А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 1. Роль измерения в развитии науки

Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в ***счете****, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в* ***измерении,*** *что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно* ***«гипотезе Прокла»****, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием* ***«идеи гармонии»*** *- главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории* ***Платоновых тел****, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии:* ***алгоритмическая теория измерения****,* ***системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии****. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является* ***конструктивной математической теорией измерения*** *(без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые* ***биномиальные алгоритмы измерения****, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и* ***фибоначчиевые алгоритмы измерения,*** *которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных* ***p-числами Фибоначчи****. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе* ***p-кодов Фибоначчи*** *– новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке –* ***компьютеров Фибоначчи*** *(65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран).* ***Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой p-пропорции)*** *являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу* ***«золотой» теории чисел.*** *Наконец,* ***«математика гармонии»,*** *включающая в себя АТИ и коды золотой пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и p-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа «золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Что такое «измерение»?

В Большой Советской Энциклопедии мы находим следующее определение этого понятия: «*Измерение – операция, посредством которой определяется отношение одной (измеряемой) величины к другой однородной величине(принимаемой за единицу измерения);число, выражающее такое отношение, называется численным значением измеряемой величины*».

Измерение является важным способом количественного познания объективного мира. Великому русскому ученому **Д.И. Менделееву**, создателю Периодической системы химических элементов, принадлежат следующие замечательные слова: «*Наука начинается там, где начинают измерять. Точная наука немыслима без меры*».

Дмитрий Иванович Менделеев (1834-1907)

2. Принцип дифференциации «науки об измерениях»

Понятия о *величине* и *измерении* принадлежат к числу основных понятий науки. Эти понятия, теоретическое изучение которых началось в Древней Греции, в 20 в. привлекли к себе представителей самых различных научных дисциплин: философов, физиков, математиков, теоретиков информации, психологов, системотехников, специалистов измерительной техники и др. В этой связи особую актуальность приобретает задача определения предмета, содержания и места науки об измерениях в системе современных наук. В настоящей главе делается попытка провести методологический анализ идей, принципов и научных направлений, которые можно объединить под общим названием "наука об измерениях".

Факт существования в современной науке различных направлений изучения измерений является отражением диалектического процесса *дифференциации* науки об измерении как важнейшего принципа ее развития. Измерение как способ количественного отражения свойств объективного мира является диалектически многогранным понятием. Каждая точная наука в качестве наиболее существенного свойства измерения выделяет ту его сторону, которая является наиболее важной для данной науки, и изучение этой стороны измерения приводит к появлению той или иной частной теории измерения. Так, в квантовой физике наиболее существенным при измерении является взаимодействие микрообъекта с измерительным макроприбором, - и эта проблема лежит в основе теории *квантово-механических измерений* [1]. В социологии, психологии, системотехнике, экономике измерение сводится к выбору типа шкалы, к которой может быть отнесена измеряемая величина, а проблема шкал лежит в центре теории *психологических измерений* [2]. В технических измерениях и физике главными проблемами измерений является выбор *систем физических единиц* и уменьшение *погрешностей измерений*. Изучение этого аспекта измерений привело к созданию *метрологии – науки о физических измерениях* [3]. Погрешности измерений можно рассматривать как некоторые «помехи» в «измерительном канале»; эта идея лежит в основе *информационной теории измерений* [4]. Изучения измерения как некоторого способа (алгоритма) получения числового результата измерения привело к разработке *алгоритмической теории измерения* [5,6].

3. Прикладная и фундаментальная теории измерений

На всех этапах развития науки всегда выделялось два аспекта, два уровня изучения измерений: *прикладной* и *фундаментальный*.

Фундаментальный уровень предполагает рассмотрение измерения как основополагающей проблемы, являющийся источником развития точных наук (в частности, физики, математики, «нефизических» точных наук); на этом уровне задача состоит в выявлении наиболее общих свойств и закономерностей измерения как количественного способа познания объективного мира. Открытие этих закономерностей всегда оказывало решающее влияние на развитие той или иной точной науки. Примером такого открытия, на тысячелетия определившего развитие математики, является доказательство пифагорейцами существования *несоизмеримых отрезков*; к этому открытию в своих основаниях восходит теория иррациональностей и иррациональных чисел, а также *математическая теория измерения* [7,8] (в конечном итоге от этой задачи развилась вся непрерывная математика). В современной физике выдающимся открытием в области измерений считается *соотношение неопределенностей Гейзенберга* [1], принципиально ограничивающее точность квантово-механических измерений и лежащее в основе квантовой физики.

Прикладной уровень предполагает изучение измерения с точки зрения практических, прикладных задач, стоящих перед измерительной техникой. Наиболее характерным примером такой прикладной задачи является пронизывающая всю историю науки и техники *задача обеспечения единства измерений* (метрическая система мер, абсолютная система Гаусса, Международная система единиц СИ) [3].

4. В чем различие между физикой и математикой?

Школьная, да и вузовская программы изучения физики и математики, как правило, не акцентируют внимания на этом важном вопросе. Ответ на этот вопрос дан в работах английского физика [9]. Рассуждая о математических теоремах и физических теориях, Бриллюэн следующим образом определяет суть этого различия. Если математика начинает с не имеющих размеров точек, бесконечно тонких кривых и непрерывного пространства-времени, то современная физика отрицает какой-либо реальный смысл в этих определениях. Как подчеркивает Бриллюэн, *"для физика иррациональные числа не имеют никакого значения. Предполагается, что иррациональные числа нужно знать с бесконечной точностью - точность до одной сотой, одной миллионной или одной миллиардной доли недостаточна. Для экспериментатора все это лишено всякого смысла; он может измерять с точностью до пятого или десятого знака десятичной дроби, но нет ни одного эксперимента, который дал бы двадцать десятичных знаков. Нет смысла спрашивать, является ли скорость света рациональным числом, рационально ли отношение M/m (отношение массы протона M к массе электрона m). Все иррациональные числа, вроде π, e, $\sqrt{2}$ и т.д., вытекают только из* *абстрактных математических определений. Но, как мы уже сказали, математика - беспредметное искусство. Никакие физические объекты не могут обнаруживать реальных геометрических свойств в тех границах, которые предполагают математики; мы можем даже назвать такой подход "мышлением о желаемом" ("wishful thinking")".*

Таким образом, по Бриллюэну, особенность "физического" способа изучения объективного мира состоит в постулировании некоторого предела определенности ("бриллюэновской негэнтропии") физической величины, что полностью игнорируется при математическом подходе к определению понятия величины. Как подчеркивает Бриллюэн [9], *"математик очень тщательно определяет иррациональные числа. Физик никогда не встречается с такими числами. Любые измерения он выражает конечным числом с множеством цифр и с какой-то степенью определенности и старается игнорировать экспериментальную погрешность".*

5. Тезис о неизбежности погрешностей измерений

Следовательно, различие между физическим и математическим подходами к измерению определяется, по Бриллюэну [9], отношением к тезису *о неизбежности погрешностей* измерений. Физический подход заключается в признании **тезиса о неизбежности погрешностей измерений** в качестве исходного положения (постулата) физической теории измерений. Этот постулат имеет эмпирическое, практическое обоснование. Как подчеркивает выдающийся русский ученый академик **А.Н. Крылов** (цитируется из [3]), *"всякое измерение чего бы то ни было и чем бы измерение ни производилось, всегда заключает некоторую погрешность. Понятно, чем эта погрешность меньше, тем измерение точнее, но практика всех измерений показывает, что избежать погрешностей невозможно. Это обнаруживается тем, что при повторении несколько раз тем же самым прибором того же измерения получаются результаты, разнящиеся между собой".*

Свое теоретическое подтверждение этот постулат находит в установленном современной физикой факте существования некоторого предела определенности (негэнтропии) физической величины, который в микромире известен как *соотношение неопределенности Гейзенберга*, в волновой механике как *соотношение частотно-временной неопределенности Гейбора*, а на молекулярном уровне устанавливается на основании законов термодинамики (*негэнтропийный принцип информации Бриллюэна*) [9]. Наличие предела определенности физической величины и, как следствие, невозможность "абсолютно точного" сравнения (различения) двух размеров физической величины, отличающихся друг от друга на величину предела неопределенности, и является тем принципиальным пунктом, в котором понятие "величина" в физике отличается от аналогичного понятия в математике, в основе которого лежит противоположный тезис - о возможности "абсолютно точного" сравнения двух размеров величины (постулаты сравнения математического учения о величине) [10].

6. Задачи «физической теории измерений»

Взяв за основу подход Бриллюэна [9], можно разделить фундаментальное направление в теории измерения на *физическую* и *математическую* теории измерений. Этот подход позволяет следующим образом сформулировать основные задачи *физической теории измерений*. Эти задачи вытекают из лежащего в ее основе *постулата о неизбежности погрешностей измерений* и сводятся в квантовой физике к изучению взаимодействия квантово-механического объекта с измерительным макроприбором [1], а в метрологии к изучению погрешностей тех или иных физических измерений [3], в последние же годы - к установлению порога чувствительности измерительных приборов. Сюда же примыкает учение о физических величинах и единицах для их измерения [3].

Изучение характера погрешностей физических измерений привело к выдвижению двух эмпирических аксиом, которые лежат в основе теории случайных погрешностей [3]:

1. *Аксиомы случайности*: при очень большом числе измерений случайные погрешности, равные по величине, но различные по знаку, встречаются одинаково часто; число отрицательных погрешностей равно числу положительных.
2. *Аксиома распределения*: малые погрешности встречаются чаще, чем большие; очень большие погрешностей не встречаются.

Эти эмпирические предположения приводят к знаменитому нормальному закону распределения вероятностей:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

где σ^2 - дисперсия погрешностей; x - текущее значение погрешности.

По мнению известного математика В.Н. Тутубалина [11], нормальный закон является своего рода "чудом" теории вероятностей, без которого она *"почти не имела бы оригинального (т.е. не сводящегося к известным понятиям математического анализа) содержания"*.

Справедливость указанных аксиом и вытекающего из них нормального закона оправдывается тем, что все основанные на них выводы всегда (или почти всегда) находятся в согласии с опытом. Однако нестрогий характер сформулированных аксиом и следующая отсюда нестрогость математического вывода всегда оставляет некоторую неудовлетворенность законом Гаусса, по поводу которого было достаточно точно и не без сарказма сказано, что *"экспериментаторы верят в него, полагаясь на доказательства математиков, а математики - полагаясь на экспериментальное обоснование"*.

7. Аксиомы сравнения величин

Эволюция понятия измерения тесно связана с развитием понятия *величины*, которое вместе с понятием числа является еще одним фундаментальным понятием математики. Первоначально понятие величины было обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объема, массы и т.д. Но если возникновение чисел, в частности, натуральных чисел, было связано с практической потребностью в *счете* («проблема счета»), то возникновение понятия величины связано с практической потребностью в *измерении* («проблема измерения»).

Измерение величины состоит в *сравнении* одной величины с другой величиной того же рода, которую принято называть *единицей измерения*. Например, измерение геометрических отрезков осуществляется путем наложения отрезков и их сравнения и это сравнение приводит к понятию *длины*: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают; если же один отрезок накладывается на часть другого, не покрывая его целиком, то длина первого меньше длины второго [7].

Понятие сравнения приводит естественным образом к отношению *неравенства*: две величины a и b одного и того же рода или совпадают ($a = b$), или первая меньше второй ($a < b$), или первая больше второй ($a > b$). Кроме того, в рамках системы «однородных величин» вводится понятие их *сложения*: $a + b = c$.

Тогда в пределах заданной системы «однородных величин» вводятся следующие *аксиомы сравнения величин* [10]:

Аксиомы тождественности

1. Либо $a = b$, либо $a \neq b$.
2. Если $a = b$, то $b = a$.
3. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

Аксиомы рангового порядка

4. Если $a > b$, то $b < a$ (свойство упорядоченности).
5. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство «транзитивности»).

Аксиомы аддитивности

6. Если $a = p$ и $b > 0$, то $a + b > p$ (монотонность сложения).
7. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).
8. Если $a = p$ и $b = q$, то $a + b = p = q$.
9. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения).

8. Обобщение понятия величины в физических науках

Рассмотрение направленных отрезков на прямой, скоростей, могущих иметь два противоположных направления, и других «физических» величин естественно привело к введению понятия *скалярной величины*, которое является основным в механике и физике. Система скалярных величин включает в себя кроме положительных величин, нуль и отрицательные величины. Выбирая в такой системе какую-либо величину того же рода в качестве «единицы измерения» l, мы можем выразить все остальные величины этого же рода в виде $a = \alpha l$, где α - некоторое действительное число, положительное, отрицательное или равное нулю.

В более общем смысле слова в физике под «величинами» понимаются *векторы*, *тензоры* и др. «нескалярные величины». Такие величины можно складывать, но отношение неравенства $a > b$ для них теряет смысл.

9. Обобщение понятие величины в «нефизических» науках (теория шкал)

Дальнейшее обобщение понятия величины в современной науке связано с расширением этого понятия на область социальных и так называемых «поведенческих» наук, когда в качестве «величин» рассматриваются, например, экономические цели, эстетические ценности и другие «нефизические» величины. Математической основой для введения таких «экзотических» величин является такая активно развивающаяся в последние годы область «общей теории измерения» как *теория шкал измерения* [2]. Эта теория использует введенные выше аксиомы сравнения. Эти аксиомы позволяют выделить новые классы величин, которые принадлежат к одной из «шкал»: *шкале наименований, шкале порядка, шкале интервалов* и *шкале отношений*. Чем выше уровень шкалы, тем больше статистических и математических операций можно выполнять над «величинами».

Шкала наименований

Логической основой этой шкалы являются *аксиомы тождественности* 1, 2, 3. Построить эту шкалу – означает просто использовать число для наименования предмета. Аксиома 1 провозглашает, что два числа (предмета) или тождественны или разные. Аксиома 2 провозглашает, что отношение равенства симметрично. Аксиома 3 утверждает, что предметы, равные одному и тому же предмету, равны между собой. Свойства тождественности используются для порождения бесконечного множества наименований. Можно нумеровать чертежи, страницы книги или костюмы футболистов. Это не будет означать ничего другого, кроме того, что каждый предмет будет иметь различное наименование. Например, мы не вправе утверждать, что футболист под номером 6 вдвое лучше футболиста под номером 3. Номера – это просто легкий способ различать разные предметы.

Шкалы наименований по существу являются качественными шкалами, но они все же допускают некоторые статистические операции. Можно, например, подсчитать число брюнетов в студенческой группе.

Шкала порядка

Первое усиление шкалы наименований возникает, когда мы знаем, как сравнивать две вещи по некоторому общему признаку. Так, если даны два груза, то с помощью весов мы можем установить, какой из них тяжелее. *Отношение упорядоченности* (аксиома 4) асимметрично. Если сравнить таким образом каждую пару вещей из некоторого множества и если каждая тройка вещей с этого множества обнаруживает *свойство транзитивности* (аксиома 5), то такая шкала называется *шкалой простого порядка.* Например, можно нумеровать патенты в порядке их выдачи.

Подчеркнем, еще раз смысл аксиом 4 и 5: элементы шкалы должны быть *упорядоченными* (аксиома 4) и *транзитивными* (аксиома 5) относительно некоторого общего признака. Например, очень легко упорядочить театральные билеты по их серийному номеру. Однако возникают большие трудности, если мы попытаемся упорядочить наши предпочтения для романов, стихов, музыкальных произведений и докторских диссертаций, ибо неясен принцип сравнения. Например, если мы будем сравнивать докторские диссертации по количеству страниц (чем больше страниц, тем лучше диссертация), то, возможно, самой худшей окажется докторская диссертация Эйнштейна, которая была написана на 24-х страницах.

Шкала интервалов

Заметим, что в рамках шкалы порядка можно упорядочивать не только сами величины, но и разности (интервалы) между ними. Для пояснения сказанного рассмотрим такую широко известную физическую величину как температура. Температура имеет все свойства шкалы порядка плюс еще одно: разница между 35 и 36 градусами и разница между 87 и 88 градусами в рамках одной шкалы (по Цельсию или Фаренгейту) одна и та же. Такие шкалы, в которых упорядоченными являются не только сами величины, но и интервалы между ними, называются *дважды упорядоченными шкалами* или *шкалами интервалов.* Однако в шкале интервалов некорректно рассматривать отношение величин. Например, если задать температуры 212 и 32 градуса по Фаренгейту, то некорректно утверждать, что первая температура в 6,5 раз больше второй, так как эти же температуры в 100-градусной шкале Цельсия равны соответственно 100 и 0 градусов и тогда их отношение равнялось бы бесконечности.

Таким образом, отношение температур зависит от нашей договоренности относительно нулевой точки шкалы. Например, 0 градусов по Цельсию – это не есть точка, где вообще исчезает абсолютная температура. Подчеркнем также, что сложение величин в рамках шкалы интервалов также лишено «физического» смысла, так как сумма зависит от позиции 0 на шкале. Таким образом, шкалы интервалов не обладают важным свойством *аддитивности* (аксиомы 6-9). Но если мы договариваемся относительно 0, то интервалы между величинами можно рассматривать как абсолютные величины, обладающие свойством аддитивности. Например, наше летоисчисление является примером шкалы интервалов. Он берет свое начало от Рождества Христова, которое и является 0-й точкой шкалы.

Шкала отношений

Эта шкала имеет все свойства других шкал (аксиомы 1-5), но обладает дополнительным свойством *аддитивности,* которое задается аксиомами 6-9. Изменение шкалы не изменяет отношения величин. Другими словами, 0 шкалы отношения имеет «естественный» характер; примером таких величин есть вес, длина, электрическое сопротивление и др. В рамках такой шкалы допустимы все арифметические и статистические операции над величинами.

Необходимо отметить, что шкалы отношений наиболее широко используются в математических, физических и технических науках, но редко встречаются в гуманитарных и социальных науках.

При разработке той или иной науки всегда стремятся ввести такое количественное определение «величин», изучаемых данной наукой, чтобы они могли быть отнесены к шкале отношений, когда над такими величинами можно было бы выполнять все арифметические и статистические операции. Блестящим примером такого подхода является созданная Клодом Шенноном «математическая теория связи». Ее важнейшим достижением считается введение специального (аддитивного) способа измерения информации, с помощью которого эта «нефизическая» величина отнесена к шкале отношений

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика*. Москва: Издательство «Наука», 1972.
2. Холл А. *Опыт методологии для системотехники*. Москва: Издательство «Советское радио», 1975.
3. Маликов М.Ф. *Основы метрологии*. Москва: Издательство «Трудрезервоиздат», 1949.
4. Новицкий П.В. *Основы информационной теории измерительных устройств*. Ленинград: Издательство «Энергия», 1968.
5. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
6. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979 г.
7. Лебег А. Об измерении величин. Москва: Учпедгиз, 1960.
8. Бахвалов С.В., Иваницкая В.П. *Основания геометрии*. Москва: Издательство «Высшая школа», 1972.
9. Бриллюэн Л. *Научная неопределенность и информация*. Москва: Издательство «Мир», 1966.
10. Каган В.Ф. Очерки по геометрии. Москва: МГУ, 1963.
11. Тутубалин В.Н. *Теория вероятностей и естествознание*. Москва: Издательство «Знание», 1972.