А.П. Стахов

Теории чисел Фибоначчи: этапы большого пути (к завершению международной online конференции «Золотое Сечение в современной науке»)

1. Введение

Во второй половине 20-го века в современной науке и математике начало активно развиваться научное направление, которое получило название «Теория чисел Фибоначчи» [1, 2]. На самом деле, предметом этой теории в широком смысле являются два математических объекта, тесно связанные друг с другом: «Золотое Сечение», восходящее к античному периоду, и числа Фибоначчи, открытые в 13-м веке. Хотя большинство специалистов сходятся во мнении, что и Пифагор и Платон знали о «Золотом Сечении», но, поскольку Пифагор не оставил никаких письменных свидетельств, а в трудах Платона в явном виде упоминание о «Золотом Сечении» отсутствует, то это всегда давало повод для всяких спекулятивных заявлений. Однако существует математический источник, в котором впервые дается строгая формулировка «задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении» (так в старину называлось «Золотое Сечение»). Речь идет о «Началах» Евклида. Поэтому мы имеем полное право начать математическую историю «теории чисел Фибоначчи» (включая «Золотое Сечение»), с «Начал» Евклида, в которых задача о золотом сечении описана в Книге II (Теорема II.11).

Если рассматривать «теорию чисел Фибоначчи» в широком смысле, то мы можем указать на первый, весьма длительный период в развитии этой теории, начиная от Евклида и до 20-го века. В создании этой теории принимали участие выдающиеся математики и ученые Евклид, Фибоначчи, Пачоли, Кеплер, Кассини, Люка, Бине, Гика, Воробьев, Хогатт, Вайда, Дунлап и другие. Этот период в развитии «теории чисел Фибоначчи» уместно назвать **«классическим периодом».** В этот период все внимание исследователей направлено на исследование свойств «Золотого Сечения» и «чисел Фибоначчи» и установление взаимосвязи между ними. Во второй половине 20-го века возникает повышенный интерес к «теории чисел Фибоначчи» в математике. Хотя в этот период первым, кто привлек внимание научной общественности к этой проблеме, был советский математик Николай Воробьев [1], однако инициативу перехватили американские математики. Для изучения свойств «Золотого Сечения» и «чисел Фибоначчи» в 1963 г. в США была организована Фибоначчи-Ассоциация и в этом же году был учрежден ежеквартальный математический журнал «The Fibonacci Quarterly”. В 1966 г. создатель Фибоначчи-ассоциации американский математик Вернер Хогатт опубликовал книгу [2], которая подытожила определенный этап в развитии этой области. Следует отметить, что к концу 80-х годов интенсивность исследований в области классического «Золотого Сечения» и классических чисел Фибоначчи уменьшается. В этом нет ничего удивительного: ведь нельзя до бесконечности открывать новые и новые свойства чисел Фибоначчи и золотого сечения. Об этом также можно судить по самому журналу «The Fibonacci Quarterly”, в котором число статей, посвященных проблематике чисел Фибоначчи, уменьшается, сам журнал начинает все больше походить на обычный журнал по комбинаторной математике, а само название «The Fibonacci Quarterly" сохраняется в основном как «брэнд». По моему мнению, две прекрасные книги - книга английского математика профессора Вайды (Vaida) [3], опубликованная в 1989 г., и книга американского математика Дунлапа (Dunlap) [4], опубликованная в 1997 г., поставили «жирную точку» в развитии «классической теории чисел Фибоначчи». Она себя исчерпала, хотя поиски приложений чисел Фибоначчи и золотого сечения в естествознании и других науках будут продолжаться.

Однако, параллельно с «классическим направлением», начиная с 60-х годов 20-го века, в Советском Союзе начинает развиваться «новая, славянская волна» в развитии этой теории, связанная, прежде всего, с работами Витенько, Стахова, Ткаченко, Сороко, Боднара и других [5-9].

В 1963 г., то есть, в тот же год, когда была создана Фибоначчи-Ассоциации, я поступил в аспирантуру при кафедре технической кибернетики Харьковского института радиоэлектроники. Одна из задач, которая была поставлена передо мною в кандидатской диссертации, был поиск оптимальных, то есть, наилучших в определенном смысле алгоритмов аналого-цифрового преобразования. К решению этой задачи подключился талантливый математик Игорь Витенько, который в тот период работал в Харьковском институте радиоэлектроники. Совместно с Витенько и была создана оригинальная «теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования» [5]. Именно при разработке этой теории была обнаружена неожиданная связь этой теории с числами Фибоначчи и были введены новые числовые последовательности, названные *р-числами Фибоначчи*.

В 1970 г. Игорь Витенько уехал в Ужгород, где начал работать доцентом Ужгородского университета, а я в 1971 г. уехал в Таганрог, где возглавил кафедру информационно-измерительной техники Таганрогского радиотехнического института. С Игорем Витенько мы переписывались, и я много рассказывал ему в письмах о моих планах по развитию этого научного направления, в частности, о задумке написать книгу по *алгоритмической теории измерения*. В 1972 г. я защитил докторскую диссертацию на тему «Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования» [6]. В 1974 г. случилась непоправимое: Игорь Витенько трагически погиб (покончил жизнь самоубийством). С этого момента все проблемы, связанные с разработкой новой теории измерения, названной *алгоритмической теорией измерения,* легли на мои плечи. Основы этой теории были изложены в моей первой книге «Введение в алгоритмическую теорию измерения» [7], опубликованной в 1977 г. Я с огромным энтузиазмом работал над своей первой книгой, перелопатив большое количество литературы не только по числам Фибоначчи, но, прежде всего, по теории измерения. Книга посвящена светлой памяти Игоря Витенько. В предисловии к книге я написал: «*Замысел и план книги на начальном этапе ее создания обсуждался с канд. физ-мат. наук Игорем Владимировичем Витенько, трагическая гибель которого в сентябре 1974 г. оборвала это плодотворное сотрудничество*».

Наверное, самым главным результатом *алгоритмической теории измерения* явилось открытие *р-кодов Фибоначчи* – новых способов позиционного представления чисел. На их основе была разработана *арифметика Фибоначчи,* которая стала основой для *компьютеров Фибоначчи* – нового направления в компьютерной технике. К этим результатам я пришел в Таганроге в начале 70-х годов.

В дальнейшем идеи книги [7] были развиты в моей следующей книге «Коды золотой пропорции» [8], опубликованной в 1984 г. В этой книге были разработаны новые способы позиционного представления чисел и новая «золотая» компьютерная арифметика. В книге было сделано ряд неожиданных находок. В частности, знаменитые *формулы Бине* для чисел Фибоначчи и Люка были представлены в виде, который четко указывал на их связь с *гиперболическими функциями.* Размышляя над аналогией между формулами Бине и гиперболическими функциями, вместе с винницким ученым Иваном Ткаченко мы пришли к новому классу гиперболических функций – *гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка.* Первая статья на эту тему была опубликована в 1989 г. в виде препринта. Однако полноценная статья на эту тему, которая стала достоянием всего мирового научного сообщества, по рекомендации академика Ю.А. Митропольского была опубликована в журнале «Доклады Академии наук Украины» в 1993 г. [9]. Сразу после публикации этой статьи, понимая ее важность для развития «теории чисел Фибоначчи», польский математик-фибоначчист Трашка совершил некрасивый поступок – он просто «передрал» все результаты статьи [9] и опубликовал статью по гиперболическим функциям Фибоначчи в «The Fibonacci Quarterly” под своим именем без ссылок на нашу статью с Ткаченко [9]. Но статья Трашка все же была опубликована 3 года спустя нашей статьи [9]. Поэтому приоритет в открытии гиперболических функций Фибоначчи и Люка, вытекающих из формул Бине, принадлежит Стахову и Ткаченко. В эти же годы независимо от нас с Ткаченко к подобному же результату пришел львовский архитектор Олег Боднар [10, 11] при создании оригинальной геометрической теории филлотаксиса. Он при этом не использовал формулы Бине (что очень важно для теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка), а просто, следуя своей великолепной интуиции, просто заменил в классических гиперболических функциях основание e на основание Φ (золотую пропорцию).

В 1984 г. была опубликована книга белорусского философа Эдуарда Сороко «Структурная гармония систем» [9], вызвавшая огромный научный интерес. В этой книге был сформулирован *закон структурной гармонии систем*, основанный на золотых p-пропорциях.

Возвращаясь к «теории чисел Фибоначчи», я выскажу одну неожиданную мысль. По моему глубокому убеждению, с работ Боднара, Витенько, Сороко и Стахова и Ткаченко [5-12] начинается новый этап в развитии «теории чисел Фибоначчи», который можно назвать **«современным периодом».** Основные особенности этого периода состоят в следующем:

1. Повышенный интерес к обобщенным числам Фибоначчи и обобщенным золотым пропорциям, которые становятся в центре новой «теории чисел Фибоначчи».
2. Введение нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка,* которые перевели «теорию чисел Фибоначчи» на новый (непрерывный) уровень.

3. Четкая направленность новой «теории чисел Фибоначчи» на прикладные задачи, в частности, информатику, ботаническое явление филлотаксиса и другие проблемы естествознания.
4. «Современный период» характеризуется явным преобладанием славянских ученых в этой области (Россия, Украина, Белоруссия), то есть славянская наука перехватывает инициативу в развитии «теории чисел Фибоначчи» у западной науки. Эта инициатива была закреплена проведением нескольких международных семинаров **«Золотая Пропорция и Проблемы Гармонии Систем»,** которые успешно прошли в Киеве (1992, 1993), а затем в Ставрополе (1993-1996). На этих семинарах была создана так называемая Славянская «Золотая» Группа, к которой и перемещается центр научных исследований в этой области.

Таким образом, в развитии «теории чисел Фибоначчи» четко прослеживается два периода:

1. **«Классический период»,** который начинается в «Началах» Евклида и завершается в конце 20-го столетия публикацией книг [3, 4]. Этот период характеризуется концентрацией усилий на развитии теории «классического золотого сечения» и «классических чисел Фибоначчи»

2. **«Современный период»,** начало которого условно можно приурочить к 1992 г., когда в Киеве был проведен первый Международный семинар **«Золотая Пропорция и Проблемы Гармонии Систем»**, на котором была организована «Славянская «Золотая» Группа», объединившая всех славянских «золотоискателей» (последующие семинары были проведены в Киеве, 1993 г. и затем в Ставрополе, 1994-1996 гг.). Этот период характеризуется перемещением фокуса исследований на *обобщенные числа Фибоначчи* и *обобщенные золотые сечения»*, на *гиперболические функции Фибоначчи и Люка,* и поиски их приложений в информатике, ботанике и других науках.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы в сжатой форме изложить все научные достижения «классического» и «современного» периодов в развитии «теории чисел Фибоначчи».

2. Достижения «классического периода»

В течение этого периода было сделано несколько математических открытий и произошло несколько знаменательных событий, наиболее важными из которых являются следующие:

2.1. Доказательство связи «Золотого Сечения» с правильным пятиугольником и додекаэдром. Сейчас этот результат кажется настолько очевидным, что вряд ли стоит говорить о нем как о каком-то «достижении». Но кто-то же этот факт установил первым. И этим первым исследователем был Евклид, который доказал эту связь в своих «Началах». Более того, это доказательство дает ответ на вопрос: с какой целью Евклид писал свои «Начала». Согласно *гипотезе Прокла*, «Начала» Евклида, величайшее математическое произведение древних греков, является отражением идеи *гармонии Мироздания*, которая стояла в центре греческой науки и была связана с *Платоновыми телами,* которые символизировали *Основные*

Элементы Мироздания (огонь, воздух, земля, вода и эфир). Таким образом, «гипотеза Прокла» позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке **"Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания»** и **«Космология Платона»,** основанная на правильных многогранниках, были отражены в величайшем математическом сочинении греческой математики, *Началах* Евклида. И это было главной целью Евклида!

Для построения полной теории *Платоновых тел*, в частности, *додекаэдра,* Евклид ввел в рассмотрение Теорему II.11, в которой описал *задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении*, известную в современной науке как *золотое сечение,* и далее геометрически показал, как построить правильный пятиугольник и затем додекаэдр.

2.2. Открытие чисел Фибоначчи, сделанное Леонардо из Пизы в 13 веке, это следующее достижение в этой области. Считается, что рекуррентное соотношение, задающее числа Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \quad F_1 = F_2 = 1 \tag{1}$$

является первым в истории математики рекуррентным соотношением.

2.3. Книга Луки Пачоли «Divina Proportione», первая в истории науки книги по «Золотому Сечению» - одно из важнейших событий в науке эпохи Возрождения. Эта книга, иллюстрированная Леонардо да Винчи, оказала заметное влияние на современников.

2.4. Формула Кеплера. Считается, что Кеплер первым доказал, что отношение соседних чисел Фибоначчи в пределе стремится к «золотой пропорции»:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

2.5. Формула Кассини. Одно из самых замечательных свойств чисел Фибоначчи, выражаемое формулой

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}, \tag{3}$$

доказано знаменитым французским астрономом Джовани Кассини.

2.6. Числа Люка, задаваемые рекуррентным соотношением

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}; \quad L_1 = 1, L_2 = 3 \tag{4}$$

введены в 19-м веке знаменитым французским математиком Франсуа Люка.

2.7. Формулы Бине, связывающие числа Фибоначчи и Люка с золотой пропорцией, были введены в 19-м веке знаменитым французским математиком Жаком Бине. В своей книге [8] я представил формулы Бине в следующем форме, которая редко используется в математике:

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\Phi^n + \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k+1; \\ \dfrac{\Phi^n - \Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для} \quad n = 2k \end{cases} \tag{5}$$

$$L_n = \begin{cases} \Phi^n + \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k; \\ \Phi^n - \Phi^{-n} & \text{для} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{6}$$

Анализ формул (5), (6) дает нам возможность ощутить истинное «эстетическое наслаждение» и еще раз убедиться в мощи человеческого разума.

Действительно, ведь мы знаем, что числа Фибоначчи и числа Люка всегда являются целыми числами. С другой стороны, любая степень золотой пропорции является иррациональным числом. Отсюда вытекает, что целые числа L_n и F_n с помощью формул (5), (6) выражаются через специальные иррациональные числа.

2.8. Первое издание брошюры Н.Н. Воробьева «Числа Фибоначчи». Издание этой брошюры (1961 г.) стало знаменательным событием в развитии «классической теории чисел Фибоначчи». Оно привлекло внимание научной общественности к этой проблемы. Брошюра выдержала много изданий и была переведена на многие языки мира. Важно подчеркнуть, что первая математическая книга в области «теории чисел Фибоначчи» была опубликована славянским ученым.

2.9. Доказательство уникальности «Золотой Пропорции». В 20-м веке было привлечено внимание к уникальному свойству *золотой пропорции,* которое выделяет её среди других иррациональных чисел. Например, в работах **А.Я. Хинчина** [14] и **Н.Н. Воробьева** [1] доказано, что главная особенность *золотой пропорции* состоит в том, что среди всех иррациональных чисел она *хуже всех аппроксимируется рациональными дробями*.

Известно, что *золотую пропорцию* можно представить в виде *непрерывной дроби*:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} \tag{7}$$

Если мы будем аппроксимировать *золотую пропорцию* Φ, представленную в виде (7), *подходящими дробями* m/n, то мы придём к числовой последовательности, состоящей из отношений соседних чисел Фибоначчи. :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots \to \Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad . \tag{8}$$

Но эта последовательность чисел выражает ни что иное, как знаменитый *закон филлотаксиса* [10], в соответствии с которым Природа конструирует сосновые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечников и другие ботанические объекты. Другими словами, Природа использует уникальное математическое свойство *золотой пропорции,* задаваемое (7), (8), в своих замечательных конструкциях!

2.10. Фибоначчи-Ассоциация и «The Fibonacci Quarterly”. Исследования Люка и Бине стали той стартовой площадкой, с которой во второй половине 20-го века начала свое победное шествие в математике Фибоначчи-Ассоциация, организованная группой американских математиков в 1963 г. В этом же году Фибоначчи-Ассоциация начала выпускать ежеквартальный математический журнал “The Fibonacci Quarterly”. Эти два события сыграли огромную роль в деле консолидации математических сил на развитие «теории чисел Фибоначчи».

Американский математик и организатор Фибоначчи-Ассоциации **Вернер Хоггатт** опубликовал в 1966 г. книгу [2], которая отражала все основные достижения в этой области на тот период. Завершающую точку в развитии этой теории в «классический период» поставили две замечательные книги [3, 4].

3. Достижения «современного периода»

3.1. Алгоритмическая теория измерения как начало “современного периода» в теории чисел Фибоначчи [7]. По моему глубокому убеждению, именно создание *алгоритмической теории измерения* (АТИ) стало тем толчком, который привел к «современному периоду» в развитии теории чисел Фибоначчи. Я не имею возможности подробно излагать суть АТИ и отсылаю читателя к своей книге [7]. Ее главные особенности состоят в следующем:

1. АТИ в своих истоках восходит еще к одной задаче, впервые поставленной Фибоначчи – «задаче о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах». Известны два решения этой задачи в зависимости от исходных условий взвешивания. Если гири разрешается класть только на «свободную чашу весов», то оптимальной является «двоичная система гирь»: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... Если гири разрешается класть на обе чаши весов, то оптимальной является «троичная система гирь»: 1, 3, 9, 27, ...
2. В основе АТИ, изложенной в [7], лежит так называемый “принцип асимметрии измерения» [15]. Суть принципа очень проста. В отличие от трудов Фибоначчи, в АТИ рассматривается взвешивание на «инерционных» рычажных весах, обладающих «инерционностью» p. Если гири разрешается класть только на правую чашу весов, то в случае, когда гиря «перевесила» груз и рычажные весы перешли в противоположное состояние, после снятия гири со свободной чаши весов, «инерционные» рычажные весы возвращаются в исходное состояние в течение p дискретных моментов времени. Этот физический факт и должен быть учтен при выборе оптимальной системы гирь и оптимального алгоритма измерения.
3. Первым неожиданным результатом АТИ стало доказательство того, что при заданной «инерционности» p (p=0, 1, 2, 3, ...) оптимальная система гирь задается числовой последовательностью, названной *p-числами Фибоначчи,* которые задаются с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-p-1);\quad F_p(1)=F_p(2)=...=F_p(p+1)=1 \qquad (9)$$

Заметим, что при различных значениях p рекуррентное соотношение (9) порождает бесконечное число рекуррентных числовых рядов: при p=0 – классический двоичный ряд, при p=1 – классический ряд Фибоначчи, при $p=\infty$ p-ряд Фибоначчи представляет собой последовательность, состоящую из одних единиц, то есть, $\{1,1,1,...,1\}$

4. Заметим, что рекуррентное соотношение (9) является частным крайним случаем более общего рекуррентного соотношения, которое является основным результатом АТИ и задает всевозможные «оптимальные» алгоритмы измерения:

$$F(n,k)=F_p\left(n;\underbrace{0,0,...,0}_{t},\,p_{t+1},\,p_{t+2},...,\,p_k\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{t}F_p\left(n-1;\underbrace{0,0,...,0}_{j},\,p_{t+1}-1,\,p_{t+2}-1,...,\,p_k-1,\,\underbrace{p,\,p,...,\,p}_{t-j}\right). \tag{10}$$

$$F_p\left(1;\underbrace{0,0,...,0}_{t},\,p_{t+1},\,p_{t+2},...,\,p_k\right)=t+1. \tag{11}$$

Рекуррентное соотношение (10) при начальном условии (11) задает бесконечное количество новых рекуррентных числовых рядов, которые названы *обобщенными числами Фибоначчи* (см. таблицу ниже). При крайних значениях p и k рекуррентное соотношение (10) при начальном условии (11) генерирует широко известные числовые последовательности, в частности, *p-числа Фибоначчи* (k=1) и биномиальные коэффициенты при $p=\infty$. При k=1 и p=0 мы получаем ряд «двоичных чисел», а при k=1 и $p=\infty$ - натуральный ряд. Это означает, что АТИ неограниченно расширяет количество возможных обобщенных «фибоначчиевых» числовых рядов. На данном этапе достаточно детально исследованы только *p-числа Фибоначчи* (9) [7].

	$p=0$		$0\le p\le\infty$		$p=\infty$	
$k\ge1$	$(k+1)^n$	$\leftarrow$	$F_p(n,k)$	$\rightarrow$	$C_{n+k}^{k}=C_{n+k}^{n}$	*Binomial coefficients*
	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	
$k=1$	2^n	$\leftarrow$	$F_p(n)=F_p(n-1)+F_p(n-2)$	$\rightarrow$	$n+1$	
	Binary numbers		*Fibonacci* $p-$*numbers*		*Natural numbers*	

3.2. *P*-коды Фибоначчи. АТИ имеет важное прикладное значение для компьютерной техники. Дело в том, что каждый «оптимальный алгоритм измерения», задаваемый (9) и (10), порождает необычный способ позиционного представления чисел. Поэтому по существу АТИ представляет собой ни что иное, как *новую теорию позиционных систем счисления*. Оказывается, что все известные позиционные системы счисления с основанием $R=k+1$ порождаются алгоритмами измерения, соответствующими случаю $(k+1)^n$ (см. таблицу выше). В настоящее время детально исследованы свойства только одного нового позиционного представления натуральных чисел, названного *p-кодом Фибоначчи:*

$$N=a_nF_p(n)+a_{n-1}F_p(n-1)+\ldots+a_iF_p(i)+\ldots+a_1F_p(1), \tag{12}$$

где $a_i\in\{0,1\}$ - двоичная цифра i-го разряда p-кода Фибоначчи (12), $F_p(i)$ – p-число Фибоначчи, являющееся весом i-го разряда позиционного представления (12).

Выражение (12) задает бесконечное число двоичных позиционных представлений, так как каждому p соответствует свое позиционное представление типа (12). Частным случаем (12) является классический двоичный код (p=0)

$$N=a_n2^{n-1}+a_{n-1}2^{n-2}+\ldots+a_i2^{i-1}+\ldots+a_12^0\ , \tag{13}$$

который лежит в основе современных компьютеров.

При $p=\infty$ выражение (12) сводится к так называемому «унитарному коду»

$$N = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{N}, \quad (14)$$

который также широко используется в компьютерной технике.

Наконец, при p=1 мы получаем *код Фибоначчи,* основанный на классических числах Фибоначчи:

$$N=a_nF_n+a_{n-1}F_{n-1}+\ldots+a_iF_i+\ldots+a_1F_1. \quad (15)$$

3.3. Арифметика и компьютеры Фибоначчи. Сразу после переезда в Таганрог я начал активно заниматься разработкой *р-кодов Фибоначчи* и *арифметики Фибоначчи*. В 1974 г. результаты этих исследований были опубликованы [16]. В статье [16] я выдвинул весьма необычную идею: **вся компьютерная техника может быть построена на основе *кодов и арифметики Фибоначчи.*** Основное преимущество «компьютеров Фибоначчи» перед «неймановскими компьютерами», основанными на классической двоичной системе, состояла в возможности контроля всевозможных преобразований информации в компьютере, в частности, арифметических операций. Идея «компьютеров Фибоначчи» оказалась весьма привлекательной для широких кругов советской научной общественности. После моего доклада «Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики» на объединенном заседании кибернетического и компьютерного обществ Австрии (Вена, 3 марта 1976 г.) в СССР было принято решение о патентовании «фибоначчиевых» изобретений за рубежом. 65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и других стран являются неоспоримыми доказательствами приоритета советской науки в области *кодов, арифметики и компьютеров Фибоначчи.* Хотя знаменитая «горбачевская перестройка» не позволила реализовать *компьютеры Фибоначчи,* но эта идея сохраняет свою актуальность до настоящего времени, о чем я рассказал в статье [17].

Таким образом, в начале 80-х годов 20-го века в советской науке был сделан мощный прорыв в приложениях чисел Фибоначчи в компьютерной науке, что вывело советскую науку на первое место в этой важной области.

3.4. Золотые *p*-пропорции. Развитие теории *p*-чисел Фибоначчи привело к получению ряда важных теоретических результатов. Одним из них является обобщение золотого сечения и открытие нового класса математических констант, названных *золотыми p-пропорциями* Φ_p, которые возникают как предел отношения соседних *p*-чисел Фибоначчи, то есть,

$$\lim \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p \quad (16)$$

и являются корнями следующего алгебраического уравнения:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0 \quad (17)$$

Заметим, что при p=1 «золотая *p*-пропорция сводится к классической золотой пропорции, а уравнение (17) – к классическому уравнению золотой пропорции.

3.5. Треугольник Паскаля, биномиальные коэффициенты и *p*-числа Фибоначчи. Еще один важный математический результат – это установление связи

p-чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами [7]:

$$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + C_{n-4p}^4 + \ldots. \tag{18}$$

Заметим, что при p=0 $F_0(n+1) = 2^n$ и формула (18) сводится к широко известной формуле комбинаторного анализа:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n.$$

Хотя связь классических чисел Фибоначчи с Треугольником Паскаля была обнаружена многими математиками независимо друг от друга, но связь p-чисел Фибоначчи с биномиальными коэффициентами, задаваемая формулой (18), как мне кажется, впервые была доказана в книге [7].

3.6. Коды золотой пропорции. В 1980 г. я опубликовал статью [18], в которой ввел в рассмотрение новый способ представления действительных чисел, названный *кодами золотой пропорции.* Теория этих кодов изложена в моей книге [8]. Под кодом золотой пропорции понимается представление действительного числа в виде суммы:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i \ (i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots), \tag{19}$$

где $a_i \in \{0,1\}$ - двоичная цифра i-го разряда кода золотой пропорции (19), Φ_p^i – вес i-го разряда позиционного представления (19), Φ_p - основание системы счисления (19).

Заметим, что выражение (19) задает бесконечное количество позиционных двоичных представлений, так как каждое p=0, 1, 2, 3, ... задает свое собственное позиционное представление типа (19). При этом при p=0 позиционное представление (19) сводится к двоичной системе счисления:

$$A = \sum_i a_i 2^i \ (i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots), \tag{20}$$

а при p=1 – к системе счисления с иррациональным основанием $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, введенной в 1957 г. американским математиком Бергманом [19]:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i. \tag{21}$$

Важно заметить, что при p>0 все основания Φ_p являются иррациональными числами, то есть, выражения (19) и (20) задают класс *позиционных систем счисления с иррациональными основаниями* - нового направления в теории позиционных систем счисления. В статье [20] развит новый подход к геометрическому определению действительных чисел, основанных на (19), (21), то есть показано, что коды золотой пропорции (19) могут стать основой для развития новой («золотой») теории чисел.

3.7. Закон структурной гармонии систем Сороко. Концепция p-чисел Фибоначчи и золотых p-пропорций нашла еще одно оригинальное приложение, на этот раз – в теории гармонии систем. Автором такого приложения является белорусский философ Эдуард Сороко. В 1984 г. он опубликовал замечательную книгу «Структурная гармония систем» [21], что само по себе явилось одним из значительных событий в мировой науке. В этой книге Сороко сформулировал **«закон структурной гармонии систем»,** основанный на обобщенных золотых *p*-пропорциях:

"Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную ... устойчивость".

«Закон Сороко» расширяет количество «гармонических пропорций», которыми по его мнению являются золотые *p*-пропорции, корни алгебраического уравнения (17).

3.8. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Как я упоминал выше, в моей книге [8] *формулы Бине* были представлены в виде (5), (6), который раньше не использовался в математической литературе. Но именно в таком виде они очень похожи на гиперболические функции. Это внешнее сходство с гиперболическими функциями лежит в основе введения *гиперболических функций Фибоначчи и Люка* [9]. Дальнейшее развитие этой теории сделано в работе [22], в которой введены так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка*. Независимо от Стахова и Ткаченко [9] подобные же функции, названные *«золотыми» гиперболическими функциями,* были введены украинским исследователем Олегом Боднаром [10, 11], который использовал эти функции для создания оригинальной геометрической теории филлотаксиса. В чем состоит значение нового класса гиперболических функций для «теории чисел Фибоначчи»? Ответ на этот вопрос лежит через представление чисел Фибоначчи и Люка в виде формул Бине (5), (6). Рассмотрим *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка* [22]:

Симметричные гиперболические синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x)=\frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}};\ cFs(x)=\frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{22}$$

Симметричные гиперболические синус и косинус Люка

$$sLs(x)=\Phi^x-\Phi^{-x};\ cLs(x)=\Phi^x+\Phi^{-x} \tag{23}$$

Сравнивая формулы (22) и (23) с соответствующими формулами Бине (5) и (6), мы приходим к следующему выражению, которое связывает числа Фибоначчи и Люка с гиперболическими функциями (22) и (23):

$$F_n=\begin{cases} sFs(n), & \text{для} \quad n=2k \\ cFs(n), & \text{для} \quad n=2k+1 \end{cases};\quad L_n=\begin{cases} cLs(n), & \text{для} \quad n=2k \\ sLs(n), & \text{для} \quad n=2k+1 \end{cases}. \tag{24}$$

Это означает, что числа Фибоначчи и Люка совпадают с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка при дискретных значениях переменной x (x=0, ±1, ±2, ±3, …). А это, в свою очередь, означает, что теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка является более общей (непрерывной) теорией, чем «теория чисел Фибоначчи», а все «дискретные» тождества для чисел Фибоначчи и Люка могут быть получены из «непрерывных» тождеств для гиперболических функций Фибоначчи и Люка путем использования соотношений (24). **Таким образом,**

введение гиперболических функций Фибоначчи и Люка (22) и (23) приводит к самоликвидации «теории чисел Фибоначчи» как таковой, поскольку она становится частным («дискретным») случаем более общей теории - теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка (22) и (23)! И это ставит окончательную точку на «теории чисел Фибоначчи» классического периода.

3.9. «Металлические пропорции». В конце 20-го и начале 21-го века несколькими исследователями (**Шпинадель** [23], **Газале** [24], **Каппраф** [25], **Татаренко** [26]) независимо друг от друга начали изучаться следующее оригинальное обобщение рекуррентного соотношения Фибоначчи. Зададимся положительным действительным числом $\lambda > 0$ и рассмотрим следующее рекуррентное соотношение:

$$F_\lambda(n+2) = \lambda F_\lambda(n+1) + F_\lambda(n); \quad F_\lambda(0) = 0, F_\lambda(1) = 1. \tag{25}$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, ...

Справедливости ради следует отметить, что такие последовательности в математической литературе называются *последовательностями Люка*.

Числовые последовательности, порождаемые рекуррентным соотношением (25), будем называть λ-*числами Фибоначчи*. Ясно, что количество λ-*чисел Фибоначчи* теоретически бесконечно, так как каждому действительному числу $\lambda > 0$ соответствует свой ряд λ-*чисел Фибоначчи*.

Нетрудно найти характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения (25):

$$x^2 - \lambda x - 1 = 0 \tag{26}$$

Вера Шпинадель назвала положительные корни уравнения (26)

$$\Phi_\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{4+\lambda^2}}{2} \tag{27}$$

металлическими пропорциями [23]. При $\lambda = 1$ «металлическая пропорция» (27) сводится к классической «золотой пропорции». Металлические пропорции, соответствующие случаям $\lambda = 2,3,4$, названы Верой Шпинадель соответственно «серебряной» ($\Phi_2 = 1+\sqrt{2}$), «бронзовой» ($\Phi_3 = \left(3+\sqrt{13}\right)/2$) и «медной» ($\Phi_4 = 2+\sqrt{5}$) пропорциями.

Заметим, что *металлические пропорции* (27) обладают следующими замечательными математическими свойствами, подобными свойствам классической золотой пропорции:

1. Свойство «аддитивности» и «мультипликативности»:

$$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1} + \Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda \times \Phi_\lambda^{n-1} \tag{28}$$

2. Представление в виде «радикалов»:

$$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+...}}}} \tag{29}$$

3. Представление в виде цепной дроби:

$$\Phi_\lambda = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + ...}}} \tag{30}$$

Таким образом, исследование простейшего алгебраического уравнения (26) привело к открытию бесконечного количества новых математических констант. Эти константы лежат в основе двух математических открытий – *формул Газале* [24] и *«золотой» фибоначчиевой гониометрии* [27], которые привели к решению *4-й Проблемы Гильберта* [28, 29].

3.10. Формулы Газале. Мидхат Газале доказал [24], что λ-*числа Фибоначчи* могут быть выражены через *металлические пропорции* (27) в виде следующей формулы:

$$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n - (-1)^n \Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}, \tag{31}$$

которую в работе [27] названо *формулой Газале для* λ-*чисел Фибоначчи.*

Алексей Стахов в работе [27] вывел *формулу Газале для* λ-*чисел Люка,* которая имеет следующий вид:

$$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n + (-1)^n \Phi_\lambda^{-n} \tag{32}$$

В работе [27] также показано, что числовые последовательности $L_\lambda(n)$, задаваемые формулой (32), могут быть выражены рекурсивно:

$$L_\lambda(n+2) = \lambda L_\lambda(n+1) + L_\lambda(n); \quad L_\lambda(0) = 2, L_\lambda(1) = \lambda. \tag{33}$$

Заметим, что формулы Газале (31) и (32) являются обобщением формул Бине (5), (6), к которым они сводятся для случая $\lambda = 1$.

3.11. «Золотая» фибоначчиева гониометрия. Основываясь на формулах Газале (31) и (32), **Алексей Стахов** ввел в [27] так называемые *гиперболические* λ-*функции Фибоначчи и Люка*, задаваемые следующими выражениями:

<u>Гиперболический λ-синус и косинус Фибоначчи</u>

$$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}; \qquad cF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}} \tag{34}$$

<u>Гиперболический λ-синус и косинус Люка</u>

$$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x - \Phi_\lambda^{-x}; \qquad cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x + \Phi_\lambda^{-x} \tag{35}$$

Заметим, что для случая $\lambda = 1$ гиперболические λ-функции Фибоначчи и Люка сводятся к симметричным гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка (22), (23).

Заметим, что количество различных гиперболических λ-функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (34) и (35), теоретически бесконечно, так каждое действительное число $\lambda > 0$ порождает свой класс гиперболических функций типа (34), (35). В частности, для случая $\lambda_e = e - \frac{1}{e} \approx 2.35040238...$ гиперболические λ-функции Люка совпадают с классическими гиперболическими функциями с точностью до коэффициента ½, то есть,

$$sh(x) = \frac{sL_{\lambda_e}(x)}{2} \quad \text{и} \quad ch(x) = \frac{cL_{\lambda_e}(x)}{2}. \tag{37}$$

Нетрудно составить следующую сравнительную таблицу, связывающую *золотую пропорцию* с *металлическими пропорциями*.

Таблица 1. Связь «золотой пропорции» с «металлическими пропорциями»

Золотая пропорция ($\lambda = 1$)	Металлические пропорции ($\lambda > 0$)
$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\Phi_\lambda = \frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$
$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{...}}}}$	$\Phi_\lambda = \sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{1+\lambda\sqrt{...}}}}$
$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$	$\Phi_\lambda = \lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+\cfrac{1}{\lambda+...}}}$
$\Phi^n = \Phi^{n-1}+\Phi^{n-2} = \Phi\times\Phi^{n-1}$	$\Phi_\lambda^n = \lambda\Phi_\lambda^{n-1}+\Phi_\lambda^{n-2} = \Phi_\lambda\times\Phi_\lambda^{n-1}$
$F_n = \frac{\Phi^n-(-1)^n\Phi^{-n}}{\sqrt{5}}$	$F_\lambda(n) = \frac{\Phi_\lambda^n-(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$L_n = \Phi^n+(-1)^n\Phi^{-n}$	$L_\lambda(n) = \Phi_\lambda^n+(-1)^n\Phi_\lambda^{-n}$
$sFs(x) = \frac{\Phi^x-\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; cFs(x) = \frac{\Phi^x+\Phi^{-x}}{\sqrt{5}}$	$sF_\lambda(x) = \frac{\Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}; cF_m(x) = \frac{\Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}}{\sqrt{4+\lambda^2}}$
$sLs(x) = \Phi^x-\Phi^{-x}; cLs(x) = \Phi^x+\Phi^{-x}$	$sL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x-\Phi_\lambda^{-x}; cL_\lambda(x) = \Phi_\lambda^x+\Phi_\lambda^{-x}$

Красота этих формул завораживает. Это дает право предположить, что новые гиперболические функции (“золотая» фибоначчиева гониометрия) открывают необозримые перспективы для развития гиперболической геометрии и построения новых гиперболических моделей природы. И это оптимистическое заявление подтверждается решением 4-й Проблемы Гильберта, полученным **Алексеем Стаховым** и **Самуилом Арансоном** в работах [28, 29].

3.12. Четвертая Проблема Гильберта. В математической литературе *4-я проблема Гильберта* иногда считается сформулированной в весьма расплывчатой форме, что затрудняет ее окончательное решение. Именно поэтому ее решение, полученное в [28, 29], является весьма неожиданным. Суть решения состоит в следующем. Как известно, классическая модель *плоскости Лобачевского* в *псевдосферических координатах* (u,v), $0 < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, имеющей гауссову кривизну $K = -1$ (интерпретация Бельтрами гиперболической геометрии на псевдосфере), имеет вид:

$$(ds)^2 = (du)^2 + sh^2(u)(dv)^2, \tag{38}$$

где ds – элемент длины, $sh(u)$ - гиперболический синус. Как вытекает из (38), определяющую роль в *плоскости Лобачевского* играет *гиперболический синус*.

Для решения *4-ой проблемой Гильберта* **Алексей Стахов** и **Самуил Арансон** воспользовались гиперболическими λ-функциями Фибоначчи (34) и вывели следующее общее выражение для метрических λ-форм плоскости Лобачевского:

$$(ds)^2 = \ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2 + \frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2, \tag{39}$$

где $\Phi_\lambda = \frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$ - *металлическая пропорция* и $sF_\lambda(u)$ - гиперболический λ-синус Фибоначчи.

Как следует из выражения (39), число метрических λ-форм плоскости Лобачевского и, следовательно, число различных λ-геометрий Лобачевского бесконечно, а это, в свою очередь, и приводит к решению 4-й Проблемы Гильберта. В таблице приведены примеры метрических $\lambda-$форм плоскости Лобачевского, соответствующих различным значениям λ.

Таблица 2. Метрические $\lambda-$формы плоскости Лобачевского

Название	λ	Φ_λ	Аналитическое выражение
Метрическая $\lambda-$форма Лобачевского	$\lambda>0$	$\Phi_\lambda=\frac{\lambda+\sqrt{4+\lambda^2}}{2}$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_\lambda)(du)^2+\frac{4+\lambda^2}{4}\left[sF_\lambda(u)\right]^2(dv)^2$
"Золотая" форма	$\lambda=1$	$\Phi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_1)(du)^2+\frac{5}{4}\left[sFs(u)\right]^2(dv)^2$
"Серебряная" форма	$\lambda=2$	$\Phi_2=1+\sqrt{2}\approx 2.1421$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_2)(du)^2+2\left[sF_2(u)\right]^2(dv)^2$
"Бронзовая" форма	$\lambda=3$	$\Phi_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}\approx 3.30278$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_3)(du)^2+\frac{13}{4}\left[sF_3(u)\right]^2(dv)^2$
"Медная" форма	$\lambda=4$	$\Phi_4=2+\sqrt{5}\approx 4.23607$	$(ds)^2=\ln^2(\Phi_4)(du)^2+5\left[sF_4(u)\right]^2(dv)^2$
Классическая форма	$\lambda_e\approx 2.350402$	$\Phi_{\lambda_e}=e\approx 2.7182$	$(ds)^2=(du)^2+sh^2(u)(dv)^2$

3.12. Матрицы Фибоначчи и новая теория кодирования. Обобщенные p-числа Фибоначчи лежат в основе *матриц Фибоначчи,* теория которых описана в статье [30]. Рассмотрим так называемую Q_p-матрицу Фибоначчи размером $\left[(p+1)\times(p+1)\right]$, которая состоит из единичной матрицы размером $(p\times p)$, ограниченной последним рядом, состоящим из одних нулей, и первым столбцом, который состоит из нулей, ограниченных единицами сверху и снизу:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (40)$$

Доказано [30], что детерминант матрицы (40) равен:

$$\det Q_p = (-1)^p \qquad (41)$$

Если матрицу (40) возвести в n-ю степень, то она принимает следующий вид:

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}, \qquad (42)$$

причем ее элементами являются p-числа Фибоначчи.

Доказано [30], что детерминант матрицы (42) равен:

$$\det Q_p^n = (-1)^{pn}. \qquad (43)$$

Из (41) и (43) вытекает, что детерминант матриц (40) и (41) всегда равен +1 или -1.

Заметим, что для случая p=1 матрица (40) принимают вид так называемой Q-матрицы, исследованной Вернером Хоггаттом [2]:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (44)$$

При этом матрица (42) принимает следующий вид:

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (45)$$

то есть, ее элементами являются классические числа Фибоначчи.

Если теперь вычислить детерминант матрицы (45), то с учетом (43) мы получаем тождество

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad (46)$$

которое представляет собой ни что иное, как знаменитую *формулу Кассини* (3).

Матрицы (42) и (45) были положены в основу новой теории кодирования [31], суть которой состоит в том, что при кодировании исходное сообщение, представленное в матричной форме, умножается на матрицу (42), а при декодировании – на матрицу, инверсную к (42). Как показано в [31], такой метод кодирования-декодирования обладает очень высокой корректирующей способности, которая превышает традиционные алгебраические коды в 1 000 000 и больше раз.

3.13. Два революционных открытия современного естествознания, основанные на Платоновых телах. Первое из них сделано в области кристаллографии. Новый сплав, открытый израильским физиком **Даном Шехтманом** в 1982 г., имел все признаки кристалла, но при этом характеризовался наличием «икосаэдрической» или «пентангональной» симметрией, что строго запрещено в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы *квазикристаллами* [32]. Понятие квазикристалла представляет фундаментальный интерес, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Как подчеркивает в статье [32] *«это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике»*. Важно подчеркнуть, что в основе «квазикристаллов» лежит «золотое сечение», которое является главной пропорцией икосаэдра (этот факт доказан в «Началах» Евклида).

Второе революционное открытие – *фуллерены* - было сделано в области химии. Открытие фуллеренов - новой формы существования одного из самых распространенных элементов на Земле – углерода, признано одним из удивительных и важнейших открытий в науке XX столетия [33]. За свое открытие - обнаружение углеродных кластеров состава C60 и C70 – американские ученые **Р. Керл, Р. Смолли и Г. Крото** в 1996 г. были удостоены Нобелевской Премии по химии. Ими же и была предложена структура молекулы фуллерена C60, похожая на оболочку футбольного мяча. Как известно, оболочка футбольного мяча скроена из 12 пентагонов и 20 гексагонов. Наиболее стабильный изомер имеет структуру **усеченного икосаэдра**, который был известен еще Архимеду. В основе «усеченного икосаэдра» лежит «золотое сечение».

3.14. Фибоначчизация современной науки. «Современный период» в развитии «теории чисел Фибоначчи» характеризуется огромным количеством новых научных открытий из различных областей естествознания, основанных на числах Фибоначчи, золотой пропорции и их обобщениях. Ограничимся перечислением основных из них:

1. Новая геометрическая теория филлотаксиса («геометрия Боднара»), основанная на «золотых» гиперболических функциях [10, 11].

2. Резонансная теория Солнечной системы Константина Бутусова, основанная на «золотой пропорции» [34].

3. Фибоначчиевы резонансы генетического кода, открытые в 1990 г. французским исследователем Jean-Claude Perez.

4. «Золотые» геноматрицы Сергея Петухова [35].

5. Фибоначчиева интерпретация Периодической Системы Менделеева [36].

6. Фибоначчиево деление биологических клеток [37, 38].

7. **Ритмы мозга и Золотое Сечение** [39].

8. **Сердце и Золотое Сечение** [40].

9. **«Золотая» интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна и эволюции Вселенной, начиная с «Большого Взрыва»** [28, 29]**.**

Эти примеры можно было бы продолжить. Все они подтверждают, что все сферы современной науки подвергаются своеобразной «фибоначчизации», так как числа Фибоначчи и золотое сечение обнаруживаются везде, начиная с ботанического явления филлотаксиса, Солнечной системы и заканчивая генетическим кодом, делением биологических клеток, ритмами мозга, сердцем и специальной теорией относительности.

Заключение

1. В развитии «теории чисел Фибоначчи» мы можем выделить два основных периода: **«классический период»** и **«современный период».** В «классическом периоде» основные усилия исследователей были направлены на установление математических свойств чисел Фибоначчи и «золотого сечения». Этот период начался в античной науке и закончился в конце 20-го века, когда основные математические свойства изучаемых математических объектов были в основном установлены и изучены и «классическая теория чисел Фибоначчи» себя исчерпала.
2. Началом «современного периода» можно считать создание **алгоритмической теории измерения,** в которой были обнаружены алгоритмы измерения, основанные на классических числах Фибоначчи и *p*-числах Фибоначчи, а также создание теории **кодов Фибоначчи** и **арифметики Фибоначчи**, которые привели к концепции **«компьютеров Фибоначчи»** как нового направления в компьютерной технике. Это направление «фибоначчиевых» исследований стало мощной демонстрацией практической полезности «теории чисел Фибоначчи» и вывело советскую науку в мировые лидеры в «фибоначчиевом» направлении.
3. Основной особенностью «современного периода» является перенесение центра тяжести теоретических исследований на **«обобщенные числа Фибоначчи»** (*p*-числа Фибоначчи, $\lambda-$числа Фибоначчи и др.) и **«обобщенные золотые пропорции** (золотые *p*-пропорции и металлические пропорции и др.), а также **матрицы Фибоначчи**. Это подтверждается огромным количеством публикаций на эту тему, которые появились, например, на страницах журнала «Chaos, Solitons and Fractals".
4. Создание новых классов гиперболических функций (**гиперболических функций Фибоначчи и Люка и «золотой» фибоначиевой гониометрии**) является одним из фундаментальных результатов «современной теории чисел Фибоначчи», что может повлиять на развитие всей математики и теоретического естествознания. Исследования Олега Боднара показали, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка (или «золотые» гиперболические функции по Боднару) не являются досужим вымыслом математиков; они возникают в Природе независимо от нашего сознания и вообще от существования человечества и проявляют себя в сосновых шишках, ананасах, кактусах и других филлотаксисных объектах живой Природы. Это дает нам основание утверждать, **что гиперболические**

функции Фибоначчи и Люка являются «естественными» функциями Природы. И уже по этой причине, согласно Фурье, они принадлежат к фундаментальным открытиям современной науки. В этой связи фундаментальный интерес для математики и всего теоретического естествознания представляет также общая теория гиперболических функций, основанная на «металлических пропорциях» и названная **«золотой» фибоначчиевой гониометрией**. Эта теория ставит перед теоретическим естествознанием задачу поиска физических и биологических явлений, в которых их гиперболический характер проявляет себя в виде гиперболических $\lambda-$функций Фибоначчи и Люка. По-видимому, первым претендентом могут стать функции, соответствующие значению $\lambda=2$, которые порождают числа Пелли, которые широко используются для моделирования определенных физических явлений.

5. Еще одной особенностью «современного периода» является **расширение приложений чисел Фибоначчи, чисел Люка, золотого сечения и их обобщений в теоретическом естествознании,** что является отражением глобального процесса «фибоначчизации» современной науки. Возникновение **«Математики Гармонии»** [41] как нового междисциплинарного направления современной науки является отражением этой тенденции.
6. После открытия *квазикристаллов* и *фуллеренов,* разработки *алгоритмической теории измерения, кодов Фибоначчи, кодов золотой пропорции и арифметики Фибоначчи,* формулировки *«закона структурной гармонии систем,* создания *новой геометрической теории филлотаксиса («геометрии Боднара»),* разработки *общей теории гиперболических функций («золотой» фибоначчиевой гониометрии), решения 4-й Проблемы Гильберта,* открытия *«золотых» геноматриц Петухова* и получения других результатов фундаментального характера роль *«современной теории чисел Фибоначчи»* (*«Математики Гармонии»*) в современной науке становится настолько значительной, что отрицать этот факт было бы просто бессмысленным занятием.

Литература:

1. Воробьев Н.Н. *Числа Фибоначчи*, Москва, Наука, 1969.
2. Hoggat, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California, 1969.
3. Vajda, S. *Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications*. Ellis Horwood limited (1989).
4. Dunlap, R.A. *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*. World Scientific (1997).
5. Витенько И.В., Стахов А.П. Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Приборы и системы автоматики, вып. 11, Харьков: Изд-во Харьковского университета, 1970.
6. Стахов А.П. Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Докторская диссертация. Киевский институт инженеров гражданской авиации, 1972.

7. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
8. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
9. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, 1993, № 7.
10. Боднар О.Я. Геометрия филлотаксиса. Доклады Академии наук Украины, 1992, № 9.
11. Боднар О.Я. Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве. Львов, 1994.
12. Э.М. Сороко. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
13. А.П. Стахов, Гипотеза Прокла: новый взгляд на "Начала" Евклида и Математика Гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15195, 28.03.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322026.htm
14. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Изд.4**,** 2004 (первое издание – 1935 г.)
15. Стахов А.П. Принцип асимметрии логики измерения. Проблемы передачи информации, 1976, №3.
16. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В кн. Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры, вып.2. Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
17. А.П. Стахов, Автобиографическая повесть:компьютеры Фибоначчи, «Золотая» Информационная Технология, Математика Гармонии и «Золотая» Научная Революция) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15083, 10.02.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321093.htm
18. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
19. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
20. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал, том. 56, 2004 г.
21. Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
22. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
23.Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
24. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002 г.)
25. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
26. Татаренко А.А. «T_m — принцип» — всемирный закон гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12575, 10.11.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm
27. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm)

28. Стахов А.П., Арансон С.Х. Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm
29. Stakhov Alexey, Aranson Samuil. “Golden” Fibonacci Goniometry, Fibonacci-Lorentz Transformations, and Hilbert’s Fourth Problem. Congressus Numerantium, 193 (2006), pp.119-156
30. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
31. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the “Cassini formula”, and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
32. Гратиа Д. Квазикристаллы. Успехи физических наук, 1988, том 156, вып. 2, с. 347-363
33. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. Успехи физических наук, 1993, том 163, №2.
34. Бутусов К.П. Золотое сечение в Солнечной системе. – Астрономия и небесная механика. Серия «Проблемы исследования Вселенной», 1978, вып. 7. – 475-500.
35. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Москва, Бином, 2006. — 216-250
36. Шило Н.А., Динков А.В. Фенотипическая система атомов в развитие идей Д.И.Менделеева // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14630, 09.11.2007 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321073.htm
37. Розин Б.Н. Золотое Сечение – морфологический закон живой природы. Сборник «Проблеми гармонії, симетрїії і золотого перетину в природі, науці та мистецтві», Винницкий аграрний унывеситет, 2003, вып. 15.
38. Spears C.P., Bicknell-Johnson, M. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees, Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 7, 1998, 377-391.
39. Соколов А. Тайны «золотого» сечения. Техника – молодежи, 1978, №5.
40. Цветков В.Д. Золотая гармония и сердце. Пущино: Фотон-век, 2008 г.
41. Stakhov A.P. The Harmony Mathematics. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific, 2009