А.П. Стахов

# Обобщения задачи о кроликах, чисел Фибоначчи и Золотого Сечения

Я рад, что на «поле Фибоначчи» появился сильный игрок – профессор Сергей Леонидович Василенко, который поднимает глубокие проблемы развития «теории чисел Фибоначчи». Мне с ним приятно «играть в Фибоначчи» и вести дискуссии на эту тему. Особенно приятно, что он из Харькова – моего любимого города, с которым я связан кровными узами (мой отец – до войны студент исторического факультета, а во время войны - харьковский студбатовец и его имя находится на Доске Памяти Харьковского университета вместе с другими студбатовцами, не возвратившихся с полей сражений, моя жена – харьковчанка, мои дети родились в Харькове, в 1961 г. я закончил Харьковский авиационный институт, а в 1966 г. аспирантуру кафедры технической кибернетики Харьковского института радиоэлектроники и т.д.). Мой предыдущий опыт дает мне основание сделать вывод, что Харьков – это город науки и образования, в котором работают талантливые ученые, - и проф. Василенко тому подтверждение.

Но вернемся к проблеме, поставленной в названии статьи, - к кроликам Фибоначчи. Существо «задачи о кроликах», сформулированной Фибоначчи в 13-м веке, состоит в следующем:

*«Пусть в огороженном месте имеется пара кроликов (самка и самец) в первый день января. Эта пара кроликов производит новую пару кроликов в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов. Возникает вопрос: сколько пар кроликов будет в огороженном месте через год, то есть через 12 месяцев с начала размножения?»*

Для решения этой задачи обозначим через $A$ пару зрелых кроликов, а через $B$ – пару новорожденных кроликов. Тогда процесс «размножения» может быть описан с помощью двух «переходов», которые описывают ежемесячные превращения кроликов в процессе размножения:

$$A \Rightarrow AB \tag{1}$$

$$B \Rightarrow A. \tag{2}$$

Заметим, что переход (1) моделирует ежемесячное превращение каждой зрелой пары кроликов $A$ в две пары, а именно в ту же самую пару зрелых кроликов $A$ и новорожденную пару кроликов $B$. Переход (2) моделирует процесс «созревания» кроликов, когда новорожденная пара кроликов $B$ через месяц превращается в зрелую пару $A$. Тогда, если мы начнем в первом месяце со новорожденной пары $B$, то через месяц согласно (2) новорожденная пара превратится в зрелую, а начиная с третьего месяца процесс размножения кроликов осуществляется в соответствии с рекуррентным соотношением:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{3}$$

которое приводит к *числам Фибоначчи*:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, .... \tag{4}$$

Заметим, что начальные условия $F_1$ и $F_2$ могут быть выбраны произвольными, например,

$$F_1 = a \text{ и } F_2=b$$

и тогда мы получим другие числовые ряды, которые С.В. Василенко предлагает назвать *«золотыми» числами Фибоначчи с произвольными начальными условиями.* В других источниках (например, в книге Vajda, S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications*. Ellis Horwood limited, 1989) такие числовые последовательности называются *обобщенными числами Фибоначчи* и для них вводится специальное обозначение $G_n$, причем

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2} \tag{5}$$
$$G_1 = a \text{ и } G_2 = b \tag{6}$$

Ясно, что при $G_1 = 1$ и $G_2 = 1$ мы получаем классический ряд Фибоначчи (4), а при $G_1 = 1$ и $G_2 = 3$ - числа Люка:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, .... \tag{7}$$

Я хочу еще раз подчеркнуть, что понятие «обобщенные числа Фибоначчи» введено в книге Vajda, S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications*. Ellis Horwood limited, 1989 и под этим понимаются вполне конкретные числовые ряды, которые являются ОБОБЩЕНИЕМ рядов Фибоначчи и Люка.

В моей книге *Введение в алгоритмическую теорию измерения.* Москва: Советское радио, 1977 имеется Параграф 3 (с.96-99), в котором описано следующее обобщение задачи о кроликах:

> «Зададимся целым неотрицательным числом $p \geq 0$, которое назовем временем «созревания» кроликов, и рассмотрим следующую задачу. Пара зрелых кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через $p+1$ месяцев после рождения уже приносят приплод. Сколько пар кроликов появится через $n$ месяцев, если: а) размножение началось с пары зрелых кроликов; б) размножение началось с одной пары новорожденных кроликов?»

По-видимому, ни у кого не вызывает сомнения, что сформулированная задача есть ОБОБЩЕНИЕ классической задачи Фибоначчи, так как при $p=1$ эта задача совпадает с «задачей о кроликах», сформулированной Фибоначчи. Для «обобщенной задачи Фибоначчи» мы можем записать следующую систему «переходов»:

$$A \Rightarrow AB \tag{8}$$
$$B_0 \Rightarrow B_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow B_{p-1} \Rightarrow B_p = A. \tag{9}$$

Как понимать «переход» (9)? Если $B_0$ – новорожденная пара кроликов, то через месяц она переходит в промежуточное состояние $B_1$, через два - в состояние $B_2$, ..., а через $p$ месяцев – в промежуточное состояние $B_{p-1}$, наконец, еще через месяц – в «зрелое состояние» $B_p = A$.

Нетрудно показать, что решением этой задачи являются *p-числа Фибоначчи,* задаваемые рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \tag{10}$$

при начальных состояниях

$$F_p(1) = F_p(2) = F_p(3) = \ldots = F_p(p+1) = 1. \tag{11}$$

Ясно, что при $p=1$ рекуррентное соотношение (10) при начальных условиях (11) порождает *числа Фибоначчи* (4). И с этой точки зрения числовые последовательности (10), (11) вполне уместно назвать *обобщенными числами Фибоначчи* или просто *p-числами Фибоначчи* (прижилось и то и другое название). Если говорить строго, то Фибоначчи к числам (10) и (11) не имеет никакого отношения и, наверное, было бы правильным назвать их *p-числами Витенько-Стахова* по имени тех ученых, которые впервые ввели рекуррентное соотношение (10) (я не возражаю).

Обобщенные золотые пропорции или золотые *p*-пропорции, которые Василенко предлагает назвать *p-пропорциями Стахова,* были, действительно, введены мною в книге *Введение в алгоритмическую теорию измерения.* Москва: Советское радио, 1977 как пределы, к которым стремятся отношения соседних *p-чисел Витенько-Стахова,* то есть,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}=\Phi_p \qquad (12)$$

где $\Phi_p$ - *p-пропорция Стахова,* положительный корень следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1}-x^p-1=0, \qquad (13)$$

которое при *p*=1 сводится к уравнению «золотой пропорции».

Теперь несколько слов о *p-сечении Стахова,* которое я ввел в книге *Введение в алгоритмическую теорию измерения* и назвал его обобщенным «золотым» сечением или «золотым» *p-сечением.* Хорошо известна геометрическая формулировка классической задачи о «золотом сечении»: разделить отрезок *AB* точкой *C* на два отрезка – меньший отрезок *AC* и больший отрезок *CB* такие, чтобы

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{AC} \qquad (14)$$

Эта задача легко обобщается, если делить отрезок следующим образом:

$$\left(\frac{AB}{CB}\right)^p=\frac{CB}{AC} \qquad (15)$$

Ясно, что при *p*=1 соотношение (15) сводится к (14), то есть, сечение (15) есть ОБОБЩЕНИЕ (14). На этом основании было введено понятие «обобщенное золотое сечение». Если Василенко угодно называть сечение (15) *p-сечением Стахова,* я не возражаю.

Но тогда необходимо переименовать и другие понятия. Например, к названию *p-код Фибоначчи,* введенное мною в книге *Введение в алгоритмическую теорию измерения,* строго говоря, Фибоначчи никакого отношения не имеет, также как к названиям «арифметика Фибоначчи» и «компьютеры Фибоначчи» и, согласно Василенко, их надо переименовать на *p-код Стахова, арифметика Стахова, компьютеры Стахова и т.д.* То же самое надо сделать с понятием *«коды золотой пропорции»,* введенным мною в книге «Коды золотой пропорции» (1984). Эти коды необходимо назвать «системы Стахова» или «системы, основанные на *p*-сечениях Стахова» и т.д.

Но нужно ли это делать, я не уверен. Эти понятия уже вошли в научную литературу, начиная с 70-х годов 20-го столетия, и пусть эти названия сохраняются. И если двигаться по пути, предложенному Василенко, то необходимо переписать все книги, все изобретения и все патенты на «компьютеры Фибоначчи».

Что касается моего утверждения о том, что с публикацией книги Vajda, S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications* и введением «гиперболических функций Фибоначчи» «классическая теория чисел Фибоначчи» себя исчерпала, то я на этом еще раз настаиваю. Нельзя до бесконечности исследовать «классическое золотое сечение» и «классические числа Фибоначчи». С другой стороны, теория гиперболических функции Фибоначчи и Люка является более общей теорией, чем «теория чисел Фибоначчи» (в смысле Воробьева, Хоггатта и Вайды), то есть, фибоначчистам пришла пора «сушить весла». С другой стороны, я не отрицаю поиск приложений «золотого сечения» и «чисел Фибоначчи» в современной науке – этот процесс сейчас интенсивно продолжается.

Но те ОБОБЩЕНИЯ рекуррентного соотношения Фибоначчи и «золотого сечения», которые получены мною и Витенько (*p-числа Витенько-Стахова, p-сечения Стахова*), Шпинадель, Газале, Татаренко (*«металлические пропорции»* и др.), и их приложения (алгоритмическая теория измерения, коды Стахова, арифметика Стахова, компьютеры Стахова, «золотая» фибоначчиева гониометрия Стахова) с моей точки зрения являются генеральным направлением «современной теории чисел Фибоначчи», которую я предлагаю назвать «Математикой Гармонии».

Кстати, к ответу на вопрос: кому все это нужно? В своей новой книге «The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science” я предложил рассматривать «задачу о кроликах» с точки зрения теории биологических популяций и сформулировал «Принцип Асимметрии Живой Природы», который лежит в основе процессов размножения и деления биологических клеток. И «переходы» (1, 2, 8, 9) и лежат в основе этого принципа.

И суть не в том, чтобы заниматься «наукообразием» и «математизацией», расширяя «теорию чисел Фибоначчи», а направить исследования на поиски практических приложений новых рекуррентных соотношений и новых сечений. И такие приложения уже получены. Если кому-либо хочется развивать «теорию чисел Фибоначчи» (в смысле Воробьева, Хоггатта и Вайды), то никто никому ничего не возбраняет. Из новых результатов в этой области я бы выделил обнаружение так называемых «нумерологических периодичностей» (период длиной в 24) в рядах Фибоначчи и Люка и обнаружение связи «Пифагоровых треугольников» с числами Фибоначчи и Люка.