

С. К. Абачиев

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ ДАЁТ НОВЫЕ СТИМУЛЫ ДЛЯ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИКИ ГАРМОНИИ

Часть 2

Имея перед глазами треугольник Паскаля, достаточно развитый по закону (1), можно феноменологически констатировать ряд других законов. В частности, можно констатировать такую закономерную взаимосвязь между ближайшими соседями в строке:

$$N_{n,k+1} = N_{n,k} \frac{n-k}{k+1} \quad (3)$$

Подобные соотношения в математике называются *рекуррентными (возвратными)*. Если имеется какая-то математическая последовательность (в частности, числовая), то рекуррентные формулы позволяют вычислять её очередной элемент через ближайшие ранее вычисленные. Именно это и имеет место в случае закона-формулы (3). Но этот закон уже нельзя вывести из закона (1). Для объяснения закона (3) требуется обратиться к одному из основных понятию комбинаторики – к понятию числа сочетаний из n элементов по k C_n^k . С его помощью феноменологически постулируемый закон (3) легко объясняется:

$$C_n^{k+1} = C_n^k \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} = C_n^{k+1} \quad (4)$$

Оставим теперь на время рекуррентную формулу (4) и обратимся к последовательности натурального ряда чисел, структурируя каждый его член в соответствии с принципом (2):

1, 2^1 , 3^1 , 2^2 , 5^1 , $2^1.3^1$, 7^1 , 2^3 , 3^2 , $2^1.5^1$, 11^1 , $2^2.3^1$, 13^1 , $2^1.7^1$, $3^1.5^1$, 2^4 , 17^1 , $2^1.3^2$, 19^1 , $2^2.5^1$, $3^1.7^1$, $2^1.11^1$, 23^1 , $2^3.3^1$, 5^2 , $2^1.13^1$, 3^3 , $2^2.7^1$, 29^1 , $2^1.3^1.5^1$, 31^1 , 2^5 , $3^1.11^1$, $2^1.17^1$, $5^1.7^1$, $2^2.3$, 37^1 , $2^1.19^1$, $2^3.5^1$, 41^1 и т. д.

Воспользуемся тем же семиотическим приёмом, который позволяет получить компактную картину организации простого субэлемента 2 в треугольнике Паскаля на схеме 3. Во-первых, для каждого простого субэлемента чисел натурального ряда дадим свою индивидуальную схему. Во-вторых, отсутствие этого субэлемента обозначим точкой, а присутствие – показателем степени, в которой он представлен. В результате получим достаточно развитые компактные схемы, позволяющие усмотреть специфи-

ческие фракталоподобные закономерности:

Для субэлемента 2: .1.2.1.3.1.2.1.4.1.2.1.3.1.2.1.5.1.2.1.3.1.2.1.4.1.2.1.3.1.2.1.6.2. ...
Для субэлемента 3: ..1..1..2..1..1..2..1..1..3..1..1..2..1..1..2..1..1..3..1..1..2..1..1..2...1 ...
Для субэлемента 5:1....1....1....1....2....1....1....1....1....2....1....1....1....1....2....1. ...
Для субэлемента 7:1.....1.....1.....1.....1.....1.....1.....2.....1.....1.....1.....1.....1 ...

Наличие этих закономерностей легко доказывается методом полной математической индукции, поскольку здесь мы имеем дело со свойствами натурального ряда чисел как простейшей арифметической прогрессии с разностью 1.

Прделаем теперь для конкретного примера расчёт элементов строки $n = 8$ в треугольнике Паскаля по формуле (4), структурируя при этом все используемые и получающиеся числа в соответствии с принципом (2):

$$C_8^0 = 1 \rightarrow C_8^1 = 1 \frac{2^3}{1} = 2^3 \rightarrow C_8^2 = 2^3 \frac{7}{2} = 2^2.7 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_8^3 = 2^2.7 \frac{2.3}{3} = 2^3.7 \rightarrow C_8^4 = 2^3.7 \frac{5}{2^2} = 2^1.5.7 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_8^5 = 2^1.5.7 \frac{2^2}{5} = 2^3.7 \rightarrow C_8^6 = 2^3.7 \frac{3}{2.3} = 2^2.7 \rightarrow$$

$$\rightarrow C_8^7 = 2^2.7 \frac{2}{7} = 2^3 \rightarrow C_8^8 = 2^3 \frac{1}{2^3} = 1.$$

Присмотревшись к этой цепочке рекуррентных вычислений, легко заметить, что если нас интересует поведение простого субэлемента 2, то можно проследить только за ним, ибо оно независимо от поведения простых субэлементов 3, 5 и 7. В силу этой же независимости можно проследить отдельно за поведением каждого простого субэлемента. Поскольку же вычисления по правилу (2)+(4) в любом случае начинаются с единицы, важно лишь то, как простые субэлементы ведут себя в числителе и в знаменателе дроби $n - k / k + 1$. Остановим своё внимание на простом субэлементе 2, воспользовавшись символикой точек (соответствующих его отсутствию) и цифр (соответствующих показателям степеней, в которых он присутствует):

Схема 4

$n - k$.	3	.	1	.	2	.	1	.
$k + 1$.	1	.	2	.	1	.	3

. 3 2 3 1 3 2 3 .

Как видим, в числителе и в знаменателе простой субэлемент 2 ведёт себя точно так же, как в системе натурального ряда. (Аналогично и независимое поведение других простых субэлементов.) Разница лишь в том, что в знаменателе представительство простого субэлемента 2 соответствует натуральному ряду, развиваемому слева направо, а в числителе – развиваемому справа налево.

Теперь легко проделать рекуррентное вычисление представительства простого субэлемента 2 в 8-й строке треугольника Паскаля. Поскольку эта строка, как и любая другая, начинается с левой единицы, сперва ставим точку. В нижнем ряду, который соответствует знаменателю $k+1$, при этом надо предусмотреть дополнительную, пустую клетку, под которой всегда ставится точка, соответствующая тому, что в крайних столбцах из единиц субэлемента 2 нет и не бывает. Отправляясь от этой точки в духе рекуррентного вычисления следующего элемента числовой системы через предыдущий, следом за этой исходной точкой ставим цифру 3 из числителя. Отправляясь от этой тройки, следом за ней ставим цифру $3 - 1 = 2$. Отправляясь от полученной двойки, следом за ней ставим цифру $3 - 2 = 1$ и т. д. Последним актом вычисления будет $3 - 3 = .$, то есть, число 1 крайнего правого столбца. Таким образом, элементарно просчитано представительство простого субэлемента на строке $n = 8$.

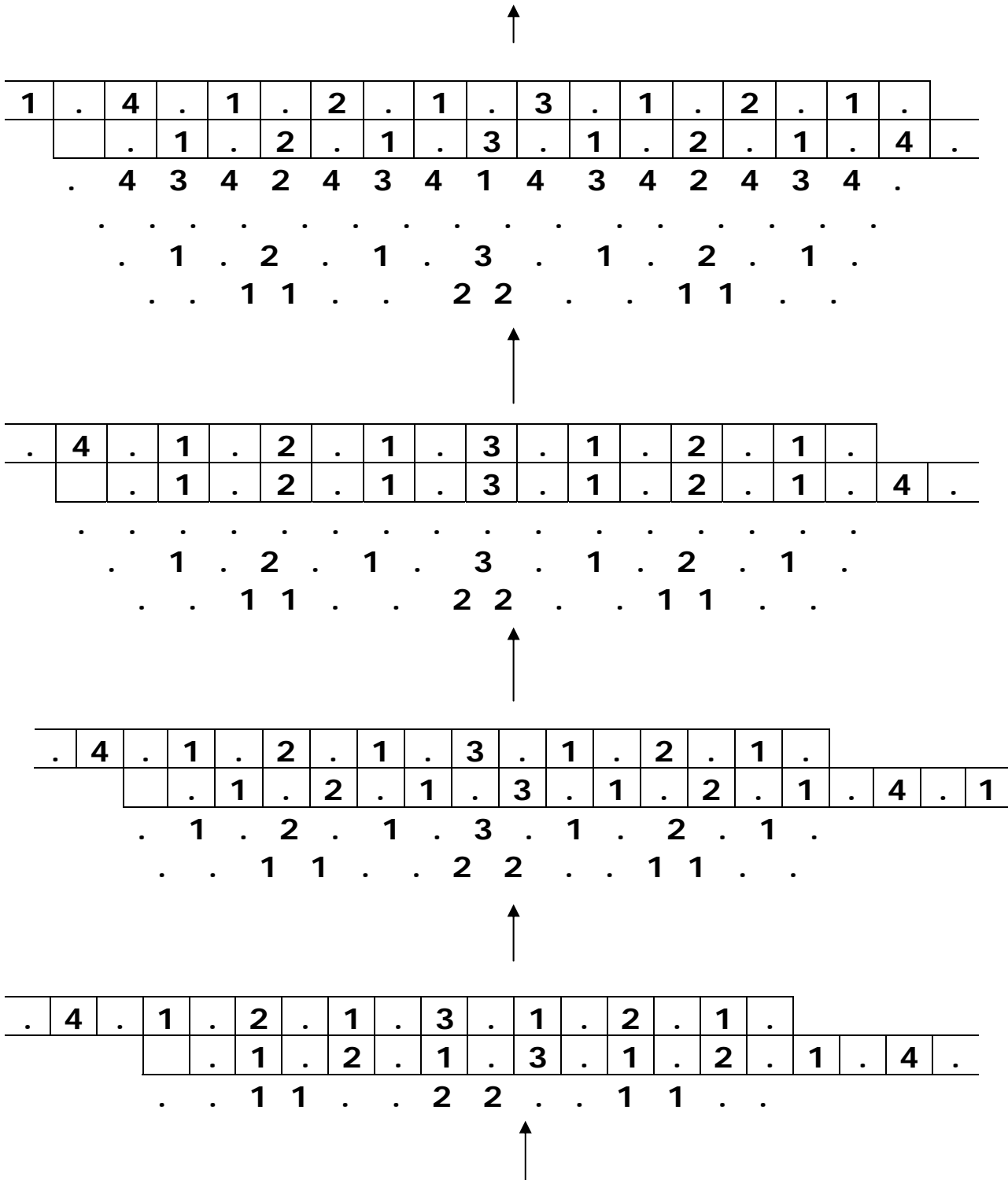
Точно так же можно просчитать все остальные строки для субэлемента 2 и вообще для любого другого простого субэлемента. Делается это элементарно и вовсе не требует обращения за помощью к компьютеру, по крайней мере, до уровней $n = 100-150$. Надо лишь сделать эту схему подвижной, переменной.

Для этого следует взять две полосы плотной бумаги или картона. Можно взять две полосы из более жёсткого материала (фанера, оргстекло), наклеив на них бумажные полосы. Далее бумажные полосы следует разметить на одинаковые клетки. На одну полосу слева направо наносим представительство простого субэлемента в символике точек и цифр, соответствующих показателям степеней. Это будет нижний движок специфической *счётной линейки*. На нём крайняя левая клетка пустая, и под ней всегда ставится точка, соответствующая левым единицам строк треугольника Паскаля. При рекуррентном вычислении цифры с нижнего движка всегда берутся со знаком минус, поскольку он соответствует знаменателю дроби $n - k / k + 1$, а в знаменателях показатели степеней отрицательные. В клетки другой полосы, которая будет верхним движком счётной линейки, справа налево и без дополнительной пустой клетки наносится та же информация. При вычислениях цифры с верхнего движка берутся со знаком плюс, так как он соответствует числителю вышеупомянутой дроби.

Зоны перекрытия двух движков теперь можно менять, и каждая зона перекрытия движков будет соответствовать той или иной строке треугольника Паскаля. Так как в треугольнике Паскаля количество чисел в строке n всегда на единицу больше номера строки, то по зонам перекрытия движков всегда легко определить, с какой строкой n мы имеем дело. В каждом случае под зоной перекрытия движков по цепочке непрерывного алгебраического суммирования цифр можно рассчитать представительство того

или иного простого субэлемента на той или иной строке. Последняя цифра с нижнего движка в зоне перекрытия при этом в любом случае будет анну-

Схема 5



Демонстрация работы метода счётной линейки. Обращаю особое внимание читателей на то, как элементарно объясняется эффект бесцветной перемычки, который на уровне $n = 15$ цветографический формализм может лишь феноменологически постулировать как нечто закономерное, но необъяснимое.

аннулировать результаты рекуррентного алгебраического суммирования цифр, давая крайнюю правую единицу строки треугольника Паскаля. В принятой символике – крайнюю правую точку.

Таким образом, понятие C_n^k вместе с принципами (4) и (2) даёт эффективный формализм расчёта представительства простых субэлементов-делителей в структурном фундаменте треугольника Паскаля. Этот формализм позволяет рассчитать (стало быть, объяснить) всю многоцветную фрактальную гармонию треугольника Паскаля, которая в рамках феноменологического подхода может лишь констатироваться или полуинтуитивно угадываться на основе соображений симметрии.

На схеме 5 представлены три последовательных шага расчёта представительства простого субэлемента 2 на строках $n = 13, 14, 15$ и 16. Этот формализм можно назвать *методом счётной линейки*.

Этот метод осуществляет *специфическую развёртку на плоскости симметричных фракталоподобных субструктур одномерной числовой системы натурального ряда*. Но этот метод справедлив *только для простых субэлементов-делителей*. В случае составных субэлементов-делителей он даёт ложные результаты. Иначе говоря, метод счётной линейки *внутренне противоречив, парадоксален*. В науке парадоксы такого рода являются особенно сильными стимулами для эвристического поиска и выработки новых понятий, для открытия новых законов. В данном случае треугольник Паскаля поднимает фундаментальные проблемы взаимоотношений упорядоченности и беспорядка, которые находятся в центре внимания синергетики с её теорией динамического (детерминистского) хаоса.

Стимулирующая парадоксальность метода счётной линейки заключается в следующем. В системе натурального ряда совершенно аналогичная фракталоподобная симметричность присуща и расположению составных субэлементов-делителей. Например:

Для субэлемента 4 = 2.2: ...1...1...1...2...1...1...1...2...1...1...1...2...1...1...1...3... ..
Для субэлемента 6 = 2.3:1.....1.....1.....1.....1.....2.....1.....1.....1.....1.....1.....2.. ..

Если переложить фракталоподобную симметрию организации субэлемента 4 на метод счётной линейки, то получится цветографическая схема, промежуточная между схемами для простых субэлементов 3 и 5. (См. рис. 13.) Вместе с тем, картину организации составного делителя 4 в треугольнике Паскаля легко получить из рис. 1–5. (См. рис. 14.) Эта истинная картина разительно отличается от той, которая получена методом счётной линейки, хотя по-прежнему сохраняет свою детерминистскую фрактальность, а также вращательную симметрию 3-го порядка.

Если на метод счётной линейки переложить фракталоподобную симметричность организации субэлемента 6, то получится цветографическая схема, промежуточная между схемами для простых субэлементов 5 и 7. Вместе с тем, картину организации субэлемента 6 легко получить как пересечение картин организации простых субэлементов 2 (жёлтый цвет) и 3 (го-

лубой цвет). Смешение этих двух цветов даёт зелёный цвет, который на рис. 15 затемнён для большей контрастности.

И без внутреннего цветового структурирования результирующая сплошь

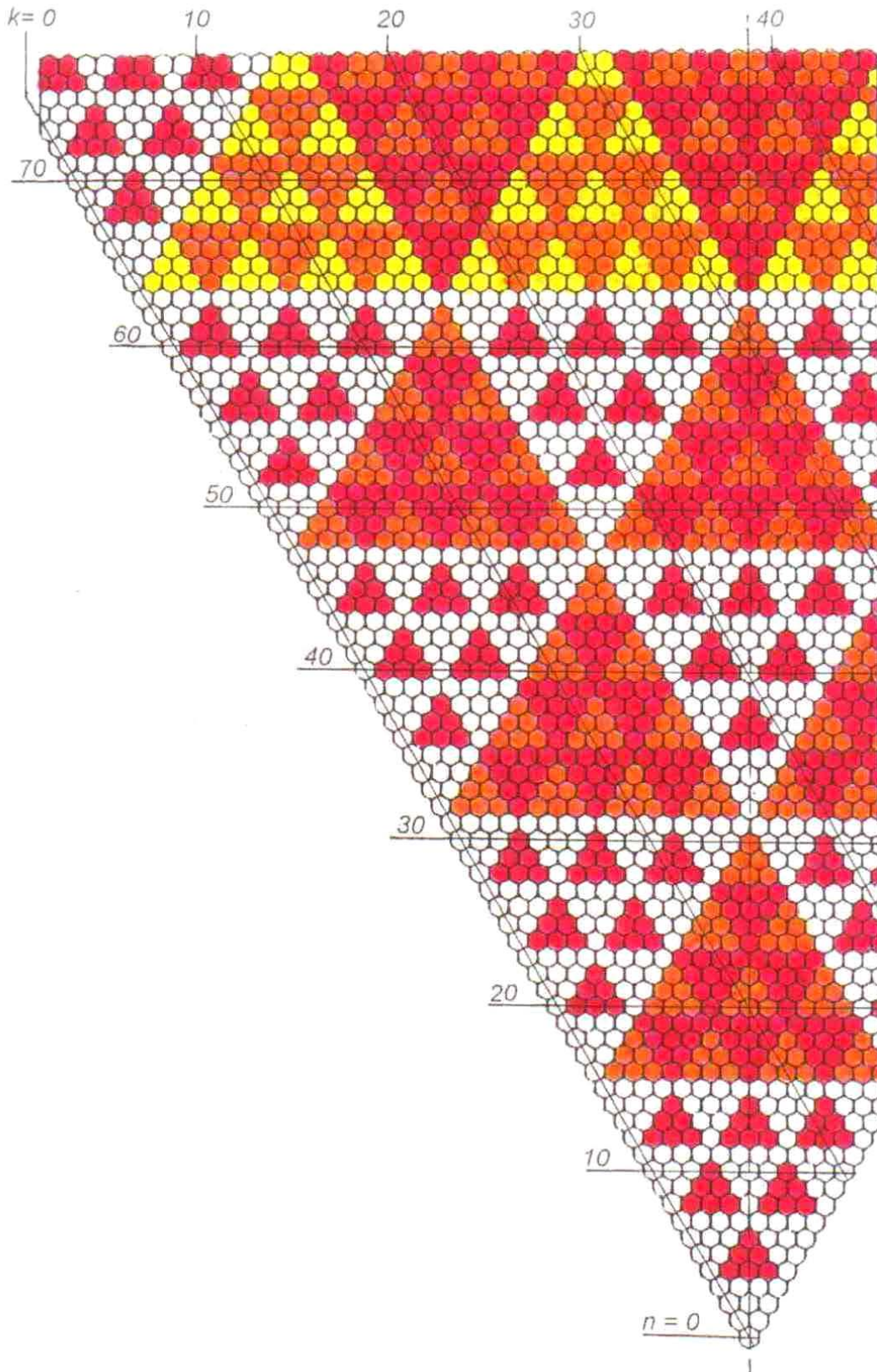


Рис. 13. В случае составного субэлемента делителя $4 = 2^2$ метод счётной линейки исправно работает, но даёт ложные результаты.

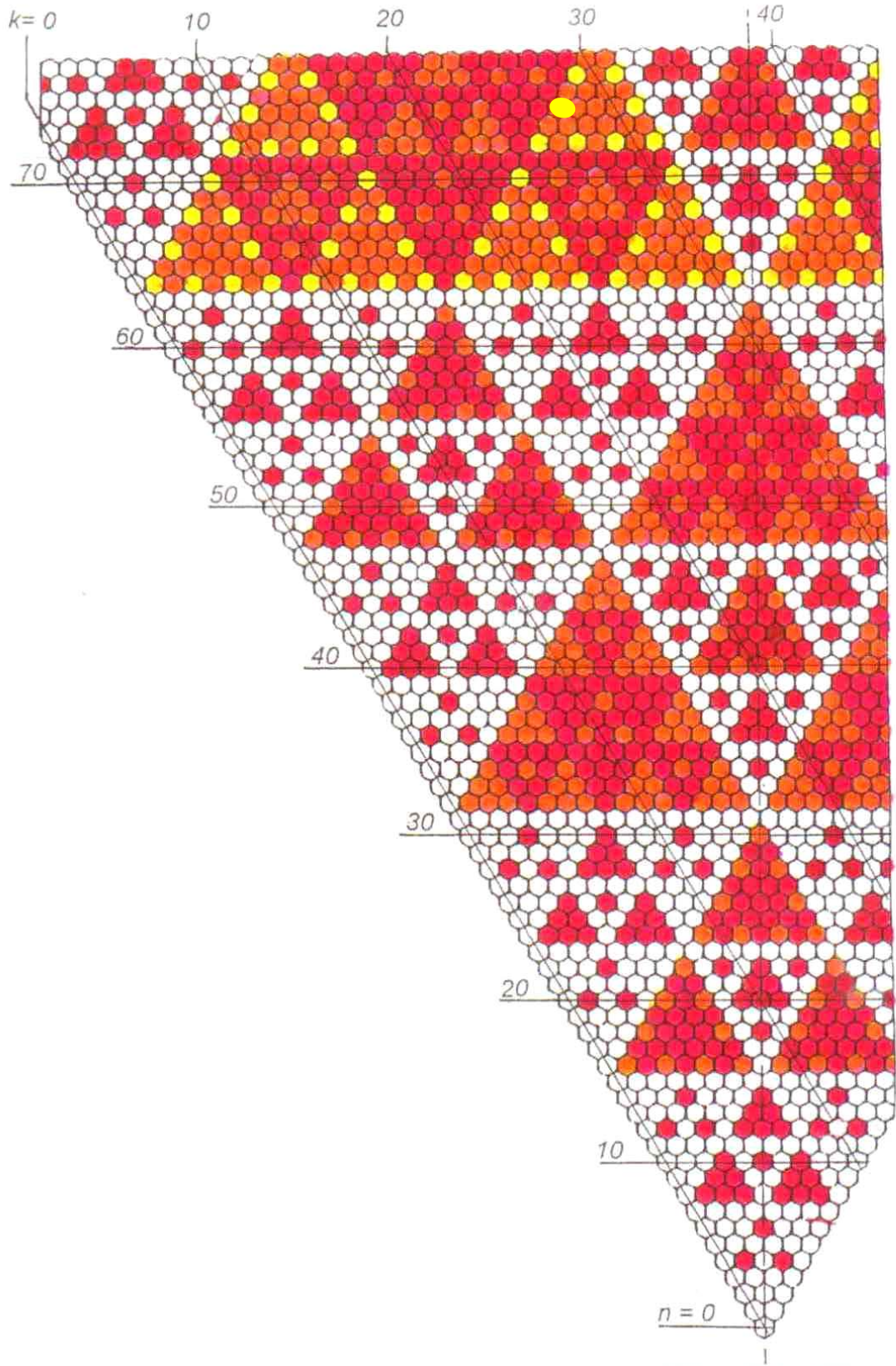


Рис. 14. Истинную цветографическую картину организации составного субэлемента $4 = 2^2$ легко получить из цветографической схемы на рис. 7. На этой цветографической схеме сохраняется идеальная вращательная симметрия 3-го порядка. Как и в случае простых субэлементов, более сложные степенные структуры появляются со строк с соответствующими номерами: $16 = 4^2$ – со строки $n = 16 = 4^2$, $64 = 4^3$ – со строки $n = 64 = 4^3$. Цветовые фрактальные структуры имеют однозначный алгоритм поступательного усложнения. Иначе говоря, эти фракталы остаются детерминистскими.

Комментарий к рис. 15 – 17

Цветографический анализ организации в треугольнике Паскаля составных субэлементов, получаемых от перемножения разных простых делителей, легко осуществить с помощью двух цветов, которые при смешении дают новый цвет. На рис. 15 жёлтым цветом обозначены числа, содержащие простой субэлемент 2, а голубым – числа, содержащие простой субэлемент 3. Зоны смешанного зелёного цвета, который затемнён для большей контрастности, сразу же показывают организацию составного субэлемента 6.

Для цветографического анализа организации субэлемента 6 по степеням надо изготовить несколько одинаковых ксерокопий системы геометрических ячеек. На одной из них с рис. 4 и 7 жёлтым и голубым цветом прорисовывается, например, организация субэлементов 3^3 и 2^3 . Затем зелёные зоны смешения двух цветов закрашиваются чёрным фломастером. Затем на этот лист накладывается другой, основной лист с геометрическими ячейками и на нём на просвет жёлтым фломастером закрашиваются эти чёрные ячейки. Затем то же повторяется для субэлементов 3^2 и 2^2 , 3 и 2. В итоге на верхнем, основном листе образуется цветографическая схема организации субэлемента 6 с учётом его степеней. (См. рис. 16 и 17.)

В наше время эту работу можно возложить на компьютер. Однако работа над формированием подобных цветографических схем вручную позволяет воочию увидеть хаотизацию поведения на поле чисел треугольника Паскаля составных субэлементов, образуемых перемножением разных простых делителей.

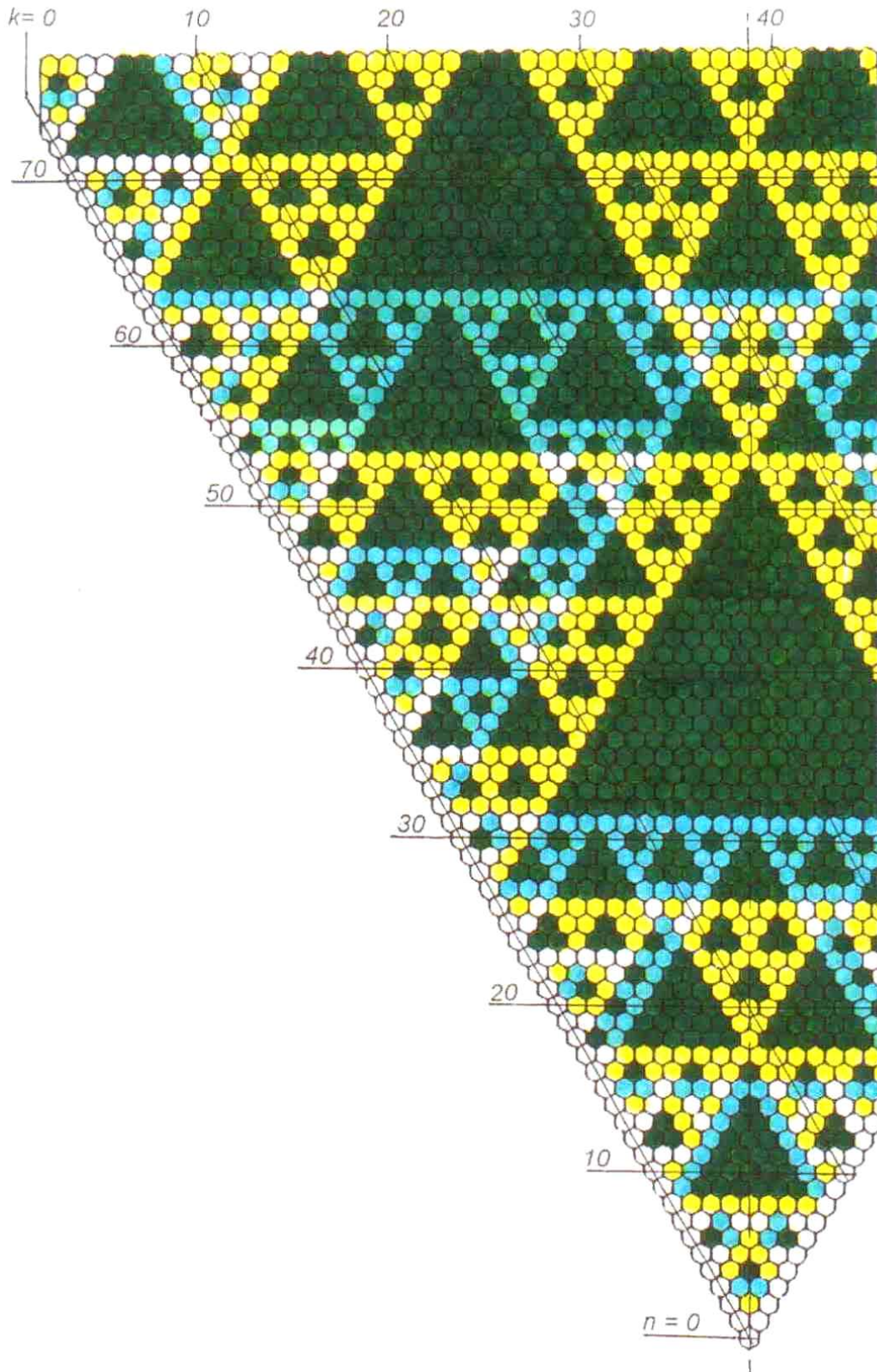


Рис. 15. Организация в треугольнике Паскаля чисел, содержащих составной субэлемент $b = 2.3$.

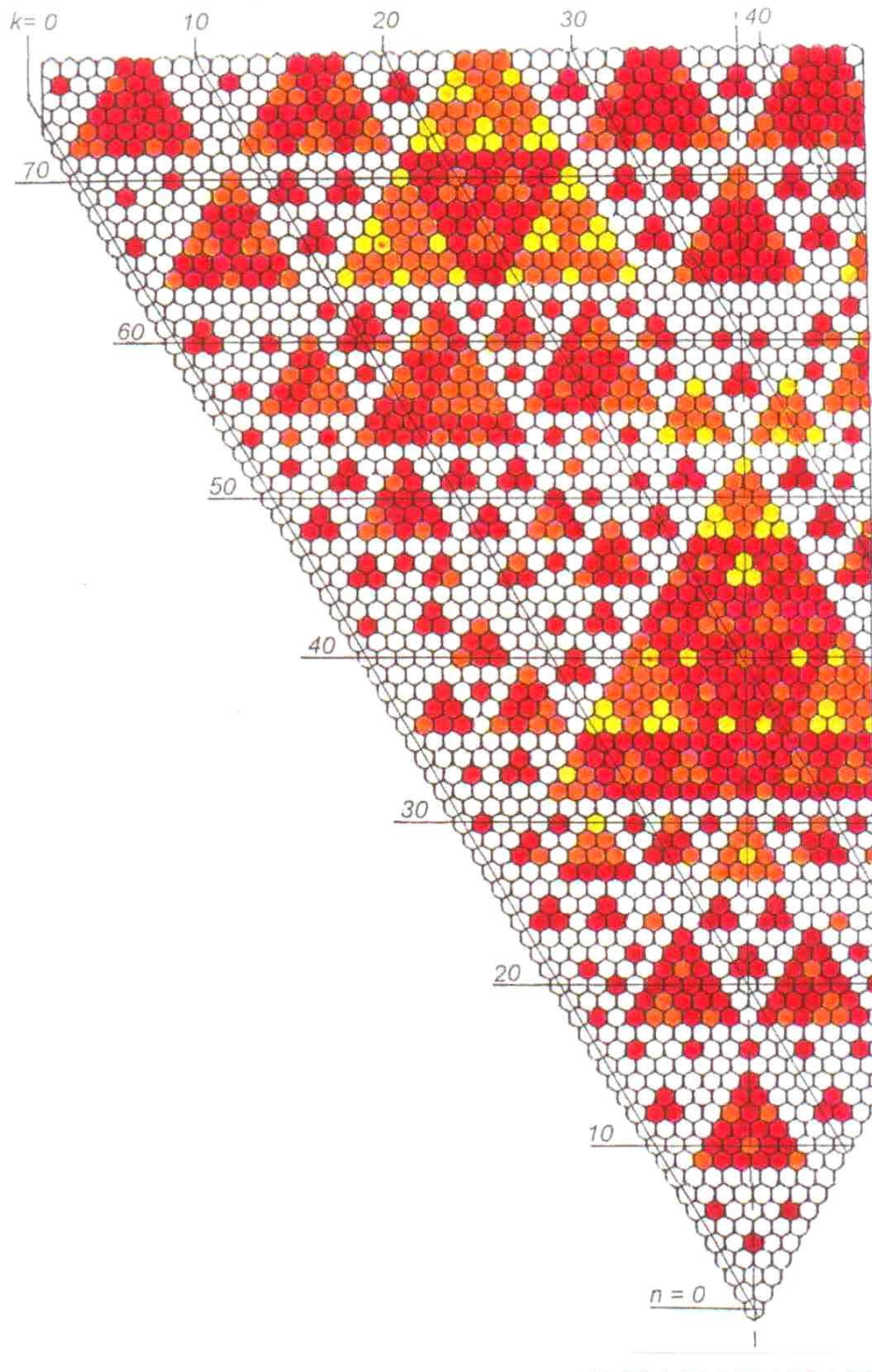


Рис. 16. Истинная цветографическая картина организации сложного субэлемента $b = 2.3$, составленного из разных простых делителей. Её легко получить как результат пересечения цветографических структур с рис. 4 и 7. Метод счётной линейки продолжает исправно работать, но он даёт принципиально ложные результаты. Реально дело обстоит так, что разрушается вращательная симметрия 3-го порядка как сплошь закрашенных цветовых структур, так и их цветовой «начинки». Составной субэлемент b впервые появляется на строке $n = 4$, т. е. ниже, чем в областях присутствия простых субэлементов. То же относится и к степеням составного субэлемента b . Нижняя граница его появления в степенях определяется нижней границей появления простого делителя 3 и его степеней. А главное – то, что у цветографических структур нет чёткого алгоритма построения. Ни малые, ни большие фрагменты цветографической схемы не дают никаких надёжных оснований для того, чтобы её наращивать далее. На поле чисел треугольника Паскаля вместо идеального дальнего порядка воцаряется непредсказуемая перемежаемость больших и малых цветовых блоков для простых субэлементов 2 и 3.

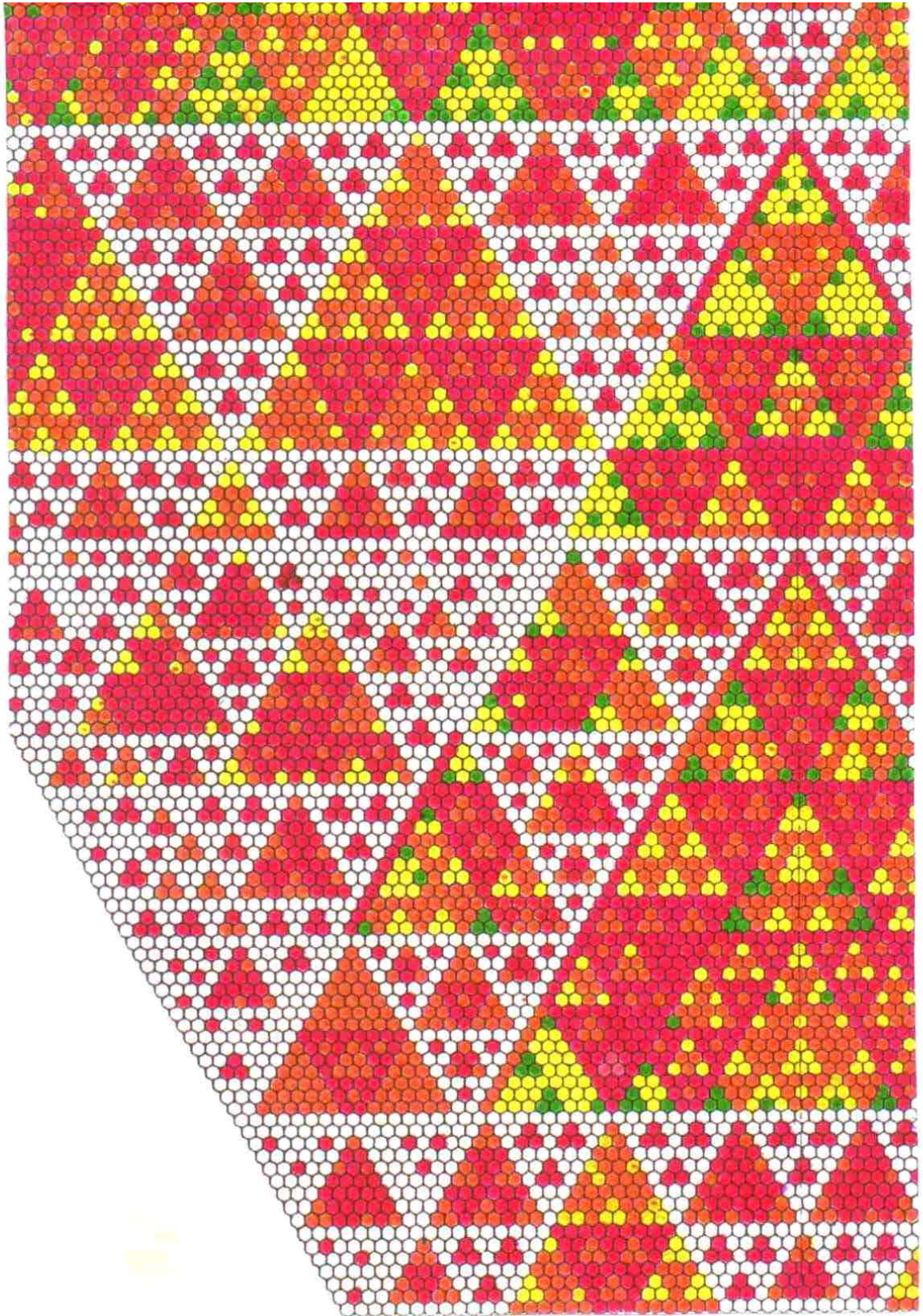


Рис. 17. Истинная цветографическая картина организации составного субэлемента $6 = 2.3$ выше строки $n = 65$.

закрашенных зон очевидно, что реальная организация составного субэлемента 6, образованного перемножением *разных* простых чисел 2 и 3, принципиально отличается от той, которую даёт метод счётной линейки. Во-первых, разрушается вращательная симметрия 3-го порядка и остаётся только «неистребимая» симметричность треугольника Паскаля относительно вертикальной оси. Во-вторых, фрактальность организации этого составного субэлемента на поле чисел $N_{n,k}$ становится существенно неупорядоченной. Благодаря идеальному дальнему порядку и детерминистской фрактальности организации простых субэлементов чисел $N_{n,k}$ по малому фрагменту цветографической схемы можно восстановить её большие фрагменты. (Теоретически – сколь угодно большие.) В случае составных субэлементов из разных простых делителей фрактальность их организации на поле чисел $N_{n,k}$ перестаёт быть детерминистской и такое восстановление становится невозможным.

Этот феномен непосредственно связан с темой случайности в арифметике, популярно освещённой в статье Г. Чейтина, которая была опубликована в журнале «В мире науки» ровно за год до моей статьи [4]. Там было показано, что эта проблематика выходит непосредственно на теорию Диофантовых уравнений и, следовательно, на Великую теорему Ферма. Вместе с тем, эта проблематика была прямо связана и с организацией простых субэлементов в треугольнике Паскаля, но при этом не учитывались показатели степеней их представительства в числах $N_{n,k}$. Их учёт впервые был введён моей цветографической символикой. В такой версии организация простых субэлементов в треугольнике Паскаля отражается *систематически, исчерпывающим образом* и представляет массу совершенно новых сведений о структурировании треугольника Паскаля на наиболее глубоком уровне простых чисел. Вся эта исторически новейшая информация, несомненно, даёт новые стимулы в разработке проблематики, освещённой в своё время Г. Чейтиным, включая теорию Диофантовых уравнений.

В этой связи подчеркну ещё раз, что субструктуры треугольника Паскаля веками «лежали на поверхности» вплоть до 1980 г. Для их открытия всего-то и надо было лишь мало-мальски развернуть треугольник Паскаля со структурированными числами $N_{n,k}$ и перейти на компактную знаковую форму их отражения. Поразительным историко-научным фактом является то, что за многие века никто из математиков не додумался до столь элементарного, примитивного эвристического хода.

Несмотря на то, что описанные субструктуры треугольника Паскаля являются чрезвычайно впечатляющими, этот уникальный математический объект таит в себе новые сюрпризы. То, что косое суммирование чисел $N_{n,k}$ порождает числовую последовательность Фибоначчи, было обнаружено в XIX в. Несмотря на обилие замечательных свойств ряда Фибоначчи, треугольник Паскаля всё же представляется более основополагающей числовой системой, коль скоро он этот ряд генерирует. В этой связи было бы интересно исследовать треугольник Паскаля на предмет составленности его чисел $N_{n,k}$ в ключе иррациональной «золотой» системы счисления Бергмана–Стахова [5].

Наконец, открытые мной субструктуры треугольника Паскаля, образуемые его

простыми делителями, позволяют точно вычислять числа C_n^k при больших значениях n . Во множестве задач физической и химической кинетики, теории информации и др. возникает необходимость систематически оперировать такими величинами C_n^k . В таких случаях традиционно обращаются к приближённой формуле Стирлинга для вычисления факториалов, фигурирующих в формуле для числа сочетаний:

$$n! \sim \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot n^n \cdot e^{-n},$$

где $\pi = 3,1459\dots$, $e = 2,7183\dots$.

Субструктуры треугольника Паскаля, образуемые его простыми делителями, позволяют оперировать точными значениями C_n^k , представленными в форме канонического произведения простых делителей в своих степенях. В такой форме большие C_n^k можно ставить в дробно-рациональные выражения и после сокращений простых делителей получать точные результаты там, где традиционно довольствуются приближёнными результатами. Фрактальные субструктуры треугольника Паскаля могут быть затабулированы, воплощены в новых компьютерных программах и т. п. *В общем, треугольник Паскаля теперь позволяет не просто вычислять значения C_n^k , но и вычислять их с высокой точностью.*

Рис. 18 и 19 даются в помощь желающим продолжить изучение субструктур треугольника Паскаля, а также арифметических треугольников Фибоначчи и Люка.

В заключение ещё раз отмечу, что ярко выраженная поступательность развития субструктур треугольника Паскаля указывает на то, что пора сломать многовековую традицию и поставить его «с головы на ноги». То есть, наращивать не сверху вниз, а снизу вверх.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Абачиев С. К.** Многоцветная гармония треугольника Паскаля // Наука и жизнь, 1981, № 4.
2. **Абачиев С. К.** О треугольнике Паскаля, простых делителях и фрактальных структурах // В мире науки, 1989, № 9.
3. **Абачиев С. К.** Эволюционная теория познания. (Опыт систематического построения.) – М.: URSS, 2004.
4. **Чейтин Г. Дж.** Случайность в арифметике // В мире науки, 1988, № 9.
5. **Стахов А. П.** Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984.

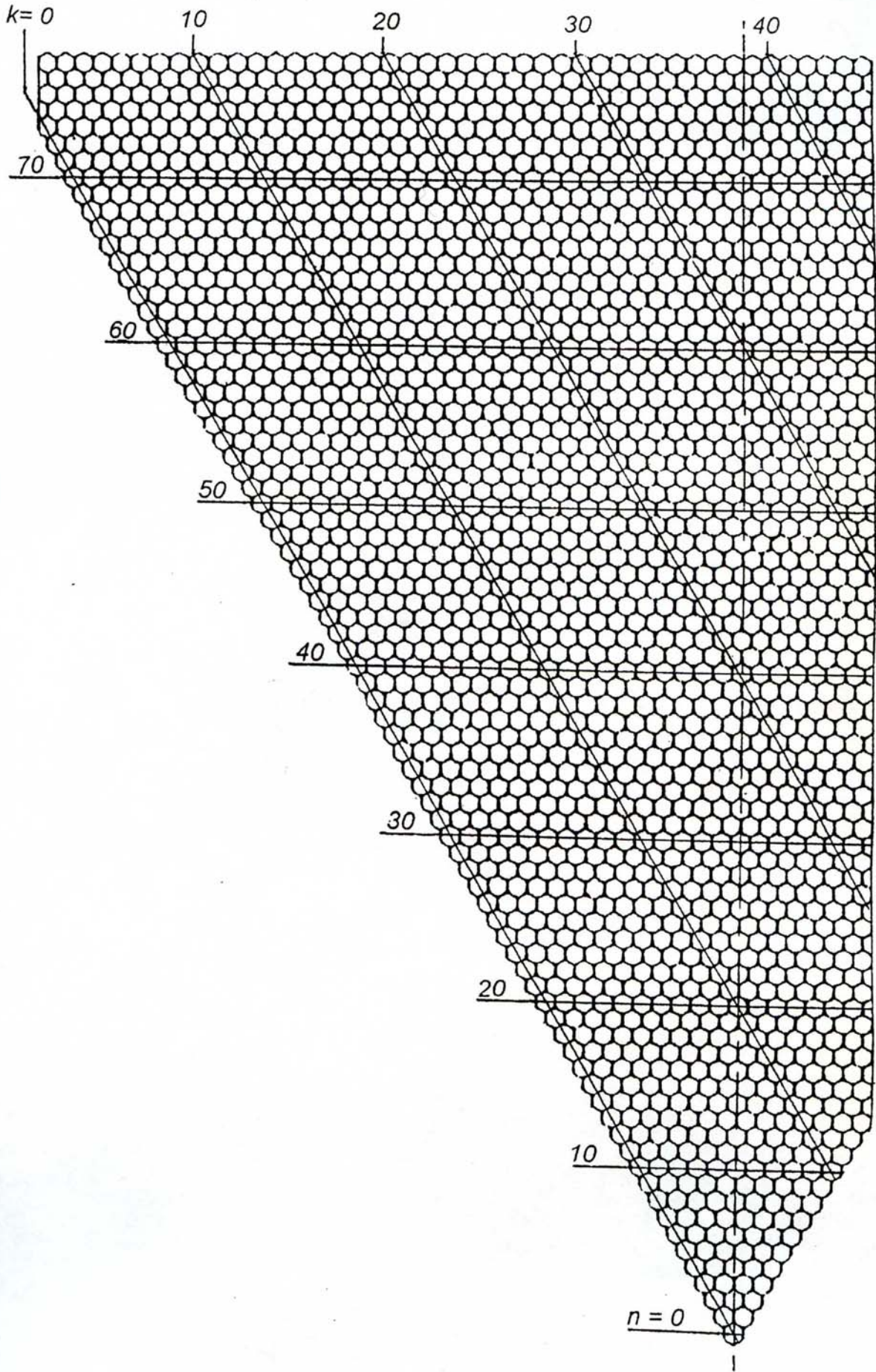


Рис. 18

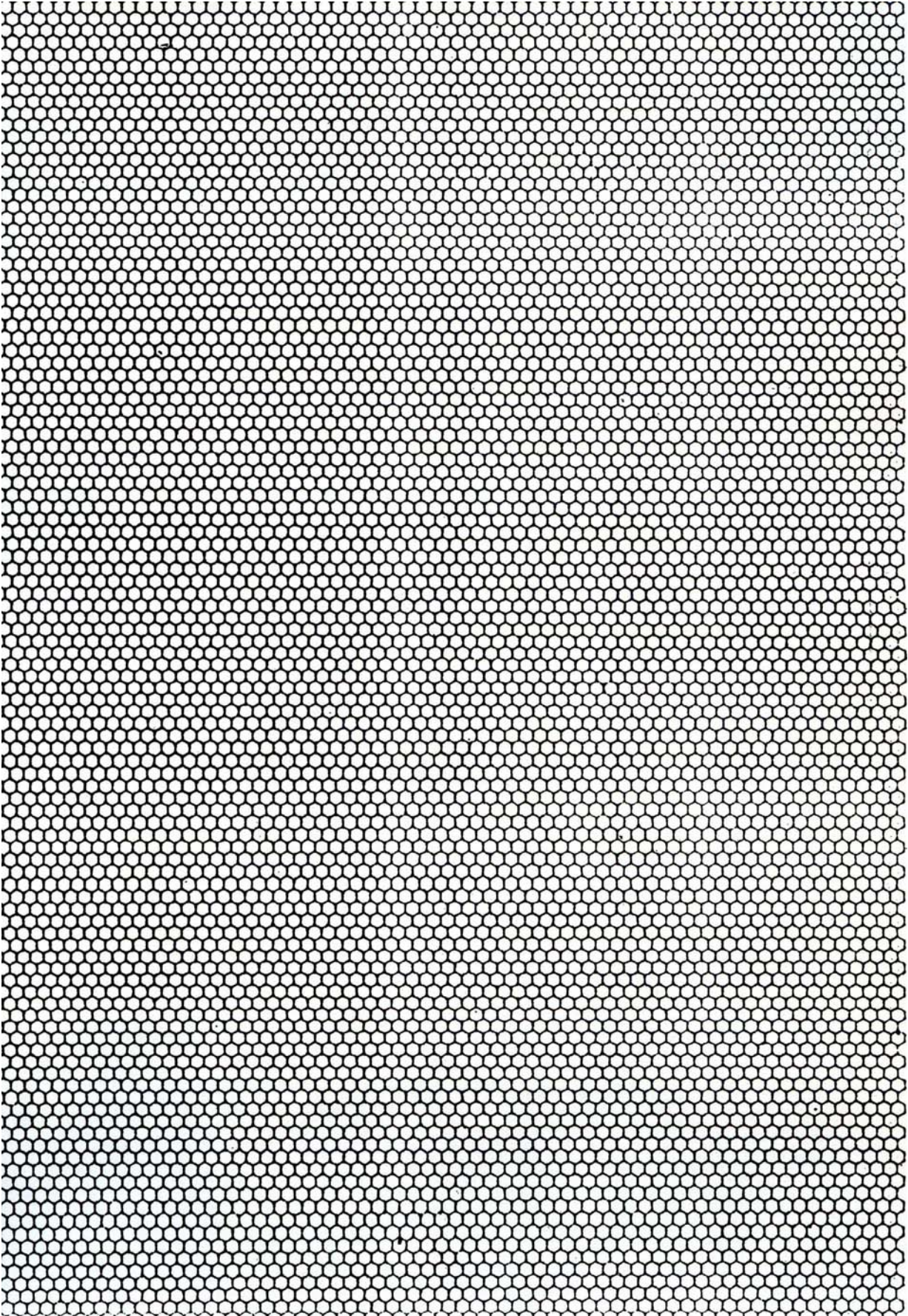


Рис. 19