. И это не принижение, а наоборот возвеличивание ее настоящей роли в процессах структурной самоорганизации систем.

Числа Фибоначчи действительно могут обобщаться, поскольку такое движение идет в направлении *от частного к общему*. Сохраняется лишь сама аддитивно-рекуррентная систематика Фибоначчи, а дальше ход событий разворачивается в разных направлениях, вследствие чего ученые всего мира их и называют обобщенными последовательностями Фибоначчи.

Но при этом никому в голову не приходит их отождествлять с "золотой" пропорцией.

Изложенное не является посягательством или нивелировкой «закона Сороко». Он остается в силе, но отдельные формулировки нуждаются в дополнительном переосмыслении и соответствующей корректировке, возможно, с переключением на прямой аттрактор ЗС.

И ничего предосудительного или неприглядного в этом нет.

> Один из фундаментальных принципов научного знания следует из знаменитой теоремы австрийского математика Курта Геделя о неполноте формальных систем, согласно которой не существует конечной аксиоматической системы, в рамках которой были бы разрешимы все проблемы. Любая дедуктивная структура (система правил) внутренне непротиворечива и неполна либо противоречива и полна [13].
>
> То есть допускаются постановки задач, которые нельзя ни доказать ни опровергнуть, а всякая фундаментальная теория небезупречна и недостаточна для решения всех возникающих в ней проблем.
>
> Ни одна из существующих в настоящее время систем знаний не является ни полной, ни гармоничной.
>
> Так что любые законы имеют свои «щели» и «прорехи».

Эмоциональный ряд «ибо-иначе» (больше в порядке самокритики).

Несмотря на многочисленные публикации с разным уровнем освещения, целостное учение о "золотой" пропорции еще не сложилось. Поэтому, выйдя на поле ЗС, где еще нет четких указателей на довольно запутанной дорожной сети, трудно уяснить, какие же направления развития в этой области сегодня относятся к приоритетным.

Сдается, что пока продолжается процесс количественного накопления знаний, а качественная его сторона в основном, увы, сосредоточена на выяснении межличностных отношений и взаимной критике, уровень которой, как ни в какой иной области, превышает разумное количество децибел.

А многие «золотоискатели ушли с золотой середины» в разнополярные и не толерантные точки 0 и 1 единичного отрезка, каждый, наверно, считая себя единицей, (хотя +0 тоже стоит многого, – без него не было бы дифференциального исчисления и много другого).

Это внешнее, возможно, и ошибочное наблюдение.

Ознакомившись с материалами сайта АТ и с призывом его основателей о важности проведения новых исследований в части обобщения ЗС, захотелось и самому попытаться что-то обобщить. Так, появились работы «Обобщенные золотые *pk*-пропорции» и «Многофункциональное обобщение золотого сечения», где вне зависимости от их названия освещено несколько полезных результатов исследования.

Смотрю теперь на собственные названия статей критическим взглядом и думаю: а что же я собственно обобщал?

Человек выбрал (особо выделил) одну единственную пропорцию, заслуженно посадил ее на трон, надел корону, назвал золотой и даже ассоциативно сравнил ее с Богом.

Нет мало, теперь давай натягивать на нее фуфайку, а вслед за этим завтра вздумается примерить бескозырку. Потом уравнять с другими числами, объявить новые "золотые" сечения как производные и т.п.

Полная нивелировка и подмена понятий, – иначе не назовешь.

Так же как и, на первый взгляд, безобидные термины вроде бронзовой, медной и другой подобной пропорции (уже скоро таблицы Менделеева не хватит).

Невооруженным глазом видно, что это скрытая или завуалированная форма заявки-претензии на то, чтобы внедриться в один синонимический ряд с "золотой" пропорцией.

Так недалеко до ее превращения в разменную монету, а то и вовсе – в путану.

Старшее поколение, помнит, как молодой Андрей Вознесенский в 60-е годы кричал (сегодня уже не актуально, но в то время это звучало крамольно): «Уберите Ленина с денег!».

Подобное очищение нужно и ЗС.

Ну, вот я выделил и исследовал свойства классификационного ряда тех же *pk*-сечений или их другой многофункциональной модификации.

Скажите, на милость, зачем надо было к ним тулить слово "золотое" да еще и "обобщенное"?

Кто может показать хоть одну маленькую крупицу этого-самого золота с малейшими признаками числа Φ?

Право же, это похоже на алхимию (в хорошем смысле), – не получили золота, зато сколько новых химических элементов открыли.

> «Обобщения хороши тем, что призваны выявлять универсалии, то есть более глубокие и общие законы. Тогда обобщаемое является следствием, наследует часть параметров (свойств, проявлений) общего. Так – вообще, для всех случаев.
>
> Но вот в случае Золотой пропорции представляется, что происходит наоборот – данный нам непосредственно важный принцип (закон) в виде отдельных его соотношений (проявлений) раздается другим в «его окружении». Такое "обобщение" может быть и высвечивает что-то важное, некий механизм действия, но при этом (благодаря энтузиазму исследователей) нивелирует, размазывает, обездушивает нечто особенное; размазывает важный принцип, идею на множество претендентов-последователей, размазывает "авторство" на "соавторство". Это те, другие, из окружения за счет "использования" части соотношений, заданных именно Золотой пропорцией, получают некоторые ее свойства. Это Золотая пропорция является общим, а "окружение" – ее частным проявлением. Быть частью, элементом ряда значений или быть примером для подражания – это разные вещи» [14].

«Золотых пропорций существует бесконечное количество», – утверждает А.П. Стахов [15], вводя себя в иллюзию, а своих учеников и последователей сбивая с толку.

Не золотых, уважаемый Алексей Павлович, а вообще пропорциональных зависимостей действительно существует бесконечное множество, среди которых те же *p*-сечения по праву занимают достойное место, и никто с этим не спорит.

Но "золотая" пропорция – все-таки одна!

Это только ее знак качества и отличительный признак (код). Но это не разменное клеймо, которое можно ставить на все подряд, если есть действительное желание обустроить жилище ЗС и математики гармонии, очистив их от излишних и ненужных наслоений, с которыми нельзя выстроить «новое междисциплинарное направление современной науки».

И тогда в многотомной физической литературе появятся не только отдельные упоминания о ЗС (которых пока нет), но и целые разделы и направления исследований.

В поисках неизведанного. Автор вовсе не склонен думать, что в теории "золотой" пропорции (ЗП) все должно крутиться только вокруг нее.

Большое видится на расстоянии (С. Есенин).

> «Особенность ЗП проявляется в том, что она имеет не одну линию так называемого обобщения, она не принадлежит одной линии обобщения. На ней, как на центре сходятся несколько таких линий … Но есть еще и обобщения обобщений; и еще, чего, я пока не знаю, но обязательно еще появится у золотой пропорции. Ни к какому другому числу, находящемуся рядом с ЗП, это не относится. Это – факт. И это тоже имеет общий смысл» [14].

В своих поисках можно далеко уйти от ЗП, пересесть где-то на другую станцию, и по другой линии снова к ней вернуться, но уже с новым багажом знаний и новыми гранями ЗП.

Подходя к "золотой" пропорции с разных сторон, как аттрактору, многие вещи открываются совершенно в ином виде.

Линия *p*-сечений – тому подтверждение. Ее можно и полезно анализировать вместе с ЗП в рамках общей теории пропорций и математической теории гармонии мироздания.

Выводы. Как уникальная константа, соответствующая особому частному случаю математической пропорции, "золотое" сечение не обобщается в принципе.

Другие конструкции (всевозможные обобщенные последовательности Фибоначчи, Трибоначчи, *T*-гармоники, металлические и др.) подпадают под понятие классификации математической пропорции с отражением новых и важных свойств, но уже без прилагательного и качественного признака "золотые".

P.S. По конструктивной критике в мой адрес со стороны профессора А.П. Стахова, прозвучавшей на страницах АТ, хотелось бы высказать одно соображение в части расстановки «вешек-указателей», о которых говорилось выше.

Для этого приведу слова Алексея Петровича: «По существу классическая теория чисел Фибоначчи полностью исчерпала себя после публикации книги проф. Vajda и введения *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* (Стахов, Ткаченко, Розин)…» [4].

Получается, что капитан сказал: «Сушите весла».

Не совсем ясно, что имеется в виду под словами «классическая теория чисел Фибоначчи», но в моем представлении данное направление только получает свое «второе дыхание», продолжая развитие и воплощение (пока еще вялое) в практику.

И предавать его забвению, думается, преждевременно.

Для этого достаточно проанализировать литературу, например [9, 16], по обобщенным последовательностям Фибоначчи на основе арифметических, геометрических и комбинаторных свойств различных модификаций обобщенной пирамиды Паскаля с ее обширными и неизведанными возможностями компьютерной реализации и моделирования природных процессов.

Со своей стороны в развитие теории рационального ЗС на страницах «АТ» с согласия администрации сайта планирую предложить молодым ученым и практикам концептуальную идею «Метода лечения злокачественных новообразований на основе чисел Фибоначчи».

А вот на псевдообобщениях ЗС (не путать с развитием общей теории пропорции и гармонии) действительно нужно ставить точку, также как и на не научном термине «обобщенная золотая пропорция», который противоречит не только основным требованиям ИСО [6], но и логике многовекового развития ЗС.

Для многих, это уже не гипотеза, а факт.

Так что слово за первооткрывателем.

Литература.

1. *Василенко С.Л.* Асимптотика "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15252, 25.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322042.htm.
2. *Василенко С.Л.* "Золотые ряды" Фибоначчи с произвольными начальными условиями // Академия Тринитаризма, М. – Эл. № 77-6567, публ.15295, 19.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322067.htm.
3. *Стахов А.П.* Некоторые замечания по поводу статьи С.Л. Василенко «Асимптотика "золотого" сечения» // Академия Тринитаризма, М.: Эл. № 77-6567, публ.15253 от 26.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322043.htm.
4. *Стахов А.П.* По поводу «золотых» рядов Фибоначчи с произвольными начальными условиями (комментарий к статье С.Л. Василенко) // «Академия Тринитаризма». – М.: Эл. № 77-6567, публ.15299, 20.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322068.htm.
5. *Антипов М.В*. Принцип ограниченности. – Новосибирск: СО РАН, 1998. – 444 с. – http://osmf.sscc.ru/~amv/int1.html.
6. *ИСО 704:2000* (ISO 704:2000). – Работа в области терминологии. Принципы и методы. – Terminology Work. – Principles and Methods.
7. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби: 4-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 112 с.
8. *Арнольд В.И.* Цепные дроби. – М.: Центр непрерывного математического образования, 2001. – 40 с.
9. *Кузьмин О.В*. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. – М., 2000. – 294 с.
10. *Hoggatt V.E.* Generalized Fibonacci Numbers in Pascal's Pyramid // Fibonacci Quart. 1972. – Vol. 10. – № 3. – P. 271–275, 293.
11. *Сороко Э.М*. Структурная гармония систем, Минск: Наука и техника, 1984. – 264 с.
12. *Философский* энциклопедический словарь / 2-е изд. – М.: Сов. энциклопедия, 1989. – 815 с.
13. *Godel K.* On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems. – 1934.
14. *Алферов С.А*. О 4-х структурной формуле и хозяйстве ЗП // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15302, 21.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322070.htm.
15. *Стахов А.П.* Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005.
16. *Бондаренко Б.А*. Обобщенные треугольники и пирамиды Паскаля, их фракталы, графы и приложения. – Ташкент: Фан, 1990. – 192 с.