А.П. Стахов

Конструктивная (алгоритмическая) теория измерения, системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии

Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами в начале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло, вероятно, от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.

Николай Лобачевский

Часть 2. Математическая теория измерения и проблема бесконечности

Если рассмотреть историю математики с момента ее зарождения, то, согласно А.Н. Колмогорову, ее развитие стимулировалось практическими потребностями в ***счете****, что привело к открытию позиционного принципа представления чисел (Вавилонская 60-ричная система счисления) и «созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел» (А.Н. Колмогоров), и в* ***измерении,*** *что вызвало «развитие начатков геометрии» (А.Н. Колмогоров) и привело к открытию «несоизмеримых отрезков». Однако, согласно* ***«гипотезе Прокла»****, создание древнегреческой математики, которая лежит в основе современной математики, осуществлялось под мощным влиянием* ***«идеи гармонии»*** *- главной идеи древнегреческой науки. Наиболее ярко это влияние отразилось в «Началах» Евклида, главной целью которых стало создание завершенной геометрической теории* ***Платоновых тел****, выражавших в древнегреческой науке «гармонию Мироздания». В настоящей статье обсуждаются три новые математические теории, которые возникли в современной науке в развитие трех фундаментальных проблем, лежащих в основании математики - счета, измерения и гармонии:* ***алгоритмическая теория измерения****,* ***системы счисления с иррациональными основаниями и математика гармонии****. В основе алгоритмической теории измерения (АТИ) лежит абстракция потенциальной бесконечности, то есть, она является* ***конструктивной математической теорией измерения*** *(без аксиомы Кантора). Предметом исследований в АТИ являются оптимальные, то есть, наилучшие в определенном смысле алгоритмы измерения. Основным математическим результатом АТИ является синтез новых, неизвестных ранее алгоритмов измерения, которые порождают новые, неизвестные ранее позиционные системы счисления. Наиболее неожиданными результатами АТИ являются так называемые* ***биномиальные алгоритмы измерения****, основанные на «арифметическом квадрате» (треугольнике Паскаля), и* ***фибоначчиевые алгоритмы измерения,*** *которые привели к открытию новых числовых последовательностей, названных* ***р-числами Фибоначчи****. Фибоначчиевы алгоритмы измерения лежат в основе* ***р-кодов Фибоначчи*** *– новых способов позиционного представления натуральных чисел, которые являются обобщением классической двоичной системы. Эти позиционные представления были положены в основу нового направления в компьютерной науке –* ***компьютеров Фибоначчи*** *(65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и др. стран).* ***Системы счисления с иррациональными основаниями (коды золотой р-пропорции)*** *являются новыми способами позиционного представления действительных чисел. Они переворачивают наши традиционные представления о системах счисления и могут быть положены в основу* ***«золотой» теории чисел.*** *Наконец,* ***«математика гармонии»,*** *включающая в себя АТИ и коды золотой* *пропорции, является новым междисциплинарным направлением современной науки, которое может быть положено в основу новой математики, лишенной противоречий.*

Статья состоит из 8 частей:

1. *Роль измерения в развитии науки*
2. *Математическая теория измерения и проблема бесконечности*
3. *Математическая модель измерения. Оптимальные (n,k,0)-алгоритмы и классические позиционные системы счисления*
4. *Биномиальные алгоритмы измерения как источник биномиальных систем счисления*
5. *Задача Баше-Менделеева, принцип асимметрии измерения, фибоначчиевые алгоритмы измерения и p-коды Фибоначчи*
6. *Системы счисления с иррациональными основаниями как основа ««золотой» теории чисел*
7. *Математика гармонии: наиболее яркие страницы*
8. *Основные математические результаты, приложения и перспективы развития «математики гармонии»*

1. Эволюция понятия «измерение» в математике

«Проблема измерения» играет такую же значительную роль в математике, как и в других областях науки, в частности в технике, физике и других «точных» науках. Выдающийся советский математик академик **А.Н. Колмогоров** в предисловии к книге А. Лебега [1] выразил свое отношение к этой проблеме в следующих словах:

"В чем же основной интерес книги Лебега? Мне кажется, в следующем: у математиков существует склонность, уже владея законченной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная с уже готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений. Все здание школьной алгебры и весь математический анализ могут быть воздвигнуты на понятии действительного числа без всякого упоминания об измерении конкретных величин (длин, площадей, промежутков времени и т.д.). Поэтому на разных ступенях обучения с разной степенью смелости неизменно проявляется одна и та же тенденция: возможно скорее разделаться с введением чисел и дальше уже говорить только о числах и соотношениях между ними. Против этой тенденции и протестует Лебег".

Проследим теперь эволюцию понятия «измерения» в математике [2]. Как известно, первой "теорией измерений" был свод правил, которыми пользовались древнеегипетские землемеры. От этого свода правил, как свидетельствуют древние греки, берет начало геометрия, обязанная своим появлением (и названием) задаче об "измерении земли". Однако уже в Древней Греции происходит разбиение проблем измерения на *прикладные*, которые относятся к "логистике", и *фундаментальные*, относящиеся к геометрии; последние и становятся в центре античной математики.

Наука об измерении развивается в этот период преимущественно как *математическая теория*. Именно в этот период происходит открытие *несоизмеримых отрезков*, формулировка «метода исчерпывания» Евдокса и «аксиомы измерения» (см. ниже), к которым в своих истоках восходит теория чисел, интегральное и дифференциальное исчисление. Именно эти крупнейшие открытия античной математики, связанные с измерением, дают право болгарскому математику академику **Л. Илиеву** утверждать, что *«на протяжении первой эпохи своего развития – от античности и вплоть до открытия дифференциального и интегрального исчисления – математика, исследуя в первую очередь проблемы измерения величин, создала геометрию Евклида и учение о числах»* [3, с. 207].

2. Аксиомы Евдокса-Архимеда и Кантора

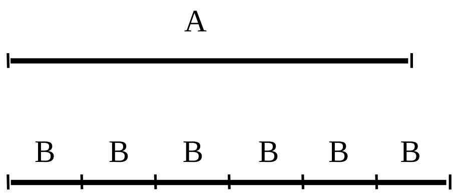
Для преодоления кризиса в основаниях античной математики, связанного с открытием «несоизмеримых отрезков», выдающийся геометр Евдокс предложил "метод исчерпывания", с помощью которого он построил остроумную *теорию отношений*, лежащую в основе античной теории континуума. "Метод исчерпывания" сыграл выдающуюся роль в развитии математики. Будучи прообразом интегрального исчисления, "метод исчерпывания" позволял античным математикам решать задачи вычисления объема пирамиды, конуса, шара. В современной математике метод исчерпывания находит свое отражение в *аксиоме Евдокса-Архимеда*, называемой также *аксиомой измерения*.

Теория измерения геометрических величин, восходящая к «несоизмеримым отрезкам», основывается на группе аксиом, называемых *аксиомами непрерывности* [4], которые включают в себя аксиомы Евдокса-Архимеда и Кантора или аксиому Дедекинда.

Аксиома Евлокса-Архимеда («аксиома измерения»):

Для любых двух отрезков A и B (Рис. 1) можно найти такое натуральное число n, чтобы

$$nB > A. \tag{1}$$



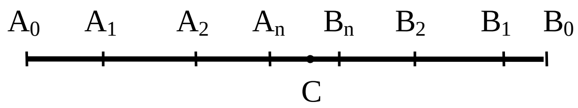


Рисунок 1. Аксиома Евдокса-Архимеда **Рисунок 2.** Аксиома Кантора

Аксиома Кантора (о «стягивающихся отрезках»):

Если задана бесконечная последовательность отрезков A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n, ... (Рис. 2), «вложенных» друг в друга, то есть каждый отрезок являются частью предыдущего, тогда существует по крайней мере одна точка C, общая для всех отрезков.

Главным результатом теории геометрических величин является доказательство существования и единственности решения q *«основного уравнения измерения»*:

$$Q = qV, \tag{2}$$

где V есть единица измерения; Q – измеряемая величина и q – результат измерения.

Несмотря на кажущуюся простоту сформулированных выше аксиом и всей математической теории измерения, она, тем не менее, является продуктом более чем двухтысячелетнего периода в развитии математики и содержит в себе ряд глубоких математических понятий. Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что "метод исчерпывания" и вытекающая из него аксиома измерения имеют практическое (эмпирическое) происхождение; они были позаимствованы древнегреческими математиками в практике измерений. В частности, "метод исчерпывания" является математической моделью процессов измерения объемов жидкостей и сыпучих тел путем "исчерпывания"; аксиома измерения, в свою очередь, концентрирует тысячелетний опыт человека, задолго до возникновения аксиоматического метода в математике миллиарды раз измерявшего расстояния, площади и временные интервалы, и представляет собой *сжатую формулировку алгоритма измерения* отрезка A с помощью отрезка B. Суть этого алгоритма состоит в последовательном откладывании отрезка B на отрезке A и подсчете числа отрезков B, укладывающихся на отрезке A. В современной практике измерений такой метод измерения называется *алгоритмом счета*.

3. Проблема бесконечного в математике

Аксиома Кантора содержит в себе еще одно удивительное творение математической мысли - абстракцию *актуальной бесконечности.* Именно такое представление о бесконечном лежит в основе канторовской теории бесконечных множеств. Представление об актуальной бесконечности в качестве образца канторовского (теоретико-множественного) стиля математического мышления было подвергнуто резкой критике со стороны представителей так называемого *конструктивного* подхода, который возник в математике 20-го века с целью преодолния кризиса в математике. С одной стороны, как подчеркивает **Шанин Н.А.** [5], такой подход обнаруживает глубокий разрыв с «*данными экспериментального исследования природы*»; с другой стороны, по меткому выражению **А.А. Маркова** [6], «*мыслить себе бесконечный, т.е, никогда не завершаемый процесс как завершенный не удается без грубого насилия над разумом, отвергающим такие противоречивые фантазии*». Еще раньше эту же мысль другими словами выразил **Д.Гильберт** (известный своими «финитными» установками), который рассуждая о конечном и бесконечном, пришел к следующему заключению [7]:

«Мы хотим из всех наших рассуждений сделать некоторое резюме о бесконечности – общий вывод таков: бесконечное нигде не реализуется. Его нет в природе, и оно недопустимо как основа нашего разумного мышления, - здесь мы иммем замечательную гармонию между бытием и мышлением... Оперирование с бесконечным может стать надежным только через конечное».

Обнаруженные в начале 20-го века парадоксы, противоречия в канторовской теории бесконечных множеств значительно пошатнули устои математики. Были предприняты различные попытки укрепить их. Наиболее радикальной из них является *конструктивное направление* в обосновании математики [6], которое полностью исключает абстракцию актуальной бесконечности и использует гораздо более «скромную» абстракцию бесконечного, называемую абстракцией *потенциальной осуществимости.*

Наиболее ярко противоречие между потенциальной и актуальной бесконечностями проявляют себя в математической теории измерения при анализе *аксиомы Евдокса-Архимеда* (Рис. 1) и *аксиомы Кантора* (Рис. 2). Для обнаружения этого противоречия рассмотрим еще раз «основное уравнение измерения» (2). Идея его доказательства состоит в следующем. С помощью аксиомы Евдокса-Архимеда из единицы измерения V по определенным правилам, называемым *алгоритмом измерения,* формируется некоторая последовательность "стягивающихся" отрезков, которые сравниваются с измеряемым отрезком Q; при устремлении этого процесса в бесконечность на основании аксиомы Кантора для любого Q при заданном V всегда найдется такой измеряющий Q отрезок, сформированный из V, который "абсолютно точно" совпадет с Q. Наиболее существенным в этом доказательстве является вытекающее из аксиомы Кантора представление об измерении, как о процессе, *завершающемся за бесконечное время.* Таким образом, на начальном этапе доказательства уравнения (1) мы используем понятие потенциальной бесконечности (аксиома Евдокса-Архимеда), а на завершающем этапе мы «перепрыгиваем» через это понятие и используем понятие актуальной бесконечности (аксиома Кантора).

В этой связи уместно привести одну цитату из книги **Алексея Стахова** [2]: *«Уместно обратить внимание на внутреннюю противоречивость (в диалектическом смысле) теоретико-множественной теории измерения (и как следствие теории действительных чисел), допускающей в своих исходных положениях (аксиомы непрерывности) сосуществование диалектически противоречивых представлений о бесконечном (актуальной, "статической", завершенной бесконечности – в аксиомах Кантора, (и Дедекинда) и бесконечности потенциальной, "становящейся", незавершенной – в аксиоме Архимеда)».*

То есть, **существующая теория измерения и вытекающая из нее теория действительных чисел, основанные на аксиоме Кантора, являются внутренне противоречивыми и такие теории не могут быть положены в основание математики!** Иначе и вся математика становится внутренне противоречивой теорией. Что на самом деле и случилось в математике в начале 20-го века, когда были обнаружены противоречия в канторовской теории бесконечных множеств. Удивительно, что такая простая идея до сих пор не была замечена математиками.

4. Критика канторовской теории бесконечных множеств

"Infinitum Actu Non Datur"

Как известно, математика превратилась в дедуктивную науку в Древней Греции. Уже в 6 в. до н.э. греческие философы разрабатывали проблему бесконечного и связанную с ней проблему непрерывного и дискретного. Большое внимание развитию этого понятия уделял **Аристотель**. Он был первым, кто категорически начал возражать против использования актуальной бесконечности в науке, ссылаясь на то, что, зная способы счета конечного числа объектов, нельзя эти способы распространять на бесконечные множества. В своей «Физике» Аристотель утверждал:

«Остается альтернатива, согласно которой бесконечное имеет потенциальное существование... Актуально бесконечное не существует».

По мнению Аристотеля, актуальная бесконечность не нужна математике.

Аристотелю принадлежит знаменитый тезис "*Infinitum Actu Non Datur*", что в переводе с латинского означает утверждение о невозможности существования логических или математических (т.е. всего лишь мыслимых, а не существующих в природе) *актуально-бесконечных* объектов.

Критика канторовской теории множеств в 19 в. и начале 20 в.

Канторовская теория бесконечных множеств вызвала бурю протестов уже в 19 в. Детальный анализ критики этой теории проведен в главе **«Изгнание из рая: новый кризис в основаниях математики»** замечательной книги американского историка математики **Мориса Клайна «Математика. Утрата определенности»** [8]. Многие известные математики 19 в. высказались резко отрицательно по поводу этой теории. **Леонид Кронекер** (1823-1891), испытывавшей личную неприязнь к Кантору, назвал его шарлатаном. **Анри Пуанкаре** (1854-1912) называл теорию множеств **«тяжелой болезнью»** и считал ее своего рода **«математической патологией».** В 1908 г. он заявил:

«Грядущие поколения будут рассматривать теорию множеств как болезнь, от которой они излечились».

К сожалению, у теории Кантора были не только противники, но и сторонники. **Рассел** назвал Кантора одним из великих мыслителей 19 в. В 1910 г. Рассел написал:

«Решение проблем, издавна окутывавших тайной математическую бесконечность, является, вероятно, величайшим достижением, которым должен гордиться наш век».

Рассела поддержал Гильберт:

«Никто не изгонит нас из рая, созданного Кантором».

Исследования Александра Зенкина

В последние годы в работах выдающегося российского математика и философа **Александра Зенкина** [9], а также в работах других авторов [10-13] были предприняты радикальные попытки «очищения» математики от канторовской теории бесконечных множеств. Анализ канторовской теории бесконечных множеств, изложенной в статье [9], привел **Александра Зенкина** к заключению, что доказательства многих теорем Кантора о бесконечных множествах являются логически некорректными, а вся «теория Кантора» в некотором смысле является «величайшей математической мистификацией 19 в.» [10]. Математики 19-го века были очарованы **Кантором** и, приняв его необычную теорию без должного критического анализа, возвели ее в ранг величайших математических открытий 19-го века и положили ее в основания математики.

Обнаружение парадоксов в канторовской теории бесконечных множеств значительно остудило восторг математиков этой теорией, но окончательную точку в критическом анализе теории Кантора поставил **Александр Зенкин** [9]. Он показал, что главной ошибкой Кантора было принятие абстракции актуальной бесконечности, что недопустимо в математике. Но без абстракции актуальной бесконечности теория бесконечных множеств Кантора является несостоятельной! Впервые на эту проблему обратил внимание Аристотель, который первым предупредил о невозможности использования понятия «актуальной бесконечности» в математике.

В статье **Алексея Стахова** [10] анализируются «стратегические ошибки», допущенные в математике в процессе ее развития. В 19-м веке такая ошибка состояла в том, что без достаточного критического анализа «Теория бесконечных множеств Кантора» была возведена на пьедестал «величайших математических открытий» 19-го века. Обнаружение парадоксов в Канторовской теории множеств и возникший при этом кризис в основаниях математики остудили энтузиазм математиков в оценке этой теории. Последнюю точку в оценке «Канторовской теории множеств» и введенного Кантором понятия **«актуальной бесконечности»** поставил российский математик **Александр Зенкин** [9], который показал, что в теории Кантора допущены грубые математические ошибки, а введенное им понятие «актуальной бесконечности» является внутренне противоречивым понятием («завершенная бесконечность»), которое не может быть положено в основу непротиворечивой математики.

Таким образом, «Канторовская теория бесконечных множеств» является ни чем иным, как «величайшей математической мистификацией 19-го века» [10], и ее принятие математиками 19-го века без должного критического анализа является одной из «стратегических ошибок» в развитии математики, следствием чего и стало возникновение современного кризиса в основаниях математики.

Детальный критический анализ проблемы бесконечного в математике дан в других работах, в частности, в статье **Алексея Стахова и Дениса Клещева** [11], статье **Дениса Клещева** [12] и статье **Алексея Стахова** [13]. В статье [13] поставлен следующий вопрос перед математиками:

«Не стоит ли современная математика на «лженаучном» фундаменте?»

Литература

1. Лебег А. Об измерении величин. Москва: Учпедгиз, 1960.
2. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.
3. Илиев Л. Математика как наука о моделях. – *Успехи математических наук*. 1972, том 27, вып. 2.
4. Бахвалов С.В., Иваницкая В.П. *Основания геометрии*. Москва: Издательство «Высшая школа», 1972.
5. Шанин Н.А. О рекурсивном математическом анализе и исчислении арифметических равенств Р.Л. Гудстейна. Вступительная статья к книге Р.Л. Гудстейна «Рекурсивный математический анализ», Москва: Наука, 1970.
6. Марков А.А. *О логике конструктивной математики*. Москва: Издательство «Знание», 1972.
7. Гильберт Д. О бесконечном. – В книге «Основания геометрии», 1948.
8. Морис Клайн. Математика. Утрата определенности (пер. с английского). Москва, Мир, 1984
9. Зенкин А.А. Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000, №2.
10. А.П. Стахов, Стратегические ошибки» в развитии математики // Академия Тринитаризма, М., Эл № 77-6567, публ.14555, 27.08.2007
11. Стахов А.П., Клещев Д.С., Проблема бесконечного в математике и философии от Аристотеля до А.Зенкина // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15680, 03.12.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161588.htm
12. Денис Клещев, Лженаука: болезнь, которую некому лечить // «Академия Тринитаризма», М.,

Эл № 77-6567, публ.17012, 22.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322041.htm
13. А.П. Стахов, Не стоит ли современная математика на «лженаучном» фундаменте? (В порядке обсуждения статьи Дениса Клещева «Лженаука: болезнь, которую некому лечить») // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.17034, 28.11.2011 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322052.htm